Алгебраическое решение задач составления оптимального графика выполнения проекта

Кривулин Н. К., д.ф.-м.н., профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ, nkk@math.spbu.ru

Губанов С. А., СПбФ КБ “Луч” инженер-программист, segubanov@mail.ru

Аннотация

Предлагаются прямые решения на основе методов тропической оптимизации для задач оптимального планирования графика выполнения работ проекта при различных ограничениях на время выполнения работ. В качестве критериев оптимальности плана используются минимум максимального разброса времени начала всех работ и минимум общей продолжительности проекта.

Введение

Одной из основных проблем управления проектами является задача составления оптимального графика (календарного плана) выполнения работ проекта [1, 2]. Для решения задач календарного планирования находят применение модели и методы тропической математики, которая изучает полукольца и полуполя с идемпотентным сложением [3, 4, 5]. Задачи планирования сводятся к задачам оптимизации, которые формулируются и решаются в терминах тропической математики (задачи тропической оптимизации) [6, 7, 8, 9]. В настоящей работе рассматриваются обобщения задач минимизации максимального разброса времени начала работ проекта и общей продолжительности проекта при заданных временных ограничениях, которые изучались в работах [7, 8, 9], и предлагаются новые решения указанных задач.

Задачи оптимального календарного планирования

Изучаются две задачи, которые возникают при составлении оптимальных графиков выполнения работ проекта при необходимости синхронизировать время выполнения работ во времени. В первой задаче требуется минимизировать максимальный разброс времени начала всех работ, во второй – минимизировать общую продолжительность проекта. Заданы ограничения в форме минимальных допустимых временных интервалов между временем начала и завершения различных работ, а также границы для времени начала и завершения каждой работы.

Рассмотрим проект, который заключается в параллельном выполнении n работ при условии временных ограничений в виде отношений предшествования “старт-старт”, “старт-финиш” и “финиш-старт”, а также в виде границ для наиболее раннего и наиболее позднего времени начала и наиболее позднего времени завершения работы.

Для каждой работы $i = 1, \ldots, n$ обозначим время начала и завершения через x_i и y_i. Пусть заданы величины g_i и h_i, которые определяют самое раннее и самое позднее время начала, а также f_i, которая определяет наиболее позднее время завершения работы. Эти величины задают границы для времени начала и завершения в виде неравенств

$$g_i \leq x_i \leq h_i, \qquad y_i \leq f_i.$$

Ограничения типа “старт-старт” для работы i определены в форме неравенств $b_{ij} + x_j \leq x_i$ для всех $j = 1, \ldots, n$, где b_{ij} обозначает минимально допустимый интервал времени между началом работы i и началом работы j. Считаем $b_{ij} = -\infty$, если величина b_{ij} не задана. Объединение неравенств по всем j дает эквивалентное неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i.$$

Обозначим минимальный допустимый интервал между временем начала работы i и завершением работы j как c_{ij} ($c_{ij} = -\infty$, если интервал не задан) и запишем ограничение “старт-финиш” в виде неравенства $c_{ij} + x_j \leq y_i$. После объединения неравенств по всем j получим

$$\max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) \leq y_i.$$

Будем предполагать, что работа завершается немедленно при выполнении заданных для нее ограничений “старт-финиш”, а тогда хотя бы для одного j выполняется равенство $c_{ij} + x_j = y_i$. В этом случае предыдущее неравенство следует заменить равенством

$$\max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) = y_i.$$

Пусть d_{ij} обозначает минимальный допустимый интервал между временем завершения работы i и начала j ($d_{ij} = -\infty$, если интервал не задан). Ограничения “финиш-старт” записываются в виде неравенств $d_{ij} + y_j \leq x_i$, объединение которых дает неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n} (d_{ij} + y_j) \leq x_i.$$

Определим критерий оптимальности, который требуется минимизировать, в виде максимального разброса времени начала работ

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i = \max_{1 \leq i \leq n} x_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-x_i).$$

В качестве другого критерия будем рассматривать общую продолжительность проекта, которая определяется по формуле

$$\max_{1 \leq i \leq n} y_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i = \max_{1 \leq i \leq n} y_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-x_i).$$

Сформулируем задачу минимизации максимального разброса времени начала при заданных ограничениях, как задачу определения для всех $i = 1, \ldots, n$ значений x_i и y_i, которые обеспечивают минимум

$$\begin{aligned} \min_{x_i, y_i} \quad & \max_{1 \leq i \leq n} x_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-x_i); \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i, \quad \max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) = y_i, \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (d_{ij} + y_j) \leq x_i, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad y_i \leq f_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Задачу составления оптимального плана работ в соответствии с критерием минимума общей продолжительности всех работ проекта представим в виде

$$\begin{aligned} \min_{x_i, y_i} \quad & \max_{1 \leq i \leq n} y_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-x_i); \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i, \quad \max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) = y_i, \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (d_{ij} + y_j) \leq x_i, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad y_i \leq f_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Ниже эти задачи будут сформулированы в терминах тропической математики и решены с помощью методов тропической оптимизации.

Элементы тропической математики

Приведем обзор основных определений и результатов тропической (идемпотентной) математики [7, 8, 4, 5], необходимых для описания и решения задач тропической оптимизации в следующем разделе.

Пусть множество $\mathbb{X}$ замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, и содержит их нейтральные элементы ноль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Сложение является идемпотентным (для каждого $x \in \mathbb{X}$ выполняется равенство $x \oplus x = x$), а умножение дистрибутивным относительно сложения и обратимым (для любого ненулевого $x \neq \mathbb{0}$ существует элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$). Алгебраическую систему $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ обычно называют идемпотентным полуполем. Знак $\otimes$ операции умножения далее будет опускаться.

Идемпотентное сложение задает частичный порядок: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Будем предполагать, что указанный частичный порядок дополнен на $\mathbb{X}$ до линейного порядка.

Для любого $x \neq \mathbb{0}$ и целого $p > 0$ обычным путем определена целая степень: $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x^{p-1}x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$, $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$. Считается, что операция возведения в рациональную степень также определена.

Примером алгебраической системы $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ является вещественное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle$, для которого $\mathbb{0} = -\infty$, $\mathbb{1} = 0$, $\oplus = \max$ и $\otimes = +$.

Множество матриц, состоящих из m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$, обозначается через $\mathbb{X}^{m \times n}$. Операции сложения и умножения согласованных по размеру матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ и $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$, а также умножение на скаляр x определяются формулами

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\}_{ij} = \bigoplus_{k} b_{ik} c_{kj}, \quad \{x\boldsymbol{A}\}_{ij} = x a_{ij}.$$

Заданное выше отношение порядка обобщается на матрицы и понимается покомпонентно.

Рассмотрим квадратные матрицы в $\mathbb{X}^{n \times n}$. Матрица $\boldsymbol{I}$ с элементами, равными $\mathbb{1}$ на главной диагонали и $\mathbb{0}$ вне ее, является единичной.

Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и целого $p > 0$ определена степень: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}$, а также следующие функции:

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^k,$$

Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то определена матрица Клини в форме

$$\boldsymbol{A}^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^k.$$

Множество векторов-столбцов, состоящих из n элементов обозначается через $\mathbb{X}^n$. Вектор без нулевых элементов называется регулярным. Вектор, состоящий из единиц, обозначается как $\mathbf{1} = (\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1})^T$.

Для вектора $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ транспонированный вектор обозначается как $\boldsymbol{x}^T$. Мультипликативно сопряженный вектор для $\boldsymbol{x}$ – это вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ – иначе.

Введем тропические аналоги нормы вектора и матрицы. Для любых вектора $x = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ и матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m \times n}$ имеем

$$||\boldsymbol{x}|| = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i, \quad ||\boldsymbol{A}|| = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Решение задач оптимального планирования

Рассмотрим задачи минимизации максимального разброса времени начала работ (1) и минимизации общей продолжительности проекта (2), в которых заданы ограничения вида "старт-старт", "старт-финиш", "финиш-старт" и границы для самого раннего и самого позднего допустимого времени начала работ. Представим эти задачи в векторной форме как задачи тропической оптимизации, а затем приведем результаты, которые описывают полное решение задач.

Сначала сформулируем задачу (1) в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Для этого введем следующие матрицы и векторы:

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij}), \quad \boldsymbol{C} = (c_{ij}), \quad \boldsymbol{D} = (d_{ij}),$$
$$\boldsymbol{x} = (x_i), \quad \boldsymbol{f} = (f_i), \quad \boldsymbol{g} = (g_i), \quad \boldsymbol{h} = (h_i).$$

После замены арифметических операций на операции полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ задачу можно представить в векторном виде в форме

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{x}; \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \\ & \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{f}. \end{aligned} \tag{3}$$

На основе применения методов тропической оптимизации получен следующий результат.

Лемма 1 *Пусть* $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{D}$ *– матрицы, а* $\boldsymbol{C}$ *– регулярная по столбцам матрица, такие, что для матрицы* $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}$ *выполняется условие* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}) \leq \mathbb{1}$. *Пусть* $\boldsymbol{g}$ *– вектор, а* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{h}$ *– регулярные векторы такие, что для вектора* $\boldsymbol{s}^T = \boldsymbol{f}^- \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{h}^-$ *выполняется условие* $\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{R}^* \boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$.

Тогда минимальное значение целевой функции в задаче (3) *равно*

$$\theta = \|\boldsymbol{R}^*\| \oplus \bigoplus_{0 \leq i+j \leq n-2} \|\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{R}^i\| \|\boldsymbol{R}^j \boldsymbol{g}\|,$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}^* \oplus \bigoplus_{0 \leq i+j \leq n-2} \theta^{-1} \boldsymbol{R}^i \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{R}^j,$$

где $\boldsymbol{u}$ *– любой регулярный вектор, который удовлетворяет условиям*

$$\boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{G})^-.$$

Задача минимизации общей продолжительности проекта (2) в векторной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{y}; \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \\ & \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{f}. \end{aligned} \tag{4}$$

Решение задачи описывает следующее утверждение.

Лемма 2 *Пусть* $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{D}$ *– матрицы,* $\boldsymbol{C}$ *– регулярная по столбцам матрица, такие, что матрица* $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}$ *удовлетворяет условию* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}) \leq \mathbb{1}$. *Пусть* $\boldsymbol{g}$ *– вектор, а* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{h}$ *– регулярные векторы такие, что вектор* $\boldsymbol{s}^T = \boldsymbol{f}^- \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{h}^-$ *удовлетворяет условию* $\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{R}^* \boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$.

Тогда минимальное значение целевой функции в задаче (4) *равно*

$$\theta = \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^*\| \oplus \bigoplus_{0 \leq i+j \leq n-2} \|\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{R}^i\| \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^j \boldsymbol{g}\|,$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}^* \oplus \bigoplus_{0 \leq i+j \leq n-2} \theta^{-1} \boldsymbol{R}^i \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^j,$$

где $\boldsymbol{u}$ *– любой регулярный вектор, который удовлетворяет условиям*

$$\boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{G})^-.$$

Заключение

Рассмотрены задачи составления оптимального графика выполнения работ, которые заключаются в минимизации максимального разброса времени начала работ и минимизации общей продолжительности проекта при заданных ограничениях вида “старт-старт”, “старт-финиш”, “финиш-старт” и границах для самого раннего и самого позднего допустимого времени начала работ. Получены прямые решения задач, которые могут быть использованы для их формального анализа и непосредственных вычислений в практических приложениях.

Список литературы

[1] T’kindt V. and Billaut J.-C. , Multicriteria Scheduling. 2 ed. Berlin: Springer, 2006.

[2] *Kerzner H.* Project Management. 10 ed. Hoboken: Wiley, 2010. 1094 p.

[3] Маслов В. П., Колокольцев В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994.

[4] Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та., 2009.

[5] Butkovič P., Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010.

[6] Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling //Computational Management Science. 2017. Vol. 14. N 1. P. 91-113.

[7] Krivulin N., Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan // Annals of Operations Research. 2017. Vol. 256, N 1. P. 75-92.

[8] Krivulin N., Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling. // Optimization. 2017. Vol. 66, N 2. P. 205-224.

[9] Кривулин Н. К., Губанов С. А. Алгебраическое решение задачи оптимального планирования сроков проекта в управлении проектами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8. Вып. 1. С. 73-87.