Разработка программных средств визуализации тропических рациональных функций

Шкурат Д. Е., студент магистратуры СПбГУ,
st097097@student.spbu.ru

Аннотация

Тропическая математика — раздел математики, активно использующийся для решения практических задач в разных областях науки: в физике, биологии, экономике и оптимизации. Работа посвящена созданию программных средств визуализации тропических многочленов и тропических рациональных функций.

Введение

Тропическая математика — относительно новый раздел математики, который появился в 1960-х годах и быстро развивается в последние десятилетия. Изначально эта область разрабатывалась и применялась в контексте дискретной математики и оптимизации, но в последнее время тропическая математика находит также применение в информатике [1], экономике [2], биологии [3] и в других науках.

Быстрое развитие тропической математики объясняется тем, что многие нелинейные в обычном смысле задачи, представленные в терминах тропической математики, становятся линейными и сводятся к решению линейных уравнений, нахождению собственных векторов и другим алгебраическим задачам.

Рассмотрим тропическую алгебраическую систему (идемпотентное полуполе) $\mathbb{R}_{(\max,+)}$, которую называют $(\max,+)$-алгеброй. Эта система задана на множестве $\mathbb{X} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, где $\mathbb{R}$ обозначает множество вещественных, на котором определены операции сложения: $x \oplus y = \max(x, y)$ и умножения: $x \otimes y = x + y$. Заметим, что сложение *идемпотентно*, т.е. для любого x из $\mathbb{X}$ верно, что $x \oplus x = x$.

Определим операцию возведения в степень x^y как $x \cdot y$. Пусть a_i коэффициенты из $\mathbb{X}$, тогда можно определить тропический многочлен следующим образом:

$$P(x) = \bigoplus_i a_i x^i.$$

Тропические полиномы часто используются в решении задач обработки изображений [4], криптографии [5] и других.

Тропическая рациональная функция — это тропическое частное двух тропических полиномов:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) = \bigoplus_i a_i x^i, \quad Q(x) = \bigoplus_j b_j x^j.$$

Рациональные функции могут использоваться, например, при обучении нейронных сетей [6].

Известно, что рациональные функции не являются выпуклыми, поэтому задача нахождения экстремумов не является тривиальной. Для решения таких задач могли бы оказаться полезными средства визуализации тропических полиномов и рациональных функций, поэтому разработка приложения, которое обрабатывает многочлены, записанными на языке тропической математики, а также отображает их на графиках, представляется достаточно актуальным.

Тропическая математика

Пусть $\mathcal{X}$ — числовое множество, на котором заданы операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$. Будем предполагать, что $\langle \mathcal{X}, \oplus, \otimes \rangle$ является коммутативным полукольцом с нулём и единицей, в котором сложение идемпотентно, а каждый ненулевой элемент имеет обратный по умножению. Обозначим нулевой и единичный элементы полукольца символами $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$.

Свойства операций

Множество $\mathcal{X}$ образует относительно операции сложения идемпотентную коммутативную полугруппу с нейтральным элементом, т.е. удовлетворяет условиям:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (ассоциативность),
2. $x \oplus y = y \oplus x$ (коммутативность),
3. $x \oplus \mathbb{0} = x$ (существование нуля),
4. $x \oplus x = x$ (идемпотентность).

Относительно умножения имеем коммутативную группу, в которой выполняется:

5. $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ (ассоциативность),

6. $x \otimes y = y \otimes x$ (коммутативность),

7. $x \otimes \mathbb{1} = x$ (существование единицы),

8. если $x \neq 0$, то $\exists x^{-1} : x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$ (существование обратного).

Сложение и умножение связаны свойствами:

9. $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z$ (дистрибутивность),

10. $x \otimes \mathbb{0} = \mathbb{0}$ (закон поглощения).

С учётом групповых свойств умножения полукольцо $\langle \mathcal{X}, \oplus, \otimes \rangle$ часто называют полуполем.

Примеры идемпотентных полуколец

Следующие полукольца являются идемпотентными:

- $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +\rangle$,
- $\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times\rangle$,
- $\mathbb{R}_{\min,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +\rangle$,
- $\mathbb{R}_{\min,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \min, \times\rangle$.

где $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, а $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \big| x > 0\}$.

Рассмотрим подробнее первый пример. В $\mathbb{R}_{\max,+}$ нулевым элементом является $-\infty$, а единичным — число 0.

Для всех x из $\mathbb{R}$ существует обратный по умножению элемент x^{-1}, равный $-x$ в обычной арифметике.

Для всех x, y из $\mathbb{R}$ определена степень x^y, значение которой соответствует арифметическому произведению xy.

Полиномы и рациональные функции

Рассмотрим тропический полином, заданный в терминах $(\max, +)$-алгебры в форме:

$$P(x) = \bigoplus_i a_i x^i.$$

При использовании обычных обозначений это выражение можно записать в виде:

$$\max_i(i \cdot x + a_i).$$

Показатель степени может быть неотрицательным целым числом, но также можно рассматривать и целые показатели (получится тропический многочлен Лорана), и рациональные показатели (тропический многочлен Пюизё), и действительные (обобщённый тропический многочлен Пюизё).

Тропическая рациональная функция — это тропическое частное двух полиномов:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) = \bigoplus_i a_i x^i, \quad Q(x) = \bigoplus_j b_j x^j.$$

что в обычной алгебре будет выглядеть так:

$$\max_i(i \cdot x + a_i) - \max_j(j \cdot x + b_j).$$

Тропический полином образует выпуклую кусочно-линейную функцию, а тропическая линейная функция образует невыпуклую кусочно-линейную функцию. Далее будет приведён пример, иллюстрирующий форму графика рациональной функции

Разработка программного обеспечения для визуализации

Цели и задачи приложения

- Интерпретировать полиномы, записанные на языке тропической математики;
- вычислять значения рациональной функции;
- Строить графики тропических полиномов;
- Строить графики обыкновенных функций;
- Строить график функции ошибки;
- Строить график тропической рациональной функции;

Выбор языка и средств разработки

Для реализации данного проекта был выбран язык C# 8.0 на платформе .NET 5.0. Целевая платформа — Windows 10, конфигурация — AnyCPU. Приложение должно работать на всех операционных системах Windows, которые поддерживают версию .NET 5.0 и выше. Выбор рабочей среды .NET (а не .Net Framework) должен обеспечить возможность сборки проекта под другими операционными системами, например, Linux.

В качестве интегрированной среды разработки была выбрана Microsoft Visual Studio 2022, поскольку она является наиболее удобной средой разработки на языке C#, имеет встроенный диспетчер пакетов NuGet, а также позволяет видеть изменения с системы контроля версий GitHub.

Принцип работы приложения

Для изображения графиков используется пакет ScottPlot, позволяющий отображать несколько графиков на одной плоскости. Чтобы нарисовать график функции достаточно передать два массива одинакового размера — абсцисс и ординат.

В качестве синтаксического анализатора используется система компьютерной алгебры с открытым исходным кодом — AngouriMath. Она работает с объектами-выражениями, постепенно разбивая их на более мелкие объекты-выражения. Она не имеет встроенной поддержки тропической алгебры, поэтому требуется реализовать средства, позволяющее обрабатывать выражения, записанные на языке тропической алгебры.

Продемонстрируем, как реализуется $(\max, +)$-алгебра в нашем приложении:

```
double MaxPlus(Entity expr)
      => expr switch {
          Number.Real r => (double)r,
          Sumf(var a, var b) => (MaxPlus(a) > MaxPlus(b))
              ? MaxPlus(a) : MaxPlus(b),
          Powf(var a, var b) => MaxPlus(a) * (double)b.
              EvalNumerical().RealPart,
          Mulf(var a, var b) => MaxPlus(a) + MaxPlus(b),
          Divf(var a, var b) => MaxPlus(a) - MaxPlus(b),
      };
```

В данном случае алгебра реализуется с помощью функции, которая возвращает double, принимает на вход объект-выражение Entity, который в последствии рекурсивно разбирает. Обратим ваше внимание, что операнд b не в Powf не подвергается рекурсивному разбору, поскольку показатель степени должен вычисляться в обыкновенной алгебре.

Все источники выложены на GitHub и могут быть найдены по ссылке: https://github.com/dragondangun/Tropical-Palm.

Пример работы с приложением

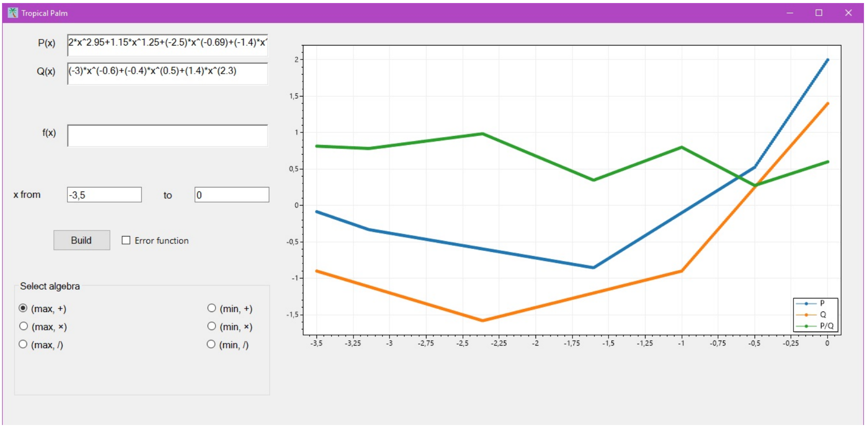

Рис. 1: Приложение во время работы

На рис. 1 показано, что сначала требуется задать отрезок, в котором будут строиться графики функций: $[-3.5; 0]$. Затем, в поле многочлена $P(x)$ вводится полином:

$$2 * x\hat{}2.95 + 1.15 * x\hat{}1.25 + (-2.5) * x\hat{}(-0.69) + (-1.4) * x\hat{}(-0.34) + (-1),$$

а в $Q(x)$ полином:

$$(-3) * x\hat{}(-0.6) + (-0.4) * x\hat{}(0.5) + (1.4) * x\hat{}(2.3).$$

После нажатия на кнопку Build строятся и отображаются графики тропических полиномов и тропической рациональной функции. На графике видно, что рациональная функция не является выпуклой. Легенда располагается в правом нижнем углу. Дополнительно, может быть задана произвольная функция, которая записывается в терминах обычной алгебры.

При желании можно сменить алгебру и/или включить построение графика функции ошибки.

Заключение

Разработано приложение, которое позволяет строить графики тропических полиномов и дробно-рациональных функций. Дальнейшая работа над приложением предусматривает расширение его функциональных возможностей и усовершенствование пользовательского интерфейса.

Список литературы

[1] Litvinov, G.L., Idempotent and tropical mathematics; complexity of algorithms and interval analysis // Computers & Mathematics with Applications, Volume 65, Issue 10, 2013

[2] Baldwin, E. and Klemperer, P. Understanding Preferences: “Demand Types”, and the Existence of Equilibrium With Indivisibilities. // Econometrica 2019, 87: 867-932. https://doi.org/10.3982/ECTA13693

[3] Radulescu, O. Tropical Geometry of Biological Systems. // Computer Algebra in Scientific Computing: 22nd International Workshop, CASC 2020, Linz, Austria, September 14–18, 2020, Proceedings. Sep 2020. Pages 1–13. https://doi.org/10.1007/978-3-030-60026-6_1

[4] Li, D. Morphological template decomposition with max-polynomials. // J Math Imaging Vis 1, 215–221, 1992. https://doi.org/10.1007/BF00129876

[5] Grigoriev, D., Shpilrain, V. Tropical Cryptography // Communications in Algebra, 42:6, 2624-2632, 2014 DOI: 10.1080/00927872.2013.766827

[6] Zhang, L., Naizat, G., Lim, L.-H. Tropical Geometry of Deep Neural Networks // Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning, PMLR 80:5824-5832, 2018, http://proceedings.mlr.press/v80/zhang18i.html

[7] Кривулин, Н.К. Методы идепотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. изд. С.-Петерб. ун-та, 2009.