Ein Minimalbeispiel für ein LaTeX Dokument

Ivo Blöchliger

25. August 2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Ein kleines Beispieldokument. Im Abschnitt 2.1 auf Seite 3 wird eine spannende Funktion vorgestellt.

1.2 Literatur

Das gibt es schon vieles.

Kapitel 2

Beispiele

2.1 Eine seltsame Funktion

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \text{ mit } x = \frac{p}{q},\, q \in \mathbb{N},\, p \in \mathbb{Z},\, \mathrm{ggT}(p,q) = 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Theorem 1. *Die Funktion f definiert in Gleichung 2.1 ist stetig für irrationale $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und unstetig für rationale $x \in \mathbb{Q}$.*

2.1.1 Beweis von Theorem 1

Lemma 1.1. *Sei x_i eine Folge rationaler Zahlen, die gegen eine irrationale Zahl r konvergiert. Schreibt man $x_i = \frac{p_i}{q_i}$ mit $p_i \in \mathbb{Z}$ und $q_i \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} q_i = \infty$$

Beweis von Lemma 1.1. Wir können annehmen, dass $\mathrm{ggT}(p_i, q_i) = 1$, d.h. die Brüche sind vollständig gekürzt. Der Beweis wird durch Widerspruch geführt: Nehmen wir an

$$q_i < N \, \forall i.$$

Für alle $x_i \neq x_j$ gilt $|x_i - x_j| \geq \frac{1}{N^2}$ weil

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \right| \geq \frac{1}{bd} \geq \frac{1}{N^2}$$

Da die Folge (x_i) gegen r konvergiert, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein Index I, ab dem gilt:

$$|x_i - r| < \epsilon \quad \forall i > I$$

Wählt man $\epsilon < \frac{1}{3N^2}$ folgt aus $|x_i - x_j| \geq \frac{1}{N^2}$, dass

$$x_i = x_j \quad \forall i, j > I$$

Damit ist aber auch $r = x_i$ für $i > I$, was ein Widerspruch zur Annahme ist, dass r irrational ist.

□

Stetigkeit für irrationale Argumente

Beweis. Wie in Lemma 1.1 gezeigt, sind, um eine irrationale Zahl r mit Brüchen anzunähern, immer grössere Nenner q_i nötig:

$$\lim_{n\to\infty} q_i = \infty$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_i} = 0,$$

was die Stetigkeit in irrationalen Argumenten r beweist. □

Unstetigkeit für irrationale Argumente

Beweis. Für jede rationale Zahl q ist $f(q) > 0$. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine irrationale Zahl r mit $|r - q| < \epsilon$. Weil $f(r) = 0$ ist f in q unstetig. □