Оценка альтернатив на основе парных сравнений в задаче о выборе строительного подрядчика

Григорьев Д. А., студент 4-го курса бакалавриата СПбГУ,
dmitry.hpbgrigorev@gmail.com

Руководитель: Кривулин Н. К., д.ф.-м.н., профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ, nkk@math.spbu.ru

Аннотация

Рассматривается многокритериальная задача оценки альтернатив на основе парных сравнений, которая возникает при выборе строительного подрядчика. Для решения задачи используются методы анализа иерархий, взвешенных геометрических средних и log-чебышевской аппроксимации. Сопоставление полученных решений показывает близость результатов применения указанных методов.

Введение

Рассматривается многокритериальная задача оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений по нескольким неравноценным критериям на примере задачи о выборе строительного подрядчика. Существует ряд методов, которые позволяют найти решение для таких задач, включая метод анализа иерархий Т. Саати [1, 2], метод взвешенных геометрических средних [3], а также метод log-чебышевской аппроксимации [4, 5], использующий инструменты тропической математики. Известно [2, 6], что решение, полученное одним методом, может существенно отличаться от результатов другого метода. В этих условиях для получения более обоснованного решения целесообразно сопоставлять результаты разных методов: если они мало различаются или совпадают, это может служить дополнительным обоснованием выбора любого из решений в качестве близкого к оптимальному.

Постановка задачи

В задаче о выборе строительного подрядчика [7] исследуются 5 альтернатив выбора строительной компании (A, B, C, D, E), которые сравниваются попарно по 6 критериями (опыт работы, финансовая стабильность, качество работы, обеспечение персоналом, обеспечение оборудованием, текущая рабочая загрузка). Результаты парных сравнений альтернатив по каждому критерию описываются матрицами:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 1/6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1/2 & 4 \\ 2 & 1/2 & 1 & 1/3 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \\ 1/6 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3 \\ 1/3 & 4 & 1 & 1/3 & 5 \\ 1/2 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/3 & 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/3 & 2 & 8 \\ 1/7 & 1 & 1/5 & 1/4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 9 \\ 1/2 & 4 & 1/4 & 1 & 6 \\ 1/8 & 1/4 & 1/9 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1/3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 1/2 & 1/5 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/7 & 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/8 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1/4 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & 1 & 9 & 9 \\ 1/2 & 1/5 & 1/9 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/7 & 1/9 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 1/5 & 1 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

а результаты парных сравнений критериев — матрицей:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 6 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 & 6 & 6 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/4 & 1 & 2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти вектор рейтингов альтернатив $\mathbf{x}$, который задаёт порядок на множестве альтернатив. Для решения используются три метода: метод анализа иерархий, метод взвешенных геометрических средних и метод лог-чебышевской аппроксимации.

Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий (Analytic Hierarchy Process – AHP) использует главные собственные векторы матриц парных сравнений, которые соответствуют их максимальным собственным числам. Собственные векторы нормируются относительно суммы элементов, а затем вектор рейтингов альтернатив вычисляется как взвешенная сумма собственных векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_6$ матриц $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_6$, в которой в качестве весов берутся элементы собственного вектора $\mathbf{w} = (w_i)$ матрицы $\mathbf{C}$.

После вычисления нормированных собственных векторов получим вектор весов критериев

$$\mathbf{w} \approx (0.377,\ 0.299,\ 0.155,\ 0.050,\ 0.037,\ 0.082)^{\mathbf{T}},$$

а также векторы

$$\mathbf{a}_1 \approx (0.086,\ 0.250,\ 0.152,\ 0.458,\ 0.055)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_2 \approx (0.428,\ 0.085,\ 0.176,\ 0.273,\ 0.038)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_3 \approx (0.271,\ 0.067,\ 0.472,\ 0.160,\ 0.030)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_4 \approx (0.147,\ 0.269,\ 0.463,\ 0.078,\ 0.043)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_5 \approx (0.077,\ 0.261,\ 0.574,\ 0.053,\ 0.036)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_6 \approx (0.134,\ 0.547,\ 0.180,\ 0.079,\ 0.060)^{\mathbf{T}}.$$

Вычисление вектора рейтингов альтернатив дает результат

$$\sum_{i=1}^{6} w_i \mathbf{a}_i \approx (0.223,\ 0.198,\ 0.242,\ 0.291,\ 0.045)^{\mathbf{T}}.$$

После нормировки относительно максимального элемента получим

$$\mathbf{x}_{\mathrm{AHP}} \approx (0.766,\ 0.680,\ 0.832,\ 1,\ 0.155)^{\mathbf{T}}.$$

Метод взвешенных геометрических средних

Метод взвешенных геометрических средних (Weighted Geometric Means – WGM) опирается на вычисление геометрических средних строк матриц парных сравнений. Сначала определяется нормированный относительно суммы элементов вектор $\mathbf{w} = (w_i)$ геометрических средних матрицы парных сравнений критериев, а также векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_6$ геометрических средних матриц парных сравнений альтернатив. Элементы каждого вектора $\mathbf{a}_i$ возводятся в степень w_i, а затем результат перемножения соответствующих элементов этих векторов берется в качестве элемента x_i вектора рейтингов $\mathbf{x} = (x_i)$.

Нормированный вектор геометрических средних для матрицы $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{w} \approx (0.377,\ 0.299,\ 0.156,\ 0.051,\ 0.036,\ 0.081)^{\mathbf{T}}.$$

Векторы геометрических средних для матриц $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_6$:

$$\mathbf{a}_1 \approx (0.561, 1.644, 1.0, 3.022, 0.359)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_2 \approx (3.022, 0.574, 1.173, 1.838, 0.267)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_3 \approx (2.063, 0.491, 3.519, 1.246, 0.225)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_4 \approx (1.046, 1.878, 3.104, 0.549, 0.299)^{\mathbf{T}},$$

$$\mathbf{a}_5 \approx (0.660, 2.208, 4.817, 0.467, 0.305)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{a}_6 \approx (0.903, 3.898, 1.191, 0.561, 0.425)^{\mathbf{T}}.$$

Тогда вектор рейтингов альтернатив определяется выражением

$$\prod_{i=1}^{6} (\mathbf{a}_i)^{w_i} \approx (1.227,\ 1.086,\ 1.452,\ 1.695,\ 0.305)^{\mathbf{T}},$$

где операции над векторами выполняются покомпонентно.

Нормированный относительно максимума вектор имеет вид

$$\mathbf{x}_{\mathrm{WGM}} \approx (0.725,\ 0.640,\ 0.857,\ 1,\ 0.180)^{\mathbf{T}}.$$

Метод log-чебышевской аппроксимации

Решение задачи оценки рейтингов альтернатив этим методом состоит в аппроксимации матриц парных сравнений обратно симметрическими матрицами единичного ранга в метрике Чебышева в логарифмической шкале. Применение метода log-чебышевской аппроксимации приводит к ряду задач оптимизации, которые формулируются и решаются в терминах тропической математики [8, 9]. Процедура оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений с использованием методов тропической оптимизации представлена в работах [4, 5].

Тропическая математика изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями. Примером системы является max-алгебра, которая определена на множестве неотрицательных вещественных чисел с операциями сложения $\oplus$ и умножения $\times$. Сложение определено как $x \oplus y = \max(x, y)$ и является идемпотентным, так как $x \oplus x = \max(x, x) = x$, а умножение определено как обычно.

Векторные и матричные операции выполняются по стандартным правилам с заменой операции арифметического сложения $+$ на тропическое сложение $\oplus$. Свойство коллинеарности векторов имеет обычный смысл. Понятия линейной комбинации и линейной зависимости векторов определены как обычно с заменой векторной операции $+$ на $\oplus$.

След квадратной матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ размера n вычисляется по формуле $\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$. Спектральным радиусом матрицы $\mathbf{A}$ называется число

$$\lambda = \operatorname{tr} \mathbf{A} \oplus (\operatorname{tr} \mathbf{A}^2)^{1/2} \oplus \cdots \oplus (\operatorname{tr} \mathbf{A}^n)^{1/n}.$$

Если $\lambda \leq 1$, то для матрицы $\mathbf{A}$ определен оператор Клини в виде

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{I} \oplus \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^2 \oplus \ldots \mathbf{A}^{n-1}.$$

Нахождение весов критериев

Сначала для матрицы $\mathbf{C}$ сравнений критериев следует найти спектральный радиус λ и матрицу Клини $(\lambda^{-1}\mathbf{C})^*$. В результате получаем

$$\lambda = 12^{1/5}, \qquad (\lambda^{-1}\mathbf{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & 2/\lambda & 6/\lambda^2 & 24/\lambda^3 & 72/\lambda^4 & 18/\lambda^3 \\ 6/\lambda^4 & 1 & 3/\lambda & 12/\lambda^2 & 36/\lambda^3 & 9/\lambda^2 \\ 2/\lambda^3 & 4/\lambda^4 & 1 & 4/\lambda & 12/\lambda^2 & 3/\lambda \\ 1/3\lambda^2 & 2/3\lambda^3 & 2/\lambda^4 & 1 & 2/\lambda & 1/2 \\ 1/6\lambda & 1/3\lambda^2 & 1/\lambda^3 & 4/\lambda^4 & 1 & 3/\lambda^4 \\ 2/3\lambda^2 & 4/3\lambda^3 & 4/\lambda^4 & 4/3 & 4/\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы определяют один вектор весов критериев, если все столбцы коллинеарны, или несколько векторов весов в противном случае. Если среди векторов-столбцов матрицы $(\lambda^{-1}\mathbf{C})^*$ имеется несколько линейно независимых векторов, то среди них выбираются в некотором смысле наилучший и наихудший вектор весов.

В качестве наилучшего вектора берется столбец, для которого отношение между наибольшим и наименьшим элементами максимально, т.е. столбец, который наилучшим образом дифференцирует (различает) критерии с максимальным и минимальным весами. В роли наихудшего вектора берется столбец, для которого это отношение минимально, т.е. столбец, который хуже всего дифференцирует критерии.

Определение наихудшего дифференцирующего вектора весов для рассматриваемой матрицы $(\lambda^{-1}\mathbf{C})^*$ дает следующий результат:

$$\mathbf{w}_1 = (1,\ 6/\lambda^4,\ 2/\lambda^3,\ 1/2\lambda^2,\ 1/6\lambda,\ 2/3\lambda^2)^{\mathbf{T}}.$$

Имеется два наилучших вектора весов, которые после нормировки относительно максимального элемента записываются в виде

$$\mathbf{w}_2 = (1,\ 6/\lambda^4,\ 2/\lambda^3,\ \lambda^3/36,\ 1/6\lambda,\ 2/3\lambda^2)^{\mathbf{T}},$$
$$\mathbf{w}_3 = (1,\ 6/\lambda^4,\ 2/\lambda^3,\ \lambda^3/24,\ 1/6\lambda,\ 2/3\lambda^2)^{\mathbf{T}}.$$

Определение рейтингов альтернатив

Для определения рейтингов альтернатив необходимо исследовать взвешенные тропические суммы (максимумы) матриц парных сравнений альтернатив $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_6$, где векторы весов определены на основе матрицы $\mathbf{C}$ парных сравнений критериев, как указано выше. Результаты построения взвешенных сумм показывают, что они одинаковы для всех векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$. Пусть $\mathbf{w} = (w_i)$ обозначает любой из этих векторов. Тогда взвешенная сумма представляет собой матрицу

$$\mathbf{B} = \bigoplus_{k=1}^{6} w_k \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 3\lambda & 3\lambda/2 & \lambda & 7\lambda/2 \\ 3 & 1 & 2 & 4/\lambda^2 & 4 \\ 2 & 2\lambda & 1 & 8/\lambda^3 & 5\lambda/2 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1/2 & \lambda/6 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь для матрицы $\mathbf{B}$ требуется найти спектральный радиус μ и матрицу Клини $(\mu^{-1}\mathbf{B})^*$, которые записываются в виде

$$\mu = 3\lambda^{1/2}, \qquad (\mu^{-1}\mathbf{B})^* = \begin{pmatrix} 1 & 27\lambda^2/\mu^3 & 2/3 & 4/3\lambda^2 & 63\lambda^2/(2\mu^3) \\ 27\lambda/\mu^3 & 1 & 18\lambda/\mu^3 & 4/\lambda^2\mu & 7/6 \\ 36\lambda^3/\mu^4 & 12\lambda^3/\mu^3 & 1 & 8/(\lambda^3\mu) & 14\lambda^3/\mu^3 \\ 54\lambda/\mu^3 & 2 & 36\lambda/\mu^3 & 1 & 7/3 \\ 9\lambda/(2\mu^3) & 1/6 & 3\lambda/\mu^3 & 6/\lambda\mu^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы $(\mu^{-1}\mathbf{B})^*$ используются для определения наихудшего и наилучшего дифференцирующих векторов рейтингов альтернатив. В результате находим наихудший дифференцирующий вектор

$$\mathbf{x}_1 = (\lambda^{1/2}/2,\ 1/2,\ 3\lambda^{1/2}/4,\ 1,\ 3/7)^{\mathbf{T}} \approx (0.641,\ 0.5,\ 0.962,\ 1,\ 0.429)^{\mathbf{T}}.$$

Наилучший дифференцирующий вектор рейтингов имеет вид

$$\mathbf{x}_2 = (4/3\lambda^2,\ 4/3\lambda^{5/2},\ 8/3\lambda^{7/2},\ 1,\ 2/9\lambda^{5/2})^{\mathbf{T}} \approx$$
$$\approx (0.493,\ 0.385,\ 0.468,\ 1,\ 0.064)^{\mathbf{T}}.$$

Заключение

Для задачи о выборе строительного подрядчика на основе парных сравнений альтернатив A, B, C, D, E по 6 критериям получены векторы рейтингов альтернатив с помощью метода анализа иерархий $\mathbf{x}_{\mathrm{AHP}}$, метода взвешенных геометрических средних $\mathbf{x}_{\mathrm{WGM}}$, а также наихудший $\mathbf{x}_1$ и наилучший $\mathbf{x}_2$ дифференцирующие векторы рейтингов по методу log-чебышевской аппроксимации.

В соответствии с величиной рейтингов векторы $\mathbf{x}_{\mathrm{AHP}}$, $\mathbf{x}_{\mathrm{WGM}}$ и $\mathbf{x}_1$ устанавливают один и тот же порядок предпочтения альтернатив

$$D \succ C \succ A \succ B \succ E,$$

который естественно рассматривать как близкий к оптимальному.

Вектор рейтингов $\mathbf{x}_2$ определяет несколько иной порядок

$$D \succ A \succ C \succ B \succ E,$$

в котором альтернативы A и C меняются местами.

Объединение результатов можно представить в виде

$$D \succ C \parallel A \succ B \succ E,$$

где взаимный порядок альтернатив A и C считается не определенным.

Список литературы

[1] Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 315 с.

[2] Saaty T. L., Vargas L. G. Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios // Math. Modelling. 1984. Vol. 5, N 5, P. 309–324.

[3] Crawford G., Williams C. A note on the analysis of subjective judgment matrices // J. Math. Psych. 1985. Vol. 29, N 4. P. 387–405.

[4] Кривулин Н. К., Агеев В. А. Методы тропической оптимизации в многокритериальных задачах оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. матем. 2019. Т. 15, N4. С. 472–488.

[5] Krivulin N., Sergeev S. Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method // Fuzzy Sets and Systems. 2019. Vol. 377. P. 31–51.

[6] Tran N. M. Pairwise ranking: Choice of method can produce arbitrarily different rank order // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438, N 3. P. 1012–1024.

[7] Al-Harbi K. M. Application of the AHP in project management // Int. J. Project Manag. 2001. Vol. 19, N 1. P. 19–27.

[8] Маслов В. П., Колокольцев В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994.

[9] Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та., 2009.