TD1 :

Exercice 1 : Signal exponentiel

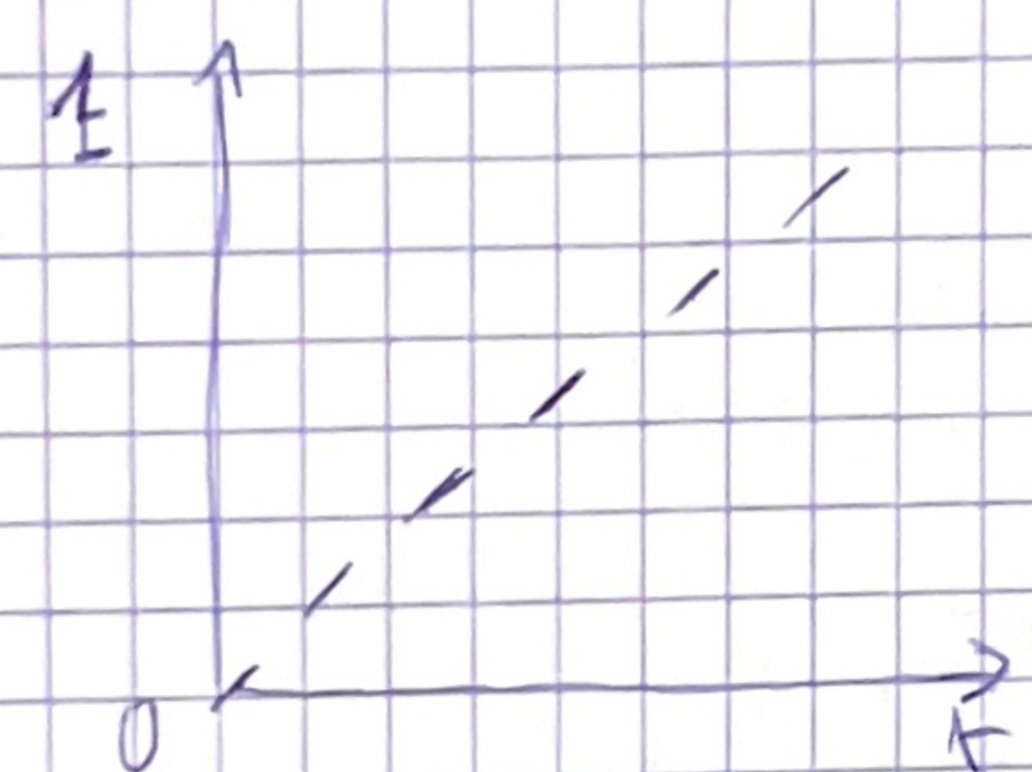
$$s(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0$$

où $u(t)$ est l'échelon unité (Heaviside).

1- Tracé pour $a = 1$:

- Pour $a = 1$:

$$s(t) = e^{-t} u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$$



2- Causalité :

On dit qu'un signal est causal si sa valeur est nulle pour $t < 0$.

$$s(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

or $s(t) = 0$ pour $t < 0$ donc le signal est causal.

3- Energie totale E_s du signal :

L'energie d'un signal continu :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt$$

Comme on a $s(t) = 0$ pour $t < 0$:

$$E_s = \int_0^{+\infty} (e^{-at})^2 \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at} \, dt = \left[\frac{e^{-2at}}{-2a}\right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{-1}{2a} = \frac{1}{2a}$$

L'energie est finie car $a > 0$.

4- Puissance moyenne P_s sur $]-\infty, +\infty[$:

Comme le signal est à énergie finie donc sa puissance moyenne est nulle.

$$P_s = 0.$$

$$P_s = \lim_{T \to \pm\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to \pm\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} e^{-2at} \, dt$$

$$= \lim_{T \to \pm\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1 - e^{-2at}}{2a} = \lim_{T \to \pm\infty} \frac{1 - e^{-2at}}{4at} = 0$$

$$\boxed{P_s = 0}$$

5. Partie paire $s_p(t)$ et partie impaire $s_i(t)$:

$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} \quad , \quad s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2}$$

Pour $s(t) = e^{-at} u(t)$:

$$s(-t) = e^{at} u(-t) = \begin{cases} e^{at} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Donc :

$$s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} = \begin{cases} \frac{e^{at}}{2} & t < 0 \\ \frac{e^{-at}}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$

et $$s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2} = \begin{cases} -\frac{e^{at}}{2} & t < 0 \\ \frac{e^{-at}}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$

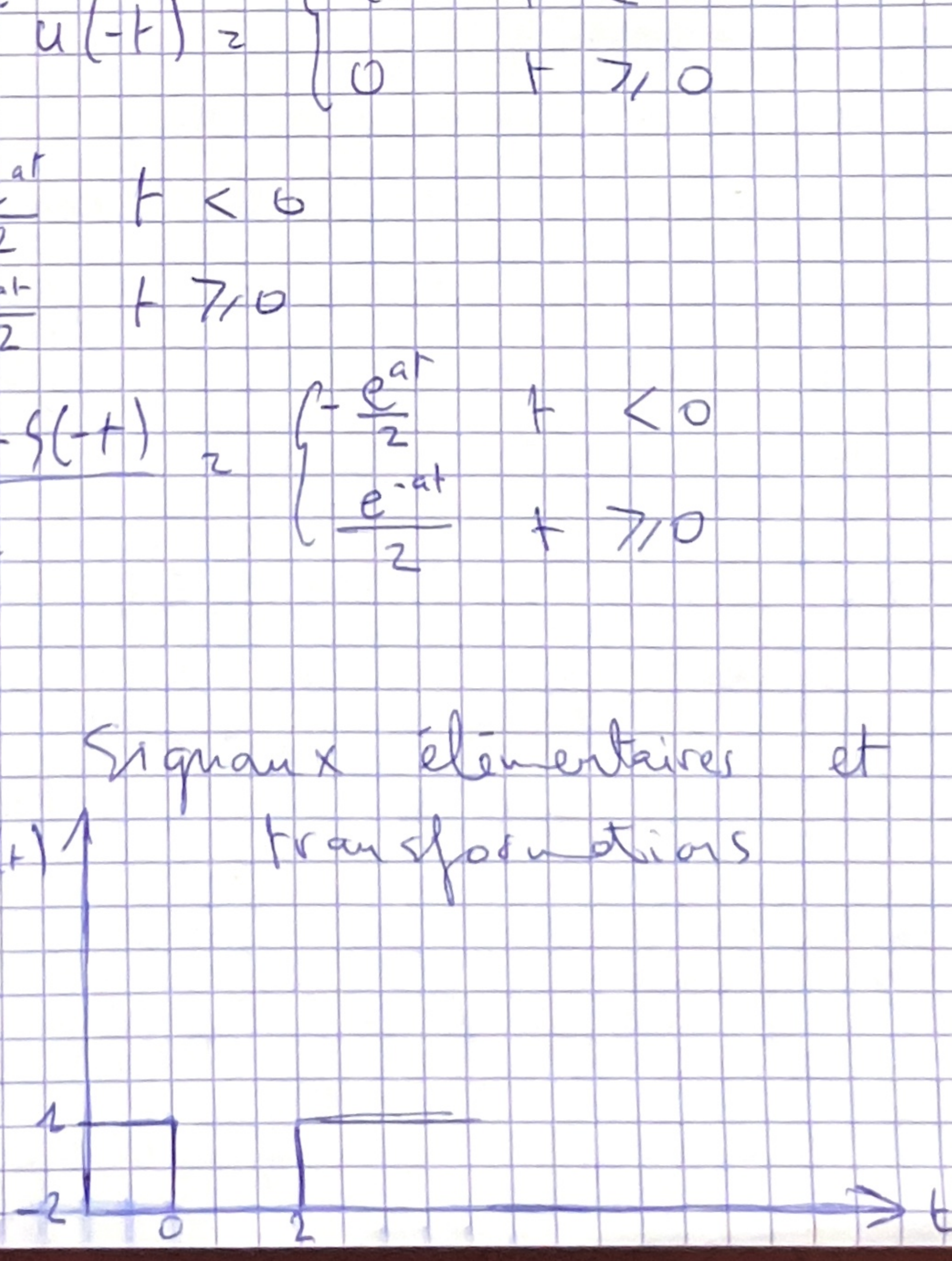
Exercice 2 : Signaux élémentaires et transformations

~~$x(t) = \Pi_T(t)$~~

1 - Tracé $x(t)$

$x(t) = \Pi_T(t)$

valant 1 pour $t \in [-T/2, T/2]$ et 0 ailleurs !



2_ Signal retardé :

$$y(t) = x(t-T) = \begin{cases} 1 , & t \in [T-\frac{T}{2}, T+\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$y(t) = x(t-T) = \begin{cases} 1 & t \in [\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Cette opération est dit décalage temporel.

3_ Causalité :

La causalité est dite si peut vérifier $x(t) = 0$ pour $t < 0$.

Dans ce cas :

$x(t) = 1$ sur $[-\frac{T}{2}, 0]$ non causal.

Pour le rendre causal ~~le~~ le signal doit être décalé vers la droite

$$x(t) = x(t - T/2) \Rightarrow [0, T]$$

le signal est causal.

TD 2 :

Exercice 1 : TF d'une exponentielle causale

$s(t) = e^{-at} u(t)$ avec $a > 0$

1- La définition :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} \, dt$$

2- Calcul de $S(f)$:

$$s(t) = e^{-at} u(t) \Rightarrow S(f) \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t} \, dt$$

$$S(f) = \int_0^{+\infty} e^{-t(a + j2\pi f)} \, dt = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$S(f) = \boxed{\frac{1}{a + j2\pi f}}$$

3- Module $|S(f)|$:

$$|S(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}$$

4- Effet de a sur le spectre :

Si a augmente, le signal décroît plus vite donc le spectre devient plus large en fréquence. avec $f_c = \frac{a}{2\pi}$

Donc si a augmente le spectre change.

Exercice 2 : sinusoïde

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

1- Forme exponentielle (Euler) :

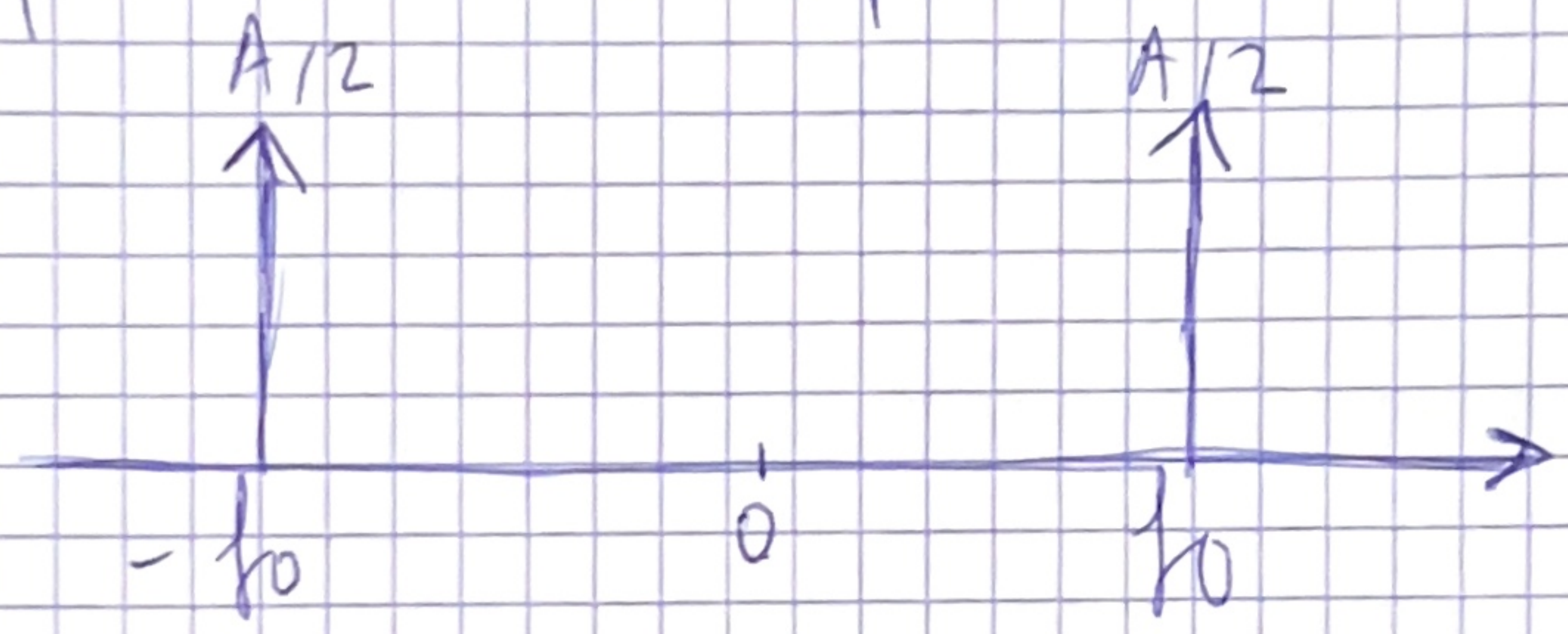
$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)$$

2- Transformée de Fourier :

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

3- Spectre d'Amplitude :



4- Le fenêtrage temporel d'un signal sinusoïdale provoque :
- un élargissement du spectre.
- l'apparition de lobes secondaires.
- une perte de pureté fréquentielle.

Plus la durée T est grande :
- plus le spectre est concentré.
- plus les lobes sont fins.

Plus T est petite :
- plus le spectre est large.

C'est la conséquence directe du compromis temps - fréquence.

TD 3

Exercice 1 : Théorème de Shannon et Audio

L'oreille humaine precevoir des fréquences de
$20 Hz \longrightarrow 20 kHz$

$\Rightarrow f_{max} = 20 kHz$

1- $f_e \geq 2 f_{max}$

$\Rightarrow f_s = 2 \times 20 = 40 kHz$

$$\boxed{f_s = 40 kHz}$$

2- La fréquence du l'industrie du CD ne peut pas être arrêté à 40 KHz car c'est la valeur minimale.
44,1 kHz est utilisé pour éviter l'aliasing.

3- $f_s = 44,1 KHz$, $f_0 = 30 kHz$

or : $44,1 KHz < 2 \times 30 KHz$
donc ~~[illegible]~~ ça cause l'aliasing (repliement spectral) et déformation du signal.

Exercice 2 : Débit et stockage

CD audio de : $f_s = 44,1 KHz$

$L = 16$ bits

canaux = 2

1 _ Débit binaire :

$D = f \times 2 \times N$

$= 44{,}1 \times 10^3 \times 2 \times 16 = 1411200$ bps

$\boxed{D = 172{,}27 \text{ Ko/s}}$

2 _ Poids total pour 4 min en Mo :

Durée = 4 min = 240 s

Taille = $172{,}27 \times 240 = 41343$ Ko

$= \boxed{40{,}37 \text{ Mo}}$

3 _ Compression :

Facteur de compression $= \dfrac{\cancel{1{,}4}\ 1411}{128} = 11$

Exercice 3 : Quantification :

Résolution = 1024×1024 pixels

1= Quantification = 8 bits / pixel

1 . Nuances de gris :

$N = 2^8 = 256$

2 _ Poids d'image :

$T = 1024 \times 1024 \times 8 = 8388608$ bits $= 1$ Mo

$\boxed{\text{Taille} = 1 \text{ Mo}}$

3 . Quantification sur 1 bit :

Les valeurs possibles soit 1 ou 0, 2 niveaux noir ou blanc et une très forte perte d'information. Ce type d'image est appelé : image binaire.