INSTRUCCIONES

Para cada tema descrito en la siguiente guía deberá:

1. Leer detenidamente la conceptualización, ejemplos y en lo posible ver los videos descritos en "Material de Apoyo".
2. Asistir a los encuentros para asesorías sincrónicas de la asignatura programados por la Institución.
3. **Realizar en el cuaderno un breve resumen del tema,** que evidencie su aprendizaje. Puede utilizar organizadores gráficos (mapa conceptual, cuadro sinóptico, mentefacto, etc.). Se tendrá en cuenta en la valoración de sus actividades.
4. Resolver las actividades de profundización, en el cuaderno o en hojas preferiblemente cuadriculadas. La **presentación y organización debe ser apropiada**. Debe estar realizado **manuscrito, con la letra del estudiante**.
5. Para **cada uno de los ejercicios** deberá indicar el enunciado y **justo debajo el procedimiento y la solución completa**.
6. Toda gráfica debe ser dibujada de la manera más precisa.
7. **En la parte superior de cada página, coloque el nombre completo del estudiante, curso y jornada.**
8. Realizar el envío del **resumen del tema** y de las **actividades** procurando cumplir el **cronograma especificado a continuación.**

IMPORTANTE

Evite incurrir en fraude académico, plagio o copia; *es una falta grave sancionada conforme a lo descrito en el Artículo 24.2 del Manual de Convivencia de la Institución. Su trabajo sería anulado, tendría una nota reprobada adicional en la asignatura y finalmente se le reportaría a su Director de Grupo, para que sea considerada en su valoración de Comportamiento General del periodo académico correspondiente.*

ENVÍO DE LAS ACTIVIDADES

1. ENVÍO EN FÍSICO:

Deberás realizar las actividades en hojas organizadas por tema, debidamente marcadas con los datos del estudiante. La fecha de entrega para envíos en físico será aquella que fije el rector de la institución.

2. ENVÍO POR MEDIOS ELECTRÓNICOS:

Luego de realizar el **resumen** y la **actividad**, deberá escanear o tomar fotos legibles de los mismos y organizarlas en un documento, de preferencia PDF. Tome solo **una foto por página**. Luego podrá subir dicha actividad a la **plataforma Google Classroom** dispuesta por el docente o enviarla en **un (1)** correo electrónico.
Si el envío es por correo electrónico, coloque en el ASUNTO del correo **GRADO APELLIDO NOMBRE - Solución Actividad #** (**Ejemplo: 11-01 GONZALEZ JACOBO – Solución Actividad 1**).

Sugerencia: *Puede descargar aplicaciones en el teléfono móvil desde PlayStore que permiten escanear documentos fácilmente y unir varias imágenes en un solo documento PDF, éstas son:* ***CamScanner o Simple Scanner.***

CALENDARIO DE ENTREGAS DE ACTIVIDADES

Las fechas de entregas son las mostradas a continuación, pero en caso de ser necesario el docente de la asignatura podrá modificarlas.

Actividades a entregar	Fecha de entrega
Actividad de profundización 1	25 de agosto de 2021
Actividad de profundización 2	03 de septiembre de 2021
Actividad de profundización 3	15 de septiembre de 2021
Actividad de profundización 4	24 de septiembre de 2021
Taller de Prueba Saber	25 de agosto de 2021

CONTACTOS DOCENTES

HORARIO DE ATENCIÓN: Lunes a Viernes en el Horario Laboral correspondiente

N°	NOMBRE COMPLETO	CORREO ELECTRÓNICO	GRADOS ASIGNADOS
		JORNADA MAÑANA	
1	Eberto Benjumea Mendoza	eberto.benjumea@instpecam.edu.co	11-01, 11-02, 11-03
		JORNADA TARDE	
1	Jhonny Rivera V.	jhonny.rivera@instpecam.edu.co	11-01, 11-02

¡Ánimo! ¡Es muy fácil!

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE ESTA CARTILLA

Al finalizar el TERCER PERIODO usted podrá:

- Calcula la probabilidad de eventos.
- Interpreta el concepto de límite de una función de forma analítica, gráfica y numérica.
- Propone soluciones para resolver todo tipo de límites de función.
- Analiza la continuidad de una función en un punto y en un intervalo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Matemáticas previas al cálculo. Louis Leithold.
[2] Proyecto educativo XX 11.1. 2016. Editorial Santillana.
[3] Matemáticas 11. 2018. Editorial Norma.
[4] Cuadernillos Pruebas Saber.
[5] Matemáticas 11. Los Caminos del Saber. Santillana.
[6] Matemáticas 11. Vamos a aprender. Ministerio de Educación de Colombia.

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

1.1 CONCEPTUALIZACIÓN & DESARROLLO DE EJEMPLOS

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

En los juegos de azar, las posibilidades de ganar o perder no dependen exclusivamente de la habilidad del jugador, sino que interviene también el azar. La mayoría de los juegos incluyen apuestas en las que los premios se determinan según la probabilidad de acierto.

Un experimento o fenómeno puede ser determinístico o aleatorio.

EXPERIMENTO DETERMINÍSTICO. Es aquel cuyo resultado de un experimento o fenómeno se puede predecir con exactitud. **Ejemplo:** soltar una esfera desde determinada altura y observar la dirección de su movimiento tendrá siempre el mismo resultado: la dirección de la vertical.

EXPERIMENTO ALEATORIO. Es aquel en el cual no es posible predecir con precisión el resultado, aunque sí se pueda describir el conjunto de resultados posibles. **Ejemplo:** lanzar un par de dados y determinar la suma de los puntos de las caras superiores tiene un resultado variable, pero se puede determinar el conjunto de resultados posibles.

ESPACIO MUESTRAL (E): Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
Ejemplo 1. Lanzar al aire un dado normal de seis caras (perfectamente equilibrado) y observar el número que aparecerá en la cara superior del dado. Enumerar los posibles resultados de este experimento.

Solución. El espacio muestral del experimento es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Ejemplo 2. Lanzar al aire dos veces una moneda normal y observar que figura aparecerá en la cara superior. Definir el espacio muestral correspondiente.

Solución. El espacio muestral de este experimento es $E = \{CC, CS, SC, SS\}$.

SUCESOS: Un suceso (o evento) A es un subconjunto del espacio muestral.
Ejemplo 3. Considere el espacio muestral $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Describe los eventos A=“es un numero par” y B=“es un numero primo”.

Solución. El evento A es: $A = \{2,4,6\}$ y el evento B: $B = \{2,3,5\}$. Los eventos A y B se llaman eventos seguros. Ahora, si el evento A fuese “múltiplos de 7” el evento A se denominaría evento imposible $\emptyset$.

Se dice que un evento **A** ocurre, si el resultado del experimento es un elemento de **A**.
Como los eventos son subconjuntos del espacio muestral E, estos se pueden combinar mediante las operaciones de conjuntos: uniones, intersecciones, diferencias y complementos. Ver figura 1.

Evento	Operación
Alguno de los eventos A o B ocurre.	$A \cup B$
Los eventos A y B ocurren simultáneamente.	$A \cap B$
Ocurre A, pero no ocurre B.	$A - B$
No ocurre A.	A^c

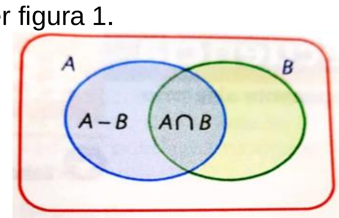


Figura 1

En un experimento aleatorio con espacio muestral E, los eventos A y B dan lugar a nuevos eventos así:

Se usará la notación $|A|$ para representar la cantidad de elementos del conjunto A.

Ejemplo 4. Considere el siguiente experimento “lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior”. Los eventos A=“sacar par” y B=“sacar un número menor que 5” están dados por $A = \{2,4,6\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$. Determinar los siguientes eventos:
(a) Sacar par o un número menor que 5. (b) Sacar un par menor que 5. (c) Sacar un par que no sea menor que 5. (d) No sacar par.

Solución. (a) Sacar par o un número menor que 5. $\Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$
(b) Sacar un par menor que 5. $\Rightarrow A \cap B = \{2,4\}$
(c) Sacar un par que no sea menor que 5. $\Rightarrow A - B = \{6\}$
(d) No sacar par. $\Rightarrow A^c = \{1,3,5\}$

Si los eventos A y B no pueden ocurrir simultáneamente, se dice que son **incompatibles**. Se representan mediante la igualdad $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo 5. Al lanzar un dado legal, los eventos A="sale un número par" y B="sale un número impar", se dice que son incompatibles, puesto que $A \cap B = \emptyset$

PROBABILIDAD

La probabilidad es una medida de la ocurrencia de un suceso.
Si los resultados de un experimento o fenómeno aleatorio tienen las mismas posibilidades de ocurrir, entonces, la probabilidad de un evento A en el espacio muestral E (asociado al experimento) es igual a la razón entre el número de casos favorables que originan el evento A y el número de casos posibles que pueden ocurrir. Es decir:

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

A: casos favorables del evento A.
E: casos posibles del experimento.

(Regla de Laplace)

Ejemplo 6. De un dominó que tiene 28 fichas, hallar la probabilidad de que, al extraer una ficha al azar, esta sea el doble 6.

Solución. Sea A el evento sacar doble 6. A posee un único resultado, el doble seis, y cada ficha tiene la misma posibilidad de ser extraída; entonces, la probabilidad se calcula así:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles} = \frac{1}{28}$$

Ejemplo 7. Encuentra la probabilidad de que, al extraer una ficha al azar entre las 28 fichas de dominó, la suma de sus puntos sea mayor que 6.

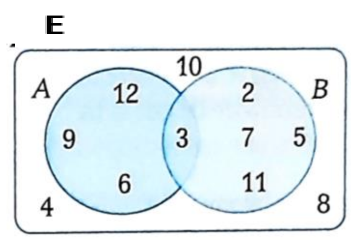
Solución. Para que la suma de puntos sea superior a 6, debemos considerar las fichas que al sumar sus puntos den 7,8,9,10,11,12.
De esta manera, el conjunto de opciones o casos favorables se compondría de:
$A = \{\{1,6\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,5\},\{5,6\},\{6,6\}\}$; como el dominó tiene 28 fichas, hay 28 casos posibles. Por tanto, la probabilidad en este caso, se calcula de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{|A|}{28} = \frac{12}{28} \approx 0.43 = 43\%$$

AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

Para un experimento aleatorio con espacio muestral E y, A y B eventos del espacio E, se tiene:
1. $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1.$
2. Si $B \complement A$, entonces, $\mathrm{P(B)} \leq \mathrm{P(A)}$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Ejemplo 8. Para el siguiente experimento se lanzan dos dados de seis caras y se anotan en tarjetas todas las sumas posibles. ¿Cuál es la probabilidad de obtener como suma un número múltiplo de 3 o un número primo?



Solución. Se halla el espacio muestral E, formado por todas las sumas posibles $E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

Se definen los eventos A y B, y adicionalmente el evento de la unión de $A \cup B$ (Recuerde que: significa que alguno de los eventos A o B ocurre); a la vez se representan como conjuntos.
A="Obtener un número múltiplo de 3" $\Longrightarrow$ $A = \{3,6,9,12\}$
B="Obtener un número primo" $\Longrightarrow$ $B = \{2,3,5,7,11\}$
$A \cup B$="Obtener un número múltiplo de 3 o un número primo" $\Longrightarrow$ $A \cup B = \{2,3,5,6,7,9,11,12\}$.
A continuación, se representan los conjuntos en un diagrama de ven. (ver figura.)
Luego se calcula la probabilidad de ocurrencia del evento aplicando la regla de Laplace, así:

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|E|} = \frac{8}{11} \approx 0.73 = 73\% \qquad (Recuerde\ que: |\quad|\ indica\ el\ cardinal).$$

Por consiguiente, se concluye que la probabilidad de obtener un número múltiplo de 3 o un número primo es aproximadamente 0.73 o el 73%.

Ejemplo 9. En una reunión, la mitad de los 20 hombres y la mitad de las 14 mujeres usan lentes. Si escogemos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer o use lentes?
Solución. Se halla el número de elementos (personas) del experimento. $|E| = 20 + 14 = 34$
Se definen los eventos M: elegir a una mujer y H: elegir a una persona con lentes.
Se halla el número de elementos de la intersección $M \cap H$.
$M \cap H$ ="elegir una mujer con lentes" $\Longrightarrow$ $|M \cap H| = 7$.
A continuación, se calcula la probabilidad de que sea mujer o use lentes. Aplicamos el axioma 3.

$$P(M \cup H) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = \frac{|M|}{|E|} + \frac{|H|}{|E|} - \frac{|M \cap H|}{|E|} = \frac{14}{34} + \frac{17}{34} - \frac{7}{34} = \frac{24}{34}$$

Luego, se concluye que la probabilidad de que la persona escogida sea mujer o use lentes es $\frac{24}{34}$.

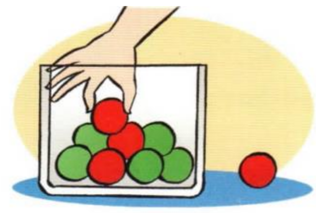
PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad condicional permite determinar la probabilidad de que ocurra un evento de una variable, dado que ha ocurrido un evento de otra variable.

Dados los acontecimientos A y B en un espacio muestral E, con $P(B) \neq 0$, la probabilidad de A condicionada a la ocurrencia de B, que se representa simbólicamente $P(A\backslash B)$, se define como:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La notación $(\backslash)$ quiere decir que se está considerando la probabilidad del evento A dada la condición de que el evento B ha ocurrido. Por tanto, la notación $\mathrm{P}(\mathrm{A}\backslash\mathrm{B})$ se lee "la probabilidad de A dado B".



Ejemplo 10. De un recipiente que contiene cinco bolas verdes y cuatro rojas se extraen dos bolas consecutivamente y sin devolución. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

Solución. Para determinar cuál es la probabilidad de que al extraer las dos bolas del recipiente ambas sean rojas, se definen los sucesos M="sacar bola roja en la primera extracción" y N=" sacar bola roja en la segunda extracción".
Al no devolver la bola después de la primera extracción, la cantidad de bolas en la urna antes de la segunda extracción varía, pues ya solo quedarían tres rojas de un total de ocho bolas. Como el suceso N está condicionado por el suceso M, la probabilidad se calcula usando la fórmula de la probabilidad condicional así:

$$\mathrm{P}(\mathrm{N}\backslash\mathrm{M}) = \frac{P(M \cap N)}{P(M)} = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{4}{9}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

Ejemplo 11. Los estudiantes de grado décimo hicieron un sondeo sobre las preferencias de los estudiantes respecto al símbolo del equipo para los juegos intercursos. El sorteo se realizó con una muestra de 120 estudiantes.

- 50 votaron por estampar la camiseta; los demás votaron por estampar la pantaloneta.
- Entre los colores rojo y azul, para estampar la camiseta, 15 se decidieron por el color azul.
- 80 estudiantes votaron por mantener el tradicional color rojo del escudo del colegio.

¿Cuál es la probabilidad de que, en una votación, que incluya a todos los estudiantes de grado décimo, se elija estampar la camiseta, porque los capitanes de grado décimo acuerden que el símbolo va ser de color rojo?

Solución. Se organizan los datos en la siguiente tabla.

	Camiseta (C)	Pantaloneta (P)	
Rojo (R)	35	45	80
Azul (A)	15	25	40
Total	50	70	120

De acuerdo con la información de la tabla, se pregunta por $\mathrm{P}(\mathrm{C}\backslash\mathrm{R})$. Calculamos la probabilidad de $\mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{R})\ y\ P(R)$.
$\mathrm{P}(\mathrm{C} \cap \mathrm{R}) = \frac{35}{120}\ \ y\ P(R) = \frac{80}{120}$. Luego la probabilidad de que, en una votación, que incluya a todos los estudiantes de decimo se elija estampar la camiseta, porque los capitanes de grado décimo acuerden que el símbolo va ser de color rojo, es:

$$\mathrm{P}(\mathrm{C}\backslash\mathrm{R}) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{35}{120}}{\frac{80}{120}} = \frac{35}{80} = 43.75\%$$

EVENTOS INDEPENDIENTES

Dos eventos A y B se dicen independientes, si y solo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Otra forma: si $P(A|B) = P(A)\ \ o\ \ P(B|A) = P(B)$.

La **ley multiplicativa** se usa para determinar la probabilidad de ocurrencia de la intersección entre dos eventos y se basa en la expresión dada por la probabilidad condicional: $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) ó P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

Ejemplo 12. La probabilidad de obtener un número impar en el segundo lanzamiento de un dado, no depende de si en el primer lanzamiento se obtuvo un número impar.

Ejemplo 13. Considerar el evento que consiste en lanzar una moneda (legal) 3 veces, y verificar la independencia de los eventos: C_3 ="sale cara en el tercer lanzamiento" y $C_{1,2}$ ="sale cara en los dos primeros lanzamientos".

Solución. Se halla el espacio muestral E del experimento que consiste en lanzar una moneda 3 veces. Se indica a C como cara y S como sello. Entonces, $E = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$.
Ahora, se halla cada evento y su probabilidad, incluyendo la intersección entre ellos.

$$C_3 = \{CCC, CSC, SCC, SSC\} \quad \Rightarrow \quad P(C_3) = \frac{|C_3|}{|E|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$C_{1,2} = \{CCC, CCS\} \quad \Rightarrow \quad P(C_{1,2}) = \frac{|C_{1,2}|}{|E|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$C_3 \cap C_{1,2} = \{CCC\} \quad \Rightarrow \quad P(C_3 \cap C_{1,2}) = \frac{|C_3 \cap C_{1,2}|}{|E|} = \frac{1}{8}$$

Luego, como $P(C_3 \cap C_{1,2}) = P(C_3) \cdot P(C_{1,2})$ los eventos son independientes.

Ahora, usando la definición de probabilidad condicional, se verifica también la independencia de los dos eventos, así:

$$\mathrm{P}(C_3 \backslash C_{1,2}) = \frac{P(C_3 \cap C_{1,2})}{P(C_{1,2})} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = P(C_3) \qquad \mathrm{P}(C_{1,2} \backslash C_3) = \frac{P(C_3 \cap C_{1,2})}{P(C_3)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = P(C_{1,2})$$

Por consiguiente, se concluye que los eventos C_3 y $C_{1,2}$ son independientes ya que el resultado de $\mathrm{P}(C_3 \backslash C_{1,2}) = P(C_3)$ y $\mathrm{P}(C_{1,2} \backslash C_3) = P(C_{1,2})$.

MATERIAL DE APOYO

Experimentos Aleatorios https://www.youtube.com/watch?v=fTIS83G7aC8
Probabilidad https://www.youtube.com/watch?v=0lxZMaoeUno
Axiomas de Probabilidad (Regla de la suma) https://www.youtube.com/watch?v=yPXreAHcfJg
Probabilidad Condicional https://www.youtube.com/watch?v=dStF9z7tjZU
Eventos Independientes https://www.youtube.com/watch?v=S7W5Tlpa3mA

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN 1

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios teniendo en cuenta lo descrito en el **Tema 1**.

1. Halla el espacio muestral que le corresponde al experimento "Lanzar dos dados".
2. ¿Al extraer una carta de una baraja francesa cuántos resultados posibles hay en el evento de sacar un As o un corazón? (sugerencia describe los eventos como A, B y $A \cap B$, sabiendo que la baraja francesa tiene 4 As y 13 corazones)
3. Halla la probabilidad de que al lanzar un dado al aire se obtenga:
   (a) Un número par (b) un múltiplo de 2 (c) Un número mayor que 3 (d) Un número menor que 4.

Color de cabello	Color de ojos: Verde	Azul	Marrón	Negro
Castaño	12	6	1	2
Negro	10	5	1	18
Rubio	4	12	5	1
Rojo	9	9	8	2

4. En el experimento "Lanzamiento de dos monedas al aire", ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 sellos?
5. La tabla muestra la información del color de ojos y del cabello de los estudiantes de undecimo.

   Si se selecciona un estudiante de cabello rubio. ¿Cuál es la probabilidad de que sus ojos sean verdes?
6. Se lanza un dado dos veces. Decide si los siguientes eventos son dependientes o independientes.
   (a) A= "En el primer lanzamiento resulta 3". B= "En el segundo lanzamiento resulta un número impar".

2. NOCIÓN DE LÍMITES

2.1 CONCEPTUALIZACIÓN

LÍMITE

Encontrar el límite de una función f significa hallar el valor al cual se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a tomar un valor determinado.

La función $f(x)$ tiende hacia el límite L cuando x tiende hacia a, si es posible hacer que $f(x)$ se aproxime tanto a L como se quiera, siempre y cuando x esté lo suficientemente cerca de a, sin tomar el valor de a. Esto se expresa como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Y se lee: el límite cuando x tiende hacia a de $f(x)$ es igual a L.

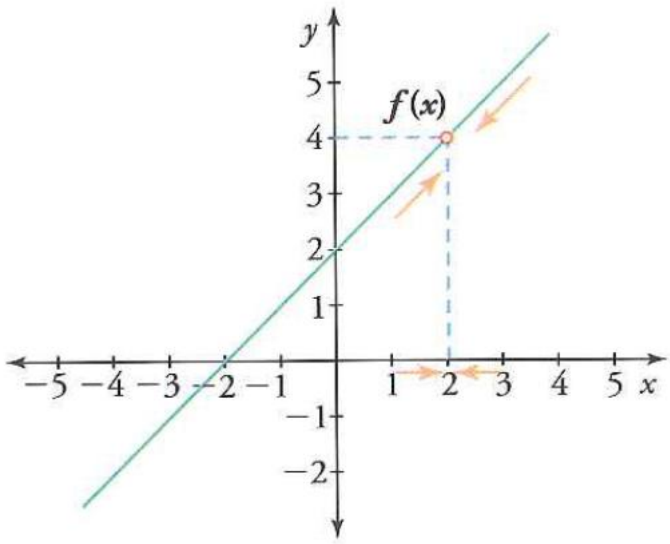
Ejemplo 1. Calcular mediante tablas de valores y gráficas el límite de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ cuando x tiende a 2.
Solución. Para ello calculamos valores de $f(x)$ para valores de x cercanos y menores que 2 y para valores cercanos y mayores que 2. Así:

x	1	1,7	1,9	1,999		2,001	2,1	2,5	3
$f(x)$	3	3,7	3,9	3,999		4,001	4,1	4,5	5

Vemos en la tabla que a medida se aproximan los valores de x a 2, los valores de $f(x)$ se aproximan a 4. Por tanto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Esto también puede observarse en la gráfica de la función:



Ejemplo 2. Determinar mediante tablas de valores y gráficas si $\lim_{x\to -3} \frac{4}{x+3}$ existe.

Solución. Calculamos la tabla de valores con valores de x que se aproximan a -3, pero que sean menores de -3; y con valores de x que se aproximan a -3 pero que son mayores que -3:

x	-4	-3,1	-3,001	-3,00001		-2,99999	-2,9999	-2,9	-2
$f(x)$	-4	-40	-4000	-400000		400000	40000	40	4

En los números menores que -3 observamos que la función progresivamente se hace más negativa con valores con valor absoluto grande (números negativos "muy grandes") al acercarse al -3. Mientras que en los números mayores que -3 observamos que progresivamente se hace más positiva con valores grandes. Como no coinciden en un número, entonces el límite no existe:

$$\lim_{x\to -3} \frac{4}{x+3} = No\ existe$$

CÁLCULO DE LÍMITE APLICANDO PROPIEDADES

Hasta el momento se ha determinado el límite de una función mediante tablas de valores o mediante la gráfica. Sin embargo, para facilitar el cálculo de límites es necesario aplicar sus propiedades.

Propiedades de los límites

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

y

$$\lim_{x\to a} g(x) = M$$

y k es una constante real, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Límite de una constante**

$$\lim_{x\to a} k = k$$

2. **Límite de una constante por una función**

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x) = kL$$

3. **Límite de una suma o de una diferencia de funciones**

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$$

4. **Límite del producto de funciones**

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = L \cdot M$$

5. **Límite del cociente de dos funciones**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad siempre\ que\ M \neq 0.$$

6. **Límite de una función compuesta**

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(M)\ si\ \lim_{x\to M} f(x) = f(M)$$

7. **Límite de la potencia de una función**

$$\lim_{x\to a}[f(x)^n) = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n, para\ n \in \mathbb{Z}^+$$

8. Límite de una función radical

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, si\ n\ es\ par, entonces, L \geq 0$$

9. Límite de una función logarítmica

$$\lim_{x \to a} [\log_b f(x)] = \log_b \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = \log_b L\ \ siempre\ que\ L > 0$$

Principio de sustitución

Otra propiedad importante de los límites es el principio de sustitución, en el cual se establece que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, que en algunas funciones el límite cuando x tiende hacia a de $f(x)$ se obtiene remplazando a en $f(x)$ y realizando las operaciones. En particular para calcular el límite de una función polinómica siempre se aplica el principio de sustitución. En el caso de las funciones racionales se aplica el principio de sustitución solo si el valor que se remplaza hace que el denominador sea diferente de cero.

Ejemplo 3. Calcular los siguientes límites usando las propiedades:

A.

$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$

$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{3}{4}x\right) - \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}\right)$	Aplicamos la propiedad de límite de una diferencia.
$= \frac{3}{4} \lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} \frac{1}{2}$	Se aplica el límite de una constante por una función.
$= \frac{3}{4}(2) - \frac{1}{2}$	Se calcula cada límite
$= \frac{6}{4} - \frac{1}{2} = 1$	Se resta y simplifica

De manera más rápida podemos aplicar el principio de sustitución:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$

$\frac{3}{4}(2) - \frac{1}{2}$	Reemplazamos el valor de x en la expresión
$\frac{6}{4} - \frac{1}{2} = 1$	Se resta y simplifica

B.

$\lim_{x \to 5} (2x - 1)\left(\sqrt{x + 4}\right)$

$\left[\lim_{x \to 5} (2x - 1)\right] \cdot \left[\lim_{x \to 5} \left(\sqrt{x + 4}\right)\right]$	Se aplica límite de un producto
$\left[\lim_{x \to 5} 2x - \lim_{x \to 5} 1\right] \cdot \left[\sqrt{\lim_{x \to 5} x + 4}\right]$	Se aplica el límite de una diferencia y el límite de una raíz
$\left[\lim_{x \to 5} 2x - \lim_{x \to 5} 1\right] \cdot \left[\sqrt{\lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4}\right]$	Se aplica el límite de una suma
$[2(5) - 1] \cdot \left[\sqrt{5 + 4}\right]$	Se calcula cada límite
$9 \cdot 3 = 27$	Se resuelven las operaciones

C.

$\lim_{x \to -2} \frac{4x - 3}{2 - x}$

Aplicamos el principio de sustitución:

$$\lim_{x \to -2} \frac{4x - 3}{2 - x} = \frac{4(-2) - 3}{2 - (-2)} = \frac{-8 - 3}{2 + 2} = -\frac{11}{4}$$

D.

$\lim_{x \to 1/2} x^2 + 3x + 1$

Aplicamos el principio de sustitución:

$$\lim_{x \to 1/2} x^2 + 3x + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{2 + 12 + 8}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$$

LÍMITES LATERALES

Las aproximaciones que se realizan para determinar el límite de una función con tablas de valores se relacionan con el concepto de límite lateral. Los límites laterales se representan de dos formas distintas, según si la aproximación se realiza por la izquierda o por la derecha.

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ significa que el límite, cuando x tiende a a **por la derecha** es igual a L.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ significa que el límite, cuando x tiende a a **por la izquierda** es igual a L.

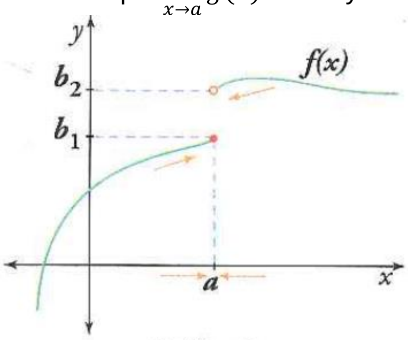
La existencia o no existencia del límite de una función depende de los límites laterales:

- Si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de la función existe y es igual al valor de los límites laterales.
- Si los límites laterales no existen o son diferentes, entonces, el límite de la función no existe.

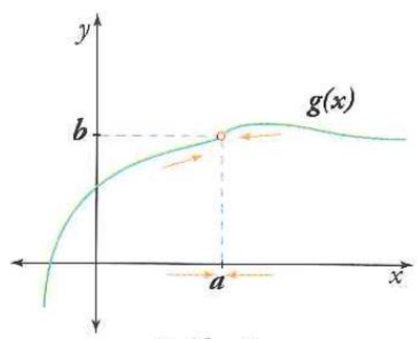
Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ si \ y \ sólo \ si \ \lim_{x\to a^-} f(x) = L \ \ y \ \ \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Por ejemplo, en la gráfica 1 que se muestra a continuación, se tiene que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b_1$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b_2$, de donde se deduce que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe. Por otra parte, en la gráfica 2, se tiene que $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = b$ y $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = b$, de donde se deduce que $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe y es igual a b.

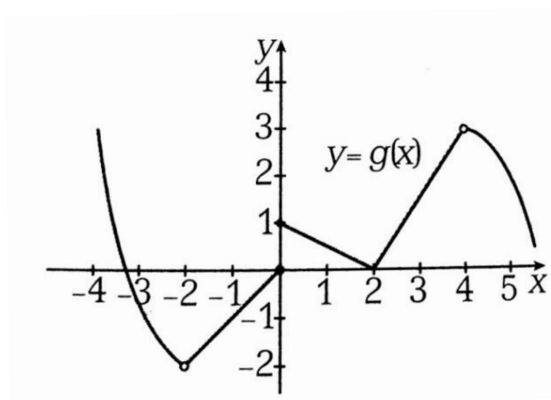


Gráfica 1



Gráfica 2

Ejemplo 4. Determinar, a partir de la siguiente gráfica, si los límites indicados existen.



A.

$$\lim_{x\to -2} g(x)$$

Determinamos en la gráfica los límites laterales (Es decir vemos hacia que número se acerca la función desde la izquierda, y desde la derecha cuando x tiende a -2. En ambos casos, la función se acerca -2:

$$\lim_{x\to -2^+} g(x) = -2$$

y

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = -2$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ existe y es igual a -2.

B.

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

En este caso, cuando la función tiende a cero desde la izquierda tenemos:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$$

Mientras que cuando la función tiende a cero desde la derecha tenemos:

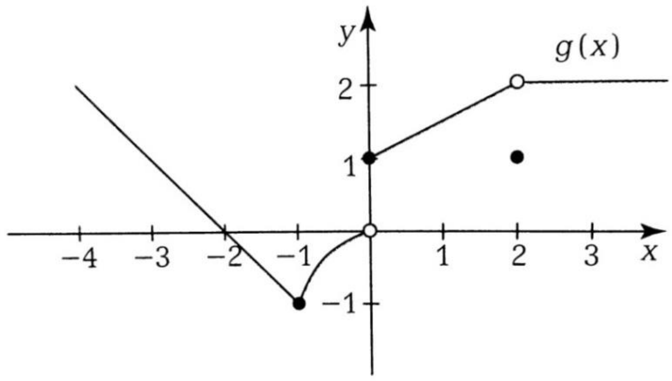
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$$

Por tanto, como los límites laterales son diferentes, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe.

Ejemplo 5. Graficar la siguiente función por partes. Luego, determinar los límites que se indican.

$$g(x) = \begin{cases} -2 - x & si \ x \le -1 \\ -x^2 & si -1 < x < 0 \\ 1 + \dfrac{x}{2} & si \ 0 \le x < 2 \\ 1 & si \ x = 2 \\ 2 & si \ x > 2 \end{cases}$$

Primero se grafica la función teniendo en cuanta cada uno de los intervalos en los que está definida:



A $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

Al verificar en la gráfica obtenemos:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = -1 \quad y \quad \lim_{x\to -1^+} g(x) = -1$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to -1} g(x) = -1$$

B $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

Los límites laterales de la función cuando x se acerca a 0 son:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$$

Como son diferentes, entonces $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe.

MATERIAL DE APOYO

En caso de no haber comprendido adecuadamente el ejemplo anterior puede ver el vídeo que se encuentra en el enlace:
Concepto de límite: https://www.youtube.com/watch?v=o2UTk8bsLS0
Cálculo de límite aplicando propiedades: https://www.youtube.com/watch?v=nTaiyaoyJhw
Función a trazos: https://www.youtube.com/watch?v=AU1GVkYD78w
https://www.youtube.com/watch?v=F5CTymB_L6Y
Límites laterales: https://www.youtube.com/watch?v=IsjjgBjYvQ4&t=298s
https://www.youtube.com/watch?v=I_iy8XpHY_w

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN 2

1. Determine mediante tabla de valores si el límite propuesto existe o no existe:

A. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ **B.** $\lim\limits_{x\to o} \dfrac{\sqrt{4-x}}{x}$

2. Calcular los siguientes límites usando las propiedades:

A. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+5}{x^2+3}$

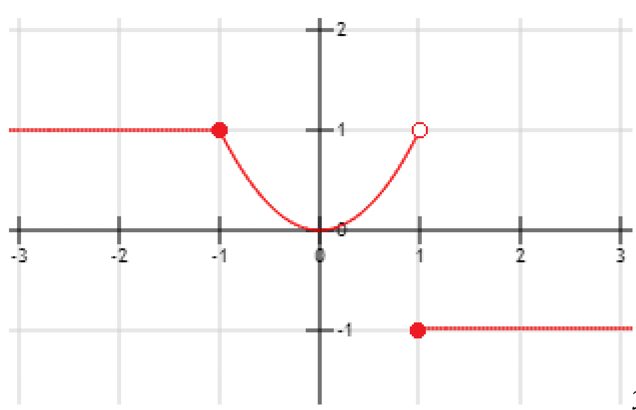
D. $\lim\limits_{x\to -3/2} \dfrac{2x^3+3x^2-2}{x^2+2x-9}$

B. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+5x+{}^1\!/_4\right)$

E. $\lim\limits_{x\to 100}\left(\dfrac{1}{2}x^2+\sqrt{x}\right)$

C. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3+5x}{x+5}$

3. Determinar, a partir de la siguiente gráfica, mediante limites laterales, si los límites indicados existen.



$y = f(x)$

A. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
B. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

LÍMITES INDETERMINADOS

En algunos casos, al aplicar la sustitución directa para calcular un límite, el resultado pueden resultar expresiones de la forma $\frac{L}{0}$ o indeterminaciones tales como $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, $\frac{\infty}{\infty}$. Estas expresiones no permiten concluir si el límite existe o no, razón por la cual es necesario realizar un procedimiento algebraico para eliminar la indeterminación.

Límites de funciones racionales

La indeterminación se evita factorizando el numerador y el denominador, si es posible, y simplificando. Una vez se haya eliminado la indeterminación se aplican las propiedades para hallar el límite.

NOTA: Debe repasar los casos factorización.

Ejemplo 6. Calcular los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to -1} \frac{3x+3}{x+1}$

Si aplicamos el principio de sustitución en este límite obtendríamos:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x+3}{x+1} = \frac{3(-1)+3}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

Lo cual es una indeterminación. Por tanto, debemos factorizar los polinomios existentes en el numerador y el denominador, en este caso el único factorizable es el del numerador

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x+3}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3(x+1)}{x+1}$$

Sacamos factor común 3 en el numerador, por ello, $\frac{3x}{3} = x$ y $\frac{3}{3} = 1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} 3$$

Cancelamos los términos comunes entre denominador y numerador: $\frac{(x+1)}{x+1} = 1$

$$\lim_{x\to -1} 3 = 3$$

Aplicamos la propiedad del límite de una constante

Por tanto, el límite de la función, cuando x tiende a -1, es igual a 3.

2. $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$

Si aplicamos el principio de sustitución en este límite obtendríamos:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4} = \frac{2(-2)^2+3(-2)-2}{(-2)^2-4} = \frac{2(4)-6-2}{4-4} = \frac{0}{0}$$

Lo cual es una indeterminación. Por tanto, debemos factorizar los polinomios existentes en el numerador y el denominador:

$2x^2+3x-2$	Es un trinomio de la forma ax^2+bx+c	x^2-4	Aplicamos una factorización de diferencia de cuadrados perfectos
$\frac{(2x+4)(2x-1)}{2}$	Descomponemos en factores primos el producto del primer y el último coeficiente $(2\cdot 2)=4$ Buscamos dos números que multiplicados den 4, pero que restados den 3: 4 y 1. Por favor, repase la factorización del trinomio ax^2+bx+c	$(x-2)(x+2)$	Sacamos $\sqrt{x^2}=x$ y $\sqrt{4}=2$
$(x+2)(2x-1)$	Dividimos $\frac{(2x+4)}{2}$		

Reemplazamos estas equivalencias en el límite:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

Observamos que el numerador y el denominador tienen un término común y cancelable.

$$\lim_{x\to -2} \frac{(2x-1)}{(x-2)}$$

Simplificamos

$$\lim_{x\to -2} \frac{(2x-1)}{(x-2)} = \frac{2(-2)-1}{-2-2}$$

Aplicamos la propiedad de sustitución

$$\lim_{x\to -2} \frac{(2x-1)}{(x-2)} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

Por simple inspección en el denominador se puede apreciar la existencia de una indeterminación, por ello debemos factorizar donde sea posible:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$$

Factorizamos el numerador como un trinomio de la forma x^2+bx+c

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2)$$

Existe un término común entre numerador y denominador: lo cancelamos.

$$\lim_{x\to 1}(x+2) = 1+2 = 3$$

Aplicamos la propiedad de sustitución.

Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = 3$$

4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

Nuevamente, por simple inspección en el denominador se puede apreciar la existencia de una indeterminación, por ello debemos factorizar donde sea posible:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$$

El numerador puede factorizarse como una suma de cubos perfectos: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, donde $a=\sqrt[3]{x^3}=x$ y $b=\sqrt[3]{8}=2$. Reemplazamos estos valores en la expresión del caso de factorización, y su resultado se reemplaza en lugar de x^3+8.

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$

Simplificamos el término común.

$$\lim_{x\to -2} x^2-2x+4 = (-2)^2-2(-2)+4 = 4+4+4$$

Aplicamos el principio de sustitución

$$\lim_{x\to -2} x^2-2x+4 = 12$$

Por ello,

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = 12$$

Límites de funciones radicales

Si $f(x)$ o $g(x)$ son funciones radicales y $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{0}{0}$, entonces es posible eliminar la indeterminación, racionalizando el numerador o el denominador o ambos y después simplificar la expresión resultante. Es importante recordar que para racionalizar una expresión cuyo numerador o denominador son binomios con radicales de índice 2, se debe multiplicar por el conjugado. Así, por ejemplo, el conjugado de $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ es $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Ejemplo 7. Calcular los siguientes límites con indeterminación:

1. $\lim\limits_{x\to -16} \dfrac{\sqrt{x+20}-2}{x+16}$

Primero racionalizamos el numerador multiplicando el numerador y el denominador por su conjugada. Como el numerador es $\sqrt{x+20}-2$ entonces su conjugada lleva un signo más entre los dos términos: $\sqrt{x+20}+2$.

$$\lim_{x\to -16} \frac{\sqrt{x+20}-2}{x+16} \cdot \frac{\sqrt{x+20}+2}{\sqrt{x+20}+2}$$

$$\lim_{x\to -16} \frac{\left(\sqrt{x+20}\right)^2-2^2}{(x+16)\cdot\left(\sqrt{x+20}+2\right)}$$

Aplicamos en el numerador que el producto $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to -16} \frac{(x+20)-4}{(x+16)\cdot\left(\sqrt{x+20}+2\right)}$$

Se resuelven las potenciaciones.

$$\lim_{x\to -16} \frac{x+16}{(x+16)\cdot\left(\sqrt{x+20}+2\right)}$$

Restamos.

$$\lim_{x\to -16} \frac{1}{\left(\sqrt{x+20}+2\right)}$$

Simplificamos cancelando el término común entre numerador y denominador.

$$\lim_{x \to -16} \frac{1}{\left(\sqrt{x+20}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{-16+20}+2}$$

Aplicamos propiedad de sustitución.

$$\frac{1}{\sqrt{-16+20}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to -16} \frac{\sqrt{x+20}-2}{x+16} = \frac{1}{4}$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}-1}$

Racionalizamos el denominador multiplicando el numerador y el denominador por su conjugada. Como el denominador es $\sqrt{1+x}-1$ entonces su conjugada lleva un signo más entre los dos términos: $\sqrt{1+x}+1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+12}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x}+1)}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-(1)^2}$$

Aplicamos en el denominador que el producto $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}$$

Se resuelven las potenciaciones.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x}+1)}{x}$$

Restamos.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1}$$

Simplificamos cancelando el término común (x) entre numerador y denominador.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1} = \frac{0(\sqrt{1+0}+1)}{1}$$

Aplicamos propiedad de sustitución.

$$\frac{0(\sqrt{1}+1)}{1} = \frac{0(1+1)}{1} = \frac{0(2)}{1} = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}-1} = 0$$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$

Racionalizamos el denominador multiplicando el numerador y el denominador por su conjugada. Como el denominador es $1-\sqrt[3]{x}$, la cual es una raíz cúbica, entonces su conjugada se origina en:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Donde $1-\sqrt[3]{x}$ sería $(a+b)$ y por tanto toca multiplicar esa expresión por su equivalente en (a^2-ab+b^2).

Como $a = 1$ y $b = \sqrt[3]{x}$ entonces $a^2-ab+b^2 = (1)^2+(1)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = 1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$. Por ello, multiplicaremos numerador y denominador por $1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(1)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}$$

Aplicamos $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ en el denominador

$$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{1-x}$$

Resolvemos las potencias

$$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{1-x}$$

Simplificamos expresiones iguales en el numerador y el denominador

$$\lim_{x \to 1} 1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$$

Aplicamos propiedad de sustitución

$$1+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1^2}$$
$$1+1+1 = 3$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} = 3$$

LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

Definición los límites de las funciones trigonométricas se calculan mediante sustitución directa, siempre y cuando la función esté definida para el valor donde se quiere encontrar el límite. Así:

$$\lim_{x\to a} sen\ x = sen\ a \qquad \lim_{x\to a} \cos x = cos\ a \qquad \lim_{x\to a} tan\ x = tan\ a$$

$$\lim_{x\to a} cot\ x = cot\ a \qquad \lim_{x\to a} \sec x = sec\ a \qquad \lim_{x\to a} csc\ x = csc\ a$$

Límites trigonométricos especiales. Para algunos límites de funciones trigonométricas que conducen a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ se tiene en cuenta los siguientes casos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\ x}{x} = 0$$

Para mostrar el valor de cada uno de los límites trigonométricos especiales, se utiliza una tabla de valores y la representación gráfica.

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$\frac{sen\ x}{x}$	0.9983	0.9999	ND	0.9999	0.9983

En la tabla de valores y en la gráfica (ver figura 1.) se puede observar que cuando x tiende a cero por la izquierda y por la derecha los valores de la función seno tienden a 1.

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$\frac{1 - cos\ x}{x}$	-0.049	- 0.0049	ND	0.0049	0.049

En la tabla de valores y en la gráfica (ver figura 1.) se puede observar que cuando x tiende a cero por la izquierda y por la derecha los valores de la función coseno tienden a 0.

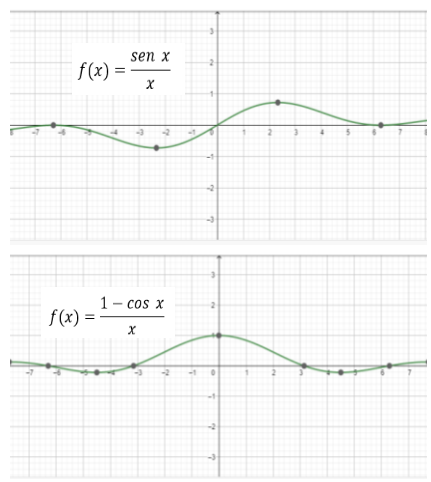


figura 1.

Ejemplo 1. Calcular los siguientes Limites.

a. $\lim_{x\to 0} tan\ x$ **b.** $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} csc\ x$ **c.** $\lim_{x\to 0} (sen\ x)^2$

Solución:

a. $\lim_{x\to 0} tan\ x = tan(0) = 0$ **b.** $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} csc\ x = \csc\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

c. $\lim_{x\to 0} (sen\ x)^2 = \left(\lim_{x\to 0} sen\ x\right)^2 = [sen\ (0)]^2 = 0$

Ejemplo 2. Determinar los siguientes límites usando las figuras 2.

a. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tan\ x$ **b.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tan\ x$

c. $\lim_{x\to 0^+} \csc x$ **d.** $\lim_{x\to 0^-} \csc x$

Solución:

a. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tan\ x = -\infty$ **b.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tan\ x = \infty$

c. $\lim_{x\to 0^+} \csc x = \infty$ **d.** $\lim_{x\to 0^-} \csc x = -\infty$

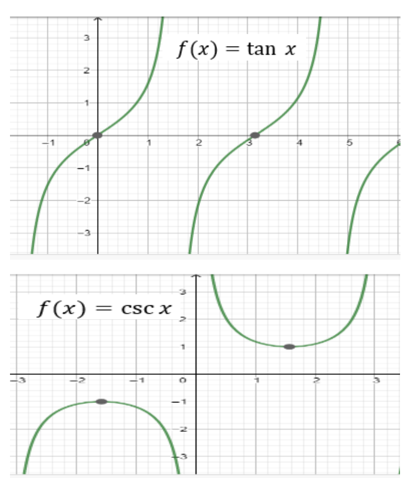


Figura 2

Ejemplo 3. Calcular los siguientes Limites.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 4x}{5x}$ **b.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{3 - 3\tan x}{\cos x - sen\ x}$

Solución:

a. $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 4x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ 4x}{5x} \cdot \frac{4}{4}$ se multiplica por $\frac{4}{4} = 1$.

$= \lim_{x\to 0} \frac{sen\ 4x}{4x} \cdot \frac{4}{5} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ 4x}{4x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{4}{5}$ se aplica la propiedad conmutativa y la propiedad del límite de un producto.

$= 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ se determina cada límite y se multiplica.

b. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{3 - 3\tan x}{\cos x - sen\ x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{3 - 3 \cdot \frac{sen\ x}{\cos x}}{\cos x - sen\ x}$ se aplica la identidad $\tan x\ por\ \frac{sen\ x}{\cos x}$.

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{3\cos x - 3sen\ x}{\cos x}}{\cos x - sen\ x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{3\,(\cos x - sen\ x)}{\cos x\,(\cos x - sen\ x)}$ se resta, y se divide y se factoriza.

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos x} = \frac{3}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ se simplifica y se sustituye.

$= \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ se resuelven las operaciones.

LIMITES INFINITOS Y AL INFINITO

Límites Infinitos y Asíntotas verticales

Cuando una función $y = f(x)$ tiende a infinito o a menos infinito cuando x se aproxima a un valor a, entonces se afirma que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe.

Para expresar que el límite de una función $y = f(x)$ tiende a infinito cuando x se aproxima a a, se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. De igual manera, si el límite de una función $y = f(x)$ tiende a menos infinito cuando x se aproxima a a, se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Ejemplo 1. Realizar una tabla de valores y la gráfica de cada función para analizar cada límite.

a. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ **b.** $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2}$

Solución:

a. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ se construye la tabla de valores tomando números cercanos a 1 por la izquierda y por la derecha.

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$\frac{1}{x-1}$	-10	-100	-1000	⋯	1000	100	10

Luego, en la tabla se puede observar que, para valores de x cercanos a 1 por la izquierda, la función tiende a tomar valores cada vez menores, por lo cual $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$. Mientras que por la derecha cuando x toma valores cercanos a 1 la función tiende a tomar valores cada vez más grandes, por lo cual $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$.

Por tanto, en la gráfica de la figura 3. se observa el comportamiento de la función cuando x tiende a 1.

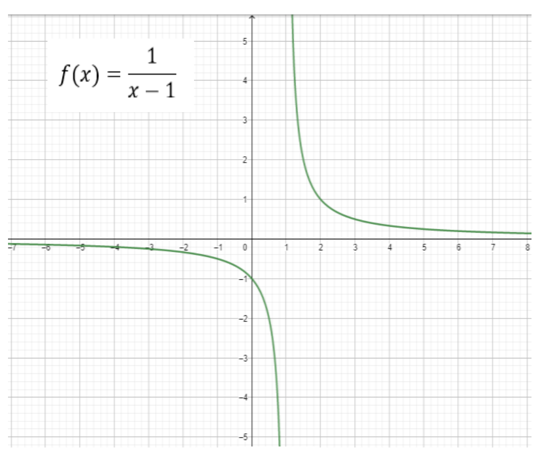


figura 3.

b. $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2}$ se construye la tabla de valores.

x	-2.1	-2.01	-2.001	-2	-1.999	-1.99	-1.9
$\frac{1}{(x+2)^2}$	100	10000	1000000	⋯	1000000	10000	100

Luego, cuando x tiende a -2 por la izquierda y por la derecha, la función toma valores cada vez mayores, como se muestra en la figura 4. Por tanto, $\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$.

Entonces, se concluye que $\lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$.

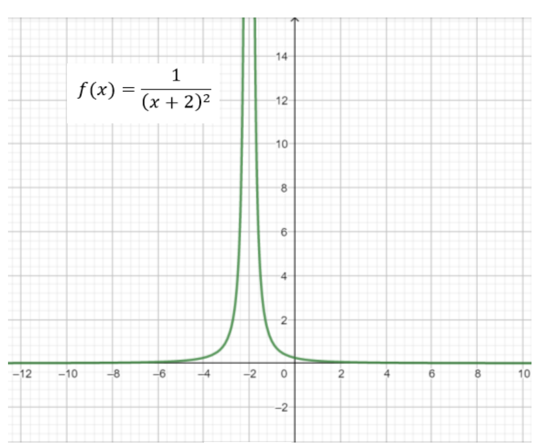


figura 4.

En general, las funciones racionales pueden comportarse de manera distintas cerca de los valores que hacen cero su denominador. Estos valores hacen que la función diverge a infinito o a menos infinito, entonces se dice que la función tiene una asíntota vertical en este valor.

Por tanto, la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función $f(x)$ si se cumple al menos una de las siguientes posibilidades:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Ejemplo 2. Determinar las asíntotas verticales de la función.

$$f(x) = \frac{x^2-4}{(x-1)(x+3)}$$

Solución: Los valores de x que anulan el denominador de esta expresión son $x = -3 \ y \ x = 1$, por lo cual son candidatos a ser asíntotas de la gráfica de la función. Observemos que

$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+3)}$ Como f es una función racional y ningún cero de su denominador es cero de su numerador, las rectas $x = -3 \ y \ x = 1$ son asíntotas verticales. Al estudiar los signos de f en el diagrama de la figura 5, y concluimos que $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$, y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. Luego, comparamos con la gráfica de la figura 6.

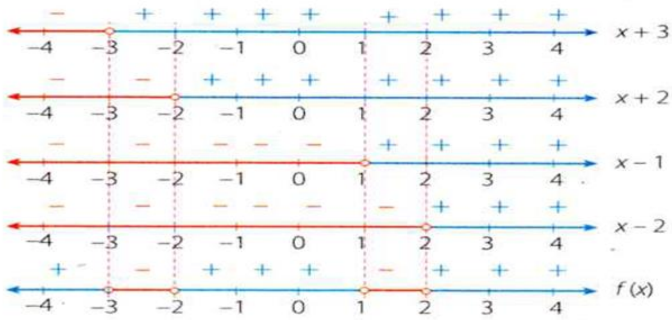


Figura 5.

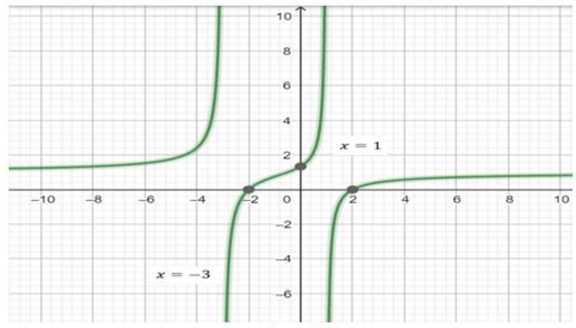


figura 6.

Límites al Infinitos y Asíntotas horizontales

Cuando la variable x crece o decrece sin cota y la función $f(x)$ se aproxima a valores L y M, respectivamente entonces se presentan los siguientes límites.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

Estos límites se conocen como límites al infinito. En ellos las expresiones $x \to \infty \ o \ x \to -\infty$ significa que la variable x se hace cada vez más grande o más pequeña sin cota alguna.

Para calcular límites al infinito se debe tener en cuenta los siguientes casos, con $k \in R \ y \ n \in Z^+$.

- Para $k \in R \ y \ n \ par$ se cumple que $\lim_{x\to\infty} kx^n = \infty \ \ y \ \ \lim_{x\to-\infty} kx^n = \infty$.
- Para $k \in R \ y \ n \ impar$ se cumple que $\lim_{x\to\infty} kx^n = \infty \ \ y \ \ \lim_{x\to-\infty} kx^n = -\infty$.
- Si $k \in R^+ \ y \ \ n \in R$, entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0$. Ademas si x^n está definido para x<0, entonces $\lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$.

Ejemplo 1. Hallar $\lim_{x\to\infty} f(x) \ \ y \ \ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ en cada caso.

a. $f(x) = \frac{4}{5}x^7$ **b.** $\lim_{x\to-2} -\frac{10}{x^6}$

Solución:

a. $f(x) = \frac{4}{5}x^7$.Se tiene una función de la forma $f(x) = kx^n$, donde $k = 4/5$ y n es impar. Por esta razón, se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ \ y \ \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Este comportamiento se observa en la tabla de valores y la gráfica 7.

x	$f(x)$
-1000	$-8\,x\,10^{20}$
-100	$-8\,x\,10^{13}$
100	$8\,x\,10^{13}$
1000	$8\,x\,10^{20}$
1000000	$8\,x\,10^{41}$

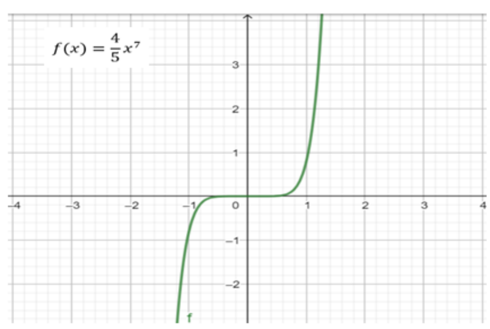


figura 7.

b. $f(x) = -\frac{10}{x^6}$. En este caso cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ la expresión$-\frac{10}{x^6}$ tiende a cero. Por tanto, se tiene que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \ \ y \ \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.El límite de la función se muestra en la siguiente tabla de valores y en la gráfica de la figura 8.

x	-0.01	-0.00001	-0.0000001	0.0000001	0.00001	0.01
$f(x)$	$-1x10^{13}$	$-1x10^{31}$	$-1x10^{43}$	$-1x10^{43}$	$-1x10^{31}$	$-1x10^{13}$

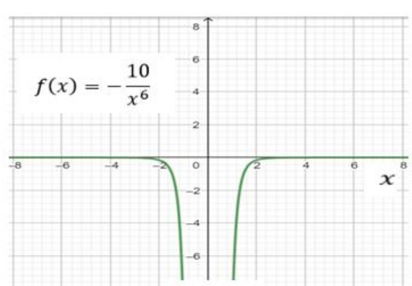


figura 8.

Límites al Infinitos de una función racional.

En algunos límites de funciones racionales se presenta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, cuando la variable x crece o decrece sin cota. Para determinar el límite de estas funciones se dividen el polinomio del numerador y el denominador de la función racional entre la potencia de mayor grado, de esta forma se puede identificar algunos de los siguientes casos:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$, cuando el grado de P(x) es mayor que el grado de Q(x).
- $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, cuando el grado de P(x) es menor que el grado de Q(x).

- $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{m}{n}$, cuando el grado de P(x) es igual que el grado de Q(x), donde m y n son los coeficientes de los términos de mayor grado de P(x) y Q(x), respectivamente.

También existen indeterminaciones de la forma $\infty - \infty$ con expresiones radicales. En estos casos se multiplica y se divide entre el conjugado de la expresión.

Ejemplo 1. Hallar el valor de los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 + 2x^2 - 4}{3x^5 - 5x^3 + 6}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 + 2x^2 - 4}{3x^5 - 5x^3 + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^4}{x^5} + \frac{2x^2}{x^5} - \frac{4}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{5x^3}{x^5} + \frac{6}{x^5}}$$ se divide entre la mayor potencia.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^5}}{3 - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^5}} = \frac{0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = 0$$ se simplifica cada término y se determina el límite.

b. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{9x^2 + 3x} - 3x$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{9x^2 + 3x} - 3x = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x \cdot \frac{\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x}{\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x}\right)$$ se multiplica y se divide por el conjugado.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2 + 3x - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x}$$ se multiplica y se simplifica.

Como el mayor exponente de x es 2 y se tiene bajo el signo radical se divide el numerador y el denominador entre $\sqrt{x^2}$ que equivale a $|x|$. Al efectuar la división se tiene

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{9x^2 + 3x}}{\sqrt{x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{|x|}}{\sqrt{9 + \frac{3}{x}} + \frac{3x}{|x|}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{9 + \frac{3}{x}} + \frac{3x}{x}}$$ Debido a que $x \to +\infty$, $x > 0$; por tanto, $|x| = x$.

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3}{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 9 + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}} + \lim_{x\to\infty} 3}$$ se simplifica.

$$= \frac{3}{\sqrt{9 + 0} + 3} = \frac{1}{2}$$ se determina el límite y resuelve la operación.

En algunos casos los límites al infinito pueden converger, es decir, la función puede tender a un valor particular a medida que x se hace mayor. En este caso la gráfica de la función presenta una asíntota horizontal.
Por tanto, la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función $f(x)$ si se cumple por lo menos una de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Ejemplo 2. Determinar las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 2}$.

Solución: Analizamos el comportamiento de la función cuando x tiende a $\pm\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2 - 1}{x^2}}{\frac{3x^2 - 2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

El valor del límite a $-\infty$ es exactamente igual, luego la asíntota horizontal de esta función es $y = \frac{2}{3}$, en la figura 9. se pude apreciar la gráfica.

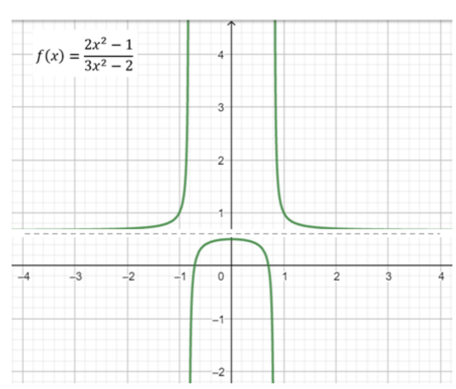


figura 9.

MATERIAL DE APOYO

En caso de no haber comprendido adecuadamente los ejemplos anteriores puede ver los vídeos que se encuentran en los enlaces:

Límites de funciones racionales: https://www.youtube.com/watch?v=kO_D4w13vyg
https://www.youtube.com/watch?v=h9lEAU5-CSg
https://www.youtube.com/watch?v=-G00rN5_bXU
https://www.youtube.com/watch?v=XuUCe9sWGPk
https://www.youtube.com/watch?v=yAy-cSuSKFc

Límites de funciones radicales: https://youtu.be/7c4wBd2Iko8
https://www.youtube.com/watch?v=yAy-cSuSKFc
https://www.youtube.com/watch?v=7c4wBd2Iko8&t=210s

Límites Trigonométricos https://www.youtube.com/watch?v=bEtbQ-F1wlo
Límites Trigonométricos especiales https://www.youtube.com/watch?v=SCbkQD9LcRs
Límites Trigonométricos especiales https://www.youtube.com/watch?v=ZW1D_yhj8ag
Límites Infinitos https://www.youtube.com/watch?v=Yb7h8qcU3NY
Límites Infinitos Ejercicios https://www.youtube.com/watch?v=fHWpGPnequE
Límites al Infinito https://www.youtube.com/watch?v=Qpc_NkjJ8kc
Límites al Infinito Ejercicios https://www.youtube.com/watch?v=RERF3EXziSE

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN 3

1. Determinar los siguientes límites:

A. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ **B.** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$

C. $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x^2-4x-45}$ **D.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$

E. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ **F.** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-2}$

2. Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to 3\frac{\pi}{4}} sen\,(x)$ (b) $\lim_{x\to 3\frac{\pi}{2}}(2x+3\cos(x))$ (c) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{3x}$ (d) $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan(x)}{sen(x)}$

3. Realiza una tabla de valores y la gráfica de cada función, y analiza cada límite.

(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}$ (b) $f(x)=\frac{100}{x^4}$

4. Calcula los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to -3}\frac{x}{x+3}$ (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{4x^2+7}$ (c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5}{4x^3+5}$ (d) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5}{4x^2+3}$ (e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+4}}{x}$

FUNCIONES CONTINUAS

Una función es continua si su gráfica no presenta algún tipo de interrupción o cambio abrupto.

Definición. Una **función f es continua en un punto** $x=a$ si se cumple las siguientes condiciones.

i. $f(a)$ existe. Es decir, a está en el dominio de la función f.

ii. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. Es decir, el límite de la función cuando x tiende a a existe.

iii. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. Es decir, el límite de la función cuando x tiende a a es igual a la función evaluada en a.

Cuando una función no cumple con alguna de estas condiciones se dice que la función f es discontinua en $x=a$ o que presenta una discontinuidad en $x=a$

Ejemplo 1. Determinar si la siguiente función $f(x)$ es continua en $x=2$.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x & si\ x<2 \\ 6-x^2 & si\ x\geq 2\end{cases}$$

Solución: se verifica que la función esté definida para x=2.

Como en $x=2, f(x)=6-x^2\ entonces, se\ tiene\ que$: $f(2)=6-2^2=6-4=2$. Por tanto, $f(x)$ está definida en $x=2$ y se cumple la primera condición. Ahora debemos comprobar la segunda condición si el límite de la función cuando $x\to 2$ existe. Para esto, se calculan los límites laterales.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 6-x^2=6-2^2=6-4=2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^3-3x=2^3-3(2)=8-6=2$$

Por tanto, se tiene que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe y es igual a 2.

Finalmente, se concluye que la función es continua en x=2, porque se cumple la tercera condición de que $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=2$. Luego la continuidad de f en $x=2$ se muestra en la gráfica de la figura 10.

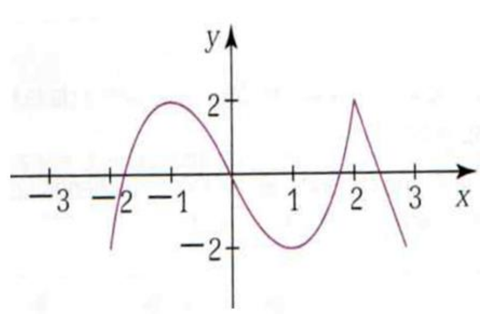


Figura 10

Ejemplo 2. Verificar que la función presentada en la figura 11. No es continua en x=1, x=2 y x=4, a partir de la definición de la continuidad.

Solución:

- La función es discontinua en x=1, porque $\lim_{x\to 1} f(x)$no existe. Esto se debe a que los limites laterales $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \;\; y \;\; \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ no son iguales.
- La función es discontinua en x=2, porque no se cumple que$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.Ya que en la gráfica se puede observar que$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \;\; y \;\; f(2) = 2$.
- La función es discontinua en x=4, porque no se cumple que $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$Ya que $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1 \;\; y \;\; f(4) = 0.5$. En este caso, solo se consideró el límite por la izquierda al punto, porque la función no está definida para valores mayores que 4.

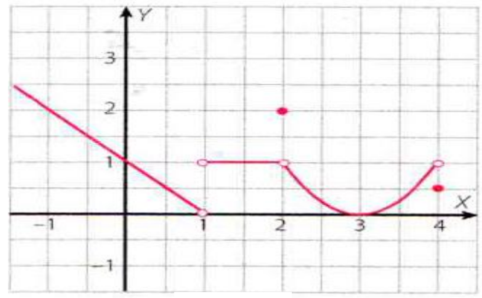


Figura 11

Ejemplo 3. Determinar los puntos donde es discontinua la función$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+3}$

Solución: La función es discontinua en x=3, porque no está definida en este punto.

Continuidad lateral

- Una función es continua por la derecha en $a\epsilon D(f) \;\; si \;\; \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
- Una función es continua por la izquierda en $a\epsilon D(f) \;\; si \;\; \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Ejemplo 1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x - k, & si\; x < 3 \\ x^2 + k, & si\; x \geq 3 \end{cases}$ encuentra los valores que debe tomar k para que $f(x)$ sea continua en todo R.

Solución: Aparte de x=3, la función es continua al estar definida por polinomios.

Para x=3, la función cambia su definición, por lo que para estudiar la continuidad es necesario calcular el límite en este punto.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x^2 + k) = 9 + k \qquad\qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(3x - k) = 9 - k$$

Para que exista $\lim_{x\to 3} f(x)$ los límites laterales deben coincidir, por lo que $9 + k = 9 - k \implies k = 0$.

Continuidad de una función en un intervalo.

Para determinar la continuidad de una función en un intervalo se estudia la continuidad en cada uno de los puntos del intervalo. Así

- Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b) , si f es continua en todos los puntos del intervalo (a, b).
- Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a\,, b]$, si f es continua en el intervalo (a, b), $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \;\; y \;\; \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$; es decir, es continua en a por la derecha y en b por la izquierda.

Ejemplo 1. Mostrar que la función $y = \sqrt{x^2 - 4}$ es continua en el intervalo $[-2, \; 2]$.

Solución: Primero veamos que la función es continua para cualquier valor $a\epsilon(-2, 2)$. Por las propiedades de los límites, para todo $a\epsilon(-2, 2)$, se tiene que $\lim_{x\to a} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{a^2 - 4}$.
En los extremos del intervalo, es decir, en los valores -2 y 2, mostraremos que la función es continua por derecha y por izquierda, respectivamente.
Tenemos que: $\lim_{x\to -2^+} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{(-2)^2 - 4} = 0 = f(-2) \quad y \quad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{(2)^2 - 4} = 0 = f(2)$.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-2, \; 2]$.

Discontinuidades. Esto se presenta cuando una función no cumple con alguna de las condiciones para ser continua en un punto $x = a$, entonces se dice que la función es discontinua. A continuación se muestran las gráficas de algunas funciones discontinuas en $x = a$.

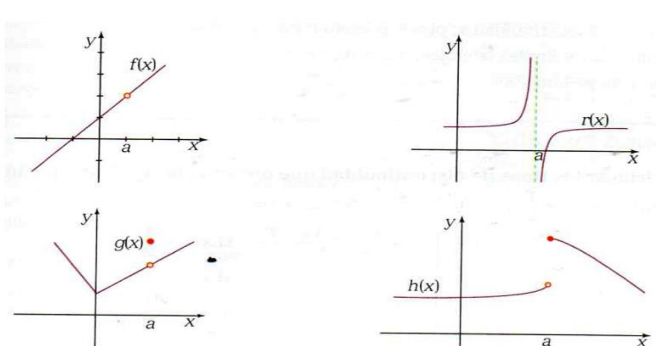


Figura 12.

Se observa en las gráficas, que en el caso de $f(x)$, es discontinua por que la función no está definida para $x = a$, es decir, $f(a)$ no existe. En la función $g(x)$ si bien $g(a)$ existe y el $\lim_{x\to a} g(x)$ también existe, no se cumple que $g(a) = \lim_{x\to a} g(x)$, por esto la función es discontinua. Por otra parte, las funciones $r(x)$ y $h(x)$ son discontinuas por que $\lim_{x\to a} r(x) \;\; y \;\; \lim_{x\to a} h(x)$ no existe.

Las discontinuidades que pueden presentarse al considerar una función $f(x)$ se clasifican en removibles o esenciales.

Discontinuidad Removible o evitable.

La función $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = a$, si la función no es continua en $x = a$, pero $\lim_{x\to a} f(x)$existe. En este caso se redefine la función en el valor indicado, para eliminar la discontinuidad.

Ejemplo 1. Analizar la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ en x=1.

Solución: Como el denominador de la función es igual a cero cuando x=1, entonces se tiene que $f(1)$ no está definido y por esto la función es discontinua en ese punto.
Luego, se calcula el límite de la función cuando x tiende a 1.

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$se factoriza.

$= \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 = (1)^2 + 1 + 1 = 3$se simplifica y se sustituye.

Como la función presenta una discontinuidad evitable, entonces se redefine de modo que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ 3 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, al redefinir la función se consigue que sea continua como se muestra en la gráfica correspondiente a la figura 14.

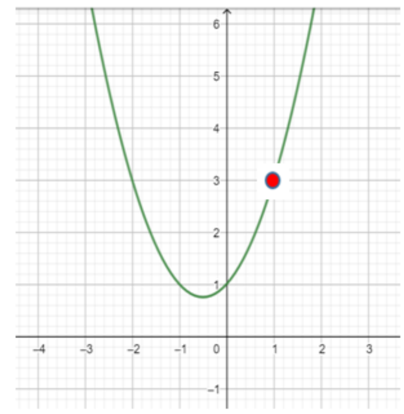


figura 14.

Discontinuidad inevitable o esencial.

Una función $f(x)$ tiene una discontinuidad no evitable o esencial en $x = a$, si $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe. Este tipo de discontinuidad se puede presentar cuando alguno de los límites laterales, o ambos, no existen.

Ejemplo 1. Analizar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x-1\,, & si\ x < 2 \\ 3 & si\ x = 2 \\ 5-2x\,, & si\ x > 2 \end{cases} \quad ; x = 2$$

Solución: Como se observa en la grafica, la función presenta una discontinuidad evitable en x=2 (ver figura 15), la cual se puede si $f(x)$se redefine de tal forma, que $f(2) = 1$.

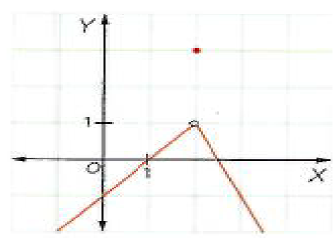


Figura 15.

Las Discontinuidades inevitables también pueden ser discontinuidades de salto finito o infinito.

Discontinuidad de salto finito. Una discontinuidad presenta salto finito en $x = a$ si los límites laterales en a existen y son finitos, pero no coinciden.

Ejemplo 1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x, & si\ x \leq 1 \\ x\ , & si\ x > 1 \end{cases}$ Analizar la continuidad en el punto $x = 1$.

Solución: Para estudiar la continuidad de f(x) en x=1 es necesario calcular los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x^2-4x) = -2 \quad y \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

Entonces, $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe y f no es continua en $x = 1$.

Como los límites laterales en $x = 1$ son finitos pero no coinciden, f presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 1$, tal como se muestra en la figura 13.

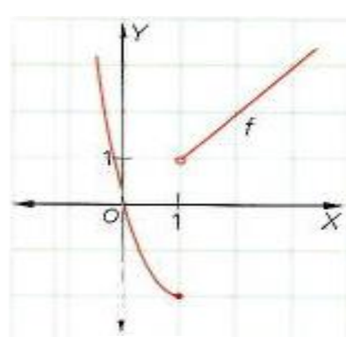


Figura 13.

Discontinuidad de salto infinito. Una función presenta discontinuidad de salto finito en $x = a$ si uno de los límites laterales en a, o los dos, son infinitos.

Propiedades de la continuidad

Las siguientes propiedades ayudan a determinar de forma rápida si una función es continua o no, en un punto determinado.

Propiedad 1	La función constante definida como $f(x) = k$, para todo $x\epsilon R$, es continua en todo número real $x = a$.
Propiedad 2	La función idéntica definida como $f(x) = x$, para todo $x\epsilon R$, es continua en todo número real $x = a$.
Propiedad 3	Si $f(x)\ y\ g(x)$ son funciones continuas en $x = a$, entonces $f + g\ ,\ f - g\ \ y\ f \cdot g$ son continuas en $x = a$. También lo es $\frac{f}{g}$, siempre que $g(a) \neq 0$.

MATERIAL DE APOYO

Continuidad de una función en un puntohttps://www.youtube.com/watch?v=tliSsrOVQLY
Funciones continuas https://www.youtube.com/watch?v=sHuqCyEVNCs
Continuidad de funciones https://www.youtube.com/watch?v=Yb-lUhwxRKA
Continuidad de una función en un intervalo https://www.youtube.com/watch?v=DsaXGeo37hw
Discontinuidades Evitables y inevitableshttps://www.youtube.com/watch?v=FpBqsSnCWag

EDUCACIÓN ECONÓMICA & FINANCIERA: CAMBIANDO DIVISAS

CONCEPTOS CLAVES EN DIVISAS

Divisa
Es la moneda extranjera representada en monedas o en papel (billetes). Generalmente, las divisas son utilizadas para llevar a cabo actividades o transacciones a nivel internacional.

Mercado de divisas
Es el espacio o contexto donde se intercambian, compran y venden divisas. El precio de las divisas está determinado por la oferta y la demanda que se dé en el mercado.

Tipo de cambio
Es el precio por el que se intercambia una moneda por otra. Se determina por la oferta y la demanda de divisas.

Tasa representativa del mercado (TMR)
Es el valor oficial dado por la compra y venta de divisas; para nuestro caso, se compara el precio del peso con respecto al dólar. Este indicador muestra la cantidad de pesos que se dan por un dólar.

Devaluación
Es la disminución del valor de la moneda nacional respecto a otras divisas extranjeras. En otras palabras, es la pérdida de poder adquisitivo de la moneda local frente a la divisa, es decir, si estamos hablando de una divisa como el dólar, en una devaluación el precio de la moneda extranjera (el dólar) se incrementa, se dan más pesos por cada dólar.

Revaluación
Es el incremento del valor de la moneda nacional en relación con otras divisas extranjeras. En otras palabras, es el aumento de poder adquisitivo de la moneda local frente a la divisa; por ejemplo, si estamos comparando el peso frente al dólar, en una revaluación el precio de la moneda extranjera (el dólar) se disminuye, se dan menos pesos por cada dólar.

Es común la existencia de un precio de una divisa al comprar y otro precio al vender. Estos son el cambio comprador (precios a los que las entidades bancarias compran la moneda extranjera) y cambio vendedor (precios a los que las entidades bancarias venden la moneda extranjera). Las entidades que venden o compran divisas suelen cobrar una comisión o dinero por cada transacción.

Ejemplo 2. Ana y su esposo Jaime viven en Colombia y por motivo de su quinto aniversario desean viajar a Indonesia. Para el viaje, tienen dispuesto 10 millones de pesos para llevar en efectivo y gastarlo en dicho país. Martha, amiga de la familia, les comenta que no existen oficinas de cambio de divisas que hagan la transacción de Pesos Colombianos a la Rupia de Indonesia ni en Colombia ni en el país de visita, pero que el Dólar Americano facilitaría la transacción. De acuerdo con la tasa de cambio vigente, ¿qué operaciones deben utilizar para hallar las equivalencias entre las diferentes monedas?

Solución. Debemos leer el enunciado del problema, identificar los datos conocidos y determinar la pregunta que se debe responder. El resultado del ejercicio puede cambiar de acuerdo con los valores de las tasas de cambio que se encuentren. Asumiremos que la tasa de cambio es:

1 USD = 2811,26 pesos colombianos
1 Rupia = 0.01 Dólar

Llenaremos unas tablas para cada una de las conversiones y luego buscaremos cómo relacionarlas de manera directa.

Precio de venta dólares por pesos

DÓLARES	PESOS
1	3.009.28
100	309.928
500	1.549.540
100.000	309.928.000

Precio de compra dólares por rupias

DÓLAR	RUPIAS
1	68.2
100	6820
500	34100

Observemos que cada una de las tablas representa una función. Si queremos construir una tabla para convertir directamente dólares a euros, esta se elabora combinando las dos tablas anteriores: primero se toma la cantidad de pesos que se quiere convertir a dólares y se convierte primero a dólares, luego se toma la cantidad en dólares y se convierte a rupias.

Peso	Rupia
1	0.02
100	2

La operación que convierte en una sola función dos funciones relacionadas entre sí es la composición de funciones. Para que dos funciones se puedan componer en una sola, es necesario que el rango de la primera función sea un subconjunto del dominio de la segunda. Esto significa que todos los valores en dólares de la segunda columna en la primera tabla deben aparecer en algún lugar de la primera columna en la segunda tabla. Otra forma de representar las dos funciones de cambio de divisas es mediante fórmulas.

La relación que convierte pesos a dólares es: P(x) = 0.000341x, donde x es la cantidad de Pesos que se quiere convertir a Dólares.

La relación que convierte de Dólares a Rupias, es: E(x) = 68.2 x, donde x es la cantidad de Dólares que se quiere convertir a Rupias.

Para encontrar una función que convierta directamente Pesos a Rupias, realizamos la composición de las dos funciones:

E(P(x)) = E (0.000341x) = 68.2 (0.000341x) = 0,0232562x

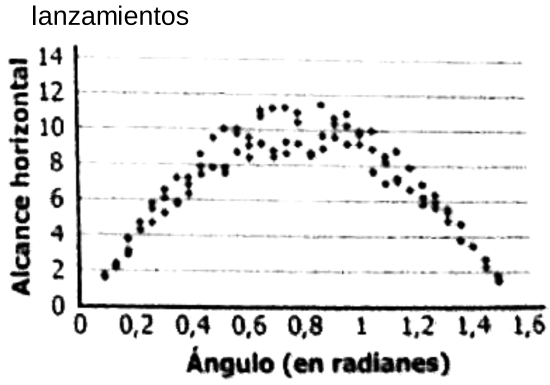
Esta función permite convertir de Pesos a Rupias directamente. Por tanto, con 10 millones de Pesos, Ana y Jaime pueden comprar 232562 Rupias.

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN 4

1. Determina si cada una de las siguientes funciones es continua en los puntos indicados y bosqueje la gráfica.
   (a) $f(x)=\begin{cases}5x+3 & si\ x\geq 0\\ 3 & si\ x<0\end{cases}$ en $x=0$. (b) $f(x)=\begin{cases}5 & si\ x=3\\ \frac{x}{x-3} & si\ x\neq 3\end{cases}$ en $x=3$.
2. Determina si la función es continua en el intervalo dado. $f(x)=x^2+\sqrt{6-x}$, $[3,6]$
3. Determina los puntos en los que cada función es discontinua. Luego escribe el tipo de discontinuidad que presenta en cada caso y redefine cada función.
   (a) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ (b) $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2+5x+6}{x+3} & si\ x\neq -3\\ 5 & si\ x=-3\end{cases}$
4. Luis y Doris quieren llevar 800 francos suizos en un viaje que van a realizar a Suiza y deben conocer la cantidad de euros que necesitan para efectuar la compra. En el banco les informan que el cambio comprador es de 1,425 francos suizos por euro y que el cambio vendedor es de 1,375 francos suizos por euro. Además, para el cambio de moneda, el banco cobra una comisión del 1%, con un mínimo de 4 euros. Ellos tienen 600 euros. ¿Cuántos francos podrán adquirir?

TALLER DE PRUEBAS SABER 3 – RAZONAMIENTO CUANTITATIVO

1. Un experimento consiste en medir el alcance horizontal de un proyectil en función del ángulo con el que se lanza (respecto a la horizontal). En la gráfica se registran los resultados de 99 lanzamientos



El comportamiento del alcance respecto al ángulo es
A. no lineal y más disperso cuanto mayor sea el ángulo.
B. no lineal y más disperso cuanto mayor sea el alcance.
C. lineal y más disperso cuanto mayor sea el ángulo.
D. lineal y más disperso cuanto mayor sea el alcance.

2. La gráfica muestra el precio del envío de mercancía de una ciudad para distintos pesos.

Una persona afirma que el precio de los envíos y (en miles de pesos) depende del peso x (en kg), según la siguiente ecuación:
y = x + 5
¿Es correcta la relación entre el precio y el peso de los envíos?
A. Sí, porque el peso de la mercancía es directamente proporcional al precio del envío.
B. No, porque el precio de los envíos se mantiene constante en diferentes intervalos de peso.
C. Sí, porque la ecuación permite calcular los precios de envío para algunos pesos de la mercancía.

D. No, porque el último segmento de la gráfica debería estar ubicado más arriba de lo mostrado.

RESPONDA LAS PREGUNTAS 3 Y 4 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Para un estudio de mercadeo sobre las preferencias de descargas en teléfonos celulares, se emplearon los registros de 2.000 teléfonos convencionales y de 2.500 teléfonos inteligentes.
La gráfica muestra el porcentaje de teléfonos celulares con los que se descargó alguna aplicación en los últimos 30 días; las descargas se clasificaron en categorías de acuerdo con su función.

Gráfica. Porcentaje de Teléfonos

3. La compañía TOLT cuenta con igual cantidad de teléfonos inteligentes que convencionales registrados. Tomando la información del estudio, la compañía decide desarrollar aplicaciones para teléfonos inteligentes porque estima que tendrá mayor número de descargas. ¿La decisión de la compañía es acertada?

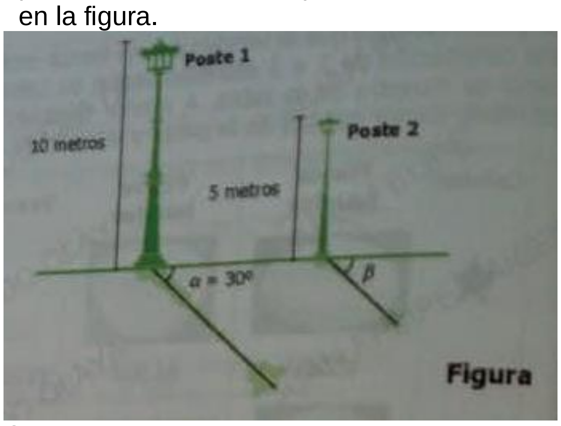
A. Sí, porque en el estudio hay más personas con teléfonos inteligentes.
B. Sí, porque en el estudio, en la mayoría de las categorías, la proporción es mayor para los teléfonos inteligentes que para convencionales.
C. No, porque para realizar la comparación debería tener muestras del mismo tamaño.
D. No, porque hay categorías en las que el porcentaje de descargas es mayor en los teléfonos convencionales que en los inteligentes.

4. Si entre las personas se utilizan teléfonos convencionales, las que descargaron Noticias/Clima no descargaron Mapas/Navegación, y viceversa, un procedimiento válido para calcular la cantidad total de personas con teléfonos convencionales que realizaron estas descargas es

A. $\frac{30+32}{2} \times \frac{2.000}{100}$ **B.** $(30+32) \times \frac{2.000}{100}$

C. $(0,3 \times 1.000) + (0,32 \times 1.000)$ **D.** $\frac{0,3 \times 2.000 + 0,32 \times 2.000}{100}$

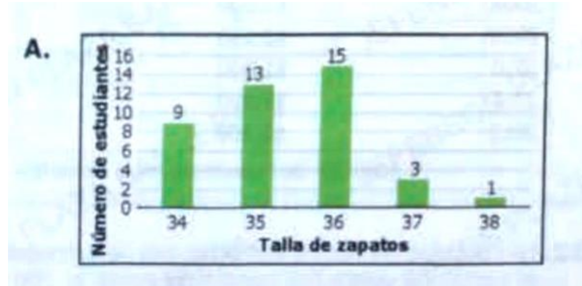
5. Las sombras proyectadas por dos postes paralelos de 10 metros y 5 metros se muestran en la figura.

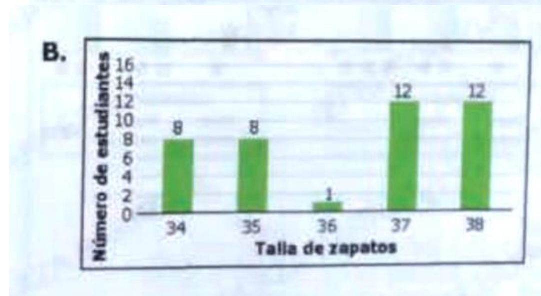


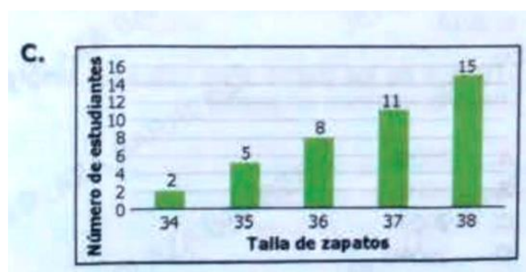
El ángulo entre la acera horizontal y la sombra del poste 1 es $\alpha = 300$. De acuerdo con esto, es verdadero afirmar que el ángulo entre la acera horizontal y la sombra del poste 2 es:

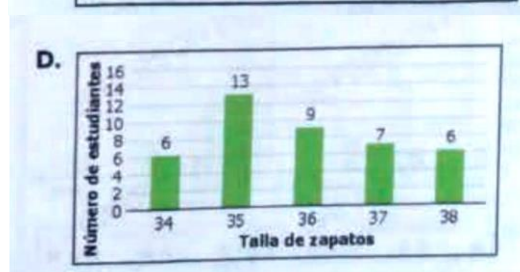
A. $\beta = 5°$
B. $\beta = 15°$
C. $\beta = 30°$
D. $\beta = 60°$

6. Se registraron las tallas de zapatos de 41 estudiantes y se obtuvo que la mediana de estos datos es 36 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponderla a una distribución de estos datos









RESPONDA LAS PREGUNTAS 7 Y 8 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACION
Una empresa exportadora de flores verde toda su producción en Estados Unidos, por lo que sus ingresos están en dólares que después son cambiados por pesos en Colombia. Los costos de la empresa se tasan en pesos y dependen exclusivamente de la cantidad producida de flores. En la tabla se muestra el promedio anual de la tasa de cambio de dólares por pesos para los años 2007 al 2012.

Año	Tasa de cambio de dólares por pesos
2007	$2100
2008	$2000
2009	$2150
2010	$1900
2011	$1850
2012	$1800

Adaptado de Superintendencia Financiera

7. La cantidad de flores vendidas por la empresa el precio de venta fue constante entre el 2007 y el 2010.

¿En cuál de los cuatro años obtuvo la empresa mayores ingresos en pesos?

A. 2009
B. 2007
C. 2008.
D. 2010

8. Por la caída del dólar, el empresario deja el negocio de las flores e incursiona en el negocio de microchips en Colombia, en el cual los ingresos se tasan en dólares. Sin tener en cuenta otros factores, ¿este cambio mejorará las condiciones del empresario?
A. Sí, porque los ingresos y egresos son constantes.
B. No, porque la caída era buena con las flores
C. Sí, porque la tasa de cambio depende del negocio.
D. No, porque aún debe cambiar sus ganancias a pesos.

9. Una prueba atlética de 10.000 metros planos fue completada por Fernando en un tiempo de 25 minutos; su entrenador le informa que su tempo mejoró un 15 % respecto al año pasado, pero Fernando no recuerda cuál fue su tiempo en esa prueba. Con el fin de encontrarlo, efectúa el siguiente cálculo:
25 x 0,15 = 3,75
25 + 3,75 = 28,75
Fernando encuentra entonces que su tiempo de carrera el año pasado fue 28,75 minutos. El cálculo de Fernando es incorrecto, debido a que
A. calcula mal el porcentaje de 15 % al realizarlo sin divisiones.
B. suma el valor obtenido pero debe restarlo porque el tiempo de la prueba disminuyó.
C. el cambio del 15 % es respecto al tiempo del año pasado.
D. debe encontrar un valor que corresponda al 115 % de 25.

10. En un colegio se ofrecen seis deportes, para que los estudiantes los practiquen durante el año. Un estudiante elaboró una tabla que relaciona la cantidad de deportes que puede escoger y la cantidad de posibilidades distintas que hay para seleccionarlos.

Cantidad de deportes escogidos por el estudiante	Número de posibilidades para seleccionar los deportes
2	$\frac{6!}{2!\,(6-2)!} = 15$
3	$\frac{6!}{3!\,(6-3)!} = 20$

Tabla

De un conjunto con n elementos, se deben seleccionar r elementos.

Combinaciones: cuando no importa el orden en el que se selecciona cada deporte.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Permutaciones: cuando si importa el orden en que se selecciona cada deporte

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Recuerde que $6! = 6\ x\ 5\ x\ 4\ x\ 3\ x\ 2\ x\ 1\ = 720$

De acuerdo con la información anterior, ¿es correcta la información que aparece en la tabla?
A. No, porque utilizó la fórmula de permutaciones y en este caso no importa el orden en que se escojan los deportes.
B. No, porque utilizó la fórmula de combinaciones y en este caso si importa el orden en que se escojan los deportes.
C. Sí, porque usó la fórmula de permutaciones, puesto que el orden en que se presenten los deportes determina el total de posibilidades.
D. Sí, porque usó la fórmula de combinaciones, puesto que el orden en que se escojan los deportes no cambia el total de posibilidades