

ამოცანა

საქონლის ფასი x (ლარი)	16	13	12	10
გაყიდული საქონლის რაოდენობა y (ათასი ც.)	6	8	10	14

1. მოხაზინე განტოლების ნატურალიზაცია (მოახდინეთ წყვილური რეგრესიის განტოლების იდენტიფიკაცია) მოცემულობის მიხედვით.

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

გამოვთვალოთ საჭირო მონაცემები:

N არის მონაცემების რაოდენობა, ამ შემთხვევაში n=4

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{4} (16 + 13 + 12 + 10) = \frac{51}{4} = 12.75$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{4} (6 + 8 + 10 + 14) = \frac{38}{4} = 9.5$$

$$\bar{x} \bar{y} = 12.75 * 9.5 = 121.125$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{4} [(16 * 6 - 121.125) + (13 * 8 - 121.125) + (12 * 10 - 121.125) + (10 * 14 - 121.125)] = -6.125$$

$$\text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\bar{x}^2 = 12.75 * 12.75 = 162.5625$$

$$\text{var}(x) = \frac{1}{4} [(16^2 - 162.5625) + (13^2 - 162.5625) + (12^2 - 162.5625) + (10^2 - 162.5625)] = \frac{18.75}{4} = 4.6875$$

შესაბამისად გვაქვს შემდეგი მონაცემები:

$$\text{cov}(x, y) = -6.125$$

$$\bar{x} = 12.75$$

$$\text{var}(x) = 4.6875$$

$$\bar{y} = 9.5$$

აქედან გამომდინარე:

$$b = \frac{-6.125}{4.6875} = -1.3067$$

$$a = 9.5 - (-1.3067) * 12.75 = 26.1604$$

$$\hat{y} = 26.1604 - 1.3067x$$

2. შეადგინეთ ნორმალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$$

ვიპოვოთ საჭირო მონაცემები:

$$\sum_{i=1}^n y_i = 6 + 8 + 10 + 14 = 38$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 16 + 13 + 12 + 10 = 51$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 6 * 16 + 8 * 13 + 10 * 12 + 14 * 10 = 460$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 16^2 + 13^2 + 12^2 + 10^2 = 669$$

შევიტანოთ მონაცემები:

$$\begin{cases} 38 = 4a + 51b \\ 460 = 51a + 669b \end{cases}$$

არ დაგავიწყდეთ ნორმალურ განტოლებათა სისტემის შედგენისას არ შეგვყავს a და b კოეფიციენტების მნიშვნელობები.

3. რა ეკონომიკური შინაარსი აქვს განტოლებას და კოეფიციენტებს?

მიღებული განტოლება წარმოადგენს გაყიდული საქონლის რაოდენობის დამოკიდებულებას ამავე საქონლის ფასზე. a -ს ეკონომიკური შინაარსი მხოლოდ ლოგიკური დასკვნის შედეგად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, ის არის y -ის მნიშვნელობა, როდესაც საქონლის ფასი ნულია. თუმცა ეკონომიკური თვალსაზრისით ასეთი შემთხვევა იშვიათია. რაც შეეხება b -ს ეკონომიკურ შინაარსს ის ნათლად განსაზღვრულია, საქონლის ფასის ერთი ერთეულით ზრდა გამოიწვევს გაყიდული საქონლის რაოდენობის 1,3067-ით შემცირებას.

4. თუ ფირმა გადაწყვეტს ბაზას მიაწოდოს საშუალოდ პროდუქციის 12 ათასი ერთეული, მაშინ მისი მთლიანი რეალიზაციისათვის როგორი ფასი უნდა დაწესდეს? თუ თქვენი განტოლება ჭეშმარიტია, მაშინ განსაზღვრეთ ფასის რა მნიშვნელობისთვისაა ფირმის მთლიანი შემოსავალი მაქსიმალური?(მთლიანი შემოსავალი გამოითვლება ფორმულით XY)

ამისათვის საჭიროა ჩვენს მიერ მიღებულ განტოლებაში ჩავსვათ Y -ის მნიშვნელობა:

$$12 = 26,1604 - 1,3067x$$

$$x = \frac{26.1604 - 12}{1.3067} = \frac{14.1604}{1.3067} = 10.8368$$

რაც შეეხება შემდეგ კითხვას, მთლიანი შემოსავალი მაქსიმალურია მაშინ, როდესაც:

$$x * y \rightarrow \max$$

$$x(a + bx) \rightarrow \max$$

$$x(26.1604 - 1.3067x) \rightarrow \max$$

5. მოძებნეთ კოეფიციენტთა სტანდარტული შეცდომები:

ზოგადად სტანდარტული შეცდომებია:

$$\sqrt{S_a^2}$$

$$\sqrt{S_b^2}$$

ამათ გამოსათვლელად გვჭირდება შემდეგი მონაცემები:

$$S_a^2 = \frac{S_e^2}{n} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{\text{var}(x)} \right)$$

$$S_b^2 = \frac{S_e^2}{n * \text{var}(x)}$$

$$S_e^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2$$

$$e_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$$

თავდაპირველად ვითვლით:

$$e_1^2 = (6 - (26.1604 - 1.3067 * 16))^2 = 7.5449$$

$$e_2^2 = (8 - (26.1604 - 1.3067 * 13))^2 = 1.3766$$

$$e_3^2 = (10 - (26.1604 - 1.3067 * 12))^2 = 0.2304$$

$$e_4^2 = (14 - (26.1604 - 1.3067 * 10))^2 = 0.8219$$

$$S_e^2 = \frac{1}{4-2} (7.5779 + 1.3766 + 0.2304 + 0.8219) = \frac{9.9738}{2} = 4.9869$$

$$S_a^2 = \frac{4.9869}{4} \left(1 + \frac{162.5625}{4.6875} \right) = 1.2467 * (1 + 34.68) = 44.4823$$

შესაბამისად:

$$\sqrt{S_a^2} = \sqrt{44.4823} = 6.6695$$

შემდეგ

$$S_b^2 = \frac{4.986}{4 * 4.6875} = 0.2659$$

შესაბამისად:

$$\sqrt{S_b^2} = \sqrt{0.2659} = 0.5157$$

საბოლოოდ:

$$\hat{y} = 26.1604 - 1.3067x$$

$$S_e^2 \quad S_a^2 \quad S_b^2$$

ამათ ნაცვლად ქვეშ დაწეროთ შესაბამის მნიშვნელობებს.

6. დაადგინეთ კოეფიციენტთა მნიშვნელოვნება და განსაზღვრეთ ნდობის ინტერვალები, თუ $t_{კრ} = 4,3$

ა კოეფიციენტისათვის:

$$H_0: \alpha = \alpha_0 = 0$$

$$H_1: \alpha \neq \alpha_0 \neq 0$$

$$t_a = \left| \frac{a}{S_a} \right| = \left| \frac{26.1604}{6.6695} \right| = 3.9424$$

რადგან $t_a < t_{კრ}$, კოეფიციენტი არა მნიშვნელოვანია.

$$a - t_{კრ} * S_a < \alpha < a + t_{კრ} * S_a$$

$$26.1604 - 4.3 * 6.6695 < \alpha < 26.1604 + 4.3 * 6.6695$$

$$-2.5171 < \alpha < 54.8393$$

ბ კოეფიციენტისათვის:

$$H_0: \beta = \beta_0 = 0$$

$$H_1: \beta \neq \beta_0 \neq 0$$

$$t_b = \left| \frac{b}{S_b} \right| = \left| \frac{-1.3067}{0.5157} \right| = 2.5338$$

რადგან $t_b < t_{კრ}$, კოეფიციენტი არა მნიშვნელოვანია.

$$b - t_{კრ} * S_b < \beta < b + t_{კრ} * S_b$$

$$-1.3067 - 4.3 * 0.5157 < \beta < -1.3067 + 4.3 * 0.5157$$

$$-3.5242 < \beta < 9.9738$$

7. გამოთვალეთ ახსნილი და აუხსნელი გაფანტულობა და მათი თავისუფლების ხარისხები

$$Q_R = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$Q_E = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$Q = \sum (y - \bar{y})^2$$

$$Q = Q_E + Q_R$$

$$Q_E = (n - 2)S_e$$

$$Q_E = (4 - 2) * 2.2331 = 4.4662$$

ახსნილი გაფანტულობის საპოვნელად დავთვალოთ:

$$(\hat{y}_1 - \bar{y})^2 = (26.1604 - 1.3067 * 16 - 9.5)^2 = 18,0353$$

$$(\hat{y}_2 - \bar{y})^2 = (26.1604 - 1.3067 * 13 - 9.5)^2 = 0,1067$$

$$(\hat{y}_3 - \bar{y})^2 = (26.1604 - 1.3067 * 12 - 9.5)^2 = 0,9604$$

$$(\hat{y}_4 - \bar{y})^2 = (26.1604 - 1.3067 * 10 - 9.5)^2 = 12,9125$$

$$Q_R = 18,0353 + 0,1067 + 0,9604 + 12,9125 = 32,0149$$

$$Q = 4.4662 + 32,0149 = 36,4811$$

რაც შეეხება თავისუფლების ხარისხებს:

$$Q \rightarrow (n - 1) = 4 + 1 = 5$$

$$Q_E \rightarrow (n - 2) = 4 + 2 = 6$$

$$Q_R \rightarrow n = 4$$

8. იპოვეთ დეტერმინაციის კოეფიციენტი და განსაზღვრეთ განტოლების მნიშვნელოვნება, თუ $F_{კრ} = 18,5$

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q}$$

$$R^2 = \frac{32.0149}{36.4811} = 0.8776$$

$$H_0: R^{*2} = 0$$

$$H_1: R^{*2} \neq 0$$

$$F = \frac{(n - 2)R^2}{1 - R^2}$$

$$F = \frac{(4 - 2) * 0.8776}{1 - 0.8776} = 14.3398$$

რადგან $F_b < F_{კრ}$. კოეფიციენტი არა მნიშვნელოვანია.

9. რისი ტოლია კორელაციის კოეფიციენტი და არის თუ არა ის მნიშვნელოვანი.

$$r_{xy} = \frac{cov(x; y)}{\sqrt{var(x)var(y)}}$$

$$r_{xy} = \frac{-6.125}{\sqrt{4.6875 * 8.75}} = \frac{-6.125}{6.4043} = -0.9564$$

$$H_0: \rho_{xy} = 0$$

$$H_1: \rho_{xy} \neq 0$$

$$t = \frac{|r_{xy}| \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

$$t = \frac{|-0.9564| \sqrt{4-2}}{\sqrt{1-(-0.9564)^2}} = \frac{1.3526}{1.3987} = 0.967$$

რადგან $t < t_{\text{კრ. კოეფიციენტი არა მნიშვნელოვანია.}}$