Решение задачи выбора проекта информационной системы методами тропической математики

Приньков А.С., аспирант кафедры статистического моделирования СПбГУ, aprinkov@yahoo.com

Руководитель: Кривулин Н.К., д.ф.-м.н. профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ, nkk@math.spbu.ru

Аннотация

Рассматривается многокритериальная задача оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений при принятии решения по выбору проекта информационной системы. Для решения задачи используется подход, основанный на взвешенной минимаксной log-чебышевской аппроксимации и применении методов тропической математики. Полученное решение сравнивается с известным решением с помощью метода анализа иерархий.

Введение

Многокритериальные задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений составляют важный класс задач принятия решений, которые распространены во многих сферах. В многокритериальных задачах выбор оптимального решения осуществляется в соответствии с несколькими критериями. Основная сложность таких задач — отсутствие в общем случае решения, которое является наилучшими по всем критериям сразу. Исходными условиями такой задачи выступает набор m альтернатив и их попарное сравнение по n критериям. Такие сравнения удобно представлять в виде матриц парных сравнений $\boldsymbol{A}_k$, где $1 \leq k \leq n$. Критерии также сравниваются между собой попарно, а результаты сравнений записываются в матрицу сравнений критериев $\boldsymbol{C}$. Решением такой задачи является вектор абсолютных рейтингов, по которому определяются ранги альтернатив. Один из подходов к решению опирается на log-чебышевскую аппроксимацию матриц парных сравнений согласованными матрицами (обратно симметрическими матрицами единичного ранга) и сводится к решению задач оптимизации в терминах тропической математики. С помощью методов тропической математики эти задачи могут быть решены аналитически.

Элементы тропической математики

Тропическая (идемпотентная) математика изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями [1, 2, 3]. Операцию называют идемпотентной, если при ее применении к одинаковым аргументам она дает в результате этот аргумент. Например, операция максимум является идемпотентной: $\max(x, x) = x$. Задачи оптимизации, сформулированные в терминах идемпотентных алгебраических систем, могут быть решены методами тропической оптимизации. Это относится к классическим и вновь сформулированным задачам. Многие из этих задач могут быть решены в явной аналитической форме, другие же имеют только алгоритмическое решение.

В работе используется max-алгебра — алгебраическая система, которая представляет собой множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ с операциями сложения и умножения. В такой алгебраической системе сложение определено как максимум и обозначается знаком $\oplus$. Умножение определено и обозначается как обычно. Векторные и матричные операции выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию $\oplus$. Единичная матрица обозначается символом $\boldsymbol{I}$ и имеет обычный вид. Целая неотрицательная степень квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначает результат произведения матрицы на себя и определена для всех натуральных p так, что $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1}$. След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n вычисляется по формуле $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.

Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ называется выражение $x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$. Вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, если существуют числа $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ такие, что выполняется равенство $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$. Коллинеарность двух векторов имеет обычный смысл: векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются коллинеарными, если $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$ для некоторого $x \in \mathbb{R}_+$.

Спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ называется число, которое вычисляется согласно формуле

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$

Если $\lambda < 1$, то для матрицы $\boldsymbol{A}$ определен оператор Клини

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i.$$

Более подробные сведения по теории, методам и приложениям тропической математики можно найти, например, в работах [1, 2, 3].

Решение задачи выбора проекта информационной системы

Рассмотрим задачу выбора проекта информационной системы, описанную в работе [4]. Эта задача состоит в том, чтобы по совокупности критериев выбрать наиболее приоритетный проект информационной системы для реализация. В работе [4] приводится решение с помощью метода анализа иерархий Т. Саати [5], а также обсуждается преимущество такого решения над классическими экспертными методами маркетинга при сравнении альтернатив по нескольким критериям. При использовании нескольких критериев выбора проекта информационной системы возникает ряд сложностей, основные из которых — присутствие нематериальных выгод и невозможность установить относительную важность разных типов затрат и прибыли. Таким образом, без учета относительной важности критериев можно ошибочно выделить проекты с высокой материальной прибылью, игнорируя проекты с высокой нематериальной прибылью.

В рассматриваемой задаче используется шкала оценок от 1 до 9. Всего рассматривается $m = 6$ конкурирующих альтернативных проектов информационных систем. Альтернативы сравниваются по $n = 4$ критериям: увеличение точности канцелярских операций (accuracy), эффективность обработки информации (efficiency), продвижение обучения в организации (organisational learning) и стоимость реализации (implementation costs).

Далее приведем решение многокритериальной задачи по выбору информационного проекта на основе минимаксной log-чебышевской аппроксимации. Такое решение в терминах тропической оптимизации может быть получено в аналитической форме [6, 7].

В задаче задана матрица парных сравнений критериев:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1/7 & 1/5 \\ 9 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 1/2 & 1 & 3 \\ 5 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/8 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1/8 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/8 \\ 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1 & 7 & 3 & 1/5 & 1 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/6 \\ 1 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 5 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1 & 5 & 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 2 & 1/3 & 1/2 & 2 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & 3 & 7 \\ 1/2 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/2 & 1 \\ 3 & 1/2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1/3 & 2 & 1/2 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1/8 \\ 1/4 & 2 & 1 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 1/4 \\ 1/3 & 3 & 2 & 1/2 & 1 & 1/5 \\ 3 & 8 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи с помощью минимаксной log-чебышевской аппроксимации будем производить аналитические вычисления в терминах тропического полуполя с операцией максимума в роли сложения, которое называют max-алгеброй.

Для определения весов критериев необходимо вычислить $(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$.

Сначала для матрицы $\boldsymbol{C}$ определим спектральный радиус:

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{C} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/4}(\boldsymbol{C}^4) = (25/9)^{1/3} \approx 1.4057.$$

Вычисление матрицы Клини, столбцы которой генерируют все оптимальные векторы весов критериев, дает следующий результат:

$$\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/9\lambda & 2\lambda/25 & \lambda/5 \\ 9\lambda & 1 & 2/\lambda & 5/\lambda \\ 27\lambda/5 & 3/5 & 1 & 3/\lambda \\ 5/\lambda & \lambda/5 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица может генерировать не единственный (с точностью до положительного множителя) вектор весов, а множество векторов $\mathcal{S}$. В случае неединственного решения в качестве «наилучшего» и «наихудшего» векторов весов возьмем такие векторы из множества $\mathcal{S}$, которые максимизируют и минимизируют отношение между максимальным и минимальным элементами вектора весов. Эти решения являются наилучшим и наихудшим дифференцирующими векторами весов.

Нормируем столбцы матрицы $\boldsymbol{D}$ относительно максимального элемента, тогда максимальные элементы всегда будут равны 1. В этом случае наилучшим решениям будут соответствовать столбцы, у которых минимальные элементы являются наименьшими среди всех столбцов, а наихудшие — у которых минимальные элементы наибольшие.

Нормированная матрица $\boldsymbol{D}$ равна

$$\begin{pmatrix} 1/9\lambda & 1/9\lambda & 1/9\lambda & 1/9\lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3/5 & 3/5 & \lambda/2 & 3/5 \\ \lambda/5 & \lambda/5 & \lambda/5 & \lambda/5 \end{pmatrix}.$$

Первый, второй и четвертый столбцы коллинеарны. Для всех столбцов минимальным элементом является $1/9\lambda \approx 0.0790$.

Наилучшими дифференцирующим вектором весов является вектор

$$\boldsymbol{v} = (1/9\lambda,\ 1,\ 3/5,\ \lambda/5)^{\mathrm{T}},$$

а наихудшим - вектор

$$\boldsymbol{w} = (1/9\lambda,\ 1,\ \lambda/2,\ \lambda/5)^{\mathrm{T}}.$$

Возьмем наилучший дифференцирующий вектор весов $\boldsymbol{v}$ и составим взвешенную сумму

$$\boldsymbol{P} = 1/9\lambda \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + 3/5\boldsymbol{A}_3 + \lambda/5\boldsymbol{A}_4 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 7 & 3 & 9/5 & 21/5 \\ 2/3\lambda & 2\lambda/5 & 1 & 1/5 & 3/10 & 3/5 \\ 9/5 & 4\lambda/5 & 5 & 1 & 6/5 & 3 \\ 6/5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 3\lambda/5 & 8\lambda/5 & 6 & 3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

После вычисления следов степеней матрицы $\boldsymbol{P}$ определим ее спектральный радиус:

$$\mu = \operatorname{tr} \boldsymbol{P} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/6}(\boldsymbol{P}^6) = 45^{1/3} \approx 3.5569.$$

Матрица Клини $(\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$ равна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 675/\mu^5 & 378/\mu^4 & 189/\mu^4 & 3/\mu & 7/5 \\ 3/\mu & 1 & 1134/\mu^5 & 567/\mu^5 & 405/\mu^5 & 21/5\mu \\ 2/15 & 2\lambda/5\mu & 1 & 126/\lambda\mu^5 & 90/\lambda\mu^5 & 42/\lambda\mu^4 \\ 81/\mu^4 & 3/5 & 18/\mu^2 & 1 & 243/\mu^5 & 3/\mu \\ 675/\mu^5 & 225/\mu^4 & 14/5 & 7/5 & 1 & 945/\mu^5 \\ 8/15 & 8\lambda/5\mu & 6/\mu & 3/\mu & 72\lambda/5\mu^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью генерирующей матрицы $(\mu^{-1}\boldsymbol{P})^*$ вычислим наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} = (3/\mu,\ 405/\mu^5,\ 90/\lambda\mu^5,\ 243/\mu^5,\ 1,\ 72\lambda/5\mu^3)^{\mathrm{T}} \approx\\ \approx (0.8434,\ 0.7114,\ 0.1125,\ 0.4268,\ 1.0000,\ 0.4498)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Вычисленный вектор задает порядок $A_5 > A_1 > A_2 > A_6 > A_4 > A_3$.

Возьмем наихудший дифференцирующий вектор весов $\boldsymbol{w}$ и составим взвешенную сумму

$$\boldsymbol{R} = 1/9\lambda\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \lambda/2\boldsymbol{A}_3 + \lambda/5\boldsymbol{A}_4 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 5\lambda/2 & 1 & 7 & 3 & 3\lambda/2 & 7\lambda/2 \\ 2/3\lambda & 2\lambda/5 & 1 & 1/5 & \lambda/4 & \lambda/2 \\ 3\lambda/2 & 4\lambda/5 & 5 & 1 & \lambda & 5\lambda/2 \\ \lambda & 5 & 5 & 1 & 1 & 3 \\ 3\lambda/5 & 8\lambda/5 & 6 & 3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

После вычисления следов степеней матрицы $\boldsymbol{R}$ определим ее спектральный радиус:

$$\mu = \operatorname{tr}\boldsymbol{R} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/6}(\boldsymbol{R}^6) = (75\lambda/2)^{1/3} \approx 3.7495$$

Матрица Клини $(\mu^{-1}\boldsymbol{R})^*$ равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1125\lambda/2\mu^5 & 315\lambda/\mu^4 & 315\lambda/2\mu^4 & 225\lambda/2\mu^4 & 7/5 \\ 375\lambda^2/4\mu^4 & 1 & 1575\lambda^2/2\mu^5 & 1575\lambda^2/4\mu^5 & 1125\lambda^2/4\mu^5 & 525\lambda^2/4\mu^4 \\ 75\lambda^3/2\mu^5 & 15\lambda^2/\mu^4 & 1 & 21\lambda^2/5\mu^3 & 3\lambda^2/\mu^3 & 105\lambda^3/2\mu^5 \\ 225\lambda^2/4\mu^4 & 3/5 & 15\lambda/\mu^2 & 1 & 675\lambda^2/4\mu^5 & 5\lambda/2\mu \\ 1875\lambda^2/4\mu^5 & 375\lambda/2\mu^4 & 14/5 & 7/5 & 1 & 2625\lambda^2/4\mu^5 \\ 150\lambda^3/\mu^5 & 60\lambda^2/\mu^4 & 6/\mu & 3/\mu & 12\lambda^2/\mu^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив для генерирующей матрицы оптимальных альтернатив:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = (4\mu^5/1875\lambda^2,\ 2\mu^4/375\lambda,\ 5/14,\ 5/7,\ 1,\ 4\mu^5/2625\lambda^2)^{\mathrm{T}} \approx\\ \approx (0.8001,\ 0.7499,\ 0.3571,\ 0.7143,\ 1,\ 0.5715)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Вычисленный вектор задает порядок $A_5 > A_1 > A_2 > A_4 > A_6 > A_3$.

В работе [4], где была сформулирована эта задача, порядок альтернатив при использовании метода анализа иерархий получился $A_1 >$

$A_2 > A_5 > A_6 > A_4 > A_3$. Если сравнивать с наилучшим log-чебышевским решением, то видно, что разница в решениях есть в первых трех рангах, последние три ранга полностью совпадают. В случае сравнения с результатами наихудшей log-чебышевской аппроксимации тройка наиболее приоритетных и тройка наименее приоритетных альтернатив совпадают, но внутри троек разный порядок. В случае существенного различия результатов, выбор одного из них не вполне очевиден. В рассматриваемой задаче все методы дали по существу схожие результаты, поэтому различные решения могут дополнять информацию при окончательной приоритезации.

Список литературы

[1] Маслов В. П., Колокольцев В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994

[2] Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.

[3] Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 255 с.

[4] Muralidhar K., Santhanam R., Wilson R. L. Using the analytic hierarchy process for information system project selection // Information and Management. 1990. Vol. 18, N 2. P. 87–95.

[5] Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.:Радио, 1993 — 278 с.

[6] Кривулин Н. К., Агеев В. А. Методы тропической оптимизации в многокритериальных задачах оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 472–488.

[7] Krivulin N. Methods of tropical optimization in rating alternatives based on pairwise comparisons // Operations Research Proceedings 2016 / Ed. by A. Fink, A. Fugenschuh, M. J. Geiger. Cham: Springer, 2018. P. 85–91.