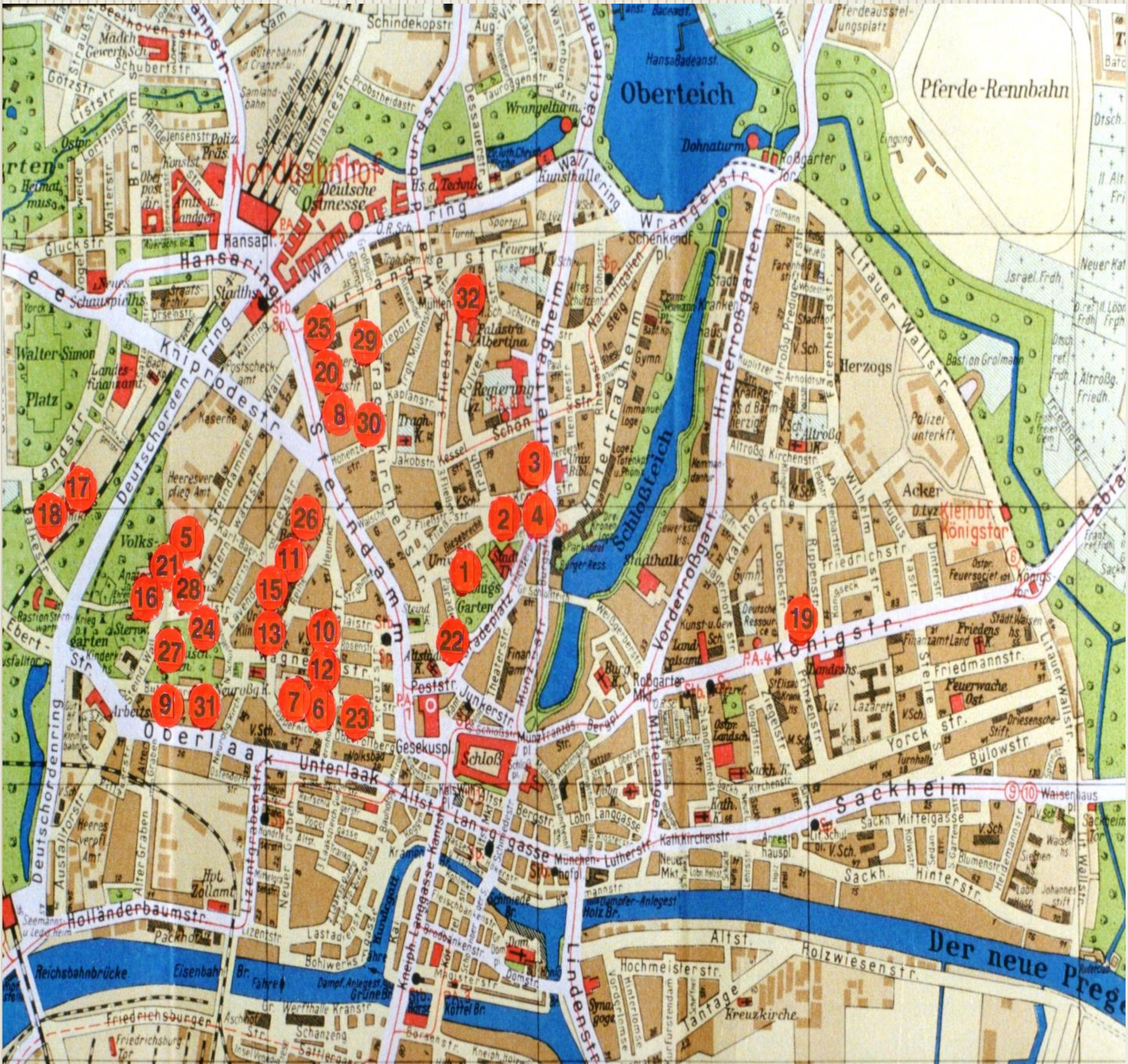
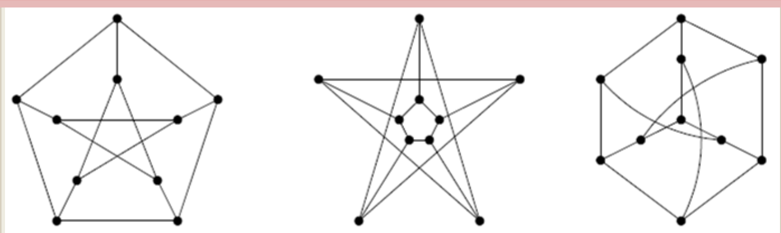


TEORI GRAPH DAN PENERAPANNYA



Sri Rahayuningsih

Sri Rahayuningsih., S.Pd., M.Pd

TEORI GRAPH DAN PENERAPANNYA

IKAPI No.128/JTI/2011

Universitas Wisnuwardhana Press Malang
Jl. Danau Sentani No. 99 Malang
Telp. (0341) 713604, Fax. (0341) 713603

Teori Graph dan Penerapannya

Sri Rahayuningsih., S.Pd., M.Pd.

Layout dan Cover
Sri Rahayuningsih

Penerbit
Universitas Wisnuwardhana Press Malang (Unidha Press)
Jln. Danau Sentani No.99, Malang, Jawa Timur
Tlp. (0341) 713604, Fax. (0341) 713603
E-mail: unidhapress@gmail.com

Jumlah: viii + 151 hlm.
Ukuran: 15,5 x 23 cm

Penerbitan, 2018

ISBN: 978-602-61380-7-1

Anggota IKAPI No.128/JTI/2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'aalamin, penulis panjatkan sebagai rasa puji dan syukur kepada Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya, buku teks ini dapat terselesaikan mengingat tugas dan kewajiban lain yang bersamaan hadir. Penulis berusaha maksimal untuk bisa menyelesaikan buku teks ini dengan harapan untuk membantu mahasiswa dalam menempuh matakuliah Teori Graph. Buku ini ditulis berdasarkan pengalaman penulis selama mengajar matakuliah Teori Graph yaitu masih sedikitnya mahasiswa yang memahami matakuliah Teori Graph terutama dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari.

Buku teks ini berisi mengenai materi Teori Graph disertai dengan contoh-contoh mulai dari contoh konsep sampai dengan contoh penerapan dalam kehidupan sehari-hari yang mudah dipahami oleh mahasiswa. Penulis juga menyajikan soal-soal yang bervariasi dimulai dari soal pemahaman konsep, soal penerapan dalam kehidupan sehari-hari hingga soal pemecahan masalah.

Terselesaikannya penulisan buku teks ini juga tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Penulis mengucapkan banyak terima kepada LPPM Universitas Wisnuwardhana Malang yang telah memberikan dukungan secara moral dan material sehingga penulis termotivasi untuk menyelesaikan buku teks ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada mahasiswa angkatan 2014 karena telah memberikan banyak inspirasi dan kemudahan serta kelancaran dalam penulisan buku teks ini. Selain itu tidak lupa penulis juga mengucapkan banyak terima kasih kepada sahabat seperjuangan dan tim Program Studi Pendidikan Matematika untuk semua bantuan, motivasi, dan saran-sarannya. Meskipun telah berusaha untuk menghindarkan kesalahan, penulis menyadari juga bahwa buku ini masih banyak kelemahan dan kekurangannya. Karena itu, penulis berharap agar pembaca berkenan menyampaikan kritikan. Dengan segala pengharapan dan keterbukaan, penulis menyampaikan rasa terima kasih dengan setulus-tulusnya. Kritik merupakan perhatian agar dapat menuju kesempurnaan.

Akhir kata, penulis berharap agar buku teks ini dapat membawa manfaat kepada pembaca. Secara khusus, penulis berharap semoga buku teks ini dapat menginspirasi mahasiswa agar menjadi generasi yang tanggap, tangguh, bermartabat, kreatif, disiplin dan mandiri.

Malang, Nopember 2017

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1

KONSEP DASAR GRAPH

1.1 Sejarah Singkat Teori Graph

Teori graph lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa. Kurang lebih seratus tahun setelah lahirnya tulisan Euler tersebut tidak ada perkembangan yang berarti berkenaan dengan teori graph. Tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824 – 1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Coyley (1821 – 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon. Pada masa Kirchoff dan Coyley juga telah lahir dua hal penting dalam teori graph. Salah satunya berkenaan dengan konjektur *empat warna*, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat macam warna sedemikian hingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda. Para ahli teori graph berkeyakinan bahwa orang yang pertama kali mengemukakan masalah empat warna adalah A.F. Mobius (1790 – 1868) dalam salah satu kuliahnya di Tahun 1840. Sepuluh tahun kemudian, A. De Morgan (1806 – 1871) kembali membahas masalah ini bersama ahli-ahli matematika lainnya di kota London.

Dengan demikian tulisan De Morgan dianggap sebagai referensi pertama berkenaan dengan masalah empat warna. Masalah empat warna ini menjadi sangat terkenal setelah Coyley mempublikasikannya Tahun 1879 dalam *Proceedings of the Royal Geographic Society* volume pertama. Hal lain yang penting untuk dibicarakan sehubungan dengan perkembangan teori graph adalah apa yang dikemukakan oleh Sir W.R. Hamilton (1805 – 1865). Pada Tahun 1859 dia berhasil menemukan suatu permainan yang kemudian dijualnya ke sebuah pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terbuat dari kayu berbentuk *dodecahedron beraturan* yakni berupa sebuah polihedron dengan 12 muka dan 20 pojok. Tiap muka berbentuk sebuah pentagon beraturan dan tiap pojoknya dibentuk oleh tiga sisi berbeda. Tiap pojok dari *dodecahedron* tersebut dipasangkan dengan sebuah kota terkenal seperti London, New York, Paris, dan lain-lain. Masalah dalam permainan ini adalah, kita diminta untuk mencari suatu rute melalui sisi-sisi dari *dodecahedron* sehingga tiap kota dari 20 kota yang ada dapat dilalui tepat satu kali. Walaupun saat ini masalah tersebut dapat dikategorikan mudah, akan tetapi pada saat itu tidak ada seorang pun yang bisa menemukan syarat perlu dan cukup dari eksistensi rute yang dicari.

Kurang lebih setengah abad setelah masa Hamilton, aktivitas dalam bidang teori graph dapat dikatakan relatif kecil. Pada Tahun 1920-an kegiatan tersebut muncul kembali yang dipelopori oleh D. Konig. Konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika tentang teori graph termasuk hasil pemikirannya sendiri, kemudian dikemasnya dalam bentuk buku yang diterbitkan pada Tahun 1936. Buku tersebut dianggap sebagai buku pertama tentang teori graph. Tiga puluh tahun terakhir ini merupakan periode yang sangat intensif dalam aktivitas pengembangan teori graph baik murni maupun terapan. Sejumlah besar penelitian telah dilakukan, ribuan artikel telah diterbitkan dan lusinan buku telah banyak ditulis. Di antara orang terkenal yang banyak berkecimpung dalam bidang ini adalah Claude Berge, Oysten Ore, Paul Erdos, William Tutte, dan Frank Harary.

1.2 Definisi Graph

Suatu graph terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan tak berurutan dari titik- titik tersebut yang disebut sisi (*edge*).

Di sini G melambangkan suatu graph. Himpunan titik di graph G dinyatakan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi di graph G dinyatakan dengan $E(G)$. Jika banyak titik dan banyak sisi di G terhingga, maka G disebut graph terhingga.

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan satu pasang titik disebut sisi rangkap (*multiple edges*). Suatu sisi yang titik ujungnya sama disebut loop. Graph tanpa sisi rangkap dan tanpa loop disebut graph sederhana (*simple graph*).

Jika u dan v titik–titik di G dan $e = uv$ suatu sisi di G, maka dikatakan:

e menghubungkan u dan v,

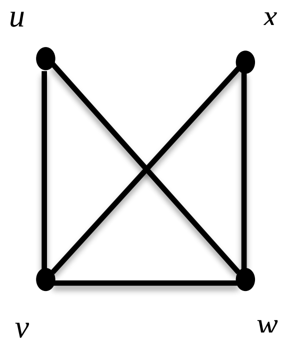
u dan v terhubung langsung (*adjacent*),

u terkait (*incident*) dengan e,

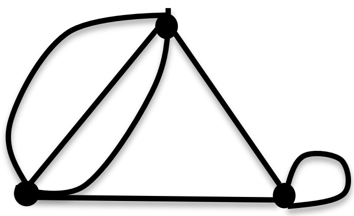
e terkait (*incident*) dengan u,

u dan v di sebut titik ujung dari e,

Contoh 1.1



G



H

Pada gambar 1.1 , graph G adalah sederhana, dengan

$V(G) \quad = \{u, v, w, x\} E(G) = \{uv, uw, vw, vx, wx\}$

$|V(G)| = 4 |E(G)| = 5$

graph H tidak sederhana karena memuat loop dan sisi rangkap.

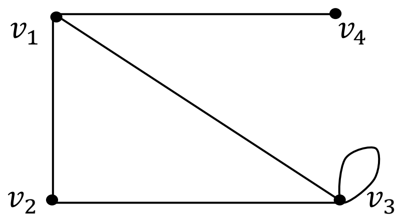
Contoh 1.2

Jika di ketahui graph G mempunyai.

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}E(G)$$

$$= \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_3\}$$

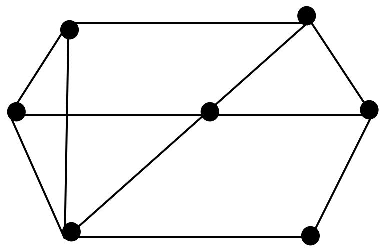
Maka graph G dapat di gambarkan seperti pada gambar 1.2



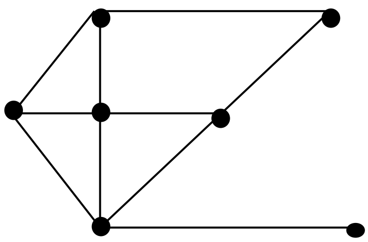
Gambar 1.2.

Misalkan G suatu graph dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graph bagian (*subgraph*) dari G adalah suatu graph yang setiap titiknya adalah anggota $V(G)$ dan setiap sisinya adalah anggota $E(G)$. Jika H suatu graph bagian dari G dan $V(H) = V(G)$, maka H di sebut graph bagian rentangan (*spanning subgraph*) dari G.

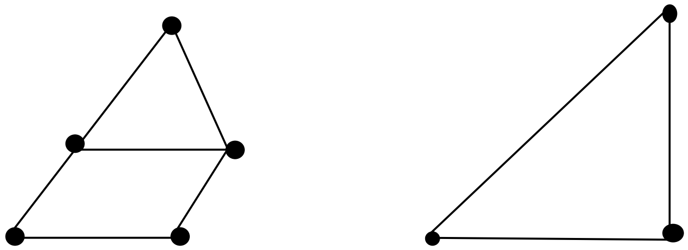
Contoh 1.3.



G



H_1



H_2 H_3

Gambar 1.3

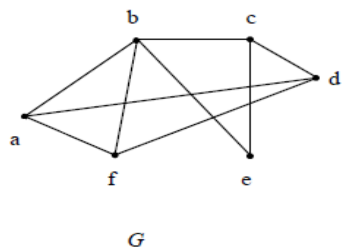
Dua graph yang titiknya sama dinamakan sub graph rentangan.

Pada gambar 1.3, terhadap G, H_1 adalah bagian rentangan, H_2 adalah grap bagian tetapi bukan graph bagian rentangan, dan H_3 bukan graph bagian.

1.3 Jenis Jenis Graph

Sebuah **jalan (*walk*)** dalam graph G adalah sebuah urutan tak nol $W = v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2 ... e_i\, v_i ... e_k\ v_k$, yang suku-sukunya bergantian antara simpul dan sisi sedemikian hingga $1 \leq i \leq k$, ujung dari e_i adalah $v_i - 1$ dan v_i. v_0 disebut simpul awal (simpul asal). v_k disebut simpul akhir (simpul terminus). v_i, 1 < i < k, disebut simpul internal. Panjang sebuah jalan adalah banyaknya sisi dalam jalan tersebut. Jika semua sisi pada sebuah jalan berlainan, maka jalan tersebut disebut **jejak (*trail*)**. Jejak yang simpul awal dan simpul akhirnya berlainan disebut **jejak tertutup.** Jika simpul-simpul dari $v_0\, e_1\, v_1\ e_2\, v_2 .... e_i\ v_i ...$ek v_k dari jalan W berlainan, maka W disebut **lintasan (*path*)**. Lintasan tertutup dinamakan **siklus**. Siklus dengan banyaknya simpul *n*, dinotasikan dengan C*n*. Siklus : Jejak tertutup yang simpul awal dan simpul internalnya berlainan.

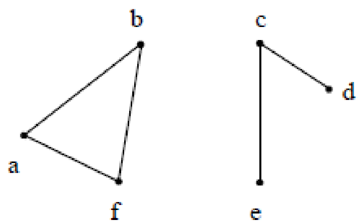
Siklus : Jejak tertutup yang simpul awal dan simpul internalnya berlainan. Contoh :



Gambar 1.4

Berdasarkan graph *G* di atas

1. Berilah contoh jalan yang bukan jejak.
2. Berilah contoh jejak yang bukan lintasan.
3. Berilah contoh empat buah lintasan yang menghubungkan simpul b dan f.
4. Berilah contoh sirkuit yang bukan siklus.
5. Tentukan semua siklus yang ada di graph *G*.



Gambar 1.5

G_1 merupakan contoh graph yang tidak terhubung.

a. Perjalanan (*Walk*)

Perjalanan atau walk pada suatu Graph G adalah barisan simpul dan ruas berganti-ganti $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$ ruas e_i menghubungkan v_i dan v_i dapat hanya ditulis barisan ruas atau barisan simpul saja $e_1, e_2, \dots e_n$ atau $v_1, v_2, \dots v_{n-1}, v_n$.Dalam hal ini, v_1 disebut simpul awal, dan v_n disebut simpul akhir. Perjalanan disebut *perjalanan tertutup* bila $v_1 = v_n$, sedangkan Perjalanan disebut *perjalanan tebuka* yang menghubungkan v_1 dan v_n. **Panjang Perjalanan** adalah banyaknya ruas dalam barisan tersebut.

b. Jejak (*Trail*)

Jejak pada suatu graph adalah jalan yang sisi-sisinya berbeda.

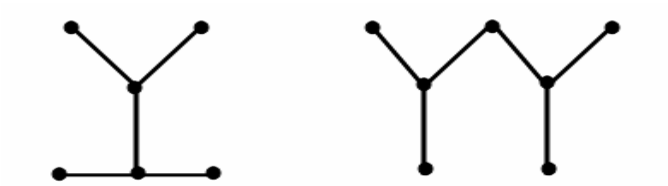
c. Lintasan (*Path*)

Lintasan pada suatu graph adalah jejak yang semua titiknya berbeda.

d. Sirkuit (*Cycle*)

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau **siklus**. **Panjang sirkuit** adalah jumlah ruas dalam sirkuit tersebut. Graph yang tidak mengandung sirkuit disebut *acyclic.*

Contoh :



Gambar 1.6

Sebuah graph adalah **terhubung** jika setiap dua buah titik di G dihubungkan oleh lintasan di G. Jika G adalah graph terhubung, maka dikatakan bahwa komponen dari G adalah 1, dinotasikan $\omega(G) = 1$. Definisikan graph tidak terhubung! Graph G disebut terhubung jika untuk setiap dua simpul yang berbeda terdapat lintasan yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. Sebuah **lintasan geodesic** (*geodesic path*) antara titik u dan v dari graph G adalah lintasan $u - v$ dengan panjang minimum. Panjang lintasan geodesic antara simpul u dan v dinamakan jarak antara simpul u dan v. Dinotasikan $d(u, v)$.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graph. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **subgraph** dari G jika $V_1 V$ dan $E_1 E$. *Induced Subgraph*. *Spanning subgraph*.

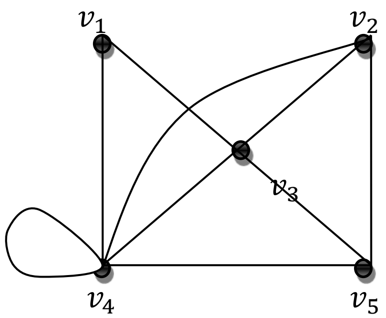
1.4 Graph Terhubung

Misalkan titik u dan v (tidak harus berbeda) pada suatu graph G. Jalan (walk) (u, v) di G adalah barisan $v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2 \ldots v_{n-1}\, e_n v_n$. Dengan

$v_0 = u$, $v_n = v$, v_i adalah titik, e_i adalah sisi, dan e_i menghubungkan titik v_{i_1} dan v_i , $i = 0\ 1, 2, \ldots, n$. Pada jalan tersebut bilangan n menyatakan panjang jalan. Kadang-kadang, kalau tidak timbul masalah, jalan tersebut dinyatakan dengan $(u, v) = v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_n - 1v_n$.

Lebih lanjut, (u,v) dikatakan menghubungkan u dan v, serta u dan v disebut titik-titik ujung. Jalan yang tidak memuat sisi, yang terdiri dari satu titik, disebut jalan trivial. Jika semua titik suatu jalan berbeda, maka jalan tersebut disebut lintasan ($path$). Jalan (u, v) dengan $u = v$ disebut jalan tertutup $(v_0\,, v_0) = v_0 v_1\, v_2 \ldots v_n\, v_q$ dengan $n\ \geq 1$ dan $v_1 \neq v_j$ jika i ≠ j. Suatu sikel dikatakan genap (ganjil) jika panjangnya genap (ganjil).

Contoh :



Gambar 1.7

Pada gambar 1.7, $v_1 v_2 v_3 v_2 v_4\, v_4$ adalah jalan ; $v_1 v_2 v_3 v_4$ adalah trail yang juga berupa lintasan; $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ adalah sikel yang juga berupa trail tertutup. Pada graph juga didefinisikan jarak, radius, diameter, dan titik pusat. Misalkan G suatu graph. Jarak titik u dan v di G, dinyatakan dengan $d(u,v)$, adalah panjang minimum lintasan (u,v) di G. Eksentrisitas (*eccenticity*) titik v, dinyatakan dengan $e(v)$, didefinisikan sebagai $e(v)$ u $\frac{max}{\in v}(G)\ d(u,v)$. Radius G, dinyatakan dengan $r(G)$, didefinisikan sebagai $r(G)$ = $v^{min}_{\in v(G)}\ e(v)$; sedangkan diameter G, dinyatakan dengan $d(G)$ didefinisikan sebagai $d(G)\ = v^{max}_{\in v(G)}\ e(v)$. Suatu titik v di G disebut sebagai titik pusat jika $e(v)\ =\ r(G)$.

Latihan

1. Untuk graph G pada gambar 1.10, $d\ (v_1, v_5)$ = 2 , $e\ (v_1)$ = 2, $e\ (v_2)$ = 1, $r(G)$ = 1, $d(G)\ = 2$,. $v_{2\ ,}v_{3\ dan}\ v_4$ adalah titik pusat.

   Hubungan antara *r(G)* dan *d(G)* dinyatakan sebagai berikut.

   Teorema 1.3. untuk setiap graph terhubung G berlaku

   $$r(G)\ \le\ d(G)\ \le\ 2\,r(G).$$

   Bukti : dari definisi jelas bahwa $r(G)\ \le\ d(G)$. Untuk membuktikan pertidaksamaan yang kedua pilih sebarang titik u dan v di G sehingga $d(u,v)\ =\ d(G)$. Maka $d(u,v)\ \le\ d(u,w)\ +\ d(w,v)\ \le\ 2\,r(G)$.

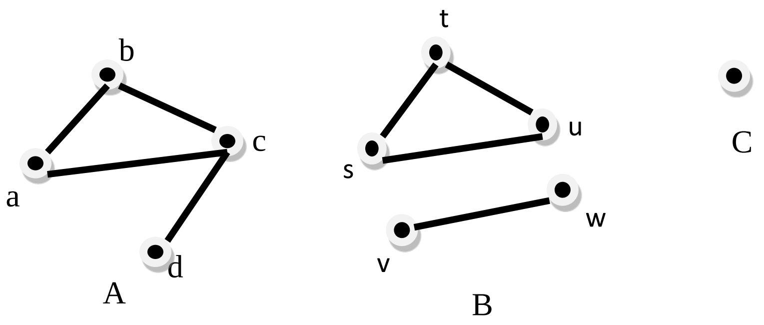
2. Diberikan graph $G(p, q)$, dengan p > 2, dan derajat setiap simpul v dari G lebih dari $(p - 1)/2$, biasa ditulis: $deg\ v > (p - 1)/2$, untuk setiap v di G. Buktikan bahwa G terhubung!

➢ **Bukti :**

Pembuktian menggunakan teknik bukti kontra positif. *Andaikan* graph G takterhubung dan $deg\ v > (p - 1)/2$. Karena G tak terhubung, maka G mempunyai dua atau lebih komponen. Misalkan G_1 salah satu komponen dari G, dan u sebuah simpul dalam G_1. Karena $deg\ u = (p - 1)/2$ (diketahui), maka banyaknya simpul-simpul dalam G_1 adalah $1 + (p - 1)/2 = (p + 1)/2$. Jadi banyaknya simpul dalam G lebih dari dua kali $(p + 1)/2$, yakni, lebih dari $p + 1$ Jadi, G harus terhubung.

1.5 Komponen Graph

Komponen dari graph G adalah graph bagian maximal di G yang terhubung. Graph terhubung terdiri dari satu komponen. Suatu komponen dikatakan genap (ganjil) jika banyak titiknya genap (ganjil).



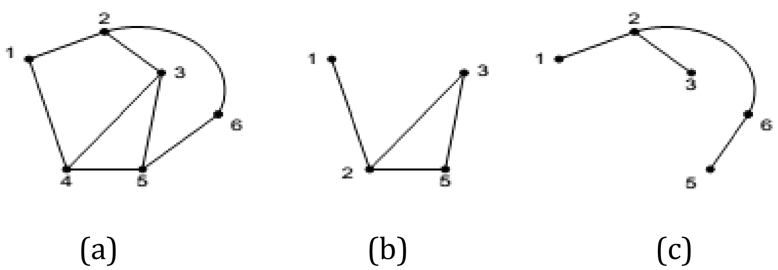
Gambar 1.8

Graph A terhubung, graph B Tak terhubung terdiri dari empat komponen satu komponen genap dan tiga komponen ganjil.

1.6 Subgraph Dan Komplemen Subgraph

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graph. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **subgraph** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

Komplemen dari subgraph G_1 terhadap graph G adalah graph $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.



Gambar 1.9

(a) Graph $G1$

(b) Subgraph

(c) Komplemen Subgraph (b)

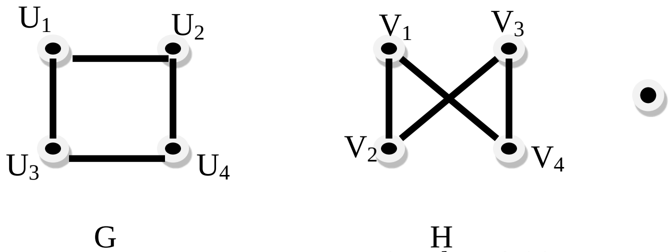
1.7 Isomorfisme Graph

Definisi

Isomorfisme Graph Simple graph $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ disebut isomorfis jika terdapat suatu fungsi bijektif f dari V_1 ke V_2, E dengan sifat bahwa a dan b beradjacent di G_1 $f(b)$ beradjacent di G_2 jika dan hanya jika $f(a)$ = V_2, untuk setiap a dan b di V Fungsi f yang seperti ini disebut suatu isomorfisma.

Contoh :

Tunjukkan bahwa graph $G(V, E)$ dan $H(W, F)$ isomorfis



Gambar 1.10

Jawab : Fungsi F dengan f(u_1) = v_1, , f (u_2)= v_4,

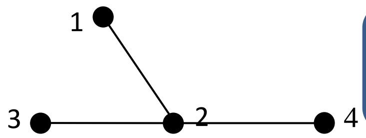
f(u_3) $= v_3$, f(v_4) $= v_2$

1.8 Derajat Titik

Definisi Derajat Titik

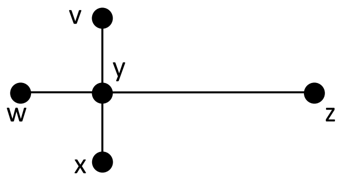
Misalkan G sebuah graph dan v sebuh titik G. ***Derajat titik v***, dilambangkan dengan d_G(v) atau d(v), adalah banyak sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gulungan/loop di hitung dua kali), atau dengan kata lain derajat titik yaitu banyaknya sisi bertemu pada suatu titik. Misalkan peta pada jalan raya, dengan persimpangan yang merupakan pertemuan tiga jalan atau lebih. Situasi ini diilustrasikan sebagai berikut:

1. Pertigaan/simpang tiga



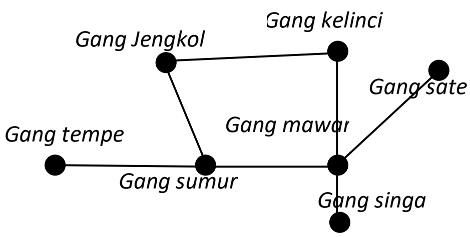
$d(1) = 1 \quad d(3) = 1$
$d(2) = 3 \quad d(4) = 1$

2. Perempatan/simpang empat



$d(v) = 1$
$d(w) = 1$
$d(x) = 1$
$d(y) = 4$
$d(z) = 1$

3. Peta pada jalan raya



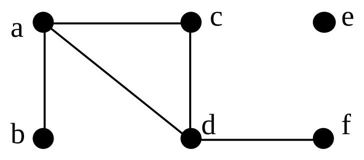
$d(gang\ jengkol) = 2$
$d(gang\ kelinci) = 2$
$d(gang\ sate) = 1$
$d(gang\ singa) = 1$
$d(gang\ mawar) = 4$
$d(gang\ sumur) = 3$

Derajat Minimum dan Maksimum

a. Derajat Minimum

Derajat minimum G didefinisikan sebagai berikut: = minimum $\{\delta(G)\}$

Contoh :



Dari contoh tersebut, dapat kita perhatikan derajat titiknya :

$$d(a) = 3 \quad d(d) = 2$$

$$d(b) = 1 \quad d(e) = 0$$

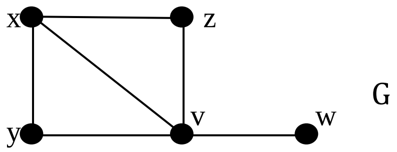
$$d(c) = 2 \quad d(f) = 1$$

Maka, dari derajat titik tersebut dapat kita simpulkan bahwa ***derajat titik minimum*** dari gambar tersebut adalah $\delta(G) = 0$

b. Derajat Maksimum

Sedangakan derajat maksimum G, didefenisiskan sebagai berikut := maksimum $\{\Delta(G)\}$

Contoh:



Dari contoh tersebut, dapat kita perhatikan derajat titiknya :

$d(v) = 4$ $\qquad$ $d(y) = 2$

$d(w) = 1$ $\quad\quad\quad\quad$ $d(z) = 2$

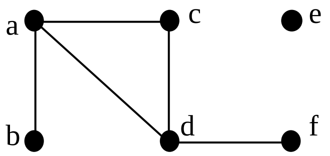
$d(x) = 3$

Maka, dari derajat titik tersebut dapat kita simpulkan bahwa ***derajat titik maksimum*** dari gambar tersebut adalah $\Delta(G) = 4$

c. Barisan Derajat

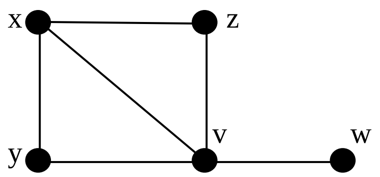
Barisan derajat (*degree sequence*) dari suatu graph G adalah barisan bilangan $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n = |V(G)|$, sehingga titik-titik di G dapat diberi nama $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dengan $d(v_i) = d_i$.

Contoh :



G

$$\begin{array}{ll} d(a) = 3 & d(d) = 2 \\ d(b) = 1 & d(e) = 0 \\ d(c) = 2 & d(f) = 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} d(v) = 4 & d(y) = 2 \\ d(w) = 1 & d(z) = 2 \\ d(x) = 3 & \end{array}$$

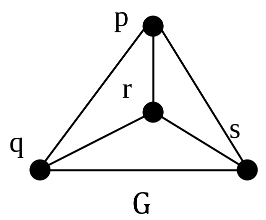
Barisan derajat dari gambar G adalah 3, 1, 2, 2, 0, 1 dan dari

gambar F adalah 4, 1, 3, 2, 2

d. Derajat Titik Beraturan

Suatu graph G dikatakan **beraturan** jika semua titiknya memiliki derajat yang sama, maka jika derajat titik adalah r, maka G dikatakan **beraturan dengan derajat r**. Dalam diagram berikut ini diilustrasikan beberapa contoh graph beraturan dengan derajat r, untuk berbagai nilai r.

Contoh :

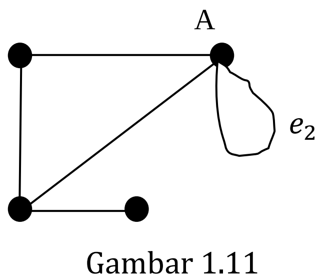


$d(p) = 3$
$d(q) = 3$
$d(r) = 3$
$d(s) = 3$

Jadi, derajat graph G tersebut adalah ***derajat titik graph beraturan.***

e. Gelung (*self-loop*)

Gambar 1.11 dibawah ini menyatakan suatu Multigraph.



Gambar 1.11

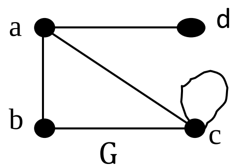
Disini, ruas e_2 pada kedua titik ujungnya adalah simpul yang sama, yaitu simpul A. Ruas semacam ini disebut ***Gelung atau Self-Loop***. Dalam hal ini, maka derajat dalam self-loop adalah 2x derajatnya. Jadi, dari gambar tersebut derajat titiknya adalah 4.

Lemma Jabat Tangan

Jumlah semua derajat semua simpul pada suatu graph adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graph tersebut. Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in VG} d(v) = 2|E(G)|$. Akibat dari lemma jabat tangan :

1. Pada graph, jumlah semua derajat titik adalah genap.
2. Pada graph, banyak titik berderajat ganjil adalah genap.
3. Jika G suatu graph beraturan-r, maka $|E(G)| = ½\, r\, |V(G)\,|$

Contoh :



G

Dari Graph G tersebut dapat buktikan akibat dari lemma jabat tangan, yaitu :

1. Derajat titik dari a, b,c dan d berturut-turut adalah 2, 2, 4,1 maka jumlah lemma jebat tangan $= 2 + 2 + 4 = 8$, $2\ x\ Jumlah\ sisi = 2\ x\ 4 = 8$ adalah genap. TERBUKTI
2. Banyak titik yang berderajat ganjil pada gambar adalah titik d yang berderajat 1. $2\ x\ sisi = 2\ x\ 1 = 2$ adalah genap. TERBUKTI

3. $|E(G)| = ½\, r\, |V(G)|$, Jumlah sisi 4 = ½ 8. TERBUKTI

1.9 Ringkasan

1. Teori graph lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa.
2. Pada masa Kirchoff dan Coyley juga telah lahir dua hal penting dalam teori graph. Salah satunya berkenaan dengan konjektur *empat warna*, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat macam warna sedemikian hingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda.
3. Hal lain yang penting untuk dibicarakan sehubungan dengan perkembangan teori graph adalah apa yang dikemukakan oleh Sir W.R. Hamilton (1805 – 1865). Masalah dalam permainan ini adalah, kita diminta untuk mencari suatu rute melalui sisi-sisi dari *dodecahedron* sehingga tiap kota dari 20 kota yang ada dapat dilalui tepat satu kali.
4. Suatu graph terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan

pasangan tak berurutan dari titik- titik tersebut yang disebut sisi (*edge*).

5. Dua sisi atau lebih yang menghubungkan satu pasang titik disebut sisi rangkap (*multiple edges*).
6. Suatu sisi yang titik ujungnya sama disebut *loop*.
7. Graph tanpa sisi rangkap dan tanpa loop disebut graph sederhana (*simple graph*).
8. Sebuah **jalan (*walk*)** dalam graph G adalah sebuah urutan tak nol $W = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 ... e_i\ v_i ... e_k\ \ v_k$, yang suku-sukunya bergantian antara simpul dan sisi.
9. Semua sisi pada sebuah jalan berlainan, maka jalan tersebut disebut **jejak (*trail*).**
10. Jejak yang simpul awal dan simpul akhirnya berlainan disebut **jejak tertutup.**
11. Simpul-simpul dari $v_0\ \ e_1\ v_1\ e_2\ v_2$ .... $e_i\ \ v_i$ ...ek v_k dari jalan W berlainan, maka W disebut **lintasan (*path*)**.
12. Lintasan tertutup dinamakan **siklus**.
13. Jalan (walk) (u, v) di G adalah barisan $v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \dots v_{n-1}\ e_n v_n$.
14. Jalan yang tidak memuat sisi, yang terdiri dari satu titik, disebut jalan trivial.

15. Jarak titik u dan v di G, dinyatakan dengan $d(u, v)$, adalah panjang minimum lintasan (u, v) di G.

16. Eksentrisitas (*eccenticity*) titik v, dinyatakan dengan $e(v)$, didefinisikan sebagai $e(v)$ u $\frac{max}{\in v}(G)\ d(u, v)$.

17. Radius G, dinyatakan dengan $r(G)$, didefinisikan sebagai $r(G) = v^{min}_{\in v(G)}\ e(v)$.

18. Diameter G, dinyatakan dengan $d(G)$ didefinisikan sebagai $d(G) = v^{max}_{\in v(G)}\ e(v)$.

19. Suatu titik *v* di G disebut sebagai titik pusat jika $e(v) = r(G)$.

20. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **subgraph** (*subgraph*) dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

21. **Komplemen** dari subgraph G_1 terhadap graph G adalah graph $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$.

22. Jika terdapat suatu fungsi bijektif f dari V_1 ke V_2, E dengan sifat bahwa a dan b beradjacent di G_1 $f(b)$ beradjacent di G_2 jika dan hanya jika $f(a) = V_2$, untuk setiap a dan $b\ di\ V$ disebut isomorfisma.

23. ***Derajat titik v***, dilambangkan dengan $d_G(v)$ atau d(v), adalah banyak sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gulungan/loop di hitung dua kali).

24. Barisan derajat (*degree sequence*) dari suatu graph G adalah barisan bilangan $d_1,\ d_2,\ d_3, \ldots, d_n\ =\ |\ V(G)\ |$, sehingga titik-titik di G dapat diberi nama $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dengan $d(v_i)\ =\ d_i$.
25. Suatu graph G dikatakan **beraturan** jika semua titiknya memiliki derajat yang sama, maka jika derajat titik adalah r, maka G dikatakan **beraturan dengan derajat r**.
26. Lemma Jabat Tangan jika $G\ =\ (V, E)$, maka $\sum_{v \in VG} d(v) = 2|E(G)|$.

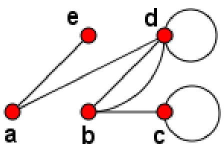
1.10 Soal-soal

1. Jawablah pertanyaan berkaitan dengan sejarah perkembangan graph berikut !
   a. Apakah isi dari tulisan Euler yang mengawali lahirnya Teori Graph pada tahun 1736 ?
   b. Teori apakah yang berhasil dikembangkan oleh G.R. Kirchoff sebagai salah satu cabang/bagian teori graph ?
   c. Permasalahan apakah yang dijelaskan oleh A. Cayley dengan menggunakan konsep pohon ?
2. Gambarkan suatu graf sederhana dengan 6 titik dan 10 sisi ! Kemudian tentukan
   a. Himpunan titik dari graph yang kamu buat !
   b. Himpunan sisi dari graph yang kamu buat !

3. Gambarlah graf G dengan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan garis $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ dengan titik-titik ujung sebagai berikut.

Garis	Titik Ujung
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_5\}$
e_3	$\{v_8\}$
e_4	$\{v_6, v_7\}$
e_5	$\{v_4\}$
e_6	$\{v_3, v_4\}$
e_7	$\{v_3, v_8\}$

4. Diketahui graf G berikut.

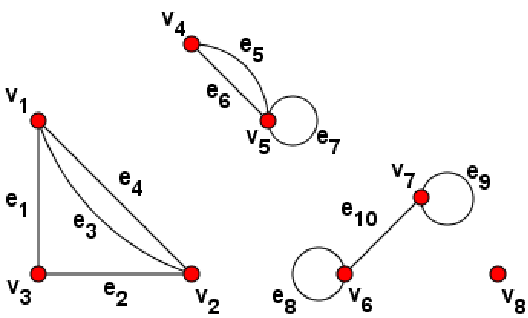


Tentukan

a. $V(G)$ dan (G) !

b. Dua subgraph G !

5. Perhatikan graph G berikut ini.



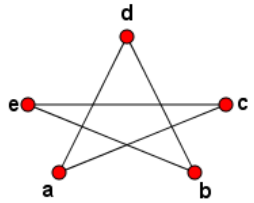
Tentukan:

a. Himpunan titik-titik, himpunan garis-garis, titik-titik ujung masing-masing garis, dan garis parallel.

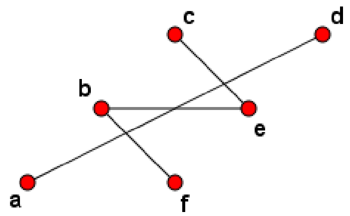
b. Loop dan titik terasing.

6. Tentukan komplemen dari graph berikut !

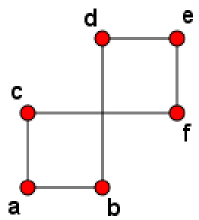
a. Graph G



b. Graph H

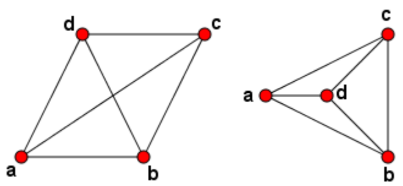


c. Graph I

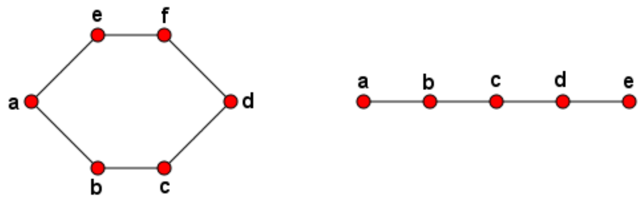


7. Tentukan mana di antara pasangan graph berikut ini yang isomorfis

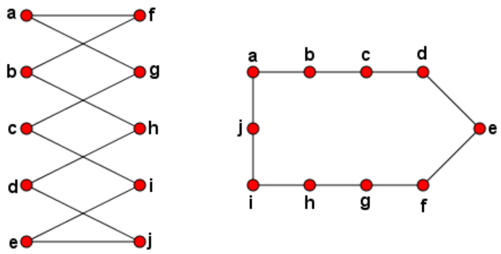
a.



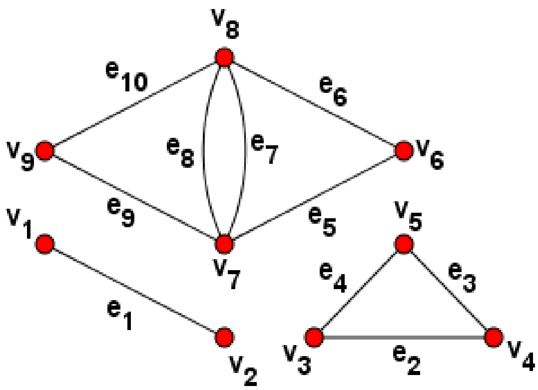
b.



c.



8. Perhatikan graph berikut!



Dari graph di atas;

a. Sebutkan semua sisi yang bersisian dengan v_8 !

b. Sebutkan semua simpul yang bertetangga dengan v_7!

9. Apakah yang dimaksud dengan jalan *(walk)*, jejak *(trail)*, lintasan *(path)*, dan sikel *(cycle)* pada suatu graph ? Berikan contohnya masing-masing!

10. Gambarlah graph berikut :

    a. K_8

    b. $K_{7,3}$

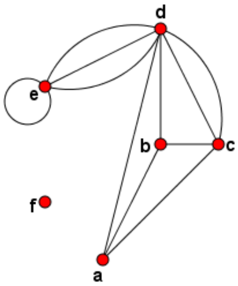
    c. C_6

    d. P_5

    e. W_4

11. Apakah isi dari Lemma Jabat Tangan ?

12. Perhatikan graph berikut !



    Tentukan

    a. Derajat titik-titik dari graph tersebut.

    b. Barisan derajat dari graph tersebut.

13. Sebutkan tiga akibat dari Lemma Jabat Tangan !

14. Diketahui suatu graph sederhana memiliki barisan derajat 1, 3, 2, 2, 4.

    Tentukan :

    a. Banyak sisi graph tersebut.

b. Gambarlah graphnya.

15. Apakah yang dimaksud dengan graph beraturan (*regular graph*)? Berikan 3 contohnya !

16. Untuk setiap daftar berikut ini, tentukan apakah mungkin bahwa daftar tersebut menyatakan derajat-derajat dari semua titik dari suatu graf sederhana. Jika ya, gambarkan graf tersebut. Jika tidak, berikan penjelasan.

    a. 1, 2, 3, 5

    b. 1, 3, 4, 4, 4

    c. 4, 4, 3, 2, 3

    d. 3, 3, 2, 2, 2

17. Buktikan tiga akibat Lema Jabat Tangan !

18. Gambarlah graf dengan ketentuan dibawah ini (jika ada)

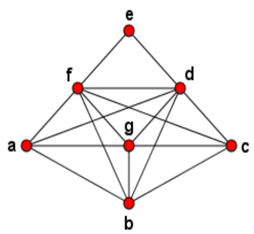
    a. 5, 5, 4, 3, 2, 1

    b. 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6

    c. 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 8

    d. 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

19. Untuk graph berikut ini ! Tentukan

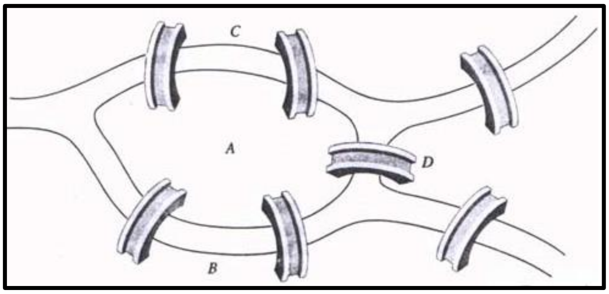


a. Derajat titik-titiknya.

b. Derajat minimum dan maksimum titik-titiknya

20. Misalkan graph G memiliki 6 titik dan 6 sisi dengan titik-titik berderajat 1, 2, dan 3. Jika graph G memiliki 2 titik berderajat 2 berapakah titik berderajat 1 dan 3 ? berikan pula gambar graphnya!

21. Di Kota Königsberg (sebelah timur Prussia, Jerman sekarang), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut seperti pada gambar berikut.



Buatlah graph yang merepresentasikan jembatan Königsberg !

22. Venesia merupakan salah satu kota terkenal di Italia. Kota ini memiliki julukan *Kota Air* dan *Kota Apung* karena dibangun di atas air dan terdapat kanal air sebagai jalur transportasi. Terdapat berbagai destinasi wisata di kota ini antara lain, museum seni *Punta della Dogana*, jembatan *Rialto*, musem *Correr*, istana *Doge's Palace*,

dan alun-alun *Piazza San Marco.* Jika terdapat tujuh kanal yang dapat dilalui untuk mengunjungi semua tempat wisata tersebut, maka :

a. Buatlah graph yang merepresentasikan kanal-kanal yang menghubungkan berbagai tempat wisata di kota Venesia!

b. Tentukan jumlah titik dan sisi dari graph yang kamu buat!

23. Untuk memperingati Hari Kemerdekaan, Kota Malang mengadakan acara jalan sehat. Dalam acara tersebut terdapat 3 pos yang harus dilalui peserta, yaitu pos pertama sebagai garis *start*, pos kedua, dan pos ketiga sebagai garis *finish*. Setelah mencapai pos kedua, peserta diwajibkan untuk mengambil bendera pada jalur pendek yang telah ditentukan. Jalur pendek tersebut berawal dan berakhir di pos kedua. Setelah mengambil bendera, peserta dapat berjalan menuju pos ketiga (garis *finish*). Jika terdapat dua jalur yang bisa dilalui untuk mencapai garis *finish*, maka :

    a. Buatlah graph yang merepresentasikan jalur yang dilalui pada acara jalan sehat tersebut!

    b. Apakah graph yang kamu gambar termasuk graph sederhana? Berikan alasanmu!

24. *Facebook* merupakan salah satu situs jejaring sosial yang memiliki banyak pengguna. Sepuluh siswa kelas X SMAN 4 Malang merupakan pengguna situs jejaring sosial tersebut. Pada situs tersebut, masing –

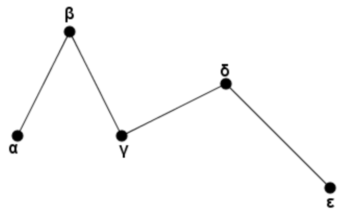
masing siswa saling berteman. Jika lima siswa menonaktifkan akun jejaring sosial *facebook* selama pekan ujian, maka:

a. Buatlah graph A yang merepresentasikan pertemanan masing – masing siswa di situs jejaring sosial facebook sebelum pekan ujian!

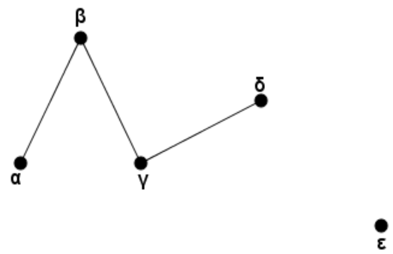
b. Buatlah graph B yang menggambarkan pertemanan masing – masing siswa di situs jejaring sosial facebook selama pekan ujian!

c. Apakah Graph B merupakan graph bagian dari graph A? Berikan alasanmu!

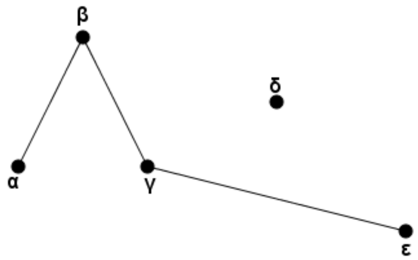
25. Harry Potter, Hermione Granger dan Ron Weasley yang bersekolah di *Hogwart School of Witchcraft and Wizardry* sedang mengikuti pelajaran Astronomi. Professor Aurora Sinistra memerintahkan mereka bertiga untuk menggambar rasi bintang yang terdiri dari 5 bintang yaitu $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ dan ε. Setelah selesai menggambar, mereka menunjukkan hasilnya kepada Professor Sinistra. Hermione menunjukkan gambar seperti berikut :



Harry menunjukkan gambar seperti berikut :



Ron menunjukkan gambar seperti berikut :



Jika rasi bintang yang digambar oleh Hermione, Harry, dan Ron tersebut dianggap sebagai graph maka tentukan manakah yang merupakan graph bagian dan bukan graph bagian dari gambaran Hermione! Berikan alasanmu!

26. Ella pergi ke sekolah menggunakan bus sekolah. Setiap pukul 06.00 WIB bus sekolah akan berhenti di depan rumah Ella untuk menjemputnya. Dalam perjalanan ke sekolah bus tersebut berhenti untuk menjemput tiga teman sekolah Ella yang lain yaitu Feri, Gina dan Hassan. Rumah Feri jaraknya paling dekat dengan rumah Ella, untuk menuju rumahnya hanya ada satu jalan yang bisa dilewati yaitu Jl. Mawar. Dari rumah Feri, satu-satunya jalan yang bisa dilewati untuk menuju rumah Gina adalah Jl. Anggrek. Rumah

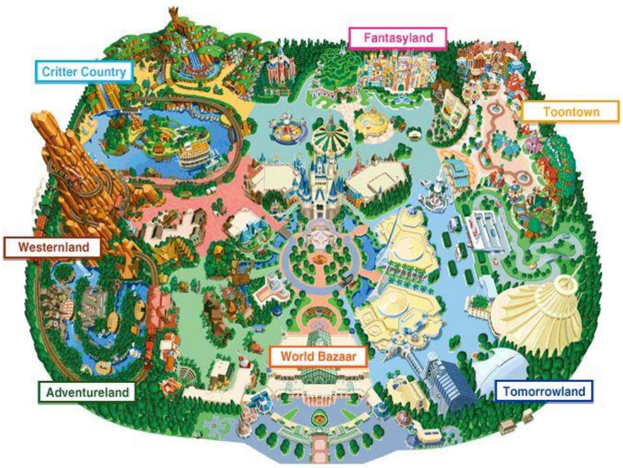
hassan jaraknya paling dekat dengan sekolah. Untuk menuju rumahnya terdapat tiga jalan yang dapat dilewati yaitu Jl. Tulip, Jl. Bougenvill dan Jl. Lili, namun dari rumahnya hanya terdapat satu jalan untuk menuju sekolah yaitu Jl. Melati.

a. Buatlah graph untuk merepresentasikan rute yang dilalui bus dari rumah Ella sampai ke sekolah!

b. Terdapat berapa lintasan *(path)* yang dapat dilewati dari rumah Ella ke sekolah? Sebutkan!

c. Terdapat berapa *trail* dari rumah Ella ke sekolah? Sebutkan!

27. *Disneyland Tokyo* adalah taman rekreasi dengan luas mencapai 465,000 m² dan merupakan taman rekreasi dan resort Disney pertama yang dibangun di luar Amerika. *Disneyland Tokyo* terbagi dalam 7 area seperti pada denah berikut.



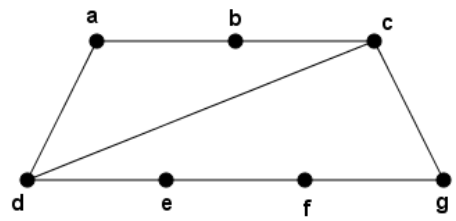
Jika seorang anak ingin mengunjugi masing-maing area yang ada pada taman rekreasi tersebut, maka tentukan urutan area yang harus dituju agar jalan yang dilaluinya membentuk suatu sikel!

28. Babak semifinal Liga Inggris menyisakkan empat klub besar yaitu *Chelsea, Arsenal, Liverpool* dan *Manchester United (MU)*. Dalam sepekan, klub-klub tersebut dijadwalkan bertanding dua kali dengan klub yang berbeda. Jika menurut jadwal tidak ada pertandingan antara *Chelsea* melawan *Arsenal*, namun ada pertandingan *MU* melawan *Arsenal,* maka :
    a. Buatlah graph yang merepresentasikan jadwal pertandingan keempat klub tersebut dalam sepekan!
    b. Apakah graph yang kamu buat termasuk graph terhubung atau graph tidak terhubung? Berikan alasanmu!
    c. Menurut jadwal, siapa saja lawan dari Liverpool?
29. Di suatu desa terdapat pembangkit listrik tenaga air yang mampu menyalurkan tenaga listrik ke sepuluh rumah. Energi listrik disalurkan melalui kabel yang dirangkai secara seri. Jika suatu hari hujan yang turun sangat lebat menyebabkan pohon tumbang dan mengakibatkan kabel antara rumah ke-sembilan dan ke-sepuluh terputus, maka :

a. Buatlah graph yang menggambarkan rangkaian listrik di desa tersebut setelah terdinya hujan lebat yang disertai badai!

b. Apakah graph yang kamu buat termasuk graph terhubung atau graph tidak terhubung? Berikan alasanmu!

30. Didalam suatu rapat terdapat tujuh orang direpresentasikan seperti graph berikut :



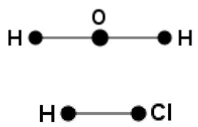
Graph A

Titik pada graph tersebut mewakili orang dan sisi yang menghubungan kedua titik menandakan bahwa kedua orang saling mengenal. Jika orang yang belum saling mengenal harus berjabat tangan, maka:

a. Buatlah graph B dimana orang diwakili dengan titik dan ada sisi yang menghubungkan sepasang titik jika mereka saling berjabat tangan!

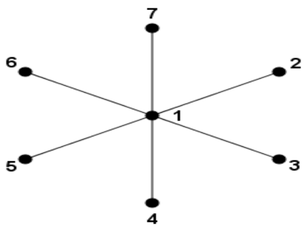
b. Apakah benar jika graph B merupakan komplemen dari graph A? Berikan alasanmu!

31. Di dalam sebuah kelompok bermain terdapat 3 anak, yaitu Radit, Sara, dan Tina. Sara dan Tina selalu bermain bersama, namun kedua gadis kecil tersebut tidak pernah bermain dengan Radit..
    a. Buatlah graph A yang merepresentasikan hubungan tersebut, dimana anak-anak diwakili oleh titik dan ada sisi yang menghubungkan sepasang titik jika kedua anak bermain bersama!
    b. Gambarkan graph B jika suatu hari Ibu Tika mengarahkan setiap anak untuk bermain dengan anak lain yang tidak pernah bermain dengan mereka.
    c. Apakah hubungan antara graph B dan Graph A ? Berikan alasanmu !
32. Dalam kelas kimia, Ibu Rita menjelaskan tentang ikatan kimia dari molekul senyawa. Beliau menunjukkan gambar ikatan kimia dari dua molekul senyawa, yaitu H_2O dan HCl seperti berikut.



    Apakah kedua gambar ikatan kimia dari molekul senyawa tersebut isomorfik? Berikan alasanmu!
33. Sebagai persiapan menghadapi (UNBK) Ujian Nasional Berbasis Komputer, SMP Negeri 1 Malang menyiapkan dua ruangan yang

masing-masing terdiri atas tujuh komputer. Pada ruang pertama, tujuh komputer dihubungkan menggunakan topologi star seperti berikut.



Pada ruang kedua, tujuh komputer akan dihubungkan menggunakan topologi jaringan yang berbeda dengan topologi yang ada diruang pertama, buatlah topologi jaringan di ruang kedua jika topologi di ruang pertama dan kedua harus isomorfik!

34. Disuatu taman rekreasi terdapat area bernama Underworld dengan peta sebagai berikut.

a. Gambarkan graph yang merepresentasikan peta tersebut dimana titik-titik mewakili *Cherron's Ferry, Cerberus, Judgement Pavilion, Fields of Punishment, Fields of Asphodel,* *Entrance to Tartarus, Hades Palace,* dan *Isle of the Blest,* sedangkan sisi mewakili jalan yang menghubungkan tempat – tempat tersebut!

b. Tentukan derajat masing-masing titik dari graph yang kamu buat!

c. Tentukan derajat minimum dan derajat maksimum titik-titik graph yang kamu buat!

35. Di suatu pulau terdapat lima kota berbeda yang dihubungkan oleh ruas-ruas jalan. Hanya ada satu jalan yang dapat dilalui untuk menuju kota pertama. Terdapat dua ruas jalan yang dapat dilalui untuk menuju kota kedua, sama halnya dengan kota ketiga. Untuk menuju kota keempat, terdapat tiga ruas jalan yang dapat dilalui, sedangkan untuk menuju kota kelima terdapat 4 ruas jalan yang dapat dilalui. Berdasarkan data tersebut buatlah graph yang merepresentasikan ruas jalan yang menghubungkan ke lima pulau tersebut !

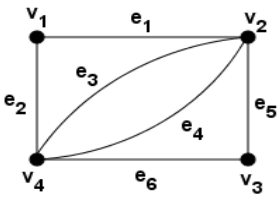
BAB 2

PRESENTASI GRAPH DALAM MATRIKS

2.1 Matriks Keterhubungan Langsung (*Adjacency Matriks*)

Untuk menyatakan suatu graph, selain dengan gambar dapat juga digunakan matriks terhubung langsung. Misalkan G suatu graph tanpa loop dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$. Matriks keterhubungan langsung (*adjacency matriks*) dengan graph G adalah matriks $n \times n$, $A(G) = [a_{ij}]$, dengan a_{ij} merupakan banyak sisi yang menghubungkan v_i dan v_j.

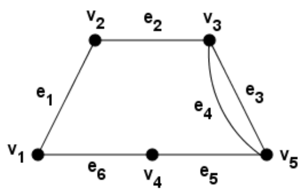
Contoh 1 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterhubungan langsungnya adalah

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

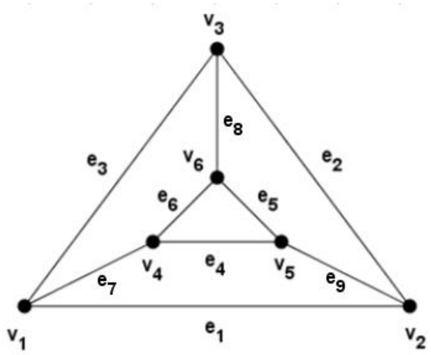
Contoh 2 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterhubungan langsungnya adalah

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

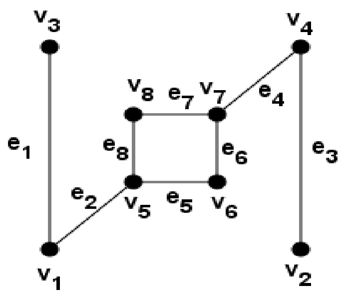
Contoh 3 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterhubungan langsungnya adalah

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

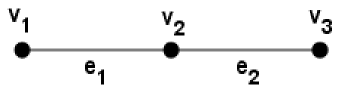
Contoh 4 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterhubungan langsungnya adalah

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 5 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterhubungan langsungnya adalah

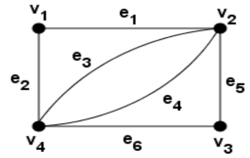
$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Matriks Keterkaitan (*Incidence Matriks*)

Untuk menyatakan suatu graph, dapat digunakan matriks keterkaitan. Misalkan G suatu graph tanpa loop dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m$. Matriks keterkaitan (incidence matriks) graph G adalah matriks $n \times m$, $I(G) = [a_{ij}]$, dengan

$$[a_{ij}] = \begin{cases} 1, & jika\ v_i\ terkait\ dengan\ e_j \\ 0, & jika\ v_i\ tidak\ terkait\ dengan\ e_j \end{cases}$$

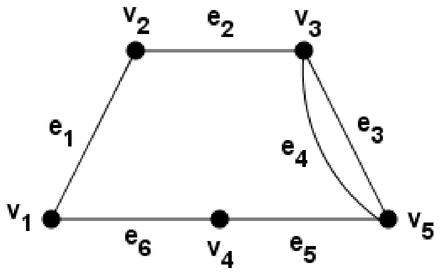
Contoh 1 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterkaitannya adalah

$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

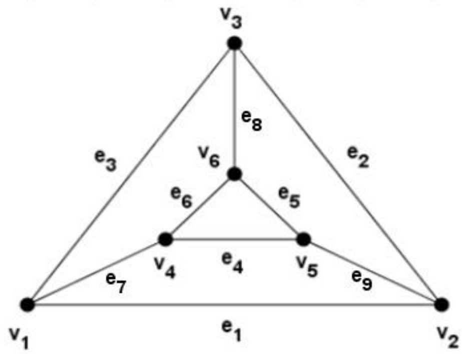
Contoh 2 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterkaitannya adalah

$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

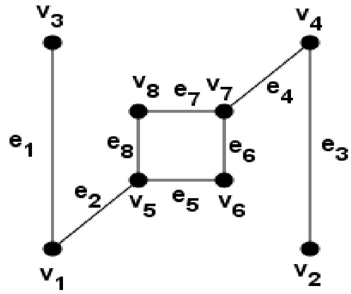
Contoh 3 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterkaitannya adalah

$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

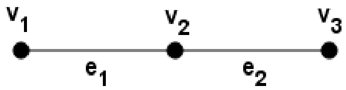
Contoh 4 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterkaitannya adalah

$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 5 :



Untuk graph G pada gambar, matriks keterkaitannya adalah

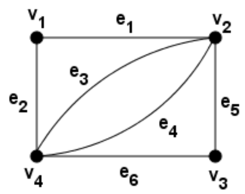
$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Matriks Derajat (*Degree Matriks*)

Untuk menyatakan suatu graph, dapat digunakan matriks derajat. Misalkan G suatu graph tanpa loop dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan

$E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$. Matriks derajat graph G adalah $n \times n, D(G) = [a_{ij}]$, dengan $[a_{ij}] = \begin{cases} d(v_i), & jika\ i = j \\ 0, & jika\ i \neq j \end{cases}$

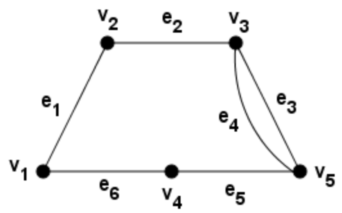
Contoh 1 :



Untuk graph G pada gambar, Matriks derajat graph G adalah

$$D(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

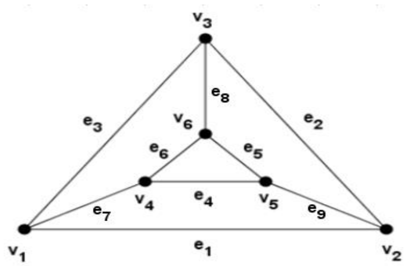
Contoh 2 :



Untuk graph G pada gambar, Matriks derajat graph G adalah

$$D(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

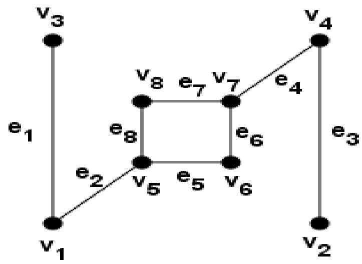
Contoh 3 :



Untuk graph G pada gambar, Matriks derajat graph G adalah

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

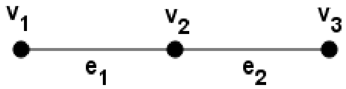
Contoh 4 :



Untuk graph G pada gambar, Matriks derajat graph G adalah

$$D(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 5 :



Untuk graph G pada gambar, Matriks derajat graph G adalah

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Ringkasan

1. Matriks keterhubungan langsung (*adjacency matriks*) dengan graph G adalah matriks $n \times n$, $A(G) = [a_{ij}]$, dengan a_{ij} merupakan banyak sisi yang menghubungkan v_i dan v_j.

2. Matriks keterkaitan (incidence matriks) graph G adalah matriks $n \times m$, $I(G) = [a_{ij}]$, dengan

$$[a_{ij}] = \begin{cases} 1, & jika\ v_i\ terkait\ dengan\ e_j \\ 0, & jika\ v_i\ tidak\ terkait\ dengan\ e_j \end{cases}$$

3. Matriks derajat graph G adalah $n \times n, D(G) = [a_{ij}]$, dengan

$$[a_{ij}] = \begin{cases} d(v_i), & jika\ i = j \\ 0, & jika\ i \neq j \end{cases}$$

2.5 Soal-soal

1. Apa yang dimaksud dengan matriks keterhubungan langsung *(adjacency matriks)* ?
2. Gambar graph dan tuliskan matriks keterhubungan langsung dari
   a. Graph *petersen.*
   b. Graph W_4.
3. Gambarlah suatu graph dengan matriks keterhubungan langsung sebagai berikut

a. $A(G)=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1\\1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$

b. $A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&1&0\end{bmatrix}$

4. Apakah yang dimaksud dengan matriks keterkaitan *(incidence matriks)*?

5. Gambarlah suatu graph dengan matriks keterkaitan sebagai berikut

   a. $I(G)=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&1&0\end{bmatrix}$

   b. $I(G)=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$

6. Gambar graph dan tuliskan matriks keterkaitan dari

   a. Graph P_7.

   b. Graph$K_{2,4}$.

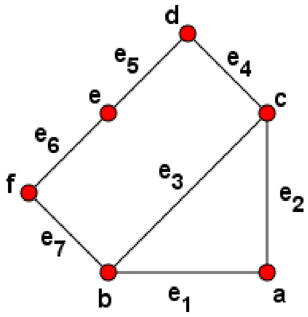
7. Jelaskan apa yang kamu ketahui tentang matriks derajat?

8. Gambar graph dan tuliskan matriks keterkaitan dari

   a. Graph C_9.

b. Graph S_5.

9. Perhatikan graph berikut!



Dari graph tersebut tuliskan :

a. Matriks keterhubungan langsung.

b. Matriks keterkaitan.

c. Matriks derajat.

10. Diketahui matriks keterhubungan langsung seperti berikut.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan :

a. Bentuk graph berdasarkan matriks keterhubungan langsung tersebut.

b. Matriks keterkaitan dari graph yang telah kamu buat.

c. Matriks derajat dari graph yang telah kamu buat.

BAB 3

GRAPH POHON

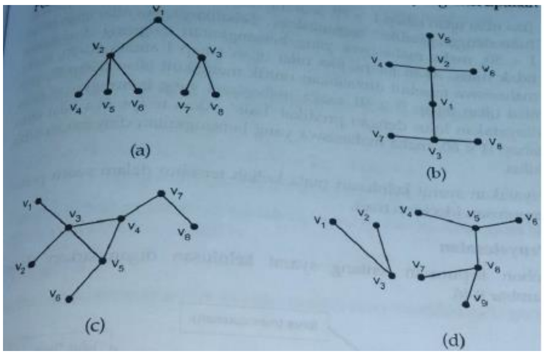
3.1 Pohon dan Hutan

Definisi

Misalkan G adalah suatu graph sederhana (tidak memiliki garis pararel dan loop) G disebut Pohon bila dan hanya bila G tidak memuat sirkuit dan terhubung. Pohon semu (*Trivial Tree*) adalah Pohon yang hanya terdiri dari sebuah titik. Pohon Kosong (*Emphty Tree*) adalah Pohon yang tidak memiliki titik. G disebut hutan (*Forest*) bila dan hanya bila G tidak memuat sirkuit. (Jong Jek Siang, 2006: 276).

Contoh

Tentukan mana diantara graph berikut yang merupakan Pohon atau Hutan !



Gambar 3.1

a. Merupakan Pohon, karena terhubung dan tidak memuat sirkuit

b. Merupakan Pohon, karena terhubung dan tidak memiliki sirkuit. Perhatikan bahwa sebenarnya graph pada gambar (a) sama dengan graph pada gambar (b) meskipun tampaknya berbeda. Suatu Pohon tidak harus memiliki bentuk graph yang menyerupai tanaman (ada akar dan cabang-cabang)

c. Bukan merupakan Pohon karena $v_3\ v_4\ v_5\ v_3$ merupakan suatu sirkuit.

d. Merupakan suatu hutan karena memuat sirkuit dan tidak terhubung. Hutan tersebut memiliki dua komponen yang masing-masing komponen merupakan suatu Pohon.

3.2 Pohon Berakar

Definisi

Pohon berakar (*Rooted Tree*) adalah suatu pohon di mana ada satu titik yang dikhususkan dari yang lain. Titik itu disebut Akar (*Root*). Tingkat (*Level*) suatu titik adalah banyaknya garis antara titik tersebut dengan akar. Tinggi (*height*) pohon adalah tingkat maksimum yang dimiliki oleh titik-titik pohon. Anak (*Children*) dari titik v adalah semua titik yang berhubungan langsung dengan v, tetapi memiliki tingkat yang lebih tinggi dari v. Jika w adalah anak dari v, maka v disebut orangtua (*parent*) dari w. Dua titik yang memiliki orang tua yang sama disebut saudara (*Sibling*) (Jong Jek Siang, 2006: 281).

Contoh

Perhatikan kembali pohon pada Gambar (b) dengan v_2 sebagai akarnya.

a. Tentukan tingkat tiap-tiap titik !

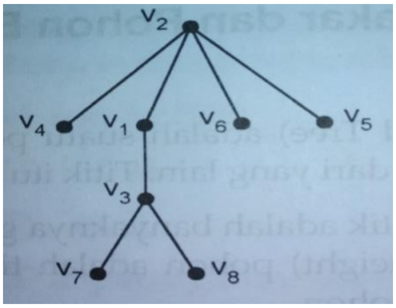
b. Berapa tinggi pohon?

c. Tentukan anak, orang tua dan saudara titik v_1 !

Pembahasan

Untuk mempermudah, biasanya akar pohon ditempatkan pada posisi teratas dan anak-anak ditempatkan di bawah orang tuanya. Dengan demikian pohon akan tampak seperti tanaman yang terbalik.

Dengan penggambaran tersebut pohon pada Gambar (b) dengan v_2 sebagai akarnya dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.2

a. Tingkat v_4 adalah jumlah garis antara v_4 dengan akar $(v_2) = 1$.

Tingkat v_1 = tingkat v_6 = tingkat $v_5 = 1$

Tingkat $v_3 = 2$. Tigkat v_7 = tingkat $v_8 = 3$.

b. Tinggi pohon adalah maksimum tingkat yang dimiliki (banyak garis dari akar ke titik yang terjauh dari akar), yaitu $= 3$

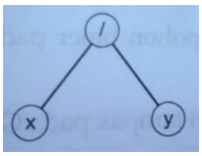
c. Anak dari $v_1 = v_3$, orang tua dari $v_1 = v_2$ dan saudara dari $v_1 = v_4$, v_6 dan v_5

3.3 Pohon Biner

Definisi

Pohon Biner (*Binary Tree*) adalah pohon berakar yang setiap titiknya memiliki paling banyak 2 anak, yang disebut Anak Kiri (*Left Child*) dan Anak Kanan (*Right Child*). Pohon Biner Penuh (*Full Binary Tree*) adalah Pohon Biner yang setiap titiknya memiliki tepat 2 anak.

Setiap operan/operator dalam ekspresi aljabar bersesuaian dengan satu titik dalam pohon biner. Kedua operan alam operasi biner merupakan anak dari operatornya. Sebagai contoh, ekspresi aljabar $\frac{x}{y}$ dapat dinyatakan dalam pohon biner sebagai berikut



Gambar 3.3

Contoh

Nyatakan ekspresi aljabar berikut ke dalam pohon biner.

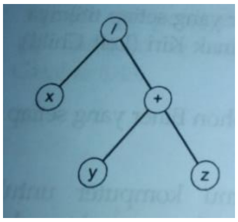
a. $\frac{x}{y+z}$

b. $\frac{x}{y} + z$

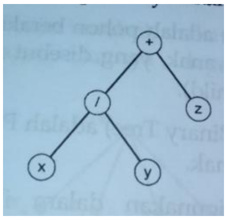
c. $(x - y)z + \frac{u}{v}$

Pembahasan

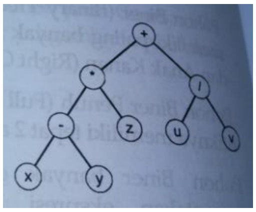
a. Dalam ekspresi $\frac{x}{y+z}$, operasi $y + z$ dilakukan terlebih dahulu sebelum operasi pembagian, sehingga pohon biner yang sesuai dengan operasi tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut



b. Operasi $\frac{x}{y} + z$, operasi pembagian dilaksanakan terlebih dahulu. Pohon biner yang sesuai tampak seperti gambar berikut



c. Dalam operasi $(x - y)z + \frac{u}{v}$ pohon biner yang sesuai adalah



3.4 Ringkasan

1. G adalah suatu graph sederhana (tidak memiliki garis pararel dan loop) G disebut Pohon bila dan hanya bila G tidak memuat sirkuit dan terhubung.

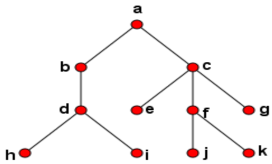
2. Pohon semu (*Trivial Tree*) adalah pohon yang hanya terdiri dari sebuah titik.
3. Pohon Kosong (*Emphty Tree*) adalah Pohon yang tidak memiliki titik.
4. G disebut hutan (*Forest*) bila dan hanya bila G tidak memuat sirkuit.
5. Pohon berakar (*Rooted Tree*) adalah suatu pohon di mana ada satu titik yang dikhususkan dari yang lain.
6. Titik itu disebut Akar (*Root*). Tingkat (*Level*) suatu titik adalah banyaknya garis antara titik tersebut dengan akar.
7. Tinggi (*height*) pohon adalah tingkat maksimum yang dimiliki oleh titik-titik pohon.
8. Anak (*Children*) dari titik v adalah semua titik yang berhubungan langsung dengan v, tetapi memiliki tingkat yang lebih tinggi dari v.
9. Jika w adalah anak dari v, maka v disebut orangtua (*parent*) dari w.
10. Dua titik yang memiliki orang tua yang sama disebut saudara (*Sibling*)
11. Pohon Biner (*Binary Tree*) adalah pohon berakar yang setiap titiknya memiliki paling banyak 2 anak, yang disebut Anak Kiri (*Left Child*) dan Anak Kanan (*Right Child*).
12. Pohon Biner Penuh (*Full Binary Tree*) adalah Pohon Biner yang setiap titiknya memiliki tepat 2 anak.

3.5 Soal-soal

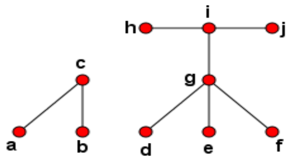
1. Jelaskan pengertian dari : Hutan (forest); Pohon (tree); Pohon semu (trivial tree); dan Pohon kosong *(empty tree)*!

2. Tentukan mana diantara graph berikut yang merupakan Pohon atau Hutan !

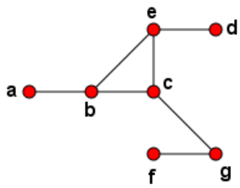
   a.



   b.

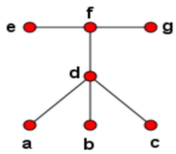


   c.



3. Jelaskan apa yang dimaksud dengan
   a. Pohon berakar *(Rooted Tree).*
   b. Tingkat *(Level)* suatu titik.
   c. Anak *(Children)* dari titik.

4. Perhatikan pohon berikut!



Jika d merupakan akar dari pohon, maka tentukan

a. Tentukan tingkat tiap-tiap titik !

b. Berapa tinggi pohon?

c. Tentukan anak, orang tua dan saudara titik !

5. Apakah definisi dari Pohon Biner *(Binary Tree)* dan Pohon Biner Penuh *(Full Binary Tree)*?

6. Nyatakan ekspresi aljabar berikut ke dalam pohon biner.

   a. $\frac{a}{b - c}$

   b. $\frac{x}{z} + y$

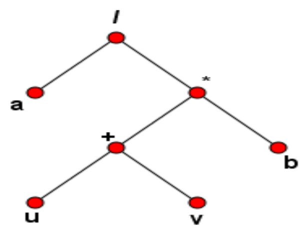
   c. $(a + b)z + \frac{u}{v}$

7. Banyaknya sisi pada pohon dengan 40 titik adalah?

8. Sebuah pohon mempunyai tiga titik berderajat 3 dan satu titik berderajat 2. Banyaknya titik berderajat satu adalah?

9. Tentukan berapa banyak pohon berlabel dengan 5 titik!

10. Nyatakan operasi dalam pohon biner berikut ke dalam ekspresi aljabar !



BAB 4

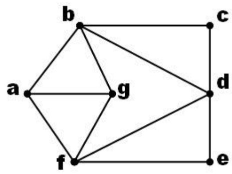
GRAPH EULER DAN HAMILTON

4.1 Graph Euler

- **Lintasan euler**

Lintasan pada graph G dikatakan lintasan euler, ketika melalui setiap sisi di graph tepat satu kali. Karena melalui setiap sisi tepat satu kali atau melalui sisi yang berlainan, bisa dikatakan jejak euler. Sehingga lintasan euler sudah tentu jejak euler dan suatu graph yang mempunyai lintasan euler disebut graph semi euler.

Contoh : Lintasan eulernya yaitu abcdefgbdfag.

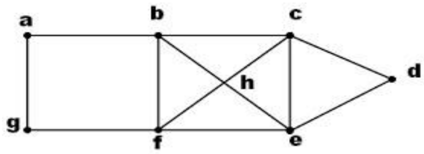


Gambar 4.1

- **Sirkuit euler**

Lintasan euler yang kembali ke simpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup maka disebut sirkuit euler. Suatu graph yang memiliki sirkuit euler berarti graph tersebut merupakan **graph euler**.

Contoh :



Gambar 4.2

Terdapat sirkuit euler yaitu abcdechbfhefga, karena berawal dari simpul a dan berakhir di simpul a

Teorema 1

Graph terhubung G adalah graph euler jika dan hanya jika derajat dari masing-masing vertex adalah genap.

Teorema 2

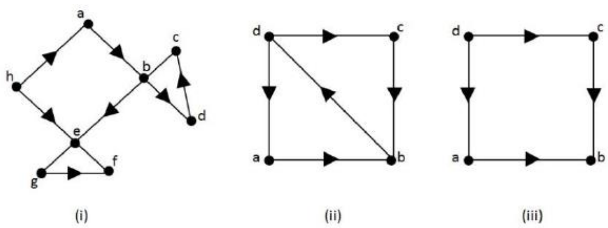
a. Jika graph G memiliki lebih dari dua vertex berderajat ganjil, maka G adalah **graph non euler**.
b. Jika G memiliki dua vertex berderajat ganjil, maka G memiliki lintasan euler dan ini berlaku juga ketika memiliki satu vertex berderajat ganjil.

Teorema 3

Suatu graph terhubung adalah graph semi euler jika dan hanya jika memiliki tepat dua vertex yang berderajat ganjil.

Teorema 4

Graph berarah G memiliki sirkuit euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat masuk dan derajat keluar sama. G memiliki lintasan euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat masuk dan derajat keluar sama kecuali dua simpul, yang pertama memiliki derajat keluar satu lebih besar dari derajat masuk, dan yang kedua memiliki derajat masuk lebih besar dari derajat keluar.



Gambar 4.3

(i) Graph berarah euler

(ii) Graph berarah semi euler

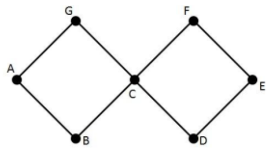
(iii) Graph berarah bukan euler & semi euler

Jadi, dikatakan graph G memiliki sitkuit euler, ada beberapa poin yang harus diperhatikan :

1. Jika ada *vertex* yang berderajat nol, maka graph adalah graph tak terhubung dan tidak memiliki lintasan euler dan sirkuit euler.
2. Jika semua *vertex* memiliki derajat genap, maka memiliki lintasan euler dan sirkuit euler.

3. Jika terdapat dua *vertex* yang memiliki derajat ganjil, maka memiliki lintasan euler dan tidak memiliki sirkuit euler.
4. Jika terdapat lebih dari dua *vertex* yang memiliki derajat ganjil, maka tidak memiliki lintasan euler dan sirkuit euler.

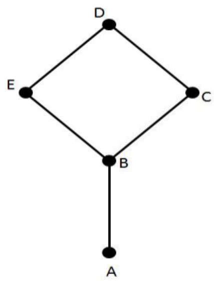
Graph yang hanya memiliki lintasan euler (terbuka) merupakan **graph semi euler**. Graph yang tidak memiliki lintasan euler dan sirkuit euler merupakan **graph non euler**. **Contoh :**



Gambar 4.4

Lintasan euler. ABCDEFCGA, ABCFEDCGA, dan lainnya.

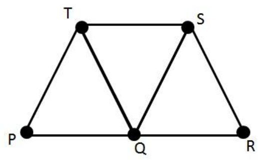
Lintasan euler merupakan sirkuit berarti **graph euler**. **Contoh :**



Gambar 4.5

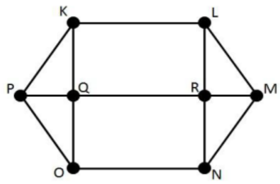
Lintasan euler : ABEDCB, BCDEBA, dan lainnya.

Lintasan euler tidak termasuk sirkuit atau graph tidak memiliki sirkuit euler. Sehingga graph merupakan **graph semi euler**. **Contoh :**



Gambar 4.6

Lintasan euler. SRQSTQPT, SRQSTPQT, dan lainnya. Lintasan euler tidak termasuk sirkuit atau graph tidak memiliki sirkuit euler. Sehingga graph merupakan **graph semi euler**. **Contoh :**



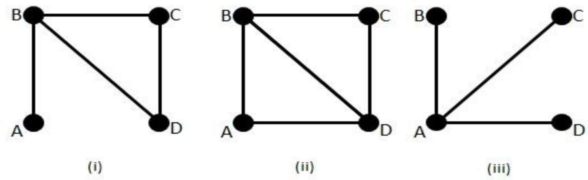
Gambar 4.7

$d(K) = d(L) = d(M) = d(P) = d(O) = d(N) = 3$ berdasarkan teorema 2 dapat dikatakan graph di samping adalah **graph non euler,** karena memiliki vertex berderajat ganjil lebih dari dua.

4.2 Graph Hamilton

Graph hamilton diambil dari nama Sir William Rowan Hamilton. Suatu graph terhubung adalah **graph hamilton** memuat sirkuit yang melalui setiap *vertex* di dalam graph tepat satu kali, kecuali verteks asal (sekaligus *verteks* akhir) yang dilalui dua kali disebut sirkuit hamilton. Lintasan hamilton adalah lintasan yang melalui tiap *vertex* di dalam graph tepat satu kali.

Graph yang hanya memiliki lintasan hamilton disebut **graph semi hamilton**. **Contoh 1 :**



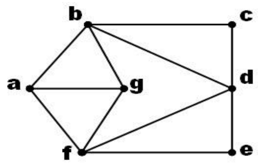
Gambar 4.8

(i) Graph yang memiliki lintasan hamilton (misalnya ABCD)

(ii) Graph yang memiliki sirkuit hamilton (misalnya DCBAD)

(iii) Graph yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit hamilton

Contoh :

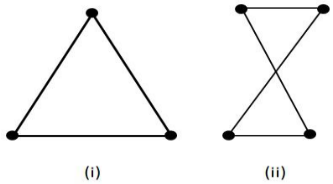


Gambar 4.9

Graph diatas memiliki sirkuit Hamilton yaitu **bcdefgab**, sehingga graph diatas merupakan graph hamilton.

Teorema 1

Syarat cukup (jadi bukan syarat perlu) supaya graph sederhana G dengan $n \geq 3$ buah *vertex* adalah graph hamilton ialah bila tiap *vertex* paling sedikit $\frac{n}{2}$ (yaitu, $d(v) \geq \frac{n}{2}$ untuk setiap simpul v di G). **Contoh :**



Gambar 4.10

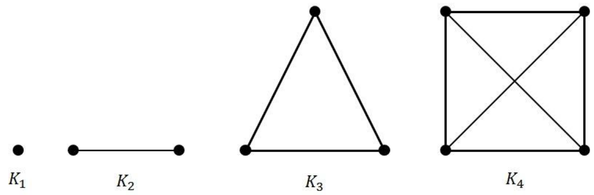
(i) $n = 3$, dengan tiap vertex memiliki $d(v) = 1{,}5 \approx 2$

(ii) $n = 4$, dengan tiap vertex memiliki $d(v) = 2$

Teorema 2

Setiap graph lengkap adalah graph hamilton. Ingat : graph lengkap dengan n buah simpul dilabangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graph lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$

Contoh :

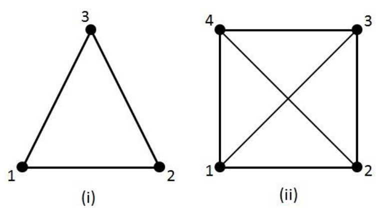


dan seterusnya

Gambar 4.11

Teorema 3

Di dalam graph lengkap G dengan n buah vertex $(n \geq 3)$, terdapat $\frac{(n-1)!}{2}$ buah sirkuit hamilton. **Contoh :**



Gambar 4.12

(i) Graph lengkap $n = 3$, memiliki sirkuit hamilton 1 yaitu 1231.

(ii) Graph lengkap $n = 4$, memiliki sirkuit hamilton 3 yaitu, 12341, 24312, dan 31423.

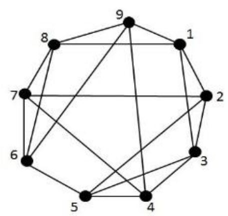
Teorema 4

Di dalam graph lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$ dan n ganjil), terdapat $\frac{(n-1)}{2}$ buah sirkuit hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $\frac{(n-2)}{2}$ buah sirkuit hamilton yang saling lepas. **Contoh :**

(persoalan pengaturan tempat duduk). Sembilan anggota sebuah klub yang bertemu tiap hari untuk makan siang pada sebuah meja bundar. Mereka memutuskan duduk sedemikian sehingga setiap anggota mempunyai tetangga duduk berbeda setiap makan siang. Berapa hari pengaturan tersebut dapat dilaksanakan?

Jumlah pengaturan tempat duduk yang berbeda adalah $\frac{(9-1)}{2} = 4$

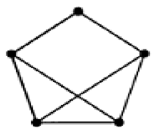
Graph yang merepresentasikan :



Gambar 4.13

Teorema 5

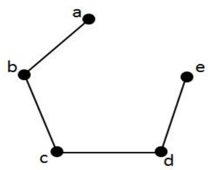
Misalkan G adalah graph terhubung sederhana dengan n titik, dengan $n \geq 3$ dan $deg\ v\ + \deg w \geq n$. Untuk tiap-tiap pasangan titik yang tidak berdekatan v dan w, maka G adalah graph hamilton. Contoh : Untuk graph yang ditunjukkan pada gambar berikut $deg\ v\ +\ deg\ w \geq 5$ untuk masing-masing *vertex* yang tidak berdekatan v dan w. Jadi menurut teorema 5 graph ini adalah graph hamilton.



Gambar 4.14

Teorema 6

Misalkan G adalah graph sederhana dengan n *vertex*. Jika jumlah dari derajat masing-masing *vertex* di G paling sedikit $n - 1$, maka ada lintasan hamilton di G. Contoh :



Gambar 4.15

$d(a) + d(b) + d(c) + d(d) + d(e) = 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$

jumlah derajat dari masing-masing vertex lebih dari $n - 1 = 5 - 1 = 4$

4.3 Perbedaan Graph Euler dan Hamilton.

1. Dalam graph euler semua garis harus dilalui tepat satu kali. Sedangkan semua titiknya boleh dikunjungi lebih dari satu kali.
2. Dalam graph Hamilton semua titiknya harus dikunjungi tepat satu kali dan tidak harus melalui semua garis.

4.4 Ringkasan

1. Lintasan pada graph G dikatakan lintasan euler, ketika melalui setiap sisi di graph tepat satu kali.
2. Graph yang mempunyai lintasan euler disebut graph semi euler.
3. Lintasan euler yang kembali ke simpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup maka disebut sirkuit euler.
4. Graph yang tidak memiliki lintasan euler dan sirkuit euler merupakan **graph non euler**.
5. Suatu graph terhubung adalah **graph hamilton** memuat sirkuit yang melalui setiap *vertex* di dalam graph tepat satu kali, kecuali verteks asal (sekaligus *verteks* akhir) yang dilalui dua kali disebut sirkuit hamilton.
6. Lintasan hamilton adalah lintasan yang melalui tiap *vertex* di dalam graph tepat satu kali.

4.5 Soal-soal

1. Jelaskan apa yang dimaksud dengan

   a. Trail Euler

   b. Graph Euler

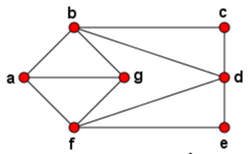
   c. Lintasan Hamilton

   d. Sikel Hamilton

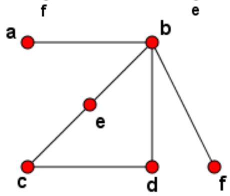
   e. Graph Hamilton

2. Tentukan Trail Euler dari graph berikut!

   a.

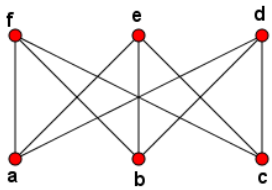


   b.

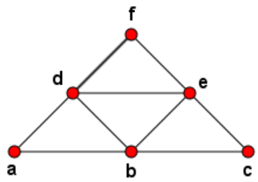


3. Dari graph berikut ini, manakah yang merupakan graph Euler ? Jelaskan !

   a.



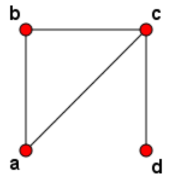
   b.



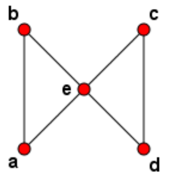
4. Gambarkan dua graph Euler dan tunjukkan trail Euler tertutupnya !

5. Tentukan lintasan Hamilton dari graph berikut !

   a.

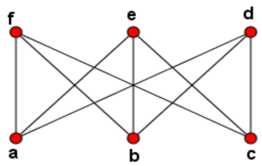


   b.

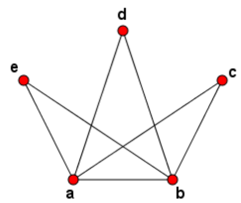


6. Gambarkan dua graph Hamilton dan tunjukkan sikelnya !

7. Dari graph berikut ini, manakah yang merupakan graph Euler ? Jelaskan !



i



ii

8. Gambarkan

   a. Suatu Graph Euler yang bukan graph Hamilton!

   b. Suatu Graph Hamilton yang bukan graph Euler!

9. Jelaskan keterhubungan graph Euler dan graph Hamilton !

10. Gambarlah dua graph Euler yang juga merupakan graph Hamilton!

BAB 5

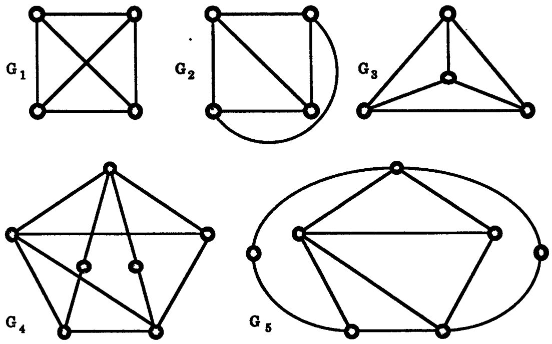
GRAPH BIDANG DAN PLANNAR

5.1 Pengertian Graph Bidang dan Plannar

Graph yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling memotong (bersilangan) disebut sebagai graph planar, jika tidak, maka ia disebut graph tak-planar. Suatu graph disebut graph planar jika graph tersebut dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi – sisinya yang berpotongan kecuali di titik dimana keduanya insiden. Graph Bidang adalah graph yang digambarkan pada bidang datar (di kertas, papan tulis, dll) sedemikian rupa sehingga setiap pasang sisi bertemu hanya pada simpul akhirnya (jika mereka bertemu sama sekali). Graph Planar adalah graph yang isomorfik dengan graph bidang, yaitu dapat digambar kembali sebagai graph bidang.

Suatu graph dapat digambarkan dengan beberapa cara, sebagai contoh graph komplit k_4, graph bipartisi komplit $k_{3,3}$ dan graph petersen dapat digambarkan seperti pada gambar 5.1.

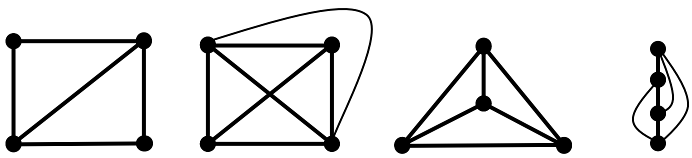
Contoh Graph Planar



Gambar 5.1

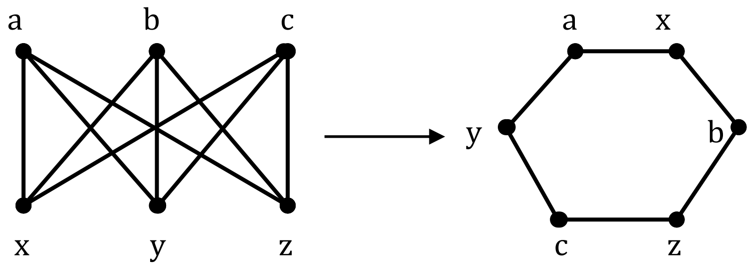
Kita memerlukan menggambar graph dengan tidak ada dua sisi yang saling berpotongan seperti gambar k_4 yang sebelah kanan pada gambar 5.1 penggambaran tersebut belum tentu dapat dilakukan .

Suatu graph G dikatakan plannar jika dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul prsekutuan, gambar tersebut disebut gmbar bidang untuk G. Sebagai contoh graph k_4 adalah plannar. Seperti pada gambar 5.2 merupakan graph bipartit komplit $k_{3,3}$ tidak plannar karena setiap gambar $k_{3,3}$ pasti memuat paling sedikit satu perpotongan sisi. Hal ini dapat ditunjukkan pada gambar sebagai berikut.



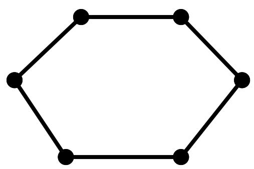
Gambar 5.2 bidang untuk k_4

Graph $k_{3,3}$ memuat suatu cycle dengan panjang 6, sebutlah $axbzcya$ yang harus muncul pada gambar dalam bentuk segi enam, lihat gambar 5.3. masih perlu ditambah tiga sisi az, xz, dan by.



Gambar 5.3

Agar tidak ada perpotongan sisi, tidak lebih satu dari ketiga sisi tersebut yang dapat digambar di dalam (di luar) segi enam. Lihat gambar 5.4. akibatnya tidak mungkin menambahkan tiga sisi az, xc, dan by tanpa menimbulkan perpotongan sisi.

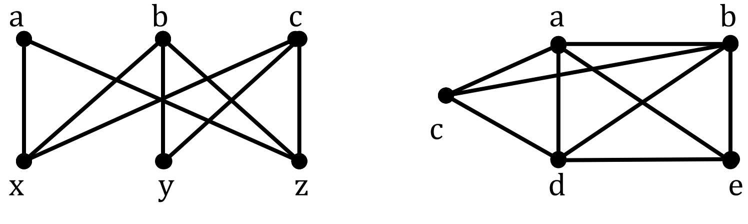


Gambar 5.4

Dengan cara seperti diatas dapat ditunjukkan bahwa k_5 tidak plannar.

Contoh.

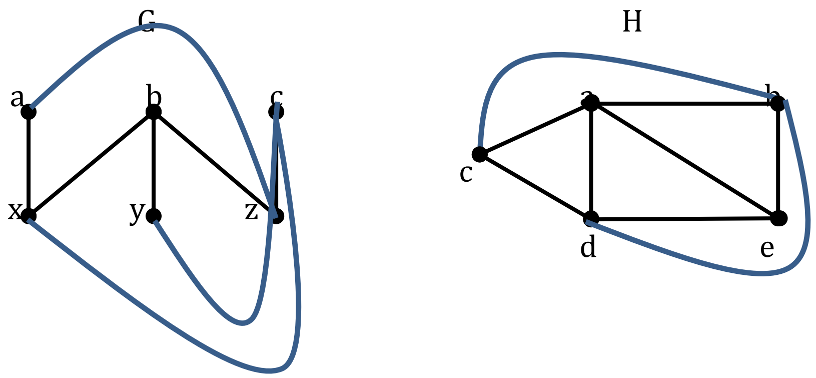
Tunjukkan bahwa graph G dan H berikut ini plannar.



Gambar 5.5

Jawab:

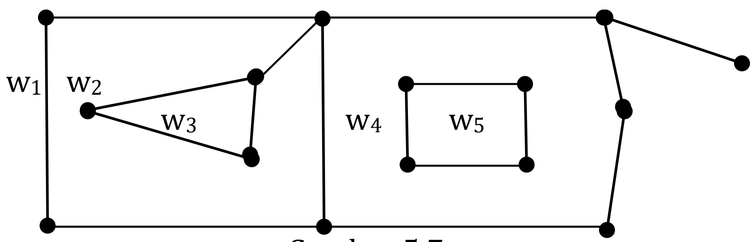
graph G dan H tersebut plannar karena dapat dibuat gambar bidangnnya sebagai berikut.



Gambar 5.6

5.2 Rumus Euler

Jika G adalah graph plannar, maka setiap gambar bidang untuk graph G mungkin membagi bidang menjadi beberapa daerah, satu dari daerah ini daerah tidak terhingga. Jika W adalah suatu daerah, maka derajat dari W, dinyatakan dengan d(w), adalah banyak sisi pada jalan tertutup yang mengelilinginya. Jika semua daerah mempunyai derajat yang sama, misalnya g, maka G dikatakan beraturan daerah dengan derajat g. Sebagai contoh, gambar bidang untuk graph



Gambar 5.7

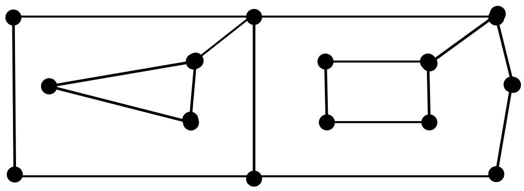
Komplit k_4 mempunyai empat daerah yang masing-masing berderajat 3. Sedangkan graph pada gambar 5.6 mempunyai lima daerah $w_1, w_2, w_3, w_4,\ dan\ w_5$ dengan $d(w_1) = 9,\ d(w_2) = 9,\ d(w_3)3,\ d(w_4) = 9, d(w_5) = 4.$

Teorema 1 (Rumus Euler)

Misalkan G adalah graph plannar terhubung, n, m, dan f berturut-turut menyatakan banyak titik, banyak sisi, dan banyak daerah pada gambar bidang untuk graph G. Maka $n - m + f = 2$.

Contoh :

Tunjukkan keberlakuan rumus euler pada graph G berikut ini.

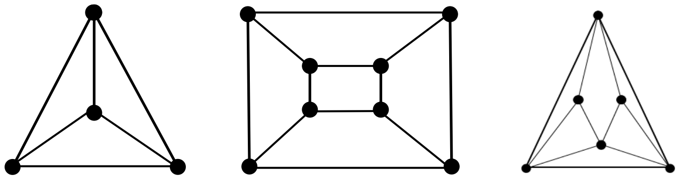


Gambar 5.8

Jawab: Graph G tersebut mempunyai banyak titik $n = 14$, banyak sisi $m = 17$, dan banyak daerah $f = 5$. Karena $14 - 17 + 5 = 2$, maka benar bahwa $n - m + f = 2$.

Teorema 2.

Teorema berikut menyatakan bahwa hanya ada tiga graph dengan syarat sederhana, terhubung, planar, beraturan, dan beraturan daerah. Kelima graph tersebut seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 5.9

Hanya ada tiga graph G yang terhubung dan plannar jika memenuhi

a) G beraturan $-d, \quad d \geq 3$, dan

b) Gambar bidang untuk graph G adalah beraturan daerah dengan derajat $g, \quad g \geq 3$ (Maka G sederhana).

Misalkan n, m, dan f berturut-turut menyatakan banyak titik, sisi, dan banyak daerah pada gambar bidang untuk graph G. Maka $2m = dn = gf, n = \frac{2m}{d}\ dan\ f = \frac{2m}{g}$.

Dengan rumus euler$n - m + f = 2$ diperoleh:

$$\frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{f} = 2,$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{g} = \frac{1}{m}$$

Karena $\frac{1}{m} > 0, maka\ \frac{1}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{g} > 0$

$$\frac{1}{d} > \frac{1}{2} + \frac{1}{g} \quad \text{dan}$$

$$\frac{1}{g} > \frac{1}{2} + \frac{1}{d}$$

Kasus 1: $d = 3\ dan\ g = 3$.

Karena $\frac{1}{m} = \frac{1}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{g} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, maka $m = 6$, sehingga

$$n = \frac{2m}{d} = \frac{12}{3} = 4,$$

$$f = \frac{2m}{g} = \frac{12}{3} = 4$$

Diperoleh tetrahedron (bidang empat beraturan).

Kasus 2: $d = 3\ dan\ g = 4$

Karena $\frac{1}{m} = \frac{1}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{g} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, maka $m = 12$. Sehingga

$$n = \frac{2m}{d} = \frac{24}{3} = 8,$$

$$f = \frac{2m}{g} = \frac{24}{4} = 6$$

Diperoleh Kubus.

Kasus 3: $d = 3\ dan\ g = 5$

Karena $\frac{1}{m} = \frac{1}{d} - \frac{1}{2} + \frac{1}{g} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$, maka $m = 30$. Sehingga

$$n = \frac{2m}{d} = \frac{60}{3} = 20,$$

$$f = \frac{2m}{g} = \frac{60}{5} = 12$$

Diperoleh dodecahedron (bidang 12 beraturan).

5.3 Tes Untuk Kesebidangan

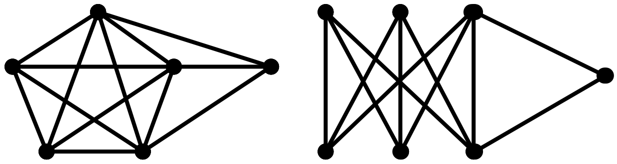
Hal-hal sederhana berikut ini cukup penting dalam pembicaraan kita.

a) Tidak semua graph adalah planar. Kita tahu bahwa k_5 dan $k_{3,3}$ tidak planar.

b) Jika graph G planar, maka setiap graph bagian dari G adalah planar.

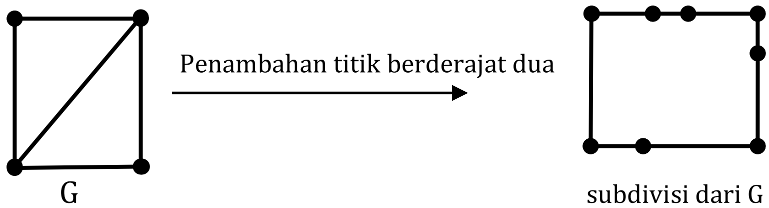
c) Jika G memuat graph bagian yang tidak planar, maka G tidak planar.

Sebagai contoh, kedua graph pada gambar 5.10 tidak planar, yang satu memuat k_5 dan yang lain memuat $k_{3,3}$.



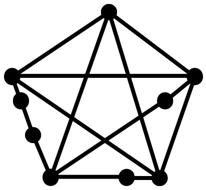
Gambar 5.10

Jika pada suatu graph G yang tidak kosong ditambahkan satu atau lebih titik berderajat dua pada sisinya, maka hasilnya subdivisi (subdivision) dari graph G, lihat gambar 5.11.

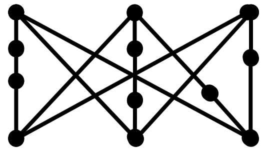


Gambar 5.11

Sebagai contoh, graph pada gambar 5.12 tidak planar, karena yang pertama merupakan subdivisi dari k_5 dan yang kedua merupakan subdivisi dari $k_{3,3}$.



Gambar 5.12



Gambar 5.13

Perhatikan bahwa pernyataan (b) ekivalen dengan pernyataan (c) dan pernyataan (d) ekivalen dengan pernyataan (e). Dari (c) dan (e) dapat disimpulkan bahwa jika graph G memuat subdivisi k_5 atau subdivisi $k_{3,3}$ sebagai graph bagiannya, maka G tidak plannar. Sebagai contoh, graph pada gambar 5.13 tidak planar karena memuat subdivisi $k_{3,3}$. juga berlaku sebaliknya, yaitu jika graph G tidak memuat subdivisi k_5 atau subdivisi $k_{3,3}$, maka G planar.

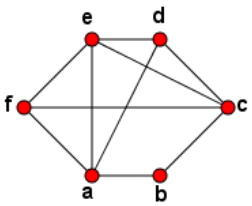
5.4 Ringkasan

1. Graph yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling memotong (bersilangan) disebut sebagai graph planar, jika tidak, maka ia disebut graph tak-planar.
2. Graph Bidang adalah graph yang digambarkan pada bidang datar (di kertas, papan tulis, dll) sedemikian rupa sehingga setiap pasang sisi bertemu hanya pada simpul akhirnya (jika mereka bertemu sama sekali).

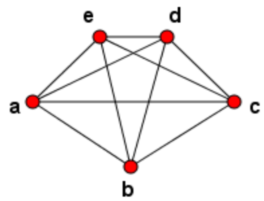
3. Graph Planar adalah graph yang isomorfik dengan graph bidang, yaitu dapat digambar kembali sebagai graph bidang.
4. Jika G adalah graph plannar, maka setiap gambar bidang untuk graph G mungkin membagi bidang menjadi beberapa daerah, satu dari daerah ini daerah tidak terhingga.
5. Jika W adalah suatu daerah, maka derajat dari W, dinyatakan dengan d(w), adalah banyak sisi pada jalan tertutup yang mengelilinginya. Jika semua daerah mempunyai derajat yang sama, misalnya g, maka G dikatakan beraturan daerah dengan derajat g.
6. Rumus Euler yaitu Misalkan G adalah graph plannar terhubung, n, m, dan f berturut-turut menyatakan banyak titik, banyak sisi, dan banyak daerah pada gambar bidang untuk graph G. Maka $n - m + f = 2$.

5.5 Soal-soal

1. Apakah yang kamu ketahui tentang Graph planar dan Graph bidang? Simpulkan keterhubungan antara graph planar dan graph bidang !
2. Apakah graph berikut ini planar ? jika iya gambarkan graph bidangnya, jika tidak berikan alasamu !

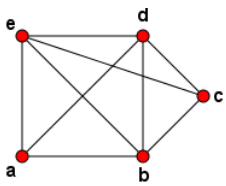


(i)

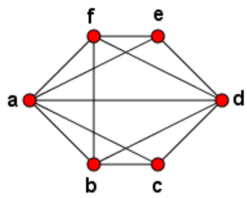


(ii)

3. Tunjukkan bahwa graph berikut planar !



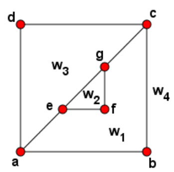
(i)



(ii)

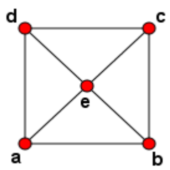
4. Apakah isi dari Teorema Rumus Euler ?

5. Tunjukkan keberlakuan rumus Euler pada graph berikut !

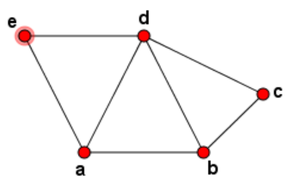


6. Tentukan banyak daerah dari graph berikut!

a.



b.



7. Sebutkan beberapa *corollary* (akibat) dari Rumus Euler !

8. Adakah graph sederhana, planar, dengan

   a. Lima titik dan sembilan sisi ?

   b. Lima titik dan sebelas sisi ?

9. Sebutkan lima graph berdasarkan teorema yang menyatakan bahwa hanya ada lima graph dengan syarat sederhana, terhubung, planar, beraturan, dan beraturan daerah !

10. Tuliskan isi dari teorema Kuratowski!

BAB 6

KONSEP PEWARNAAN GRAPH

(*GRAPH COLORING*)

Pewarnaan graph adalah kasus khusus dari pelabelan graph. Pelabelan disini maksudnya, yaitu memberikan warna pada titik-titik pada batas tertentu.

Ada tiga macam pewarnaan graph.

6.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

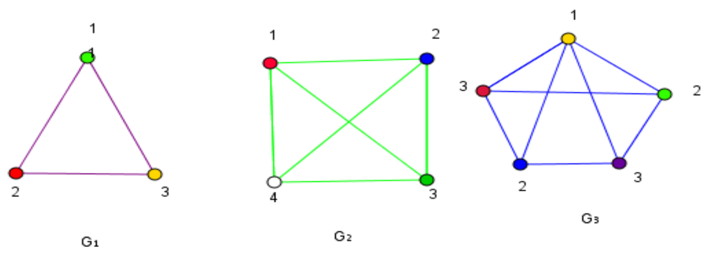
Akan membicarakan permasalahan yang berhubungan dengan pewarnaan titik. Permasalahan tersebut erat kaitannya dengan masalah pewarnaan peta, yaitu masalah menentukan banyak warna minimun yang diperlukan untuk mewarnai peta sehingga dua daerah yang bertetangga mempunyai warna berlainan.

Misalkan G graph tanpa loop. Suatu pewarnaan-k untuk graph G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua titik di G sehingga setiap pasangan titik yang terhubung langsung di beri warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan -k, maka G dikatakan dapat di warnai dengan k warna.

Bilangan khromatik (*chromatik number*) dari graph G, dinyatakan dengan χ(G), adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna. Biasanya warna- warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graph dinyatakan dengan $1,2,3,\ldots\ldots,k$. Jelas bahwa $\chi(\mathrm{G}) \leq |v(G)|$. Sedangkan cara yang mudah untuk menentukan batas bawah dari $\chi\ (G)$ adalah dengan mencari graph bagian komplit yang terbesar di G. Contoh:

Untuk graph G_1,karena $|v(G_1)|=$ 3, maka $\chi(G_1) \leq 3$. untuk G_2, karena $|v(G_2)| = 4$, maka $\chi(G_2) \leq 4$. sedangkan titik pada G_1 *atau* G_2 saling terhubung langsung, akibatnya

$\chi(G_1) \geq 3\ dan\ \chi(G_2) \geq 4. jadi\ \chi(G_1) = 3\ dan\ \chi(G_2) = 4$. Untuk graph $G_3, \chi(G_3) \leq 3$ karena 3 warna cukup untuk mewarnainya karena G_3 memuat graph komplit $K_{3,}$ maka $\chi(G_3) \geq 3$, akibatnya $\chi(G_3) = 3$.



Gambar 6.1

Pada definisi di atas kita hanya memperhatikan graph tanpa loop, sebab dua titik yang terhubung langsung *(adjacent)* harus diberi warna yang berlainan, sedangkan pada loop suatu titik terhubung langsung ke dirinya sendiri, tidak mungkin satu titik di beri dua warna berlainan, perhatian kita dapat di batasi pada graph tanpa sisi rangkap, sebab ada sisi rangkap atau sisi bukan rangkap yang menghubungkan dua titik tidak mempengaruhi bilangan khromatik.

Batas- batas $\chi(G) \leq |v(G)|$ di Teorema atas tidak begituh baik; ada batas yang lebih baik, seperti pada teorema berikut ini.

Teorema 1.

Jika G graph sederhana dengan derajat titik maksimun Δ, maka $\chi(G) \leq \Delta + 1$

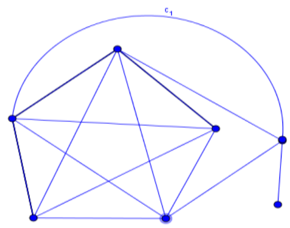
Bukti

Misalkan banyak titik di G adalah n. Pernyataan kita buktikan dengan induksi matematika pada n. Jika $n = 1$, maka G adalah K_1 dengan $\chi\,(G) = 1\ dan\ \Delta = 0$, berarti pernyataan benar untuk $n = k + 1$ titik . Andaikan pernyataan benar untuk $n = k$ titik . misalkan G graph dengan $k + 1$ titik dan dengan derajat maksimun Δ, dan misalkan H adalah graph yang diperoleh dari G dengan menghilangkan suatu titik v dan semua sisi yang terkait dengan v di G. Maka $|v(H)| = K$ dan dengan derajat maksimum Δ atau kurang dari Δ, dari pengandaian $\chi(H) \leq \Delta + 1$. graph G dapat di warnai sebagai berikut. Warnai semua titik selain titik v di G dengan warna warna sama dengan warna-warna di H dan v diwarnai dengan warna yang berbeda dengan warna –

warna titik yang terhubung langsung dengan v (paling banyak Δ titik). Jadi pernyataan benar untuk graph dengan $K + 1$ titik.

Teorema 2 (*brooks*).

Misalkan G graph sederhana, terhubung,dan dengan derajat titik maksimum Δ. Jika G bukan graph komplit dan bukan cycle dengan banyak titik ganjil, maka $\chi(G) \leq \Delta$. Contoh



Gambar 6.2

Perhatikan graph pada gambar. graph G mempunyai derajat titik maksimun $\Delta = 5$ dan G memenuhi syarat teorema Brooks, maka $\chi(G) \leq 5$. Graph G memuat graph komplit k_5 yang berakibat $\chi(G) \geq 5$. Jadi $\chi(G) = 5$.

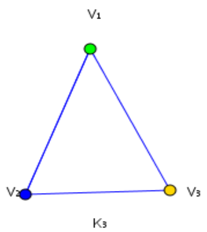
Batas atas pada teorema Brooks tidak bagus untuk graph bipartisi. Sebagai contoh, misalkan G graph bipartisi $K_{1000,1000}$, Maka menurut teorema Brooks $\chi(G) \leq 1000$, kenyataannya $\chi(G) = 2$.

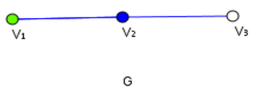
6.2 Suku Banyak Khromatik

Pada pembahasan sebelumnya, terlihat bahwa batas atas dan batas bawah yang kita bicarakan tidak selalu memberikan perkiraan yang baik untuk bilangan khromatik. Akan dibahas suatu cara untuk menentukan bilangan khromatik suatu graph. Cara ini melibatkan pengertian suku banyak khromatik yang didefinisikan sebagai berikut. Misalkan G suatu graph sederhana. Suku banyak khromatik (*chromatic polynomial*) dari graph G, dinyatakan dengan $P_G(K)$, adalah banyak cara pewarnaan –k untuk graph G.

Sebagai contoh, perhatikan gambar berikut. graph komplit K_3 akan diwarnai dengan k warna.

Titik pertama dapat diwarnai dengan k





Gambar 6.3

cara, titik kedua dapat diwarnai dengan $k - 1$ cara, dan titik ke tiga dapat diwarnai dengan k – 2 cara. Akibatnya k_3 dapat diwarnai dengan $k(k-1)(k-2)$, cara atau

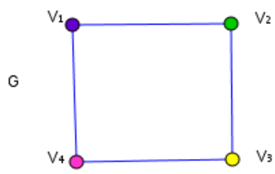
$P_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2)$.

Graph G akan diwarnai dengan K warna. Titik pertama dapat di warnai dengan k cara, titik kedua dapat diwarnai dengan $k - 1$ cara, dan titik ketiga dapat diwarnai dengan k– 1 cara. Akibat G dapat diwarnai dengan $k(k-1)(k-1) cara, atau\ P_G\,(K) = (k-1)(k-1) = k(k-1)^2$.

Dengan cara seperti diatas, mudah difahami bahwa untuk sembarangan pohon T dengan n titik berlaku

$P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$. Contoh :

Tentukan suku banyak khromatik dari graph berikut ini.



Jawab:

jika tersedia k warna, maka titik v_1 dapat di warnai dengan k cara, titik v_2 dapat diwarnai dengan k – 1 cara, dan v_4 dapat diwarnai dengan $k-1$ cara. Untuk mewarnai v_3, caranya yang tergantung dari warna $v_2\ dan\ v_4$. Jika $v_2\ dan\ v_4$ warnanya berlainan, maka v_3 dapat diwarnai dengan k – 2 cara. Titik v_4 dapat diwarnai dengan $k - 1$ cara, yaitu satu cara dengan warna sama dengan titik $v_3\ dan\ k-2$ cara dengan warna berlainan dengan warna v_3. Jadi suku banyak khromatik untuk graph G di atas adalah

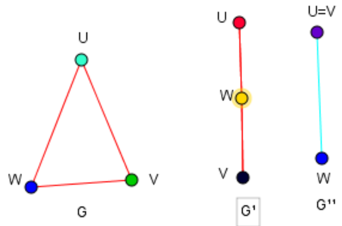
$$P_G(k) = k(k-1)(1)(k-1) + k(k-1)(k-2)(k-2)$$

$$= k(k-1)((k-1) + (k-2)^2)$$

$$= k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

Pada waktu kita mencari $P_G(k)$ seperti diatas, banyak cara mewarnai suatu titik tidak boleh nol, dengan demikian dapat disimpulkan bahwa bilangan khromatik χ (G) adalah bilangan bulat K terkecil sehingga $P_G(k) > 0$. Akibatnya, jika kita dapat menemukan $P_G(k)$, maka kita dapat menemukan χ (G). Pada contoh x(G) = 2 karena $P_G(1) = 0 \; dan \; P_G(2) = 2 > 0$

Ada cara yang lebih mudah untuk mencari suku banyak khromatik pada kasus sepertipada contoh .cara ini melibatkan penghapusann dan pengkerutan sisi. Perhatikan graph pada gambar berikut ini . graph G' diperoleh dari G dengan menghapus sisi uv,



Gambar 6.4

Sedangkan graph G'' diperoleh dengan pengkerutan sisi uv. Kita tahu bahwa

$P_G(k) = k(k-1)(k-2)$

$P_{G'}(k) = k(k-1)^2$

$P_{G''}(k) = k(k-1)$ sedangkan

$k(k-1)(k-2) = k(k-1)^2 - k(k-1), berarti$

$$P_G(k) = P_{G'}(k) - P_{G''}(k)$$

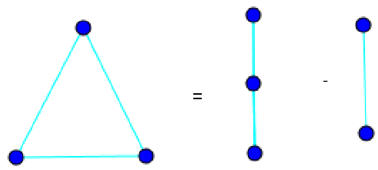
Hal ini juga berlaku untuk hal yang lebih umum, seperti pada teorema berikut ini.

Teorema 3 (teorema penghapusan dan pengkerutan).

Misalkan G graph sederhana, dan misalkan $G' dan\ G''$ berturut turut adalah graph yang diperoleh dari G dengan penghapusan dan pengkerutan suatu sisi di G. Maka $P_G(k) = P_{G'}(k) - P_{G''}(k)$.

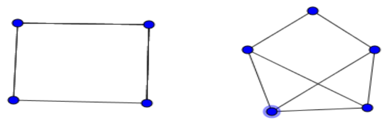
Bukti . misalkan uv adalah sisi yang dihapus dari graph G sehingga menghasilkan graph G'. Banyak cara pewarnaan –k untuk graph G' dengan u dan v di warnai dengan warna berlainan tidak berubah jika u dan v di hubungkan oleh satu sisi. Demikian pula, banyak cara pewarnaan – k untuk graph G' dengan u dan v diwarnai dengan warna sama tidak berubah jika u dan v diimpitkan menjadi satu, sehingga sama dengan banyak cara pewarnaan – k untuk graph G''. Sehingga di peroleh $P_G(k) = P_{G'}(k) - P_{G''}(k)$.

Teorema penghapusan dan pengkerutan dapat untuk menentukaan suku banyak khromatik. Suku banyak khromatik dari suatu graph dapat dinyatakan dengan suku banyak khromatik dari dua graph yang mempunyai banyak titik lebih sedikit. Agar lebih mudah, dalam penulisan dapat digunakan gambar graphnya di samping suku banyak khromatiknya. Sebagai contoh seperti yang terlihat pada ganbar 6.5.



Gambar 6.5

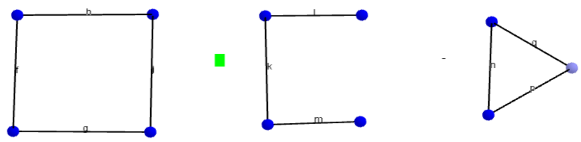
Contoh untuk graph pada gambar berikut ini cari lah suku banyak khromatiknya, dan dengan menggunakan suku banyak khromatik tersebut carilah bilangan khromatiknya.



G H

Jawab

(a)

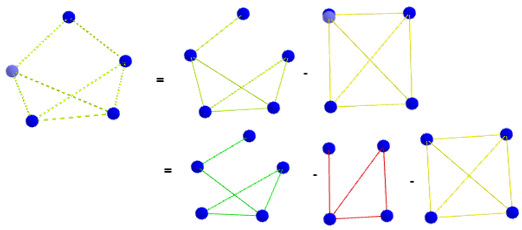


Diperoleh

$$P_G(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2)$$
$$= k(k-1)((k-1)^2 - (k-2))$$
$$= k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

Dan $x(G) = 2$

(b)



diperoleh

$P_G(k) = k(k-1)^3(k-1) - k(k-1)^2(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3)$

$= k(k-1)(k-2)((k-1)^2 - (k-1) - (k-3))$

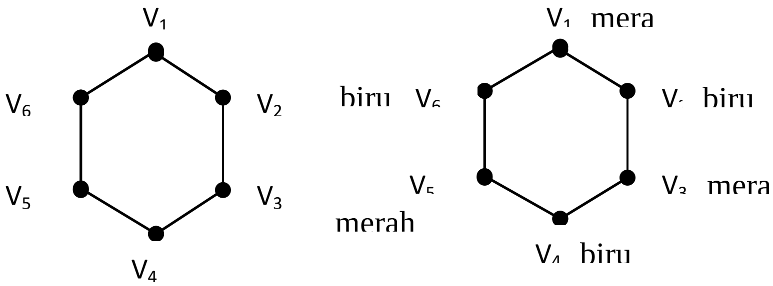
$= k(k-1)(k-2)(k^2 - 4k + 5)$

Dan χ (G) = 3

Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik pada suatu graph G disebut **bilangan khromatik graph G**, yang dilambangkan dengan $\boldsymbol{\chi(G)}$ **.** Suatu graph yang mempunyai bilangan kromatis k dilambangkan dengan $\boldsymbol{\chi(G) = k}$.

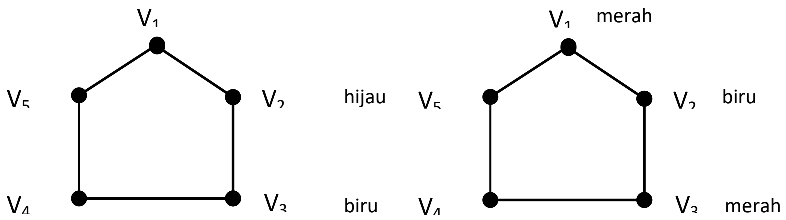
Untuk menentukan batas bawah dari $\boldsymbol{\chi(G)}$ adalah dengan mencari graph bagian komplit yang terbesar di G. Graph sikel sebagai acuan untuk pewarnaan titik pada graph yang lainnya, yakni graph roda, graph gear, graph helm, graph helm tertutup dan graph bunga. menentukan rumus dari bilangan kromatik pada pewarnaan titik secara mudah pada graph-graph tersebut sekaligus pembuktian dari rumus-rumus tersebut. Contoh:

- Graph sikel genap



Gambar 6.6

- Graph sikel ganjil

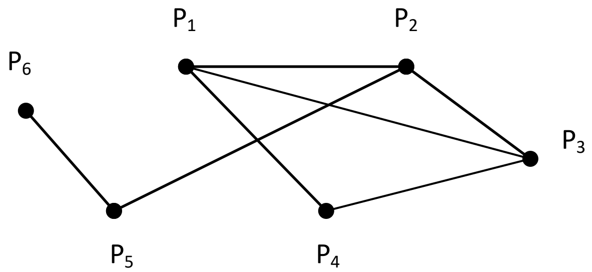


Gambar 6.7

Rumus umum untuk pewarnaan titik pada graph Sikel adalah = 2 untuk n genap dan = 3 untuk n ganjil.

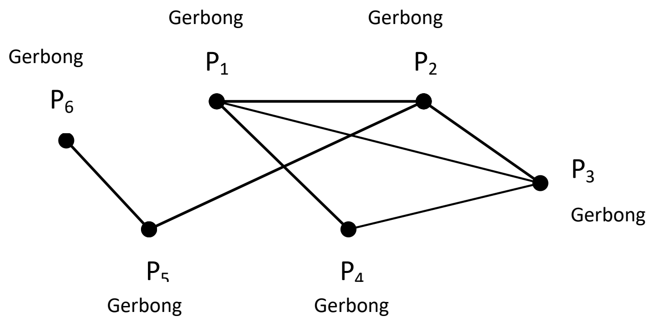
Contoh :

Andaikan sebuah pabrik kimia ingin mengirimkan hasil produksinya dengan menggunakan kereta api. Sesuai dengan ketentuan yang ada, tidak semua zat kimia ini dapat dimuat dalam satu kereta, karena kemungkinan bercampurnya zat itu yang dapat menyebabkan terjadinya reaksi berupa ledakan yang membahayakan. Bagaimana zat-zat kimia ini dapat dikirim? Dengan maksud meminimumkan biaya, pabrik itu ingin menggunakan gerbong kereta api sesedikit mungkin. Berapa banyaknya gerbong kereta api itu? Pada Contoh di atas ada objek (hasil zat kimia) dan ada keterhubungan (tidak dapat dimuat dalam satu gerbong kereta) di antara objek itu. Karena hal ini merupakan ide dasar suatu graph, maka dapat disajikan dalam bentuk graph. Pada contoh di atas, titik-titiknya adalah zat kimia dan sisinya menghubungkan zat-zat kimia yang tidak dapat diangkut dalam gerbong kereta yang sama. Sebagai ilustrasi, diasumsikan bahwa pada contoh 1 ada enam zat kimia P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, dan P_6 . Serta P_1 dengan P_2, P_3, atau P_4 tidak dapat diangkut dalam kereta yang sama, juga P_2 dengan P_3 atau P_5, P_3 dengan P_4, dan P_5 dengan P_6. Graph yang menyajikan hal ini dapat dilihat pada Gambar 6.8, yang titik-titiknya menunjukkan enam zat kimia dan sisinya menghubungkan pasangan zat kimia yang tidak dapat dimuat dalam gerbong kereta yang sama.



Gambar 6.8

Berapa banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan? Dalam graph pada Gambar 6.8, zat kimia yang disajikan dengan titik berdekatan harus dimuat dalam gerbong kereta yang tidak sama. Misal: zat P_1 dan P_2 berdekatan, misalkan zat P_1 diletakkan pada gerbong kereta 1, kereta lain diperlukan untuk memuat P_2, katakan gerbong kereta 2. Karena P_3 berdekatan P_1 dan P_2, maka diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_3, katakan gerbong kereta 3. Tetapi tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_4, gerbong kereta 2 dapat digunakan lagi. Demikian pula halnya, tidak diperlukan gerbong kereta lain lagi untuk P_5, karena gerbong kereta 1 atau 3 dapat digunakan lagi. Misalnya dipilih gerbong kereta 1, maka untuk P6 dipilih gerbong kereta 2 atau 3, katakan gerbong kereta 2. Graph pada Gambar 6.8 menunjukkan bagaimana titik-titik itu diberi nama (label) sehingga zat kimia yang tidak dapat berada bersama, dimuat dalam gerbong kereta berbeda. Juga karena P_1, P_2, dan P_3 saling berdekatan, maka paling sedikit harus digunakan tiga gerbong kereta berbeda. Sehingga banyak minimum gerbong kereta yang harus digunakan ada tiga.



Gambar 6.9

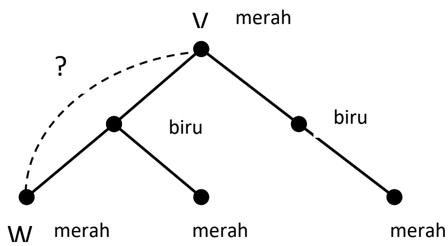
Apa yang telah dilakukan di atas, adalah memberi label pada titik-titik graph sehingga titik yang berdekatan mendapatkan label yang berbeda. Ide ini sering terjadi dalam teori graph, dan label ini disebut warna. Mewarnai sebuah graph berarti memberi warna pada setiap titik graph, sedemikian hingga titik yang berdekatan mendapat warna berbeda. Menanyakan banyak minimum gerbong kereta yang diperlukan pada contoh 1 adalah sama seperti menanyakan banyak minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai graph pada Gambar 6.9, dengan warna mewakili gerbong kereta.

Teorema 1

Suatu graph G tidak memiliki sikel yang panjangnya ganjil, jika dan hanya jika G dapat diwarnai dengan 2 warna.

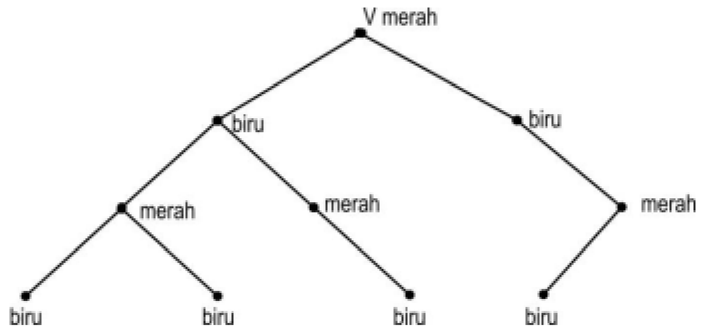
Bukti

Seperti uraian di atas, bila G memiliki sikel yang panjangnya ganjil, maka pewarna G membutuhkan paling sedikit 3 warna. Sekarang andaikan G tidak memiliki sikel yang panjangnya ganjil. Pilih suatu titik V yang diberi warna merah. Kemudian pada setiap titik yang berdekatan dengan V diberi warna biru. Sekarang, pada titik-titik yang berdekatan dengan titik yang baru diberi warna biru itu, diberi warna merah. Dapatkah salah satu dari titik yang berwarna merah ini, katakan titik W, berdekatan dengan titik V yang juga berwarna merah?



Gambar 6.10

Terlihat bahwa jika V dan W berdekatan, maka akan ada sikel yang panjangnya 3. Dengan demikian, setiap titik lain yang baru saja diwarnai warna merah tidak berdekatan dengan titik yang berwarna merah, karena jika tidak demikian berarti ada sikel yang panjangnya ganjil. Berikutnya, titik yang berdekatan dengan yang baru saja diwarnai warna merah diberi warna biru. Hal ini diperlihatkan pada Gambar 6.11



Gambar 6.11

Teorema 2

Bilangan khromatik dari graph G tidak dapat lebih satu dari derajat maksimum titik-titik dari G.

Bukti

Misalkan k adalah derajat maksimum titik dari G. Akan ditunjukkan bahwa G dapat diwarnai dengan menggunakan $k + 1$ warna $C0 , \ldots , Ck$. Mulamula titik V dipilih dan diberi warna C_0 . Kemudian, beberapa titik W lain dipilih. Karena paling banyak ada k titik yang berdekatan dengan W dan ada paling sedikit $k + 1$ warna yang tersedia, maka paling sedikit ada satu warna (dapat lebih banyak) yang belum digunakan untuk mewarnai titik yang berdekatan dengan W. Pilih warna itu. Proses ini dapat dilanjutkan sampai semua titik dari G mendapat warna.

Algoritma Welsh dan Powell Algoritma ini memberikan cara mewarnai sebuah graph dengan memberi label titik-titiknya sesuai dengan derajatnya.

1. Beri label titik $V1, V2, \ldots, Vn$ sedemikian hingga $derajat\ (V1)\ > derajat\ (V2)\ > \ldots >\ derajat\ (Vn)$
2. Tandailah titik berderajat terbesar dengan tanda angka 1. Kemudian tanda ini secara berurutan digunakan untuk menandai setiap titik lainnya yang tidak berdekatan dengan titik-titik yang telah bernomor sama
3. Ulangilah langkah 2 dengan warna kedua, ketiga, dan seterusnya sampai semua titik bertanda.

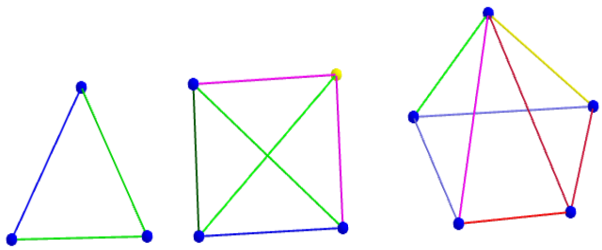
6.3 Pewarnaan Sisi

Misalkan G graph tanpa loop. Suatu pewarnaan –sisi-k untuk garph G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasan sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan – sisi-k , maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna.

Indeks khromatik (*chromatik index*) dari graph G, dinyatakan dengan x'(G), adalah bilangan k terkecil sehingga sisi di G dapat diwarnai dengan k warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai sisi-sisi suatu graph dinyatakan dengan $1,2,3,\ldots\ldots\ldots,k$. Jelas bahwa $\chi'(G) \leq |E(G)|$, dan jika derajat titik maksimun di G adalah $\Delta(G)$, Maka $X'(G) \geq \Delta$ (G). untuk graph cycle dengan n titik, sebutkan C_n, jelas bahwa $\chi'(c_n) = 2$ untuk n genap dan $\chi'(C_n) = 3$ untuk n ganjil.

Contoh

Tentukan indeks khromatik untuk graph pada gambar

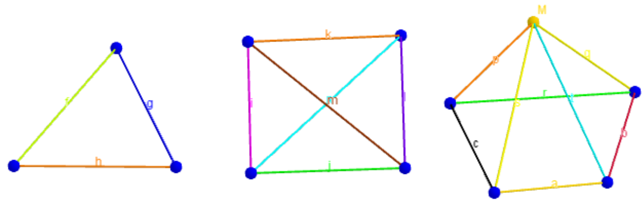


G1 *G2* *G3*

Jawab:

untuk graph G_1 jelas bahwa $\chi'(G_1) = 3$. Untuk $G_2, \chi'(G_2) \geq 3$ $karena$ $\Delta(G_2) = 3, dan$ $\chi'(G_2) \leq 3$ karena sisi di G_2 dapat di warnai dengan 3 warna seperti pada gambar. Akibat $\chi'(G_2) = 3$.

Untuk $G_3, \chi'(G_3) \geq 4$ karena $\Delta(G_3) = 4$, dan $\chi'(G_3) \leq 4$ karena sisi – sisi di G_2 dapat diwarnai dengan 4 warna seperti pada gambar. Akibat $\chi'(G_3) = 3$.



Seperti pada pewarnaan titik, definisi diatas hanya untuk graph dengan tampa loop. Tetapi disini kita juga memperhatikan graph dengan sisi rangkap. Selanjutnya jelas bahwa jika Δ adalah derajat titik maksimun di G, maka $\chi'(G) \geq \Delta$. Juga jelas bahwa $\chi'(G) \leq |E(G)|$. tetapi kedua batas ini tidak selalu bagus . ada tahun 1963 Vizing mendapatkan hasil yang bagus, buktinya tidak sederhana.

Teorema (*Vizing*)

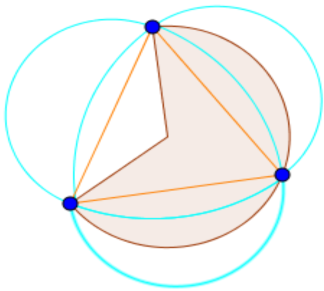
Jika G adalah graph sederhana dengan derajat titik maksimun $\Delta, maka\ \Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$

Teorema Vizing menyatakan bahwa untuk sembarangan graph sederhana G berlaku $\chi'(G) \geq \Delta$. Atau $\chi'(G) = \Delta + 1$. berikut ini adalah perluasan dari teorema Vizing.

Teorema (perluasan teorema *Vizing*).

Jika G adalah graph dengan derajat titik maksimun Δ dan h adalah banyak maksimun sisi- sisi yang menghubungkan sepasang titik,maka $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + h$.

Sebagai contoh pada gambar $\Delta = 8$ dan h = 4, sehingga $8 \leq \chi'(G) \leq 12$. Kenyataan nya $\chi'(G) = 11$.



Gambar 6.12

Dua teorema berikut berturut –turut untuk graph komplit dan untuk graph bipartisi.

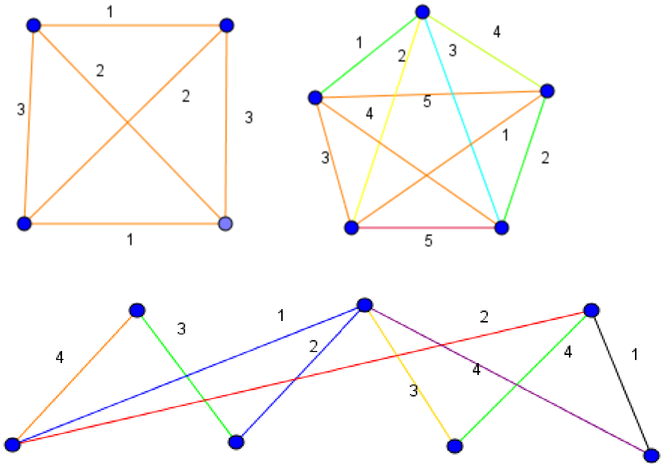
Teorema 5. untuk graph komplit K_n berlaku

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, untuk\ n\ genap \\ n,\ untuk\ n\ ganjil. \end{cases}$$

Teorema (*Konig*).

Jika G adalah graph bipartisi dengan derajat titik maksimun Δ ,maka $\chi'(G) = \Delta$.

Sebagai contoh lihat gambar $\chi'(K_4) = 3$, dan $\chi'(K_5) = 5\ sedangkan\ \chi'(G) = 4$

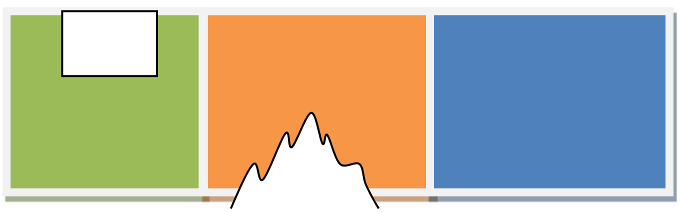


G

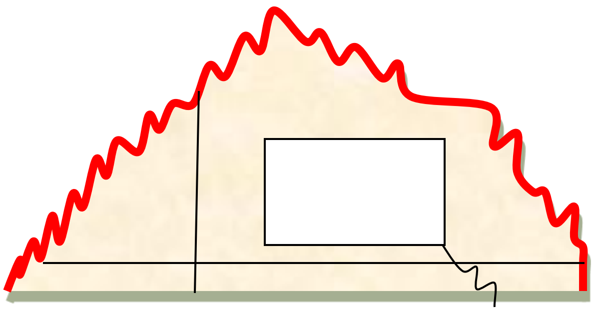
Gambar 6.13

6.4 Pewarnaan Peta

Andaikan kita mempunyai peta suatu daerah seperti terlihat pada gambar . kita akan mewarnai peta – peta P_1 *dan* P_2 (termasuk daerah terluar) sehingga dua daerah yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda. Dapat di periksa bahwa P_1 memerlukan paling sedikit tiga warna, sedangkan P_2 memerlukan paling sedikit empat warna.

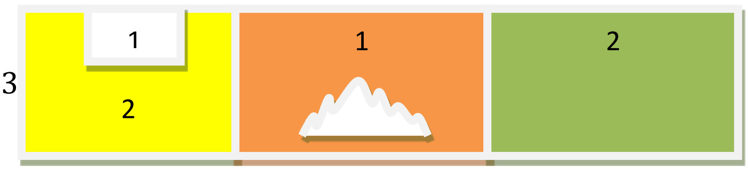


P_1



P_2

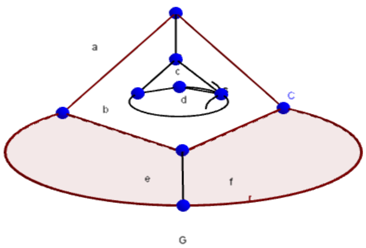
Salah satu pewarnaannya seperti terlihat pada gambar timbul pertanyaan: paling sedikit berapa warna yang di perlukan

3 

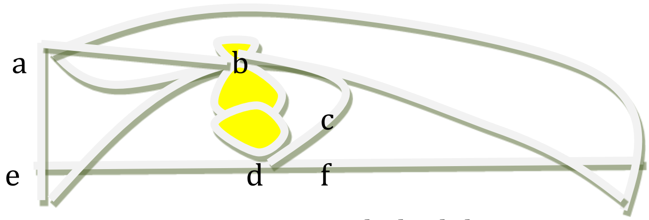
P_1 P_2

untuk mewarnai sembarangan peta sehingga semua daerah yang bertetangga diwarnai berbeda?

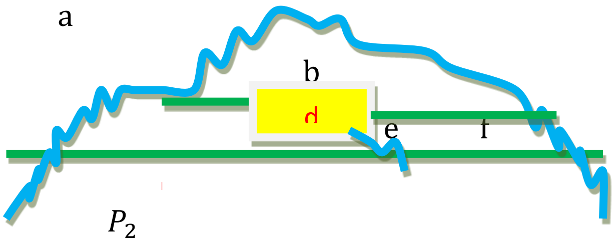
Jika pada suatu gambar bidang graph planar (atau peta) masing masing daerah di pandang sebagai titik dan titik-titik yang mewakili dua daerah bertetangga dihubungkan oleh satu sisi, maka yang terjadi adalah graph du al dari gambar bidang graph planar (atau peta) tersebut. Sebagai contoh lihat gambar

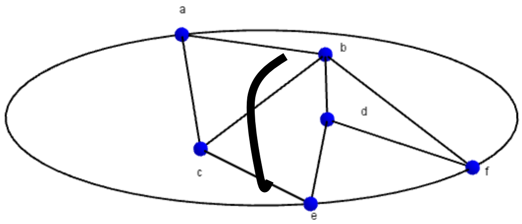


Gambar 6.14



graph dual dari G





Graph dual dari P_2

Pertanyaan diatas ekivalen dengan : untuk graph planar, berapakah nilai k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna? Permasalahan ini sudah muncul akhir abat yang lalu. Orang mempunyai dugaan kuat (*conjecture*) bahwa jawabannya adalah empat. Dugaan tersebut baru terbukti kebenarannya pada tahun 1976. Untuk menuliskan buktinya memerlukan ratusan halaman buku dengan ribuan gambar, lihat Wilson dan Watkints,1990, halaman 251-268. Setahun penulis belum ada bukti yang singkat mengenai hal ini. Teoremanya dikenal dengan nama teorema empat warna.

Teorema 7. (Teorema empat warna).

Setiap graph planar dapat diwarnai dengan empat warna.

Pewarnaan peta sama dengan pewarnaan titik-titik pada graph hasil pemodelan dari gambar peta tersebut sedemikian hingga tidak ada dua titik berdekatan yang mendapat warna sama.

Gambar 6.15

Langkah-langkah yang dilakukan dalam pemodelan dengan graph ialah menentukan:

1. Objek apa yang akan dikonversikan sebagai titik graph?
2. Hubungan apa yang dicerminkan oleh sisi-sisi graph? Pasangan titik apa saja yang harus dihubungkan oleh sisi?
3. Merumuskan masalah nyata dalam bahasa teori graph

Teorema empat warna setiap graph planar dapat diwarnai dengan empat warna.

6.5 Ringkasan

1. Misalkan G graph tanpa loop. Suatu pewarnaan-k untuk graph G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua titik di G sehingga setiap pasangan titik yang terhubung langsung di beri warna yang berbeda.
2. Jika G mempunyai pewarnaan -k, maka G dikatakan dapat di warnai dengan k warna.
3. Bilangan khromatik (*chromatik number*) dari graph G, dinyatakan dengan χ(G), adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna, untuk mewarnai suatu graph dinyatakan dengan $1,2,3,\ldots\ldots,k$. Jelas bahwa $\chi(\mathrm{G}) \leq |v(G)|$.
4. Dua titik yang terhubung langsung *(adjacent)* harus diberi warna yang berlainan, sedangkan pada loop suatu titik terhubung langsung ke dirinya sendiri, tidak mungkin satu titik di beri dua warna berlainan.
5. Jika G graph sederhana dengan derajat titik maksimun Δ, maka $\chi(G) \leq \Delta + 1$

6. Misalkan G graph sederhana, terhubung,dan dengan derajat titik maksimum Δ. Jika G bukan graph komplit dan bukan cycle dengan banyak titik ganjil, maka $\chi(G) \leq \Delta$.
7. Suku banyak khromatik (*chromatic polynomial*) dari graph G, dinyatakan dengan $P_G(K)$, adalah banyak cara pewarnaan –k untuk graph G.
8. Misalkan G graph sederhana, dan misalkan $G' dan\ G''$ berturut turut adalah graph yang diperoleh dari G dengan penghapusan dan pengkerutan suatu sisi di G. Maka $P_G(k) = P_{G'}(k) - P_{G''}(k)$.
9. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik pada suatu graph G disebut **bilangan khromatik graph G**, yang dilambangkan dengan $\boldsymbol{\chi(G)}$**.**
10. Suatu graph yang mempunyai bilangan kromatis k dilambangkan dengan $\boldsymbol{\chi(G) = k}$.
11. Bilangan khromatik dari graph G tidak dapat lebih satu dari derajat maksimum titik-titik dari G.
12. Jika G mempunyai pewarnaan – sisi-k , maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna.
13. Indeks khromatik (*chromatik index*) dari graph G, dinyatakan dengan x'(G), adalah bilangan k terkecil sehingga sisi di G dapat diwarnai dengan k warna.

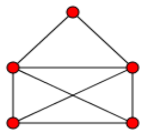
14. Jika G adalah graph sederhana dengan derajat titik maksimun $\Delta, maka\ \Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$

15. Jika G adalah graph bipartisi dengan derajat titik maksimun Δ ,maka $\chi'(G) = \Delta$.

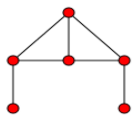
16. Dua daerah yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda.

6.6 Soal-soal

1. Tentukan bilangan khromatic $\chi(G)$ dari graph berikut ini.



(i)



(ii)

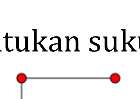
2. Tentukan bilangan khromatik dari Graph Komplit k_6 dan Graph sikel dengan n titik C_n!

3. Gambarkan

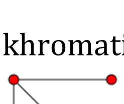
   a. Graph dengan lima titik dan bilangan khromatiknya 4.

   b. Graph planar dengan tujuh dan bilangan khromatik 4.

4. Tentukan suku banyak khromatik dari graph berikut ini.



(i)



(ii)

(iii)

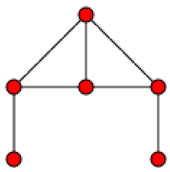
5. Tentukan suku banyak khromatik dari :

   a. Graph komplit K_5

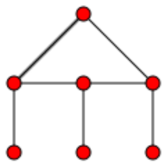
   b. Graph C_6

6. Tentukan indeks khromatik $\chi'(G)$ dari graph berikut ini !

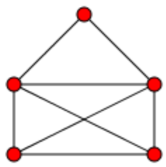
   a.



   b.



   c.



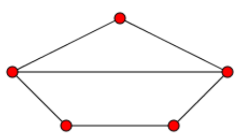
7. Tentukan indeks khromatik dari :

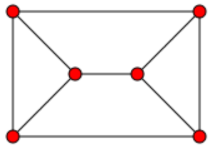
   a. Graph komplit K_6, kemudian warnailah sisi-sisi K_6 sehingga tidak ada dua sisi yang mempunyai titik persekutuan mempunyai warna yang sama

   b. Graph komplit K_n,

8. Berapakah warna minimal untuk mewarnai sisi graph berikut !

   a.



b. 

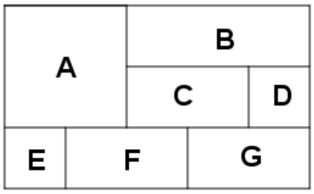
sisi graph tersebut adalah 3

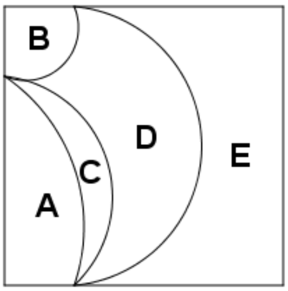
9. Gambarkan

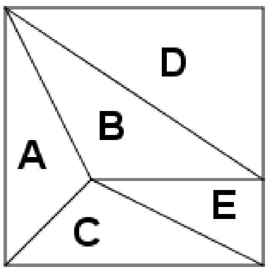
   a. Graph dengan lima titik dan indeks khromatiknya 4.

   b. Graph planar dengan tujuh dan indeks khromatik 4.

10. Berapakah warna minimal, untuk mewarnai peta berikut! Jelaskan jawaban anda!

    a. 

    b. 

    c. 

BAB 7

DIGRAPH

7.1 Definisi Digraph

Suatu digraph (*directed graph, graph berarah*) terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan berurutan dari titik-titik tersebut yang disebut titik berarah (*directed edge*) atau *arc*.

Disini D melambangkan suatu digraph. Himpunan titik digraph D dinyatakan dengan V(D) dan himpunan sisi digrph D dinyatakan dengan E(D). Seperti pada graph, kita hanya akan membicarakan digraph terhingga, yaitu digraph dengan banyak titik dan banyak sisi terhingga.

Jika u dan v titik-titik di D dan a = uv suatu sisi di D, maka dikatakan:

a berarah dari *u ke v*,

a menghubungkan *u* ke *v*,

u terkait (incident) ke *a*, *v* terkait dari *a*,

a terkait dari *u*, *a* terkait ke *v*,

u terhubung langsung (*adjacent*) ke *v*,

v terhubung langsung dari *u*,

u disebut titik pangkal dari *a*,

v disebut titik ujung dari a.

Dua sisi berarah atau lebih yang menghubungkan satu pasangan titik disebut sisi rangkap berarah *(multiple) directed edges*. Suatu sisi berarah yang menghubungkan suatu titik ke dirinya sendiri disebut loop. Digraph tanpa sisi rangkap berarah dan tanpa loop disebut digraph sederhana (*simple digraph*).

Contoh 7.1

D H

Gambar 7.1

Pada Gambar 7.1, digraph D adalah sederhana, dengan

$$V(D) = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\},$$

$$E(D) = \{v_1v_2,\ v_1v_4,\ v_2v_1,\ v_2v_5,\ v_3v_1,\ v_3v_2,\ v_3v_4, v_5v_2, v_5v_3, v_5v_4\},$$

$$|V(D)| = 5,$$

$$|E(D)| = 10,$$

Digraph H tidak sederhana karena memuat loop dan sisi rangkap.

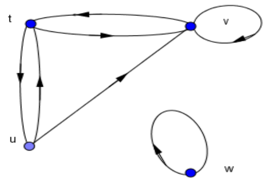
Contoh 7.2

Jika diketahui digraph D dengan

V(D) = {t, u, v, w,} dan

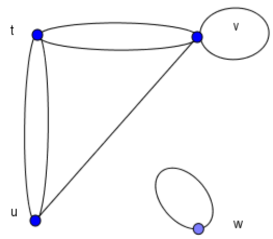
E(D) = {tu, tv, ut, uv, vt, vv, ww},

Maka digraph D dapat digambarkan seperti pada gambar 7.2.



D
Gambar 7.2

Graph dasar (*underlying graph*) dari suatu digrap D adalah digraph yang didapat dengan mengganti setiap sisi berarah di D dengan sisi (tidak berarah) yang bersesuaian. Graph dasar dari digraph D pada gambar 7.2 adalah seperti terlihat pada gambar 7.3.

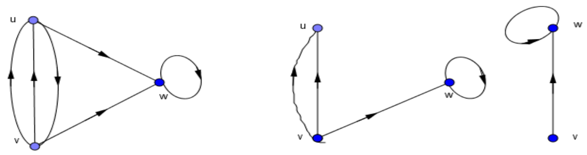


D
Gambar 7.3

Misalkan D suatu graph dengan himpunan titik V(D) dan himpunan sisi E(D). Digraph bagian (*subdigraph*) dari D adalah digraph yang setiap titiknya adalah anggota V(D) dan setiap sisinya adalah anggota E(D). Jika D_1 suatu digrap bagian dari D dan V(D_1) = V(G), maka D_1 disebut digraph bagian rentangan (*spanning sub-digraph*) dari D.

Contoh 7.3

Pada gambar 7.4, digraph D_1 dan D_2 adalah digraph bagian dari digraph D; D_1 digraph bagian rentangan dari D.



D $\quad$ D_1 $\quad$ D_2

Gambar 7.4

7.2 Derajat Titik

Pada graph suatu titik hanya mempunyai satu macam derajat, pada digrap suatu titik mempunyai dua macam derajat. Misalkan D suatu digraph dan V suatu titik di D. Derajat keluar (*outdegree*) dari v, dinyatakan dengan $od(v)$, adalah banyak sisi di D yang terkait dari v. Derajat masuk (*indegree)* dari v, dinyatakan dengan $id(v)$ adalah banyak sisi berarah di D yang terkait ke v. Suatu digraph dikatakan beraturan-r (r-regukar) jika $od(v) \ = \ id\ (v)$ untuk setiap v di $V(D)$.

Barisan derajat keluar (*outdegree sequence*) dari suatu digraph D adalah barisan bilangan $d_1 d_2, \dots, v_n,\ n = \ |V(D)|$, sehingga $= d_1$. Barisan derajat masuk (*indegree sequence*) didefinisikan dengan cara seperti di atas. Contoh 7.4

D_1 $\quad$ D_2

Gambar 7.5

Untuk digraph D_1 pada gambar 7.5, setiap titikmem punyai derajat masuk dan derajat keluar yang sama, yaitu 2, sehingga D_1 beraturan 2. Sedangkan untuk digraph D_2,

$od(s) = 2,\quad id(s) = 1,$

$od(t) = 1,\quad id(t) = 3,$

$od(u) = 1,\quad id(u) = 1,$

$od(v) = 3,\quad id(v) = 1,$

$od(w) = 0,\quad id(w) = 1,$

barisan derajat keluar dari D_2, adalah 2, 1, 1, 3, 0, dan barisan derajat masuk 1, 3, 1, 1, 1, Digraph D_2, titik beraturan.

Pada digraph kita juga mempunyai Lema Jabat Tangan. Lema ini berdasarkan fakta bahwa setiap sisi mempunyai satu titik pangkal dan satu titik ujung.

Lema 2.1 (Lema Jabat Tangan pada digraph). Pada digraph masing-masing jumlah derajat keluar dan jumlah derajat masuk sama dengan sisi berarahnya.

Lema Jabat Tangan pada digraph dapat dinyatakan dengan:

$$\sum_{v \in V(D)} od(v) = \sum_{v \in V(D)} id(v) = E(D)$$

Contoh 7.5

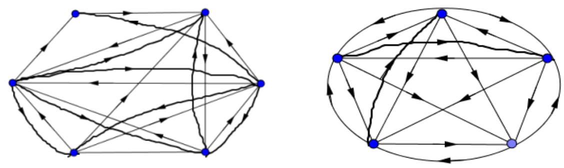
Jika mungkin, gambarlah suatu digraph sederhana dengan barisan derajat masuk atau barisan derajat keluar seperti dibawah ini; jika tidak mungkin, berikan alasannya.

(a) Barisan derajat masuk 1, 2, 3, 4, 5, 6.
(b) Barisan derajat keluar 1, 2, 3, 4, 5, 5.
(c) Barisan derajat masuk 3, 3, 3, 4, 4.
(d) Barisan derajat masuk 3, 3, 3, 4, 4 dan barisan derajat keluar 2, 3, 3, 4, 4.

Jawab:

(a) tidak ada digraph dengan barisan derajat masuk 1, 2, 3, 4, 5, 6; sebab jika ada digraphnya, maka digraph tersebut mempunyai enam titik dan salah satu titiknya terhubung langsung dari enam titik yang lain, hal ini tidak mungkin terjadi untuk digraph sederhana.

Pada Gambar 7.6, digraph D_1 adalah digraph yang memenuhi persyaratan (b) dan D_2, adalah digraph yang memenuhi persyaratan (c)

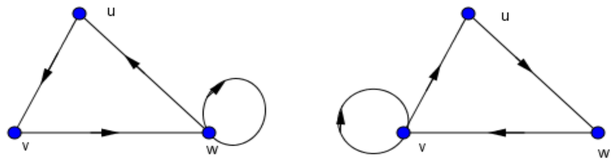


D_1 D_2

Gambar 7.6

Gambar (d) tidak ada digraph dengan derajat masuk 3, 3, 3, 4, 4 dan barisan derajat keluar 2, 3, 3, 4, 4 karena pada digraph jumlah derajat masuk dan jumlah derajat keluar adalah sama.

Pada digraph juga ada pengertian isomorfik. Dua digraph D_1 dan D_2, dikatakan isomorfik, dinyatakan dengan $D_1 \cong D_2$, jika ada pemetaan ∅ yang satu-satu dan pada dari $V(D_1)$ ke $V(D_2)$ yang melestarikan sifat keterhubungan langsung. Seperti pada graph, dua digraph yang titik-titiknya tidak dikatakan sama jika keduanya isomorfik. Contoh 7.6



D_1 D_2

Gambar 7.7

Pada Gambar 7.7, digraph $D_1 \cong D_2$, karena ada pemetaan $\emptyset$, yang satu-satu dan pada serta melestarikan keterhubungan.

$$\begin{aligned} \emptyset, : \{u, v, w\} &\rightarrow \{u, v, w\} \\ u &\rightarrow u \\ v &\rightarrow w \\ w &\rightarrow v \end{aligned}$$

Jika dua digraph isomorfik, maka keduanya mempunyai barisan derajat yang sama. Akibatnya, keduanya mempunyai banyak titik yang sama dan banyak sisi yang sama. Tetapi dua digraph mempunyai barisan derajat yang sama, belum tentu kedua isomorfik.

7.3 Ringkasan

1. Suatu digraph (*directed graph, graph berarah*) terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan berurutan dari titik-titik tersebut yang disebut titik berarah (*directed edge*) atau *arc.*
2. Dua sisi berarah atau lebih yang menghubungkan satu pasangan titik disebut sisi rangkap berarah *(multiple) directed edges*.

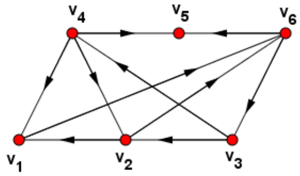
3. Suatu sisi berarah yang menghubungkan suatu titik ke dirinya sendiri disebut loop.
4. Digraph tanpa sisi rangkap berarah dan tanpa loop disebut digraph sederhana (*simple digraph*).
5. Digraph bagian (*subdigraph*) dari D adalah digraph yang setiap titiknya adalah anggota V(D) dan setiap sisinya adalah anggota E(D).
6. Jika D_1 suatu digrap bagian dari D dan V(D_1) = V(G), maka D_1 disebut digraph bagian rentangan (*spanning sub-digraph*) dari D.
7. Derajat keluar (*outdegree*) dari v, dinyatakan dengan $od(v)$, adalah banyak sisi di D yang terkait dari v.
8. Derajat masuk (*indegree)* dari v, dinyatakan dengan $id(v)$ adalah banyak sisi berarah di D yang terkait ke v.
9. Suatu digraph dikatakan beraturan-r (r-regukar) jika $od(v) = id\ (v)$ untuk setiap v di $V(D)$.
10. Barisan derajat keluar (*outdegree sequence*) dari suatu digraph D adalah barisan bilangan $d_1 d_2, \ldots, v_n,\ n = |V(D)|$, sehingga $= d_1$. Barisan derajat masuk (*indegree sequence*) didefinisikan dengan cara sama.
11. Lema Jabat Tangan pada digraph dapat dinyatakan dengan:

    $\sum_{v\, \in V(D)} od(v) = \sum_{v\, \in V\,(D)} id(v) = E(D).$

12. Dua digraph D_1 dan D_2, dikatakan isomorfik, dinyatakan dengan $D_1 \cong D_2$, jika ada pemetaan $\emptyset$ yang satu-satu dan pada dari $V(D_1)$ ke $V(D_2)$ yang melestarikan sifat keterhubungan langsung.

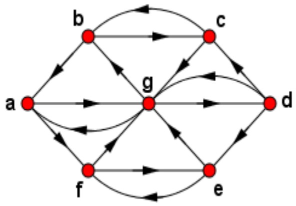
7.4 Soal-soal

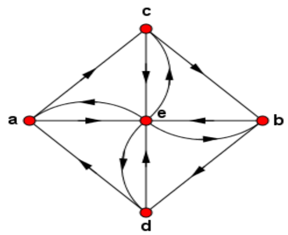
1. Apakah yang kamu ketahui tentang graph berarah *(digraph)*?
2. Perhatikan digraph berikut!



Tentukan
a. Jumlah titik pada digraph
b. Himpunan titik-titik pada digraph
c. Jumlah sisi pada digraph
d. Himpunan sisi pada digraph

3. Gambarlah digraph D dengan titik $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ dan Garis $E(G) = \{ab, ad, ai, bc, bd, bj, ce, cf, dg, eh, fa, fb, gc, hi, ij\}$
4. Tuliskan barisan derajat masuk dan barisan derajat keluar untuk digraph berikut.



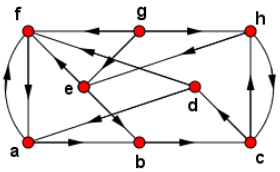


5. Jika mungkin, gambarlah suatu digraph sederhana dengan barisan derajat masuk atau barisan derajat keluar seperti dibawah ini; jika tidak mungkin berikan alasannya.

   a. Barisan derajat masuk $1, 2, 3, 4$
   b. Barisan derajat keluar $3, 2, 3, 1$
   c. Barisan derajat masuk $2, 2, 3, 2, 2, 3$ dan arisan derajat keluar $4, 2, 1, 4, 2, 1$

6. Gambarlah dua digraph yang berbeda (terhadap) isomorfisme yang masing-masing sederhana, serta jika uv sisi berarah di digraph tersebut, maka vu bukan sisi berarahnya

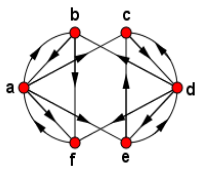
7. Perhatikan digraph berikut.



Tuliskan matriks keterhubungan langsung dari graph tersebut.

8. Diketahui matriks keterkaitan dari suatu digraph adalah seperti berikut. $I(D) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
   Gambarkanlah digraph berdasarkan matriks keterkaitan tersebut!

9. Perhatikan digraph berikut !



Tentukan

   a. Suatu walk dengn panjang 9 dari digraph tersebut
   b. Suatu lintasan dengan panjang 4 dari digraph tersebut
   c. Suatu sikel dari digraph tersebut

10. Gambarkan graph berarah Euler

BAB 8

GRAPH SEBAGAI MODEL MATEMATIKA

Kontruksi model matematika dapat dibuat dalam berbagai cara permasalahan matematika yang berbeda-beda. Salah satu model matematika yang sudah cukup dikenal dan bisa mencakup berbagai permasalahan adalah teori graph. Pada bagian ini akan disajikan contoh permasalahan yang dapat dibuat model matematikanya dalam bentuk graph.

8.1 Macam-macam Contoh

Contoh 1

Seorang guru bermaksud membuat suatu diagram tentang hubungan antar siswa dari kelas yang diajarnya. Diagram tersebut harus berisikan informasi apakah antara satu siswa dengan siswa lainnya berteman atau tidak berteman. Hal semacam itu dapat dinyatakan dalam bentuk diagram yang disebut graph. Dalam graph tersebut, seorang siswa dinyatakan sebagai sebuah titik dan hubungan berteman antara dua siswa, dinyatakan dengan sebuah sisi yang menghubungkan titik-titik yang mewakili dua siswa tersebut.

Contoh 2

Dalam suatu persiapan untuk menghadapi perang, beberapa peleton tentara ditempatkan di beberapa lokasi yang berbeda. Komunikasi antara peleton dilakukan dengan menggunakan radio telepon yang kemampuannya terbatas pada jarak tertentu.

Jika jarak antara dua peleton masih terjangkau, maka komunikasi dapat dilakukan. Keadaan seperti ini dapat dinyatakan dalam suatu model matematika berbentuk graph. Dalam graph tersebut, titik menyatakan peleton dan sisi antara dua titik menyatakan komunikasi antara dua peleton yang diwakili oleh dua titik tersebut.

Contoh 3

Misalkan kita ingin menempuh perjalanan dari Jakarta menuju Surabaya. Mungkin kita ingin mengetahui rute terpendek yang dapat dipilih. Dalam permasalahan ini kota direpresentasikan sebagai titik, sedangkan rute atau jalan direpresentasikan sebagai segmen garis atau kurva.

Contoh 4

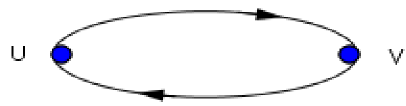
Misalnya terdapat satuan tugas dalam kepolisian yang bertugas mengungkap jaringan pengedar obat terlarang. Hal tersebut dapat kita gambarkan ke dalam sebuah graph. Dalam graph tersebut, tiap-tiap anggota komisi dinyatakan dengan sebuah titik, dan hubungan di antara anggota dinyatakan dengan sisi atau kurva. Dalam permasalahan ini kita mungkin ingin tahu seberapa rapuhkah jaringan komunikasi ini, dan seberapa mudahkah kita bisa menghancurkan jaringan tersebut. Dengan menggunakan teori graph desain jaringan komunikasi yang handal dapat diciptakan.

Contoh 5

Teori graph juga biasanya digunakan dalam bidang elektronika, misalnya untuk mendesain sirkuit cetakan. Biasanya sirkuit cetakan pada lembaran silikon harus didesain secara khusus. Berbeda dengan desain sirkuit yang menggunakan kabel-kabel, sirkuit cetakan tidak boleh mengandung bagian-bagian konduktor yang saling bersinggungan atau saling memotong, karena hal tersebut bisa membuat munculnya hubungan pendek. Teori graph memberi penjelasan apakah suatu pola sirkuit cetakan yang kita miliki mempunyai pola lain yang sejenis? Apakah sebuah pola sirkuit yang memiliki hubungan konduktor yang saling berpotongan dapat didesain ulang demikian sehingga susunannya masih tetap tapi tidak lagi mengandung bagian-bagian yang saling bersinggungan atau berpotongan? Melalui konsep graph isomorfik kita dapat mengetahui apakah sebuah sirkuit cetakan memiliki desain lain yang lebih baik tanpa mengubah susunannya.

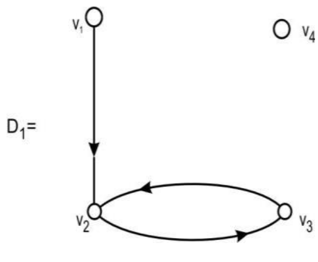
8.2 Graph Berarah Sebagai Model Matematika

Sebuah graph berarah D adalah suatu himpunan yang tidak kosong dengan sebuah relasi R pada V. R adalah relasi yang tidak refleksif. Seperti halnya dalam graph yang sudah dibicarakan di atas, elemen dari V disebut titik. Tiap pasangan terurut dalam R disebut sisi berarah atau arah. Karena relasi dari sebuah graph berarah D tidak perlu simetris, maka apabila (u, v) merupakan arah D, (v, u) belum tentu merupakan arah dari D. Hal semacam ini dapat kita ilustrasikan pada diagram dengan gambar segmen garis atau kurva antara titik u dan v yang memakai tanda panah sebagai tanda arah dari u ke v atau dari v ke u. Bila dari u ke v masing-masing mempunyai arah, maka diagramnya dapat kita buat seperti di bawah ini



Gambar 8.1

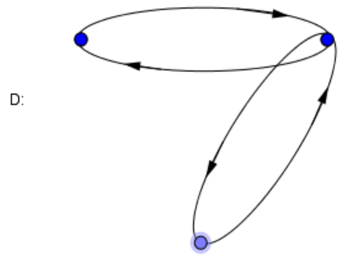
Misalkan D_1 adalah sebuah graph berarah dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_{3,} v_2)\}$. Graph berarah D_1, dapat dibuat seperti gambar 8.2 dibawah ini.



Gambar 8.2

Gambar 8.2

Mungkin juga terjadi bahwa relasi yang mendefinisikan sebuah graph berarah D merupakan sebuah relasi simetris. Graph semacam ini disebut *Graph berarah simetris*. Gambar dibawah ini adalah contoh sebuah graph simetris.



Gambar 8.3

Diketahui sebuah graph berarah D dengan himpunan

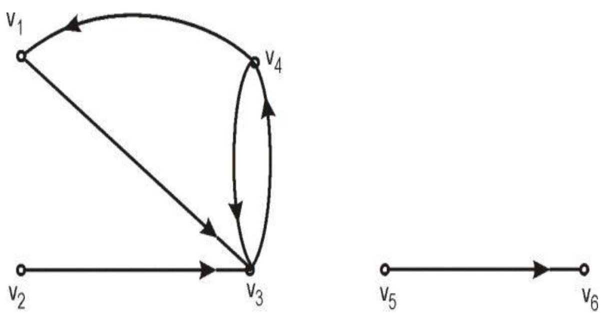
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

Dan himpunan arah

$E = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_6)\}$. Gambarlah diagram dari graph D.

Penyelesaian

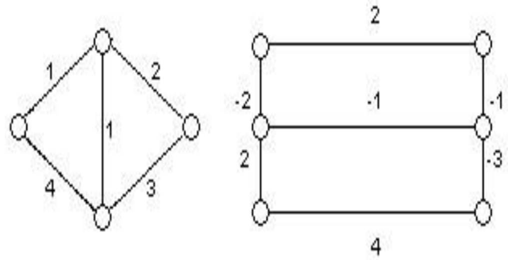
Gambar dibawah ini merupakan diagram dari graph D.



Gambar 8.4

8.3 Jaringan Kerja Sebagai Model Matematika

Sebuah jaringan kerja adalah sebuah graph berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real. Jaringan kerja yang merupakan sebuah graph disebut *jaringan kerja tidak berarah* sedangkan jaringan kerja yang merupakan graph berarah disebut *jaringan kerja berarah*. Gambar dibawah ini merupakan contoh diagram dari dua jenis jaringan kerja tersebut.



Gambar 8.5

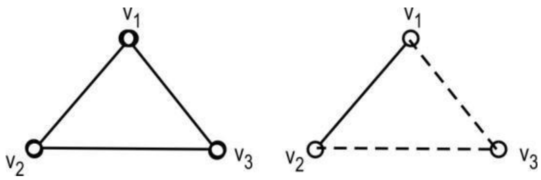
Sisi dari S, maka dapat dipahami bila tiap sisi dari S disebut sisi positif atau sisi negatif. Sebagai contoh, jika dan

$V = \{v_1, v_2, v_3\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}.$

$f = \{(v_1, v_2, +1), (v_1, v_3, -1), (v_2, v_3, -1)\}$

maka graph bertanda seperti ini dapat dinyatakan dalam dua cara yaitu seperti diperlihatkan pada gambar dibawah ini. Maka graph bertanda seperti ini dapat dinyatakan dalam dua cara yaitu seperti diperlihatkan pada gambar dibawah ini.



Gambar 8.6

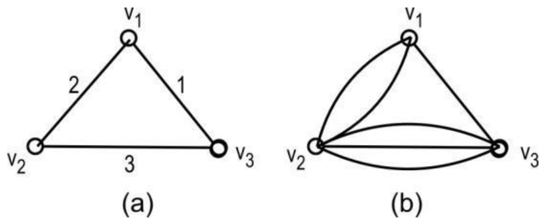
Contoh 7

Hubungan bertetangga dapat dinyatakan dalam bentuk graph bertanda. Dua keluarga yang saling berhubungan dengan baik dapat diwakili oleh sisi positif, dua keluarga yang berhubungan kurang baik dapat dinyatakan dengan sisi negatif dan dua keluarga yang tidak saling berhubungan atau tidak saling kenal dapat dinyatakan dengan tidak ada sisi antar dua titik yang mewakili dua tetangga tersebut.

Jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya bulat positif seringkali digunakan sebagai model matematika. Ada dua cara yang sering digunakan untuk menyatakan jaringan kerja tidak berarah seperti ini. Sebagai contoh, jika dan

$\mathrm{V} = \{\mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \mathrm{v}_3\}$
$\mathrm{E} = \{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2, \mathrm{v}_1\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_2\mathrm{v}_3\}$
$\mathrm{f} = \{(\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2, 2), (\mathrm{v}_1\mathrm{v}_3, 1), (\mathrm{v}_2\mathrm{v}_3, 3)\}$

Graph bertanda S adalah suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya $+1$ atau -1. Karena tanda positif atau negatif dipasangkan pada tiap maka jaringan kerjanya dapat dibuat seperti terlihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 8.7

Jaringan kerja tak berarah yang dinyatakan seperti Gambar 8.7 disebut *multi graph*. Misalnya M adalah sebuah multi graph dengan himpunan sisi E dan fungsi f. Jika uv_1 E dan $f(uv) = n$ (n adalah bilangan bulat positif), maka u dan v dihubungkan oleh n sisi. Sisi-sisi seperti ini disebut *sisi multipel*.

Contoh 8

Misalkan $v_1, v_2, dan\ v_3$ adalah tiga buah kota. Tiap dua kota dihubungkan oleh satu jalan yang jaraknya tidak sama. Jika antara salah satu kota dengan kota lain ditempuh dengan jalan kaki, maka lama perjalanannya adalah sebagai berikut:

Antara $v_1\ dan\ v_2$, dua hari;
Antara $v_1\ dan\ v_3$, satu hari;
Antara $v_2\ dan\ v_3$, tiga hari.

Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk graph seperti pada Gambar 8.7 (a).

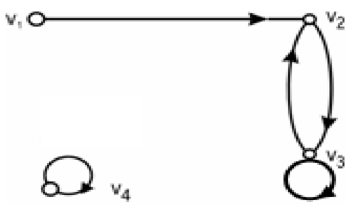
Contoh 9

Misalkan $v_1, v_2, dan\ v_3$, adalah tiga buah kota. Antara $v_1\ dan\ v_2$ terdapat dua jalan, antara $v_1\ dan\ v_3$ terdapat satu jalan, sedangkan antara v_2 dan v_3 terdapat tiga jalan. Situasi ini dapat dinyatakan dengan graph seperti Gambar 8.7 (b).

Misalkan

$V = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4\}$ dan $E = \{(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2), (\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3), (\mathrm{v}_{3,}\mathrm{v}_2), (\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_3), (\mathrm{v}_4,\mathrm{v}_4)\}$

Karena relasi E memua $(\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_3)$ dan $(\mathrm{v}_4,\mathrm{v}_4)$, maka graph berarah dengan loop ini dapat digambar seperti dibawah ini.



Gambar 8.8

8.4 Ringkasan

1. graph berarah D adalah suatu himpunan yang tidak kosong dengan sebuah relasi R pada V.
2. R adalah relasi yang tidak refleksif.
3. Tiap pasangan terurut dalam R disebut sisi berarah atau arah. Karena relasi dari sebuah graph berarah D tidak perlu simetris, maka apabila (u, v) merupakan arah D, (v, u) belum tentu merupakan arah dari D.
4. Graph berarah D yang merupakan sebuah relasi simetris disebut *Graph berarah simetris.*

5. Sebuah jaringan kerja adalah sebuah graph berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real. Jaringan kerja yang merupakan sebuah graph disebut *jaringan kerja tidak berarah* sedangkan jaringan kerja yang merupakan graph berarah disebut *jaringan kerja berarah*.

8.5 Soal – soal

1. Sebutkan beberapa contoh masalah lainnya yang dapat dinyatakan dalam bentuk graph!
2. *Instagram* merupakan salah satu situs jejaring sosial yang memiliki banyak pengguna. Delapan siswa merupakan pengguna situs jejaring sosial tersebut. Pada situs tersebut, masing – masing siswa saling mem-f*ollow*. Jika empat siswa menonaktifkan akun jejaring sosial *Instagram* selama pekan ujian, maka :
   a. Buatlah graph A yang merepresentasikan pertemanan masing – masing siswa di situs jejaring sosial Instagram sebelum pekan ujian!
   b. Buatlah graph B yang menggambarkan pertemanan masing – masing siswa di situs jejaring sosial *Instagram* selama pekan ujian!
3. Ada 7 kota (A, B, C, D, E, F, G) yang beberapa di antaranya dapat dihubungkan secara langsung dengan jalan darat. Hubungan-hubungan langsung yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut:

   A dengan B dan D; B dengan D; C dengan B; E dengan F
   Buatlah graf yang menunjukkan keadaan transportasi di 7 kota tersebut !

4. Babak semifinal Liga Champion menyisakkan empat klub besar yaitu *Chelsea, Real Madrid, Barcelona* dan *Manchester United (MU)*. Dalam sepekan, klub-klub tersebut dijadwalkan bertanding dua kali dengan klub yang berbeda. Jika menurut jadwal tidak ada pertandingan antara *Chelsea* melawan *Real Madrid*, namun ada pertandingan *MU* melawan *Real Madrid,* maka :
   a. Buatlah graph yang merepresentasikan jadwal pertandingan keempat klub tersebut dalam sepekan!
   b. Apakah graph yang kamu buat termasuk graph terhubung atau graph tidak terhubung? Berikan alasanmu!
   c. Menurut jadwal, siapa saja lawan dari *Barcelona*?

5. Di suatu desa terdapat pembangkit listrik tenaga air yang mampu menyalurkan tenaga listrik ke sepuluh rumah. Energi listrik disalurkan melalui kabel yang dirangkai secara seri. Jika suatu hari hujan yang turun sangat lebat menyebabkan pohon tumbang dan mengakibatkan kabel antara rumah ke-sembilan dan ke-sepuluh terputus, Buatlah graph yang menggambarkan rangkaian listrik di desa tersebut setelah terdinya hujan lebat yang disertai badai!
6. Dalam suatu lab komputer di suatu sekolah terdapat 9 komputer yang dihubungkan dengan topologi star dengan komputer satu sebagai server. Gambarkan graph yang merepresentasikan topologi jaringan di lab tersebut!
7. Dalam sebuah pesta, sepuluh orang saling berjaba tangan. Tiap orang hanya berjabat tangan sekali dengan orang lainnya. Modelkan persoalan ini ke dalam graph
8. Empat tim bola basket mengikuti kejuaraan antar Universitas. Pertandingan menggunakan sistem *round-robin*, yaitu setiap tim bertemu dengan tim lainnya satu kali. Misalkan empat tim tersebut

dinamai A, B, C, D gambarkan graph yang merepresentasikan pertandingan tersebut!

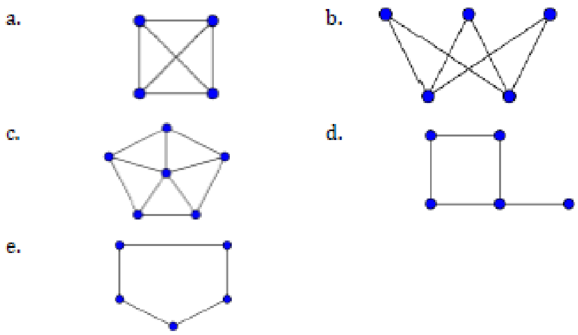
9. Di suatu pulau terdapat lima kota berbeda yang dihubungkan oleh ruas-ruas jalan. Hanya ada satu jalan yang dapat dilalui untuk menuju kota pertama. Terdapat dua ruas jalan yang dapat dilalui untuk menuju kota kedua, sama halnya dengan kota ketiga. Untuk menuju kota keempat, terdapat tiga ruas jalan yang dapat dilalui, sedangkan untuk menuju kota kelima terdapat 4 ruas jalan yang dapat dilalui. Berdasarkan data tersebut buatlah graph yang merepresentasikan ruas jalan yang menghubungkan ke lima pulau tersebut !
10. Suatu rumah dihuni oleh satu keluarga yang terdiri atas ibu, dua orang anaknya serta lima cucu, dua cucu dari anak pertama sedangan sisanya dari anak kedua. Gambarkan graph yang merepresentasikan silsilah keluarga tersebut.

LATIHAN SOAL

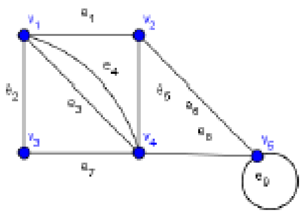
Kerjakan soal berikut dengan tepat!

KONSEP DASAR TEORI GRAPH

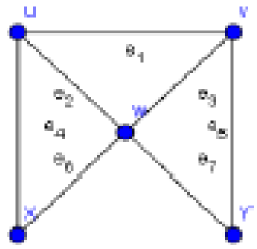
1. Sejarah graph bermula dari masalah jembatan konisberg pada tanhun 1736. Reperentasikan masalah jembatan tersebut dengan suatu graph, kemudian jelaskan !
2. Himpunan dari titik-titik yang terhubung oleh sisi disebut dengan graph. Dalam graph terdapat beberapa jenis, tentukan graph dibawah ini yang merupakan graph sedederhana, graph lengkap, graph bipartit, graph sikel dan graph roda.



3. Tentukan himpunan titik dan himpunan sisi dari graph berikut ini. Tentukan apakah graph tersebut graph sederhana ? jelaskan !

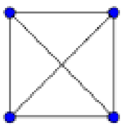


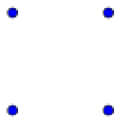
4. Gambarkan graph yang memiliki 5 titik dan 8 sisi. Tentukan himpunan titik dan sisi serta titik ujung setiap sisinya!
5. Jelaskan apa yang dimaksud dengan jalan, jejak, lintasan dan sikuit. Kemudian tentukan salah satu jalan, jejak, lintasan dan sikuit dari graph berikut ini.



6. Pada saat liburan sekolah Ana, Bian, Cheryl dan Dani bermain badminton. Saat bermain, Ana melawan Dani, Bian melawan Cheryl, Ana melawan Bian dan Ana melawan Cheryl. Representasikan pernyataan diatas dalm bentuk graph!
7. Perhatikan graph dibawah ini!

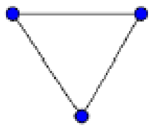
a.

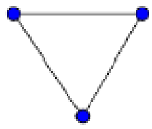




G **H**

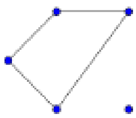
b.

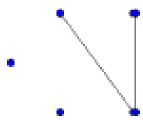




G **H**

c.

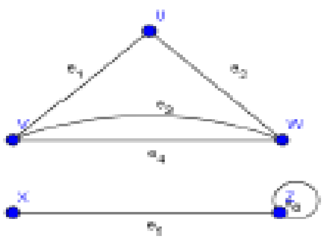




G **H**

Tentukan apakah graph H merupakan komplemen dari graph G?

8. Perhatikan graph berikut !



Gambarkan subgarph dan subgraph bagian tentangan dari reprensentasi graph diatas!

9. Dalam suatu propinsi terdapat 8 kota yang beberapa diantaranya dapat dihubungkan langsung dengan jalan darat. Kota-kota yang dapat dihubungkan langsung dengan jalan darat antara lain:

10. A dengan B dan D

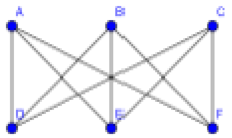
    B dengan D

    C dengan B

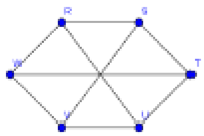
    E dengan F dan G

    a. Gambarkan graph sesuai dengan pernyataan diatas!
    b. Tentukan apakah graph tersebut termasuk graph terhubung? Berikan alasanmu!
    c. Apakah terdapat titik terisolasi pada graph tersebut ? jika ada tentukan titik terasing tersebut !

11. Apakah kedua graph dibawah ini merupakan graph isomorfism. Berikan penjelasanmu!



G



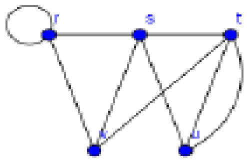
G'

DERAJAT TITIK

12. Apakah definisi dari derajat suatu titik v di G ? berikan contoh!

13. Dalam Derajat titik terdapat lema jabat tangan yang berbunyi bahwa jumlah semua derajat semua titik pada suatu graph sama dengan dua kali banyak sisinya. Terdapat beberapa akibat dari lema tersebut. Sebutkan!

14. Perhatikan graph dibawah ini!



Tentukan derajat titik secara berurut serta tentukan derajat maksimum dan derajat minimum dari graph tersebut!

15. Jika ada gambarkan suatu graph sederhana dengan barisan derajat berikut ini, jika tidak ada berikan alasanmu!
    a. 1,1,1,2,3,3,3
    b. 2,2,3,3,3,4
    c. 3,3,4,4,5,6,6
    d. 2,2,2,4
16. Jika memungkinkan gambarkan graph sederhana yang memiliki 7 titik. 3 titik berderajat dua, 2 titik berderajat tiga dan 2 titik berderajat 4. Jika tidak memungkinkan berikan alasanmu!
17. Gambarkan graph sederhana yang memiliki sembilan titik dengan 3 titik berderajat dua dan 2 titik berderajat tiga serta 1 titik berderajat 4. Tentukan berapa titik yang mempunyai derajat satu ?
18. Pada sebuah desa terdapat 5 jalan raya, yaitu Jalan Bandung, Jalan Surabaya, Jalan Bondowoso, Jalan Jakarta dan Jalan Solo dan setiap jalannya memiliki cabang. Jalan Bandung memiliki 2 cabang, Jalan Surabaya memiliki 2 cabang, Jalan Bondowoso memiliki 3 cabang, Jalan Jakarta memiliki 3 cabang serta Jalan Solo memiliki 4 cabang. Jika cabang jalan direpresentasikan sebagai derajat titik maka gambarkan graph tersebut!
19. Jika ada gambarkan graph yang memiliki barisan titik yang memiliki derajat sebagai berikut :
    a. 1,2,3,3,3

b. 1,3,3,3,4,5

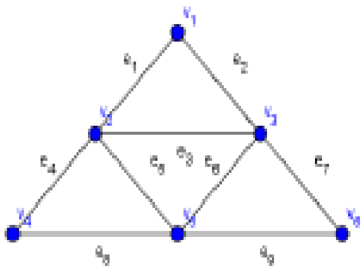
c. 1,2,2,3,4,5

20. Gambarkan graph K_6 dan C_5 , kemudian tuliskan barisan derajat dari setiap titik graph tersebut.

21. Ketika sore hari Lita dan Ani sedang bersepeda di Tirtasari Residence. Mereka bersepeda mengelilingi perumahan tersebut. ketika bersepeda mereka juga menghitung cabang-cabang jalan yang ada. Seperti Jln. Anggrek bercabang 2, Jln. Melati bercabang 2, Jln. Mawar bercabang 3, Jln. Kamboja bercabang 3, Jln. Tulip bercabang 4, Jln. Kenanga bercabang 5. Dapatkah pernyataan diatas digambarkan menjadi sebuah graph ? jika iya jelaskan dan jika tidak jelaskan!

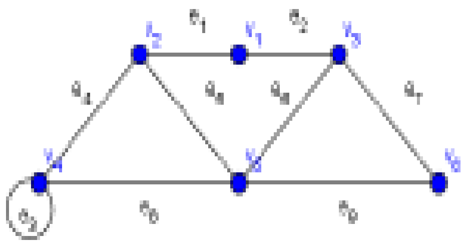
PRESENTASI GRAPH DALAM MATRIKS

22. Tuliskan matrik keterhubungan langsung dan matrik keterkaitan dari graph berikut ini!



23. Jika bisa representasikan graph dibawah ini kedalam matriks keterkaitan, jika tidak berikan alasanmu !

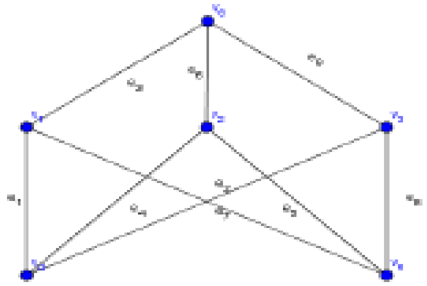
24. Gambar dan tuliskan matrik keterhubungan langsung dan matriks derajat dari graph P_7 dan C_{10}.



25. Gambarkan graph $K_{3,3}$ serta

tuliskan matriks keterkaitannya!

26. Perhatikan graph dibawah ini !



Tuliskan matriks keterhubungan dan matriks derajat dari representasi graph di atas!

27. Gambarkanlah suatu graph dengan matriks derajat sebagai berikut

$$D(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

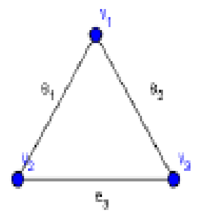
.

28. Gambarkanlah suatu graph dengan matriks keterkaitan sebagai berikut :

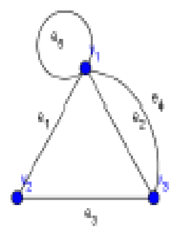
$$I(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

29. Jika bisa representasikan graph dibawah ini ke dalam matriks keterhubungan langsung dan matriks derajat.

a.



b.



30. Sebuah desa dikelilingi oleh 5 anak sungai. Terdapat sebuah anak sungai yang bercabang menjadi 2, satu anak sungai bercabang menjadi 3 dan sisanya tidak bercabang. Dari gambaran diatas

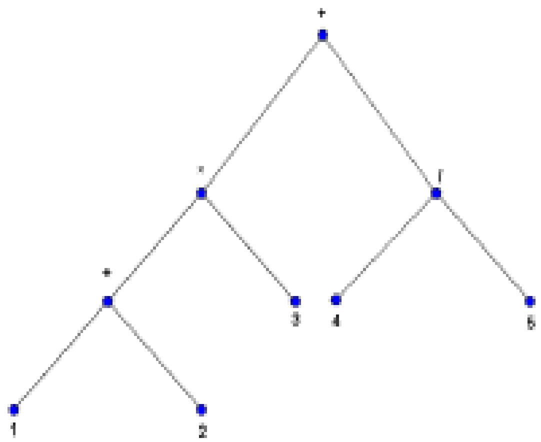
dapatkah pernyataan tersebut di representasikan menjadi sebuah graph? jika bisa gambarkan dan jika tidak berikan alasannya, kemudian tentukan matriks keterhubungan langsungnya!.

31. Gambarkan graph yang memuat matrik derajat seperti berikut :

$$D(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

GRAPH POHON (*TR*EE)

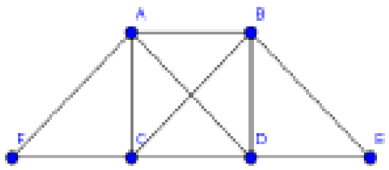
32. Sebutkan definisi dari pohon serta jelaskan !
33. Hutan (*forest*) adalah graph yang tidak memuat sikel dan hutan yang terhubung disebut dengan pohon (*tree*). Dari pernyataan di atas apakah setia hutan termasuk pohon? berikan contoh hutan dan pohon!
34. Sebuah pohon mempunyai dua titik berderajat 3, sebuah titik berderajat 4, dan sebuah titik berderajat 5. Banyaknya titik berderajat satu adalah?
35. Konstruksi pohon dari pernyataan operasi $a + b * \frac{c}{d}$
36. Tentukan pohon yang berorder 4, 6 dan 8!
37. Gambarkan graph yang bebiliki orde 14 dan ukuran 26!
38. Apa yang dimaksud dengan pohon semu? Berikan contoh nya!
39. Tentukan pernyataan dari operasi diagram pohon berikut!



40. Gambarkan 3 pohon yang berorde 3!
41. Representasikan sebuah pohon jika ada 10 titik dan 9 sisi. Terdapat satu titik berderajat 3 dan 2 titik berderajat 4. Tentukan jumlah titik yang berderajat satu !

GRAPH EULER DAN GRAPH HAMILTON

42. Apa perbedaan dari Graph Euler dan Graph Hamilton. Jelaskan !
43. Apa yang dimaksud dengan graph Euler, graph semi Euler dan graph non Euler ?
44. Apa yang dimaksud dengan graph Hamilton? Berikan contohnya!
45. Perhatikan graph dibawah ini !



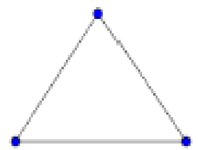
Jika ada tentukan sirkuit Euler dan sirkuit Hamilton dari graph diatas!

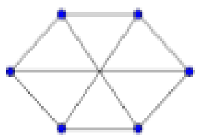
46. Gambarkan graph Euler yang bukan merupakan graph Hamilton. Serta tuliskan sirkuit Euler dari graph tersebut!
47. Gambarkan graph euler, graph semi Euler dan graph Non Euler !

48. Gambarkan graph yang merupakan graph Euler dan Graph hamilton. Tentukan sirkuit Euler dan sirkuit hamiltonnya !
49. Pada graph Euler memiliki teorema bahwa suatu graph terhubung adalah graph semi euler jika dan hanya jikamemiliki tepat dua vertex yang berderajat ganjil. Representasikan teorema tersebut kedalam sebuah graph!
50. Apakah setiaph graph lengkap merupakan graph hamilton? Jelaskan!
51. Gambarkan graph yang bukan merupakan graph Euler akan tetapi merupakan graph Hamilton !

GRAPH PLANAR DAN GRAPH BIDANG

52. Apa yang dimaksud dengan graph planar? Berikan contohnya!
53. Apa perbedaan dari grapg planar dan graph bidang?
54. Sebutkan dan gambarkan graph lengkap yang bukan merupakan graph planar?
55. Apakah setiap graph berikut ini adalah planar? Jika iya tunjukkan graph planarnya tanpa jalur-jalur yang bersilangan!

a. 

b. 

56. Tuliskan teorema rumus Euler dan berikan contohnya!
57. Graph lengkap manakah yang merupakan graph planar? (minimal 2)
58. Benar atau salahkan pernyataan berikut ini :
    a. Setiap graph planar sudah pasti graph bidang.
    b. Setiap graph bidang sudah pasti graph planar.

c. Jika suatu graph tidak planar maka graph tersebut memuat graph bagian yang dapat menjadi sebagai pengkerutannya.

59. Berikan contoh graph bidang! (minimal dua)

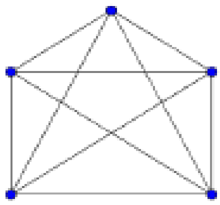
60. Graph lengkap manakah yang bukan termasuk graph planar ? gambarkan !

61. Gambarkan graph sederhana yang merupakan graph planar !

KONSEP PEWARNAAN

62. Apa yang dimaksud dengan bilangan khromatik ?

63. Carilah bilangan kromatik dari graph dibawah ini !



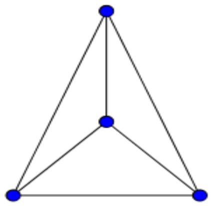
64. Terdapat teorema pada bilangan khromatik yang menyatakan bahwa, jika grpah G graph sederhana dengan derajat titik maksimum Δ , maka $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Berikan contoh dari teorema tersebut!

65. Tentukan bilangan khromatik pada graph lengkap K_3 dan K_4 !

66. Berikan contoh graph dengan 6 titik dan bilangan kromatiknya 5!

67. Apa yang dimaksud dengan indeks khromatik ?

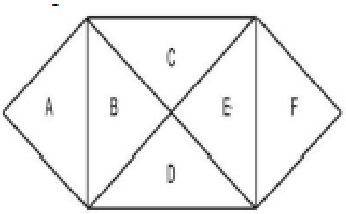
68. Carilah indeks khromatik dari graph dibawah ini !



69. Jelaskan indeks khromatik untuk graph cycle dengan n titik !

70. Berapa warna minimal untuk mewarnai graph lengkap K_{15}.

71. Berapakah warna minimal, untuk mewarnai peta berikut!



PELABELAN

72. Apa yang dimaksud dengan pelabelan sisi ajaib super ?

73. Buatlah pelabelan sisi ajaib pada k_3!

74. Jelaskan tentang pelabelan graph pada graph kipas dan graph sikel !

75. Buatlah graph berlabel pada C_5 !

76. Tuliskan teorema pelabelan dari graph tangga !

77. Tuliskan toerema pelabelan dari graph lintasan (path)!

78. Buatlah graph berlabel pada graph P_3!

79. Tuliskan teorema pelabelan graph dari graph prisma !

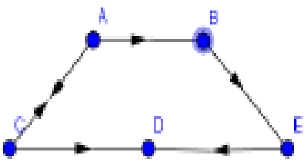
80. Tuliskan salah satu teorma pelabelan graph dari graph buku!

81. Berikan contoh pelabelan graph untuk graph buku !

DIGRAPH

82. Apa yang dimaksud dengan digraph ?

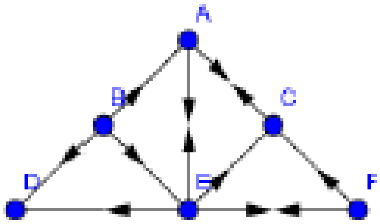
83. Pada digraph D berikut tentukan :



a. Himpunan titiknya

b. Himpunan sisinya

84. Pada digraph D berikut tentukan :



a. Himpunan titiknya

b. Himpunan sisinya

85. Gambarkanlah suatu digraph H dengan himpunan titik $V(G) = \{A, B, C, C, D, E\}$ dan himpunan sisinya $E(G) = \{AC, BE, CE, DA, ED\}$

86. Jelaskan macam-macam derajat titik pada digraph!

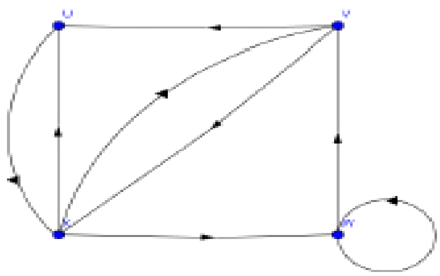
87. Tuliskan barisan derajat masuk dan derajat keluar dari digraph nomor 82!

88. Jika mungkin, gambarlah suatu digraph sederhana dengan barisan derajat masuk atau barisan derajat keluar seperti dibawah ini; jika tidak mungkin, berikan alasannya.

a. Barisan derajat keluar 1, 1, 2, 2, 5

b. Barisan derajat masuk 1, 1, 1, 1, 1

89. Pada digraph berikut tentukan



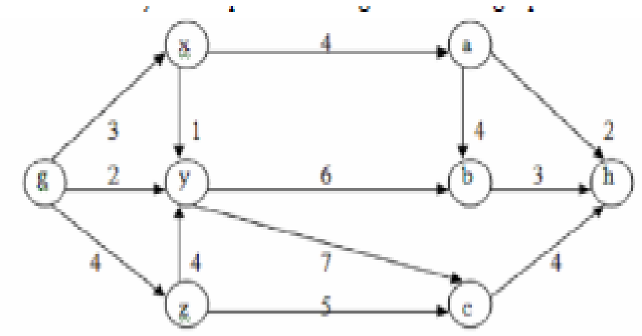
a. Empat sikel dengan panjang 1, 2, 3 dan 4

b. Lintasan dengan panjang maksimum

c. Jalan dengan panjang 5

90. Gambarlah dua digraph yang berbeda (terhadap isomorfisme) yang masing-masing sederhana, dengan empat titik dan enam sisi, serta jika uv sisi berarah di digraph tersebut, maka vu bukan sisi berarahnya.

91. Tentukan jalur terpendek dari g ke h dari digraph berikut!



GRAPH SEBAGAI MODEL MATEMATIKA DAN APLIKASINYA

92. Selama libur sekolah, Toni, Ade, Anggi dan Fatur bermain bersama secara bergantian. Toni dan Ade bermain sepak bola, Ade dan Anggi bermain kelereng, Toni dan Fatur memancing ikan, Ade dan Fatur bermain mobil-mobilan serta Anggi dan Fatur bermain bola basket.
   a. Gambarkan sebuah graph yang menggambarkan penyataan di atas jika nama (Toni, Ade, Anggi dan Fatur) dianggap sebagai suatu titik!
   b. Tentukan jumlah titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) pada graph tersebut!

93. Di sebuah kota terdapat 6 jembatan yang menghubungkan langsung desa satu dengan desa lain yaitu Jembatan Pasar Ayam, Jembatan Senti, Jembatan Kambing, Jembatan Lima, Jembatan Intan dan Jembatan Abu. Para warga sangat bergantung pada jembatan tersebut, karena jembatan tersebut merupakan jalan utama untuk

memperjualbelikan hasil pertanian dan perkebunan mereka. Akan tetapi, setelah terjadi banjir bandang Jembatan intan putus dan rusak. Sehingga warga tidak dapat memperjualbelikan hasil pertanian dan perkebunannya.

a. Gambarkan graph bagian dari pernyataan diatas!
b. Tentukan apakah gambar graph tersebut merupakan graph bagian rentangan, graph bagian atau bukan graph bagian ? berikan alasanmu!

94. Seorang tukang pos sedang mengirimkan 5 surat kepada pelangganya yang berada di perumahan Tirtasari. Ia mengantarkan surat pertama pada rumah nomor 3, surat kedua diantarkan pada rumah nomor 7, surat ke tiga diantarkan ke rumah nomor 11, surat keempat diantakan ke rumah nomor 13. Tinggal satu surat yang belum diantarkan yaitu surat untuk rumah nomor 3. Sehingga ia kembali lagi pada titik awal ia mengantarkan surat.

a. Gambarkan graph sesuai dengan perjalanan tukang pos diatas!
b. Tentukan apakah terdapat sikel pada graph tersebut! jika iya sebutkan dan jika tidak berikan alasannmu!

95. Dalam suatu propinsi terdapat 8 kota yang beberapa diantaranya dapat dihubungkan langsung dengan jalan darat. Kota-kota yang dapat dihubungkan langsung dengan jalan darat antara lain:

A dengan B dan D

B dengan D

C dengan B

E dengan F dan G

a. Gambarkan graph sesuai dengan pernyataan diatas!
b. Tentukan apakah graph tersebut termasuk graph terhubung? Berikan alasanmu!

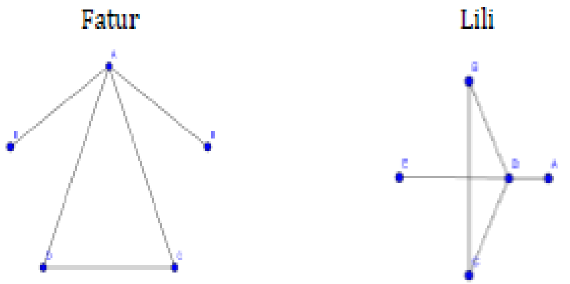
c. Apakah terdapat titik terisolasi pada graph tersebut ? jika ada tentukan titik terasing tersebut !

96. Sususan jaringan komputer pada ruang administrasi dan ruang guru di SMA N 1 PAGAK adalah topologi cicin dan topologi stars. Terdapat 5 komputer di ruang adminsrtrasi dan 5 komputer dan 1 server di ruang guru.

    a. Dari pernyataan diatas gambarkan graph yang mewakili susunan topologi cincin dan topologi stras pada ruang administrasi dan ruang guru!.

    b. Tentukan apakah susunan topologi stars merupakan komplemen dari graph topologi cincin? Berikan alasanmu!

97. Pada malam hari, Fatur dan Lili sedang berbincang-bincang di halam depan rumah. Mereka sedang membicarakan tentang bitang-bintang. Setelah itu mereka melihat ke langit dan menggambrkan rasi bintang seperti gambar dibawah ini:



Dari graph kedua Rasi bintang diatas merupakan isomorfis? Jelaskan !

98. Terdapat kota yang dikelilingi oleh sungai, jumlah sungai tersebut adalah 6 yang setiap sungainya mempunyai cabang. Terdapat 2 suangai yang bercabang menjadi 2. Terdapat 4 sungai yang

bercabang menjadi 3. Gambarkan graph yang merepresentasikan pernyataan diatas dan tentukan jumlah derajat setiap titiknya!

99. Sepulah sekolah Azka mengantar Rara pulang ke rumahnya. Karena baru pertama kali mengantar pulang Rara, Azka mengalami masalah ketika pulang. Ia lupa akan jalan yang harus dilalui. Setelah itu ia mencari jalan dengan berputar menelusuri jalan. Tidak lupa is juga membaca jalan apa yang telas ia lewati. Azka melewati Jln. Jakarta, kemudian Jln. Bandung. Karena jalannya memutar, Azka baru menyadari bahwa ia kembali lagi ke Jln. Bandung. Setelah itu ia melewati Jln. Solo yang bercabang 3, kemudian ia belok kiri dan menemukan Jln. Surabaya bercabang 2. Akan tetapi ia jalan lurus dan akhirnya ia menemukan jalan pulang.
    a. Gambarkan graph yang sesuai dengan permasalahan diatas1.
    b. Dapatkah graph tersebut dinyatakan dalam matriks keterhubungan langsung? Jelaskan!

100. Sebuah desa dikelilingi oleh 5 anak sungai. Terdapat dua anak sungai yang bercabang menjadi 2, satu anak sungai bercabang menjadi 3 dan sisanya tidak bercabang. Dari gambaran diatas dapatkah pernyataan tersebut di representasikan menjadi sebuah graph? jika bisa gambarkan dan jika tidak jelaskan, kemudian tentukan matriks keterkaitannya!

101. Sepulang sekolah Azka mengantar Rara pulang ke rumahnya. Karena baru pertama kali mengantar pulang Rara, Azka mengalami masalah ketika pulang. Ia lupa akan jalan yang harus dilalui. Setelah itu ia mencari jalan dengan berputar menelusuri jalan. Tidak lupa is juga membaca jalan apa yang telas ia lewati. Azka melewati Jln. Jakarta, kemudian Jln. Bandung. Karena jalannya memutar, Azka baru menyadari bahwa ia kembali lagi ke Jln.

Bandung. Setelah itu ia melewati Jln. Solo yang bercabang 3, kemudian ia belok kiri dan menemukan Jln. Surabaya bercabang 2. Akan tetapi ia jalan lurus dan akhirnya ia menemukan jalan pulang.

a. Gambarkan graph yang sesuai dengan permasalahan diatas!.
b. Apakah graph tersebut merupakan pohon? Berikan alasannmu!

DAFTAR PUSTAKA

Katz, B. P., & Starbird, M. (2013). *Distylling Ideas: An Introduction to Mathematical Thinking*. America: The Mathematical Association of America.

Muhsetyo, Gatot. 2007. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit Edisi 3.* Bandung: Informatika Bandung.

Munir, Renaldi. 2009. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung

Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit*. Bandung : Informatika.

Nurjanah, Priatna, Sutarno. 2003. *Matematika Diskrit*. Malang: JICA

Purwanto. 1997. *Bahan Ajar Matematika Diskrit*. Malang: Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Malang

Siang, J.J. 2009. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: ANDI Press.

Townsend, Michael. 1987. *Applied combinatorics and Graph Theory*. The Benjamin/cummings Publishing Company, Inc.

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wilson, R. 1996. *Introduction to Graph Theory*. Edinburgh Gate, Harlow, Essex CM20 2JE, England and Associated Companies throughout the world.

GLOSARIUM

Ajensi

Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang dihubungkan dengan sebuah sisi *e.*

Derajat Titik

Banyak sisi yang insiden dengan suatu titik.

Graph

Sekumpulan objek ($V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut himpunan titik), dan sebuah himpunan lain ($E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang merupakan himpunan sisi) sedemikian hingga tiap sisi e_k dikaitkan dengan suatu pasangan tititk tak terurut (v_i, v_j).

Graph Berarah

Suatu graph yang sisi-sisinya mempunyai arah.

Graph Berarah Simetris

Suatu graph berarah yang merupakan sebuah relasi simetris.

Graph Bertanda S

Suatu jaringan kerja tidak tidak berarah yang nilai fungsinya $+1$ atau -1.

Graph Hingga

Sebuah graph $G(V, E)$ dengan V dan E hingga.

Graph Nol

Sebuah graph $G(V, E)$ dengan $E = 0$.

Graph Sederhana

Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel.

Graph Tak Hingga

Sebuah graph $G(V, E)$ dengan V dan E tak hingga.

Insidensi

Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang terletak pada sisi e atau titik P dan Q merupakan titik ujung sisi e.

Jaringan Kerja

Sebuah graph berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real.

Jaringan Kerja Berarah

Jaringan kerja yang merupakan graph berarah

Jaringan Kerja Tidak berarah

Jaringan kerja yang merupakan sebuah graph

Loop

Sisi yang dua titik ujungnya sama

Seri

Dua sisi yang salins berajensi atau berbatasan jika titik sekutunya berderajat satu

Sisi Paralel

Dua titik yang berlainan dihubungkan oleh dua sisi atau lebih.

Titik Anting/Ujung

Sebuah titik yang berderajat satu.

Titik Terisolasi

Sebuah titik yang tidak memiliki sisi insiden atau titik yang berderajat nol.

Valensi

Derajat suatu titik.

Glosarium

Ajasensi

Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang dihubungkan dengan sebuah sisi e.

Derajat Titik

Banyaknya sisi yang insiden dengan suatu titik.

Graph

Sekumpulan objek ($V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ yang disebut himpunan titik), dan sebuah himpunan lain ($E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ yang merupakan himpunan sisi) sedemikian hingga tiap sisi e_k dikaitkan dengan suatu pasangan titik tak terurut (v_i,v_j).

Graph Berarah

Suatu graph yang sisi-sisinya mempunyai arah.

Graph Berarah Simetris

Suatu graph berarah yang merupakan sebuah relasi simetris.

Graph Bertanda S

Suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya +1 atau -1.

Graph Hingga

Sebuah graph G (V,E) dengan V dan E hingga.

Graph Nol

Sebuah graph $G = (V,E)$ dengan $E = 0$.

Graph Sederhana

Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel.

Graph Tak Hingga

Sebuah graph G (V,E) dengan V dan E tak hingga.

Insidensi

Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang terletak pada sisi e atau titik P dan Q merupakan titik ujung sisi e.

Jaringan Kerja
Sebuah graph berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real.

Jaringan Kerja Berarah
Jaringan kerja yang merupakan graph berarah.

Jaringan Kerja Tidak Berarah
Jaringan kerja yang merupakan sebuah graph.

Loop
Sisi yang dua titik ujungnya sama.

Seri
Dua sisi yang saling berajasensi atau berbatasan jika titik sekutunya berderajat satu.

Sisi Paralel
Dua titik yang berlainan dihubungkan oleh dua sisi atau lebih.

Titik Anting/Ujung
Sebuah titik yang berderajat satu.

Titik Terisolasi
Sebuah titik yang tidak memiliki sisi insiden atau titik yang berderajat nol.

Valensi
Derajat suatu titik.

TEORI GRAPH

Buku Teks ini mengulas tentang Konsep Dasar Graph, Presentasi Graph Dalam Matriks, Graph Pohon, Graph Euler Dan Hamilton, Graph Bidang Dan Plannar, Konsep Pewarnaan Graph (*Graph Coloring*), Digraph dan Graph Sebagai Model Matematika. Setiap pokok bahasan disertai dengan contoh penerapan dalam kehidupan sehari-hari dan contoh soal serta penyelesaiannya.

Buku Teks ini sangat bermanfaat bagi mahasiswa dalam memahami mata kuliah Teori Graph dan penerapannya. Soal-soal yang di sajikan dalam buku teks ini dikemas sedemikian hingga dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah. Variasi soal dalam buku teks ini juga sangat bermanfaat bagi dosen pengampu sebagai referensi.

TEORI GRAPH DAN PENERAPANNYA
ISBN : 978-602-61380-7-1