Об устойчивости всплесковых разложений

Демьянович Ю.К., профессор кафедры параллельных алгоритмов СПбГУ,
y.demjanovich@spbu.ru

Иванцова О. Н., доцент кафедры параллельных алгоритмов СПбГУ,
o.ivancova@spbu.ru

Аннотация

В работе устанавливаются критерии устойчивости сплайн-всплесковых разложений. Полученные критерии применимы к всплесковым разложениям нулевого, первого и второго порядков.

Введение

Всплесковые (вэйвлетные) разложения широко используются при обработке числовых информационных потоков; объемы таких потоков постоянно возрастают, и это является стимулом к дальнейшему развитию теории всплесков ([1], [2]). Используемый в данной работе подход к построению всплесков основывается на применении аппроксимационных соотношений, так что автоматически обеспечивается эффективная аппроксимация (чаще всего, она асимптотически оптимальна по N-поперечнику стандартных компактов). В противоположность классическим вэйвлетам упомянутый подход позволяет без дополнительных сложных исследований использовать неравномерную сетку (как конечную, так и бесконечную), что весьма важно для экономии компьютерных ресурсов в случае появления сингулярных изменений рассматриваемых потоков. Кроме того, при построении всплесковых разложений в многомерном случае (и даже на произвольном дифференцируемом многообразии) могут применяться известные конечно-элементные аппроксимации (Куранта, Зламала и т.п.), что существенно расширяет возможности использования всплесковых разложений. В классическом случае большую трудность представляет построение всплескового (вэйвлетного) базиса в том или ином функциональном пространстве (часто в $L_2(\mathbb{R}^1)$); используемый здесь подход не требует предварительного построения всплескового базиса (при желании этот базис может быть получен после проведения основных исследований). С другой стороны, знание всплескового базиса позволяет достичь существенной экономии компьютерных и сетевых ресурсов. Заметим, что для получения упомянутой экономии не нужен всплесковый базис в пространстве функций с континуальной областью определения, достаточно лишь получить подходящий базис для пространства всплесковых числовых потоков, но для этого необходимо все построения выполнять без использования функций с континуальной областью определения.

Цель данной работы состоит в том, чтобы в рамках упомянутого подхода рассмотреть условия устойчивости сплайн-всплескового разложение относительно возмущения исходных данных. Для формул декомпозиции исходными данными является, так называемый, исходный поток. При рассмотрении формул реконструкции исходными данными являются основной и всплесковый потоки.

Предварительные сведения

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{L}$ функций, определенных на интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$. На интервале (α, β) введем сетку

$$X : \ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 \ldots, \tag{1.1}$$

$$\lim_{j \to -\infty} x_j = \alpha, \quad \lim_{j \to +\infty} x_j = \beta. \tag{1.2}$$

Пусть $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$ — вектор-функция с компонентами, принадлежащими пространству $\mathbb{L}$: $\varphi_i \in \mathbb{L}$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Рассмотрим множество G линейных функционалов $g^{(s)} \in \mathbb{L}^*$, $G \stackrel{\text{def}}{=} \{g^{(s)}\}_{s \in \mathbb{Z}}$, со свойством

$$\operatorname{supp} g^{(s)} \subset (x_s, x_{s+1}) \quad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Результат действия функционала $g^{(s)}$ на функцию $u \in \mathbb{L}$ обозначим острыми скобками $\langle g^{(s)}, u \rangle$. Упомянутые скобки будем использовать также для вектор-столбца с числовыми компонентами

$$\langle g^{(s)}, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\langle g^{(s)}, \varphi_0 \rangle, \langle g^{(s)}, \varphi_1 \rangle, \ldots, \langle g^{(s)}, \varphi_m \rangle)^T.$$

Условие невырожденности. Полная цепочка векторов

Предположим, что выполнено условие

$$\det(\langle g^{(s)}, \varphi \rangle, \langle g^{(s+1)}, \varphi \rangle, \ldots, \langle g^{(s+m)}, \varphi \rangle) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) называется *условием невырожденности*.

Рассмотрим цепочку $m+1$-мерных векторов $\dots, \mathbf{a}_{-2}, \mathbf{a}_{-1}$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots$. Если при каждом фиксированном $s \in \mathbb{Z}$ система векторов $\{\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_{s+m+1}\}$ линейно независимая, то цепочка векторов $\dots, \mathbf{a}_{-2}, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ называется *полной*.

По определению положим

$$\mathbf{a}_s \stackrel{\text{def}}{=} \langle g^{(s)}, \varphi \rangle. \tag{2.2}$$

Цепочка векторов (2.2) — полная, поскольку из предположения (1.3), (2.1) следует линейная независимость системы векторов $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_{s+m+1}$ при любом фиксированном целом s.

Замечание. Если $\mathbb{L}$ является пространством непрерывных функций на интервале (α, β), и $\langle g^{(s)}, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_s)$, $s \in \mathbb{Z}$, а система функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ является системой Чебышева на (α, β), то свойство (2.1) выполнено. Заметим, что примером системы Чебышева на любом интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ является система $\{1, t, \dots, t_m\}$.

Аппроксимационные соотношения и пространство минимальных сплайнов

Теперь рассмотрим соотношения

$$\sum_{i=k-m}^{k} \mathbf{a}_i \omega_i(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{supp} \omega_s \subset [x_s, x_{s+m+1}] \quad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Соотношения (3.1) – (3.2) называются *аппроксимационными соотношениями*. Ввиду предположения (2.1) из аппроксимационных соотношений однозначно определяются функции $\omega_i(t)$. При предположениях (2.1) эти функции образуют линейно независимую систему. Они называются координатными сплайнами.

Предположим, что $\omega_s \in \mathbb{L}$. Из формул (1.3), (2.1) – (2.2), (3.1) – (3.2) следуют соотношения биортогональности системы функционалов $\{g^{(j)}\}$ по отношению к системе координатных сплайнов $\{\omega_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$:

$$\langle g^{(j)}, \omega_s \rangle = \delta_{j,s} \quad \forall j, s \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{S}$, состоящее из линейных комбинаций координатных сплайнов, $\mathbb{S} = \mathbb{S}(X, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\{\omega_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$, где через $\mathcal{L}$ обозначена линейная оболочка функций, находящихся в фигурных скобках. Пространство (X, φ) называется *пространством минимальных сплайнов*.

Вложенное пространство минимальных сплайнов

Пусть $\widetilde{X}$ — подмножество сетки X такое, что

$$X : \ldots < \widetilde{x}_{-2} < \widetilde{x}_{-1} < \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \ldots,$$

$$\lim_{j \to -\infty} \widetilde{x}_j = \alpha, \quad \lim_{j \to +\infty} \widetilde{x}_j = \beta, \quad \widetilde{X} \subset X.$$

Предположим, что $\{\widetilde{g}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ — система линейных функционалов со свойствами

$$\operatorname{supp} \widetilde{g}^{(i)} \subset (\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}) \quad \det(\langle \widetilde{g}^{(i)}, \varphi \rangle) \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим функции $\widetilde{\omega}_i$, связанные с новой сеткой $\widetilde{X}$ аналогично предыдущему, и введем линейное пространство минимальных сплайнов $\widetilde{\mathbb{S}}$, ассоциированное с новой сеткой $\widetilde{\mathbb{S}} = \mathbb{S}(\widetilde{X}, \varphi)$.

Предположим, что пространство $\widetilde{\mathbb{S}}$ является подпространством пространства $\mathbb{S}$, так что

$$\widetilde{\mathbb{S}} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{L}. \tag{4.2}$$

Операция проектирования на вложенное пространство

Из соотношений (4.1) следует, что система функционалов $\{\widetilde{g}^{(s)}\}_{s \in \mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\{\widetilde{\omega}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$,

$$\langle \widetilde{g}^{(s)}, \widetilde{\omega}_i \rangle = \delta_{s,i} \quad \forall s, i \in \mathbb{Z}. \tag{5.1}$$

Рассмотрим операцию P проектирования пространства $\mathbb{S}$ на подпространство $\widetilde{\mathbb{S}}$, которая действует по формуле

$$Pu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s \in \mathbb{Z}} \langle \widetilde{g}^{(s)}, u \rangle \omega_s, \quad \forall u \in \mathbb{S}(X, \varphi). \tag{5.2}$$

Ясно, что если $t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1})$ фиксировано, то правая часть формулы (5.2) имеет не более $m+1$ слагаемого:

$$Pu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=k-m}^{k} \langle \widetilde{g}^{(s)}, u \rangle \omega_s(t), \quad \forall t \in (\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1}). \tag{5.3}$$

Операция проектирования P определяет прямую сумму

$$\mathbb{S} = \widetilde{\mathbb{S}} \dotplus \mathbb{W}. \tag{5.4}$$

Декомпозиция и реконструкция

Пусть $\mathbf{c} = (\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots)$ — исходный поток числовой информации. Рассмотрим функцию

$$u(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_j c_j \omega_j(t). \tag{6.1}$$

Ее проекция $\widetilde{u} \stackrel{\mathrm{def}}{=} Pu$ на пространство $\widetilde{\mathbb{S}}$ может быть представлена в форме

$$\widetilde{u} = \sum_i a_i \widetilde{\omega}_i. \tag{6.2}$$

Итак, имеем так называемый основной поток

$$\mathbf{a} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

который соответствует укрупнению $\widetilde{X}$ сетки X, а также вспесковый поток $\mathbf{b} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots)$, который определяется разложением разности $w \stackrel{\mathrm{def}}{=} u - \widetilde{u}$ по базису пространства $\mathbb{S}$: $w = \sum_s b_s \omega_s$ (см. формулы (5.3) – (5.4), (6.1) – (6.2)).

Переход от исходного потока $\mathbf{c}$ к потокам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется *декомпозицией*, а обратный переход называется *реконструкцией*.

Формулы декомпозиции могут быть представлены в форме $\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T \mathfrak{Q}\mathbf{c}$, а формулы реконструкции — в форме $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathfrak{P}^T \mathbf{a}$. Здесь $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — матрицы, которые называются матрицами сужения и продолжения соответственно.

В частном случае для $m = 1$, $\varphi(t) = (1, t)^T$, $X \setminus \widetilde{X} = \{x_{k+1}\}$ формулы декомпозиции имеют вид

$$a_i = c_i \quad \text{при} \quad i \le k-1, \quad a_i = c_{i+1} \quad \text{при} \quad i \ge k, \tag{6.3}$$

$$b_j = 0 \quad \text{при} \quad j \ne k, \quad b_k = -\frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot c_{k-1} + c_k - \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \cdot c_{k+1}, \tag{6.4}$$

а формулы реконструкции могут быть представлены в форме

$$c_j = a_j + b_j \quad \text{при} \quad j \le k-1, \tag{6.5}$$

$$c_k = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \cdot a_{k-1} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \cdot a_k + b_k, \tag{6.6}$$

$$c_j = a_{j-1} + b_j \quad \text{при} \quad j \geq k+1. \tag{6.7}$$

Заметим, что если отрезок $[a, b]$ содержится в интервале (α, β), то все предыдущие построения справедливы для сужения рассматриваемых функций на этот отрезок; при этом рассматриваемые сетки, а также исходный, основной и всплесковый потоки оказываются конечными.

О численной устойчивости декомпозиции и реконструкции

Определение. *Сетка $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ вида (1.1) – (1.2) называется локально квазиравномерной, если существует число $K_0 \geq 1$ такое, что справедливо соотношение*

$$K_0^{-1} \leq \frac{x_{s+1} - x_s}{x_s - x_{s-1}} \leq K_0 \quad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{7.1}$$

Множество сеток, удовлетворяющих неравенствам (7.1), называется классом локально квазиравномерных сеток типа K_0. Этот класс сеток обозначается $\mathcal{X}(K_0)$. Множество всех сеток обозначаем $\mathcal{X}(\infty)$.

Заметим, что $\mathcal{X}(1)$ — множество равномерных сеток (при этом, очевидно, должно быть $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$). Дальше считаем, что $K_0 \geq 1$.

Лемма 1. *Если сетка (1.1) – (1.2) является локально квазиравномерной сеткой типа K_0, то*

$$(1 + K_0)^{-1} \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+2} - x_k} \leq (1 + K_0^{-1})^{-1}, \tag{7.2}$$

$$(1 + K_0)^{-1} \leq \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+2} - x_k} \leq (1 + K_0^{-1})^{-1}. \tag{7.3}$$

Доказательство. Используя соотношение (7.1), имеем

$$K_0^{-1} + 1 \leq \frac{x_{k+2} - x_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} + 1 \leq K_0 + 1.$$

Учитывая неотрицательность всех частей этого двойного неравенства, перейдем к обратным величинам. В результате получим соотношение (7.2).

Неравенство (7.3) доказывается аналогично доказательству соотношения (7.2). ■

Лемма 2. *Если сетка (1.1) – (1.2) является локально квазиравномерной сеткой типа K_0, то для формул декомпозиции справедливы соотношения*

$$|a_i| = |c_i| \quad \textit{при} \quad i \leq k-1, \quad |a_i| = |c_{i+1}| \quad \textit{при} \quad i \geq k, \tag{7.4}$$

$$|b_k| \le (1 + K_0^{-1})^{-1} \cdot (|c_{k-1}| + |c_{k+1}|) + |c_k|. \tag{7.5}$$

Доказательство. Соотношения (7.4) вытекают из формул (6.3), а соотношения (7.5) получаются из формулы (6.4) и неравенств (7.2) – (7.3). ■

Лемма 3. *Если сетка (1.1) – (1.2) является локально квазиравномерной сеткой типа K_0, то для формул реконструкции верны неравенства*

$$|c_j| \le |a_j| + |b_j| \quad \textit{при} \quad j \le k - 1, \tag{7.6}$$

$$|c_k| \le (1 + K_0^{-1})^{-1} \cdot (|a_{k-1}| + |a_k|) + |b_k| \tag{7.7}$$

$$|c_j| \le |a_{j-1}| + |b_j| \quad \textit{при} \quad j \ge k + 1. \tag{7.8}$$

Доказательство. Соотношения (7.6) и (7.8) вытекают из формул (6.5) и (6.7), а соотношение (7.7) следует из формулы (6.6) и неравенств (7.2) – (7.3). ■

Введем обозначения

$$\|\mathbf{a}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i \in \mathbb{Z}} |a_i|, \quad \|\mathbf{b}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i \in \mathbb{Z}} |b_i|, \quad \|\mathbf{c}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i \in \mathbb{Z}} |c_i|.$$

Теорема 1. (Об устойчивости декомпозиции) *Если X — локально квазиравномерная сетка типа K_0, то справедливы неравенства*

$$\|\mathbf{a}\| \le \|\mathbf{c}\|, \tag{7.9}$$

$$\|\mathbf{b}\| \le (2(1 + K_0^{-1})^{-1} + 1)\|\mathbf{c}\|. \tag{7.10}$$

Доказательство. Из (7.4) имеем

$$|a_i| = |c_i| \le \|\mathbf{c}\| \quad \text{при} \quad i \le k - 1, \quad |a_i| = |c_{i+1}| \le \|\mathbf{c}\| \quad \text{при} \quad i \ge k,$$

откуда вытекает неравенство (7.9). Из (7.5) выводим

$$|b_k| \le 2(1 + K_0^{-1})^{-1} \cdot \|\mathbf{c}\| + \|\mathbf{c}\|.$$

Таким образом, неравенство (7.10) доказано. ■

Теорема 2. (Об устойчивости реконструкции) *Если X — локально квазиравномерная сетка типа K_0, то справедливы неравенства*

$$\|\mathbf{c}\| \le \max\{2(1 + K_0^{-1})^{-1}, 1\} \cdot \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|. \tag{7.11}$$

Доказательство. Из неравенств (7.6) и (7.6) имеем

$$|c_j| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{k\},$$

а из соотношения (7.7) имеем

$$|c_k| \le 2(1 + K_0^{-1})^{-1} \cdot \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$

Из последних двух неравенств следует соотношение (7.11). ■

Заключение

В работе установлены критерии устойчивости сплайн-всплесковых разложений. Доказаны теоремы об устойчивости декомпозиции и реконструкции.

Список литературы

[1] Демьянович Ю. К. Всплески & минимальные сплайны. СПб., 2003.

[2] Демьянович Ю. К. Теория сплайн-всплесков. СПб., 2013.