Решение задачи о размещении двух объектов в пространстве с метрикой Чебышева

Кривулин Н. К., д. ф.-м. н., профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ, nkk@math.spbu.ru

Брюшинин М. А., студент кафедры статистического моделирования СПбГУ, st076630@student.spbu.ru

Аннотация

Рассматривается минимаксная задача размещения двух объектов в многомерном пространстве с метрикой Чебышева. Задача формулируется в терминах тропической математики, которая изучает алгебраические системы с идемпотентными операциями. Предлагается прямое аналитическое решение задачи на основе методов и результатов тропической оптимизации.

Введение

Решение задач размещения часто осложняется нелинейностью и негладкостью целевой функции и ограничений. В некоторых случаях решение подобных задач можно упростить путем их представления на языке тропической математики и использования ее результатов. Тропическая (идемпотентная) математика охватывает область, связанную с изучением теории полуполей с идемпотентным сложением и ее приложениями. Решение задач размещения в пространствах с чебышевской и прямоугольной (манхэттенской) метрикой с помощью тропической математики представлены в [2, 3, 5, 9]. В настоящей статье рассматривается минимаксная задача размещения двух объектов в многомерном пространстве с метрикой Чебышева. Сначала представлен краткий обзор основных понятий и результатов тропической математики, необходимых для последующего решения задачи. Задача размещения формулируется в терминах тропической математики, а затем предлагается прямое аналитическое решение задачи на основе методов и результатов тропической оптимизации.

Элементы тропической математики

В этом разделе представлены базовые понятия и результаты тропической математики [1, 2, 4], на основе которых проведено решение.

Рассмотрим непустое множество $\mathbb{X}$, на котором определены операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$. По сложению $\mathbb{X}$ является идемпотентным коммутативным моноидом с нейтральным элементом $\mathbb{0}$. По умножению множество $\mathbb{X}\backslash\{\mathbb{0}\}$ образует абелеву группу с нейтральным элементом $\mathbb{1}$. В итоге имеем набор $\langle\mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes\rangle$.

На $\mathbb{X}$ задан частичный порядок, индуцированный идемпотентостью сложения: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Отсюда следует равносильность неравенства $x \oplus y \leq z$ неравенствам $x \leq z$ и $y \leq z$. Векторные неравенства рассматриваются как покомпонентные.

Справедлив тропический аналог неравенства между арифметическим и геометрическим средними:

$$(x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n)n^{-1} \geq (x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n)^{1/n}.$$

Операции $\oplus$ и $\otimes$ монотонны по каждому аргументу относительно указанного порядка. Умножение дистрибутивно относительно сложения, и для любого $x \in \mathbb{X}\backslash\{\mathbb{0}\}$ существует обратный по умножению x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$. Для тех же иксов и натуральных p определены степени $x^0 = \mathbb{1}$, $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$, $x^p = x^{p-1} \otimes x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$. Далее для простоты записи знак умножения $\otimes$ опущен.

Множество $\mathbb{X}$ не является группой по сложению, так как для его произвольного элемента противоположного относительно сложения не существует. Подобную структуру называют идемпотентным полуполем.

Примером служит $\mathbb{R}_{max,+} = \langle\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle$. В данном вещественном полуполе сложение определено как max, умножение как $+$, нейтральный элемент относительно сложения есть $-\infty$, а относительно умножения — 0.

Операции сложения и умножения матриц выполняются по обычным правилам с заменой соответствующих покомпонентных операций на $\oplus$ и $\otimes$.

Мультипликативно сопряженным транспонированием вектора $\boldsymbol{x} = (x_j)$ называют преобразование, при котором $\boldsymbol{x}$ переводится в вектор-строку $\boldsymbol{x}^- = (x_j^-)$ с элементами $x_j^- = x_j^{-1}$, если $x \neq 0$, и $x_j^- = 0$ иначе. Так, для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ справедливо равенство $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$. Спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ называется её максимальное собственное число. Спектральный радиус может быть вычислен по формуле

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m).$$

Задача оптимизации

Задача размещения — частный случай задачи оптимизации. Методы решения задач оптимизации, сформулированных в терминах тропической математики, получены в [6, 7, 10]. В данном тексте используется следующий результат:

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— матрица со спектральным радиусом* $\lambda > \mathbb{0}$, *а* $\boldsymbol{q}$ *— регулярный вектор. Тогда минимум в задаче*

$$\min \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus r$$

равен

$$\mu = \lambda \ \oplus \bigoplus_{m=1}^{n} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{p})^{1/(m+1)} \oplus r,$$

а все регулярные решения задачи имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \left(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{*} \boldsymbol{u}, \quad \mu^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \mu \left(\boldsymbol{q}^{-} \left(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{*}\right)^{-}.$$

Доказательство представлено в [7, 8, 10].

Метрика Чебышева в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$

Определение. *Метрикой Чебышёва называют максимум модулей разности соответствующих координат векторов:*

$$d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i - s_i|,$$

где $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)^T$ *и* $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)^T$ *— произвольные векторы из* $\mathbb{R}^n$.

В терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ метрика принимает следующий вид:

$$d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = \bigoplus_{i=1}^{n} (r_i s_i^{-1} \oplus r_i^{-1} s_i) = \boldsymbol{s}^{-}\boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{r}^{-}\boldsymbol{s}.$$

Задача размещения двух объектов в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$

Даны k векторов $\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_k\in\mathbb{R}^n$ и l векторов $\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_l\in\mathbb{R}^n$. Требуется найти векторы $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, которые решают задачу

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\quad\max\left\{\max_{1\leq j\leq k}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}_j),\max_{1\leq j\leq l}d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_j),d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}.$$

В терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ задача записывается в следующей форме:

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\quad\left\{\bigoplus_{j=1}^{k}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}_j)\oplus\bigoplus_{j=1}^{l}d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_j)\oplus d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Минимум в задаче (1) равен*

$$\mu=\left(\boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_1\oplus\boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_2\right)^{1/2}\oplus\left(\boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_2\oplus\boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_1\right)^{1/3},$$

а все регулярные решения задачи имеют вид

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_1\oplus\mu^{-1}\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{y}=\mu^{-1}\boldsymbol{u}_1\oplus\boldsymbol{u}_2,\\ &\mu^{-1}\boldsymbol{p}_1\leq\boldsymbol{u}_1\leq\mu\left(\boldsymbol{q}_1^-\oplus\mu^{-1}\boldsymbol{q}_2^-\right)^-,\ \mu^{-1}\boldsymbol{p}_2\leq\boldsymbol{u}_2\leq\mu\left(\mu^{-1}\boldsymbol{q}_1^-\oplus\boldsymbol{q}_2^-\right)^-,\end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{p}_1=\bigoplus_{j=1}^{k}\boldsymbol{r}_j,\quad\boldsymbol{p}_2=\bigoplus_{j=1}^{l}\boldsymbol{s}_j,\quad\boldsymbol{q}_1^-=\bigoplus_{j=1}^{k}\boldsymbol{r}_j^-,\quad\boldsymbol{q}_2^-=\bigoplus_{j=1}^{l}\boldsymbol{s}_j^-.$$

Доказательство. Приведем целевую функцию к более компактному виду. Для начала обозначим:

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\bigoplus_{j=1}^{k}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}_j)\oplus\bigoplus_{j=1}^{l}d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_j)\oplus d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

После подстановки выражений для функций расстояния и группировки слагаемых получим

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^-\bigoplus_{j=1}^{k}\boldsymbol{r}_j\oplus\bigoplus_{j=1}^{k}\boldsymbol{r}_j^-\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}^-\bigoplus_{j=1}^{l}\boldsymbol{s}_j\oplus\bigoplus_{j=1}^{l}\boldsymbol{s}_j^-\boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{y}^-\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{y}.$$

Для последующего упрощения формулы обозначим:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

С использованием введенных обозначений, получим следующий вид целевой функции:

$$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}^- \boldsymbol{A} \boldsymbol{z} \oplus \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{z} \oplus \boldsymbol{z}^- \boldsymbol{p}.$$

Из теоремы 1 известно, что минимум для целевой функции равен

$$\mu = \lambda \ \oplus \bigoplus_{m=1}^{2n} \left(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{A}^{m-1} \boldsymbol{p} \right)^{1/(m+1)},$$

где λ — спектральный радиус, вычисляемый по формуле

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{2n} \operatorname{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/(2i-1)}(\boldsymbol{A}^{2i-1}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/2i}(\boldsymbol{A}^{2i}).$$

Ниже будем использовать обозначение $\boldsymbol{J}_{2n} = \boldsymbol{A}$. Так как для всех целых $i \geq 0$ выполняется $\boldsymbol{A}^{2i} = \boldsymbol{I}_{2n},\ \boldsymbol{A}^{2i-1} = \boldsymbol{J}_{2n}$, то $\operatorname{tr} \boldsymbol{J}_{2n} = \mathbb{0}$, $\operatorname{tr} \boldsymbol{I}_{2n} = \mathbb{1}$ и $\lambda = \mathbb{1}$. Также по теореме 1 μ примет вид:

$$\mu = \lambda \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{I}_{2n} \boldsymbol{p} \right)^{1/2i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{J}_{2n} \boldsymbol{p} \right)^{1/(2i+1)}.$$

Преобразуем слагаемые приведенных выше сумм для их явного представления:

$$\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{I}_{2n} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_2, \quad \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{J}_{2n} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1.$$

Тогда μ принимает следующий вид:

$$\mu = \lambda \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_2 \right)^{1/2i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1 \right)^{1/(2i+1)}.$$

Из определения сопряженного транспонирования следует, что

$$\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_1 = (\bigoplus_{j=1}^{k} \boldsymbol{r}_j^-)(\bigoplus_{j=1}^{k} \boldsymbol{r}_j) \geq \mathbb{1},$$

аналогично $\boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_2 \geq \mathbb{1}$.
Тогда результат суммирования будет равен первому слагаемому:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_2\right)^{1/2i} = \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_2\right)^{1/2}.$$

В свою очередь, из условия и тропического аналога неравенства между геометрическим и арифметическим средними имеем неравенство

$$\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1 \geq (\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1)^{1/2} \geq \mathbb{1}.$$

Следовательно,

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1\right)^{1/(2i+1)} = \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1\right)^{1/3}.$$

Получаем:

$$\mu = \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_2\right)^{1/2} \oplus \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1\right)^{1/3}.$$

Минимум μ целевой функции $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ по теореме 1 доставляют следующие регулярные векторы

$$\boldsymbol{z} = (\mu^{-1}\boldsymbol{A})^* \boldsymbol{u}, \quad \mu^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \mu \left(\boldsymbol{q}^- \left(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\right)^*\right)^-$$

Приведём $(\mu^{-1}\boldsymbol{A})^*$ к явному виду:

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{A})^* = \bigoplus_{i=0}^{2n-1} (\mu^{-i}\boldsymbol{A}^i) = \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mu^{-2i}\right) \boldsymbol{I}_{2n} \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mu^{-(2i+1)}\right) \boldsymbol{J}_{2n}.$$

Так как $\mu \geq \mathbb{1}$, то $\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mu^{-2i} = \mu^0 = \mathbb{1}$, также $\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mu^{-(2i+1)} = \mu^{-1}$, таким образом,

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{I}_{2n} \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{J}_{2n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \mu^{-1}\boldsymbol{I}_n \\ \mu^{-1}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим блоки вектора $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{y} = \mu^{-1}\boldsymbol{u}_1 \oplus \boldsymbol{u}_2,$$

$$\mu^{-1}\boldsymbol{p}_1 \leq \boldsymbol{u}_1 \leq \mu \left(\boldsymbol{q}_1^- \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{q}_2^-\right)^-, \quad \mu^{-1}\boldsymbol{p}_2 \leq \boldsymbol{u}_2 \leq \mu \left(\mu^{-1}\boldsymbol{q}_1^- \oplus \boldsymbol{q}_2^-\right)^-.$$

□

Заключение

В работе с помощью методов тропической алгебры была решена задача размещения двух объектов в чебышёвской метрике. В дальнейшем планируется обобщить решение на случаи задачи с числом объектов больше двух, задачи с весами.

Список литературы

[1] Маслов В. П., Колокольцев В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М. : Физматлит, 1994.

[2] Krivulin N. Algebraic solution to a constrained rectilinear minimax location problem on the plane // 2011 International Conference on Multimedia Technology (ICMT), P. 6212–6220 https://arxiv.org/pdf/1212.6089.pdf

[3] Krivulin N. An algebraic approach to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Transactions on Mathematics, 2011. Vol. 10. N6. P. 191–200 http://www.wseas.us/journal/pdf/mathematics/2012/54-882.pdf

[4] Кривулин Н. К. Экстремальное свойство собственного значения неразложимых матриц в идемпотентной алгебре и решение задачи размещения Ролса // Вестник СПбГУ., Сер. 1., 2011. Вып. 4 С. 42–51 https://elibrary.ru/item.asp?id=17048464

[5] Krivulin N. A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Transactions on Mathematics. 2012. Vol. 11 N7. P. 605–614 http://www.wseas.us/journal/pdf/mathematics/2012/54-882.pdf

[6] Krivulin N., Zimmermann K. Direct solutions to tropical optimization problems with nonlinear objective functions and boundary constraints // WSEAS Press. 2013. P. 86–91

[7] Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 468. P. 211–232.

[8] Кривулин Н., Сорокин В. Решение задачи тропической оптимизации с линейными ограничениями // Вестник СПбГУ., Сер.

1., Т. 2 (60). 2015. Вып. 4 С. 541–552 https://math-mech-astr-journal.spbu.ru/article/view/11191/7873

[9] Krivulin N. Using tropical optimization to solve constrained minimax single-facility location problems with rectilinear distance, Computational Management Science // Comput. Manag. Sci. 2017. Vol. 14, N4. P. 493–518 http://link.springer.com/article/10.1007/s10287-017-0289-2

[10] Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling // Comput. Manag. Sci. 2017. Vol. 14, N1. P. 91–113.