INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICO INDUSTRIAL PEDRO CASTRO MONSALVO "INSTPECAM"	CÁLCULO – 11° SEGUNDO PERIODO	MATEMÁTICAS INSTPECAM
	DOCENTES: Eberto Benjumea / Jhonny Rivera	AÑO LECTIVO 2021

INSTRUCCIONES

Para cada tema descrito en la siguiente guía deberá:

1. Leer detenidamente la conceptualización, ejemplos y en lo posible ver los videos descritos en "Material de Apoyo".
2. Asistir a los encuentros para asesorías sincrónicas de la asignatura programados por la Institución.
3. **Realizar en el cuaderno un breve resumen del tema,** que evidencie su aprendizaje. Puede utilizar organizadores gráficos (mapa conceptual, cuadro sinóptico, mentefacto, etc.). Se tendrá en cuenta en la valoración de sus actividades.
4. Resolver las actividades de profundización, en el cuaderno o en hojas preferiblemente cuadriculadas. La **presentación y organización debe ser apropiada**. Debe estar realizado **manuscrito, con la letra del estudiante**.
5. Para **cada uno de los ejercicios** deberá indicar el enunciado y **justo debajo el procedimiento y la solución completa**.
6. Toda gráfica debe ser dibujada de la manera más precisa.
7. **En la parte superior de cada página, coloque el nombre completo del estudiante, curso y jornada.**
8. Realizar el envío del **resumen del tema** y de las **actividades** procurando cumplir el **cronograma especificado a continuación.**

IMPORTANTE

Evite incurrir en fraude académico, plagio o copia; *es una falta grave sancionada conforme a lo descrito en el Artículo 24.2 del Manual de Convivencia de la Institución. Su trabajo sería anulado, tendría una nota reprobada adicional en la asignatura y finalmente se le reportaría a su Director de Grupo, para que sea considerada en su valoración de Comportamiento General del periodo académico correspondiente.*

ENVÍO DE LAS ACTIVIDADES

1. ENVÍO EN FÍSICO:

Deberás realizar las actividades en hojas organizadas por tema, debidamente marcadas con los datos del estudiante. La fecha de entrega para envíos en físico será aquella que fije el rector de la institución.

2. ENVÍO POR MEDIOS ELECTRÓNICOS:

Luego de realizar el **resumen** y la **actividad**, deberá escanear o tomar fotos legibles de los mismos y organizarlas en un documento, de preferencia PDF. Tome solo **una foto por página**. Luego podrá subir dicha actividad a la **plataforma Google Classroom** dispuesta por el docente o enviarla en **un (1)** correo electrónico.
Si el envío es por correo electrónico, coloque en el ASUNTO del correo **GRADO APELLIDO NOMBRE - Solución Actividad #** (**Ejemplo: 11-01 GALLEGO FELIPE – Solución Actividad 1**).

Sugerencia: *Puede descargar aplicaciones en el teléfono móvil desde PlayStore que permiten escanear documentos fácilmente y unir varias imágenes en un solo documento PDF, éstas son:* ***CamScanner o Simple Scanner.***

CALENDARIO DE ENTREGAS DE ACTIVIDADES

Las fechas de entregas son las mostradas a continuación, pero en caso de ser necesario el docente de la asignatura podrá modificarlas.

Actividades a entregar	Fecha de entrega
Actividad de profundización tema 1	02 de mayo de 2021
Actividad de profundización tema 2	16 de mayo de 2021
Actividad de profundización tema 3	06 de junio de 2021
Actividad de profundización tema 4	17 de junio de 2021
Taller de Prueba Saber	17 de junio de 2021

CONTACTOS DOCENTES

HORARIO DE ATENCIÓN: Lunes a Viernes en el Horario Laboral correspondiente

N°	NOMBRE COMPLETO	CORREO ELECTRÓNICO	GRADOS ASIGNADOS
JORNADA MAÑANA			
1	Eberto Benjumea Mendoza	eberto.benjumea@instpecam.edu.co	11-01, 11-02, 11-03
JORNADA TARDE			
1	Jhonny Rivera	jhonny.rivera@instpecam.edu.co	11-01, 11-02

¡Ánimo! ¡Es muy fácil!

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE ESTA CARTILLA

Al finalizar el SEGUNDO PERIODO usted podrá:

- Comprender y realizar estudios estadísticos.
- Reconocer el comportamiento de funciones reales
- Analizar sucesiones y su convergencia.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Matemáticas previas al cálculo. Louis Leithold.
[2] Proyecto educativo XX 11.1. 2016. Editorial Santillana.
[3] Matemáticas 11. 2018. Editorial Norma.
[4] Cuadernillos Pruebas Saber.

1. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

1.1 CONCEPTUALIZACIÓN

MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS AGRUPADOS

Varianza

La varianza permite identificar la diferencia media que hay entre cada uno de los valores respecto a la media del conjunto de datos. La varianza para datos agrupados por clases, denotada s^2, se halla mediante la expresión:

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m}(C_k - \bar{x})^2 \cdot f_k}{N}$$

Desviación típica o estándar

La desviación típica para datos agrupados por clases, s, es la raíz cuadrada positiva de la varianza y se halla a través de la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{m}(C_k - \bar{x})^2 \cdot f_k}{N}}$$

Ejemplo 1. Los datos de la tabla corresponden a las temperaturas diarias registradas a las 2:00 p.m. durante un mes en la ciudad de Manizales. Determina la varianza y la desviación estándar de los datos.

Temperatura (°C)	Frecuencia absoluta f_k	Marcas de clase C_k
[16; 18,8)	5	17,4
[18,8; 21,6)	7	20,2
[21,6; 24,4)	14	23
[24,4; 27,2)	3	25,8
[27,2; 30)	2	28,8
Total	31	

En primer lugar, calculamos la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{m}(C_k \cdot f_k)}{N} = \frac{17{,}4 \cdot 5 + 20{,}2 \cdot 7 + 23 \cdot 14 + 25{,}8 \cdot 3 + 28{,}8 \cdot 2}{31} = \frac{685}{31} = 22{,}1$$

Completamos la tabla y realizamos las operaciones indicadas:

Temperatura (°C)	Frecuencia absoluta f_k	Marcas de clase C_k	$C_k - \bar{x}$	$(C_k - \bar{x})^2$	$(C_k - \bar{x})^2 \cdot f_k$
[16; 18,8)	5	17,4	-4,7	22,09	110,45
[18,8; 21,6)	7	20,2	-1,9	3,61	25,27
[21,6; 24,4)	14	23	0,9	0,81	11,34
[24,4; 27,2)	3	25,8	3,7	13,69	41,07
[27,2; 30)	2	28,8	6,5	42,25	84,5
Total	31				272,63

Puede observarse que el total de $(C_k - \bar{x})^2 \cdot f_k$ corresponde al numerado de la formula de la varianza, por tanto, solo la dividimos entre el total de datos para hallar su valor:

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^{m}(C_k - \bar{x})^2 \cdot f_k}{N} = \frac{272{,}63}{31} = 8{,}79$$

Para calcular la desviación estándar le sacamos raíz cuadrada a la varianza: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8{,}79} = 2{,}96$.

Cuanto mayor sean la varianza y la desviación estándar, más dispersos estarán los datos.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN PARA DATOS NO AGRUPADOS

La varianza y desviación estándar poseen el mismo significado, pero se calculan de manera distinta a los datos agrupados.

Ejemplo 2. Las calificaciones de la clase de ocho estudiantes son los siguientes ocho valores: 2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9. Determina la varianza y la desviación estándar de los datos.

Calculamos la media aritmética con la fórmula que aplicamos intuitivamente en el día a día:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_i}{N} = \frac{2+4+4+4+5+5+7+9}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

Aplicamos la fórmula de la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{8} = 4$$

La desviación estándar se simboliza con σ y es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4} = 2$$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN

El coeficiente de variación, CV, se emplea para comparar la dispersión de distribuciones que tienen diferentes medias y distintas desviaciones típicas. Se calcula con la expresión:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Se puede dar en porcentaje calculando:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

Es una medida adimensional que muestra la variación relativa a la media. Puede utilizarse para comparar dos o más conjuntos de datos medidos en diferentes unidades.

Ejemplo 3. Una empresa vende dos tipos de relojes inteligentes cuyo precio cambio durante todo el año debido a tasas de cambios y factores de envío y distribución. Un estudio estadístico reveló que el Modelo A tuvo durante el año pasado un precio promedio en dólares de $ 50 con una desviación estándar de $5. El modelo B tuvo un precio promedio de $100 durante el año pasado con una desviación estándar de $5. La empresa desea conocer cúal es el modelo con mayor variación en su precio para determinar si es rentable o no seguir importándolo para venderlo.

$$CV_A = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{\$5}{\$50} \cdot 100 = 10\%$$

$$CV_B = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{\$5}{\$100} \cdot 100 = 5\%$$

Ambos modelos tienen la misma desviación estándar, pero como CV_B fue menor que CV_A, entonces el modelo B es menos variable en relación con su precio.

Ejemplo 4. Los pesos de los toros de lidia de una ganadería se distribuyen con una media $\bar{x} = 500\ kg$ y una desviación típica $s = 40\ kg$. Los pesos de los perros de una exposición canina tienen una media $\bar{x} = 20\ kg$ y una desviación típica $s = 10\ kg$. ¿Cuál de las dos poblaciones presenta mayor variación?

$$CV_T = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{40\ kg}{500\ kg} \cdot 100 = 8\%$$

$$CV_P = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{\$10}{\$20} \cdot 100 = 50\%$$

De este modo, se aprecia que la variación del peso de los perros es mucho mayor que la de los pesos de los toros.

COVARIANZA Y COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

La covarianza es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias respecto a sus medias. Es el dato básico para determinar si existe una dependencia entre ambas variables.

Cuando los valores altos de una de las variables suelen mayoritariamente corresponderse con los valores altos de la otra, y lo mismo se verifica para los pequeños valores de una con los de la otra, se corrobora que tienden a mostrar comportamiento similar lo que se refleja en un valor positivo de la covarianza. Por el contrario, cuando los valores altos de una variable suelen corresponder mayoritariamente a los menores valores de la otra, expresando un comportamiento opuesto, la covarianza es negativa.

El signo de la covarianza, por lo tanto, expresa la tendencia en la relación lineal entre las variables.

$$cov(x,y) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{N}$$

El coeficiente de correlación es un índice estadístico que mide la relación lineal entre dos variables cuantitativas. El más utilizado es el de Pearson (r).

$$Coeficiente\ de\ correlación\ de\ Pearson\ (r) = \frac{cov(x,y)}{s_x s_y}$$

Básicamente, se divide la covarianza entre las desviaciones estándar de las dos poblaciones.

El valor del índice de correlación varía en el intervalo [−1,1], indicando el signo el sentido de la relación:

- Si r =1, existe una correlación positiva perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables denominada relación directa: cuando una de ellas aumenta, la otra también lo hace en proporción constante.
- Si 0 < r < 1 entonces existe una correlación positiva.
- Si r = 0 entonces no existe relación lineal pero esto no necesariamente implica que las variables son independientes: pueden existir todavía relaciones no lineales entre las dos variables.
- Si − 1 < r < 0, existe una correlación negativa.
- Si r = − 1, existe una correlación negativa perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables llamada relación inversa: cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en proporción constante.

Ejemplo 5. A cinco pacientes se les administra las siguientes dosis de un medicamento (una dosis en ml a cada uno): {8, 9, 10, 13, 15}. Y se obtuvo la siguiente respuesta en número de glóbulos blancos: {5, 4, 4, 6, 8}.

Calculamos las medias:

$$\bar{x}_d = \frac{8+9+10+13+15}{5} = 11$$

$$\bar{x}_r = \frac{5+4+4+6+8}{5} = 5{,}4$$

Calculamos la covarianza asumiendo $\bar{x} = \bar{x}_d$ y $\bar{y} = \bar{x}_r$:

$$cov(x,y) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{N-1}$$

$$= \frac{(8-11)(5-5{,}4) + (9-11)(4-5{,}4) + (10-11)(4-5{,}4) + (13-11)(6-5{,}4) + (15-11)(8-5{,}4)}{5}$$

$$= \frac{(-3)(-0{,}4) + (-2)(-1{,}4) + (-1)(-1{,}4) + (2)(0{,}6) + (4)(2{,}6)}{5} = \frac{17}{5} = 3{,}4$$

$$cov(x,y) = 3{,}4$$

Calculamos las desviaciones estándar de cada conjunto:

$$\sigma_d{}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{(8-11)^2 + (9-11)^2 + (10-11)^2 + (13-11)^2 + (15-11)^2}{5} = \frac{34}{5} = 6{,}8$$

$$\sigma_d = \sqrt{6{,}8} = 2{,}6$$

$$\sigma_r{}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{(5-5{,}4)^2 + (4-5{,}4)^2 + (4-5{,}4)^2 + (6-5{,}4)^2 + (8-5{,}4)^2}{5} = \frac{11{,}2}{5} = 2{,}24$$

$$\sigma_r = \sqrt{2{,}24} = 1{,}5$$

Reemplazamos en:

$$r = \frac{cov(x,y)}{s_x s_y} = \frac{3{,}4}{(2{,}6)(1{,}5)} = 0{,}87$$

Por tanto, las dos variables están correlacionadas positivamente y una aumenta mientras la otra también lo hace.

1.2 MATERIAL DE APOYO

En caso de duda mira los siguientes vídeos:
Varianza, Desviación Estándar y Coeficiente de Variación para Datos Agrupados:
https://www.youtube.com/watch?v=1myBo87lYyU
Varianza y Desviación Estándar para Datos No Agrupados: https://www.youtube.com/watch?v=oZRaDwnpXkY
Coeficiente de correlación: https://www.youtube.com/watch?v=I8_tTzMZMxw

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN 1

Para justificar sus respuestas, detalle todos los procedimientos utilizados.

1. Se tienen dos distribuciones cuyos datos son los siguientes:
Distribución A: 9, 5, 3, 2, 1, 2, 6, 4, 9, 8, 1, 3, 5, 4, 2, 6, 3, 2, 5, 6, 7
Distribución B: 1, 1, 3, 2, 5, 6, 7, 2, 5, 4, 3, 1, 2, 1, 5, 7, 8, 9, 9, 2, 1

A. Halla la media, la varianza y la desviación estándar de ambas distribuciones.
B. Calcula el coeficiente de variación para discernir cuál de las dos distribuciones tiene los datos más concentrados.

2. Las siguientes tablas muestran los resultados de dos laboratorios cuando analizan la cantidad de residuos secos en el agua potable (mg/L).

Laboratorio A

Residuos secos	f_k
[8; 10)	15
[10; 12)	8
[12; 14)	7
[16; 18)	6
[18; 20)	24

Laboratorio B

Residuos secos	f_k
[8; 10)	30
[10; 12)	8
[12; 14)	11
[16; 18)	4
[18; 20)	4

Se elegirá el laboratorio que tenga resultados que presenten menos variabilidad en sus datos. ¿Qué decisión consideras que es la más adecuada? Justifica tu respuesta.

2. FUNCIONES.

2.2 CONCEPTUALIZACIÓN

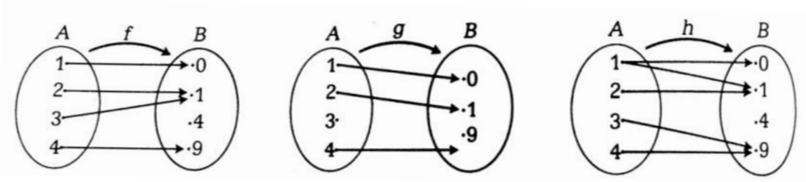
FUNCIÓN

Una función es una regla o correspondencia entre dos conjuntos X y Y, que asigna a cada elemento de X uno y solo un elemento de Y. El conjunto X es el conjunto de partida y el conjunto Y es el conjunto de llegada, por tal razón una función que va del conjunto X al conjunto Y se caracteriza por dos condiciones fundamentales:

- Cada uno de los elementos del conjunto X está relacionado con algún elemento conjunto Y.
- Un elemento de X solo debe estar relacionado con uno y solo un elemento de Y, esto significa que los elementos de X no pueden estar relacionados con dos elementos de Y.

Las funciones a menudo son representadas mediante un diagrama sagital, el cual es un gráfico para representar relaciones y consiste en curvas cerradas que relacionan los elementos del conjunto de partida y conjunto de llegada mediante flechas.

En las siguientes figuras podemos identificar cuáles de los siguientes diagramas sagitales representan funciones:



La representación de f corresponde a una función ya que cada uno de los elementos del conjunto de partida están relacionados con un único elemento del conjunto de llegada. En el caso de g no se cumple la primera condición ya que 3 no está relacionado con ningún elemento. Por último, para h la segunda condición no es válida puesto que 1 está relacionado con dos elementos del conjunto de llegada, razón por la cual g y h no son funciones.

El concepto de función puede enunciarse de otra manera, intuitivamente se puede considerar que cada número real que conforma al conjunto Y es una función de un respectivo número real en el conjunto X, si existe alguna regla por medio de la cual se asigne un valor único de y a cada valor de x. Esta regla con frecuencia se determina por una ecuación. Por ejemplo, $y = x^2$.

Una función se puede representar de varias formas:

- Verbalmente: mediante una oración que describa a la función.
- Numéricamente: mediante una tabla de valores.
- Gráficamente mediante puntos del plano cartesiano (x,y) con y=f(x)
- Algebraicamente: mediante la ecuación de la función y=f(x)

Notación de función

Generalmente, para nombrar una función se usan letras minúsculas como f, g, h, y se escribe $f: A \to B$ para indicar que la función se ha definido del conjunto A, conjunto de partida, en el conjunto B, conjunto de llegada. Si $x \in A$, $y \in B$, entonces se dice que x está relacionado con y mediante la función f y se lee "y es igual a f de x". Ay se le denomina "la imagen de x" mediante f. A x se le denomina variable independiente y ay variable dependiente ya el valor que toma depende del valor de x.

Dominio y rango de una función.

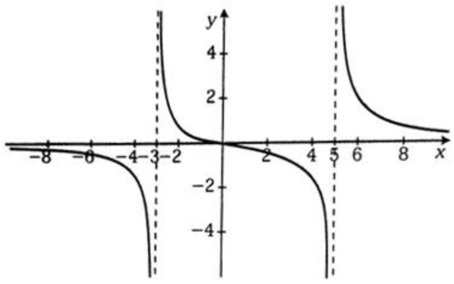
Dada la función $f: A \to B$, el conjunto A se denomina el dominio de la función f y se stmboliza Dom f = A. Los elementos del conjunto B, asociados con los elementos en A forman otro conjunto denominado el rango de la función f y se simboliza como Ran f.

Determinación del dominio y rango de una función de manera gráfica
Si la función $f(x)$ es una función real, es posible mediante su gráfica en el plano cartesiano, identificar el dominio y el rango de la función, ya que el eje horizontal representa la variable independiente, dominio de la función, y el eje vertical la variable dependiente, que es el rango de la función.

Ejemplo 1. Determinar el dominio y el rango de cada función graficada.

A. $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

Para identificar el dominio de la función debe observar el eje x, y verificar que puntos de dicho eje tienen encima o debajo partes de la función. En la grafica observamos de izquierda a derecha: la función viene desde el infinito negativo $(-\infty)$ pero no toca al número -3 (Se acerca pero no lo hace: no existe función encima o debajo del -3), podemos escribir esto como el intervalo $(-\infty,-3)$. La función vuelve a aparecer tras el -3 (sin tocarlo) y existe arriba o debajo de la función hasta el numero 5, el cual tampoco tiene la función encima o debajo. Esto puede escribirse como un intervalo abierto: (-3,5). Sin embargo también hay función, después del 5 y la función se prolonga hasta el infinito, lo cual puede escribirse como $(5,\infty)$. Entonces el dominio es:

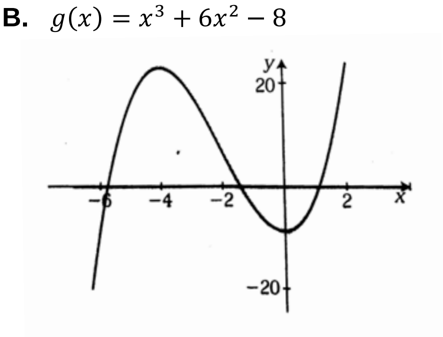


$$Dom\ f = (-\infty,-3)\ U\ (-3,5)\ U\ (5,\infty).$$

Para identificar el rango el procedimiento es similar, pero ahora observamos el eje y desde abajo hacia arriba. Vemos que la función viene desde abajo, desde el infinito negativo $(-\infty)$, que todos los números en el eje y tienen la función a la izquierda o a la derecha y la función va hasta el infinito. Por tanto el rango es:

$$Ran\ f = (-\infty,\infty)$$

B. $g(x) = x^3 + 6x^2 - 8$



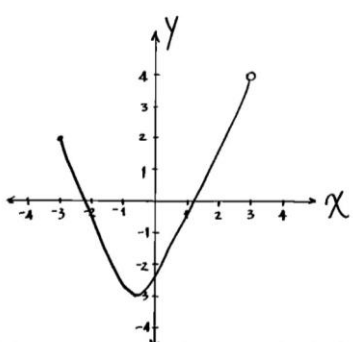
Para el dominio revisamos el eje x siguiendo el procedimiento visto en el ejemplo anterior, y evidenciamos que la función viene desde el infinito y que todo el eje tiene función encima o abajo hasta el infinito en el lado derecho. Por tanto:

$$Dom\ f = (-\infty,\infty)$$

Para el rango, realizamos lo visto: revisamos el eje y, viendo que la función viene desde $-\infty$ y que el eje y tiene función a la derecha o a la izquierda en todos sus números hasta llegar al ∞. Por tanto,

$$Ran\ f = (-\infty,\infty)$$

C.



Al revisar el eje x, vemos que la función tiene un punto encima del número -3. Lo cual indica que la función existe desde el punto. Los números a la derecha de -3 tienen la línea de la función arriba o abajo hasta llegar al 3. La función encima del 3 tiene una circunferencia sin rellenar, que indica, al igual que en los intervalos, que no toma ese valor. Por tanto:

$$Dom\ f = [-3,3)$$

Para el rango, al mirar desde la parte inferior, nos damos cuenta que los números desde $-\infty$ hasta casi llegar al 3 no poseen línea de la función a la izquierda ni a la derecha. Sin embargo, del 3 hasta casi llegar al 4 sí existe función a los lados del eje y. El 4 en ese eje, presenta la circunferencia sin rellenar. Por tanto:

$$Ran\ f = [-3,4)$$

DETERMINACIÓN DEL DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN DE MANERA ALGEBRAICA

Para encontrar el dominio de una función se despeja la variable y y se buscan las restricciones que tiene x. Del mismo modo, para hallar el rango se despeja la variable x y se buscan las restricciones de y. Sin embargo, al ejecutar estos procedimientos suelen presentarse las dos situaciones mostradas a continuación.

Dominio y rango de funciones polinómicas
Una función polinómica$f$ es una función cuya expresión es un polinomio tal como:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

Por tanto, las funciones lineales, cuadráticas, y cubicas son funciones polinómicas, solo que se encuentran generalmente organizadas ascendentemente según sus exponentes.

El dominio de las funciones polinómicas son todos los números reales$(Dom\ f = \mathbb{R})$. El rango es una parte de los números reales cuando el máximo exponente es par. Si el máximo exponente en la función es impar, el rango son todos los números reales $(Ran\ f = \mathbb{R})$.

Ejemplo 2. Hallar el dominio y rango de las siguientes funciones.

A. $f(x) = -4x + 3$
B. $f(x) = x^3 - 4x + 3$

Solución.

A. Dado que la y suele identificarse también como $f(x)$, la reemplazamos en su lugar.

$$y = -4x + 3$$

Para hallar el dominio debemos despejar y, pero ya la ecuación se encuentra despejada. Como la función es polinómica, entonces su $Dom\ y = \mathbb{R}$. Para el rango, despejamos x:

$y = -4x + 3$

$y - 3 = -4x$ Pasamos el 3 del lado derecho al lado izq. pero con signo menos.

$\frac{y-3}{-4} = x$ El -4 que estaba multiplicando debe pasar a dividir el lado izq.

$\frac{y}{-4} + \frac{3}{4} = x$ El -4 que se encuentra como denominador divide a la y y al -3 del numerador: $y/-4$ que no puede simplificarse más, y $\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$, porque menos entre menos da más.

Como la expresión anterior también es polinómica, entonces el $Ran\ f = \mathbb{R}$.

B. Como la función es polinómica, automáticamente podemos afirmar que $Dom\ f = \mathbb{R}\ y\ Ran\ f = \mathbb{R}$.

Dominio y rango de funciones con alguna restricción

Existen que deben tenerse en cuenta al momento de determinar el dominio y el rango de una función tras despejar y y x respectivamente:

- El denominador de las expresiones racionales no puede ser igual a cero
- Las expresiones con radicales cuyo índice es par, no pueden tener cantidades subradicales negativas.
- Los logaritmos solo están definidos para cantidades positivas.

Ejemplo 3. Determinar el dominio de la función: $f(x) = \sqrt{2x+3}$

Reemplazamos y en lugar de $f(x)$: $y = \sqrt{2x+3}$

Como la función es una expresión con radical con índice par, entonces $2x + 3$ debe ser mayor o igual que cero. Por ello debemos solucionar la siguiente inecuación:

$2x + 3 \geq 0$

$2x \geq -3$ Pasamos el 3 del lado der. al lado izq. con signo cambiado. Efectuamos la operación $0 - 3 = -3$.

$x \geq \frac{-3}{2}$ Pasamos el 2 que estaba multiplicando a dividir.

Por tanto, el dominio esta expresado por los números mayores o iguales que $\frac{-3}{2}$, quiere decir eso: $Dom\ f = \left[\frac{-3}{2}, \infty\right)$.

Ejemplo 4. Determinar el dominio y el rango de la siguiente función: $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

Reemplazamos y en lugar de $f(x)$: $y = \frac{x+3}{x-2}$. Para calcular el dominio debemos despejar y, la cual ya se encuentra despejada. Como la función posee variables en el denominador, este no debe ser igual a cero, porque la división de cualquier número entre cero no puede realizarse. Por ello, debemos hallar con que numero se hace cero el denominador:

$x - 2 = 0$

$x = 2$ Despejamos x

Entonces el dominio son todos los números reales a excepción del 2. $Dom\ f = \mathbb{R} - \{2\}$

Para el rango, despejamos x:

$y = \frac{x+3}{x-2}$

$y(x-2) = x + 3$ Pasamos $x - 2$ que estaba dividiendo a multiplicar.

$yx - 2y = x + 3$ Efectuamos las operaciones de $y(x-2)$.

$-2y - 3 = x - yx$ Pasamos todo lo que tenga x al lado derecho, lo que no tiene x pasa al lado izq. Todos con signos cambiados.

$-2y - 3 = x(1-y)$ Sacamos factor común x a $x - yx$.

$\frac{-2y-3}{(1-y)} = x$ Pasamos $(1-y)$ a dividir al otro lado de la ecuación.

De igual manera, la expresión resultante posee variables en el denominador, y este no debe ser igual a cero. Nuevamente, debemos hallar con que numero se hace cero el denominador:

$1 - y = 0$

$1 = y$ Pasamos y al lado der. con signo cambiado.

Entonces el rango son todos los números reales a excepción del 1. $Ran\ f = \mathbb{R} - \{1\}$

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

FUNCIÓN LINEAL

Las funciones lineales son funciones polinómicas cuyo mayor exponente en la variable es 1. Responden a la forma $f(x) = mx + b$, donde m y b son números reales y $m \neq 0$.
Su grafica es una línea recta. m representa un valor llamado pendiente, que indica cuan inclinada esta la gráfica. Entre mayor sea este número, más inclinada estará grafica. b representa el lugar (intercepto) donde la gráfica de la función cortará al eje y.
Si $m > 0$, la función es creciente. Si $m < 0$, la función es decreciente

Las funciones lineales responden a las siguientes ecuaciones:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ Ecuación de la pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ Ecuación punto-pendiente

El dominio y rango de una función lineal es el mismo: todos los números reales.

$$Dom\ f = \mathbb{R} \qquad Ran\ f = \mathbb{R}$$

Ejemplo 5. Identificar cuáles de las siguientes funciones son lineales. En caso de serlo, señale su pendiente (m) y por cual valor del eje y cruzaran sus graficas.

Función	¿Es función lineal?	¿Por qué?	Pendiente (m)	Intercepto con el eje y (b)
$f(x) = 3x + 2$	Sí	El máximo exponente de la variable es 1	3	2
$f(x) = x^2 - 4x + 2$	No	El máximo exponente de la variable NO es 1	No aplica	No aplica
$g(x) = -4x + 7$	Sí	El máximo exponente de la variable es 1	-4	7
$f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x + 2$	No	El máximo exponente de la variable NO es 1	No aplica	No aplica
$h(x) = 0.5x + 10$	Sí	El máximo exponente de la variable es 1	0.5	10

Ejemplo 6. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,3) Y (0,-2), identifique la pendiente y el intercepto con el eje y, luego grafíquela y establezca el dominio y el rango.

Primero calculamos la pendiente de la función. Tomamos los dos puntos en cualquier orden y los asignamos así: (2,3) será el punto 2 (P2), y (0,-2) será el punto 1 (P1). Recuerde que $P1 = (x_1, y_1)$ y $P2 = (x_2, y_2)$, entonces:

$$x_2 = 2 \;\; y \;\; y_2 = 3$$
$$x_1 = 0 \;\; y \;\; y_1 = -2$$

Aplicamos la ecuación de la pendiente y reemplazamos los valores:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{2 - 0} = \frac{5}{2}$$

Con el valor de $m = \frac{5}{2}$ y con uno de los puntos dados (cualquiera, en este caso (2,3)) remplazamos en la ecuación punto-pendiente en los valores de x_1 y y_1:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}(x - 2)$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}x - 2\left(\frac{5}{2}\right)$$ Multiplicamos $\frac{5}{2}$ por x, y 2 por $\frac{5}{2}$.
$$y - 3 = \frac{5}{2}x - 5$$ Realizamos la operación $2(5)/2 = 5$.
$$y = \frac{5}{2}x - 5 + 3$$ Pasamos el -3 al lado der. con signo positivo.
$$y = \frac{5}{2}x - 2$$ Realizamos la operación $-5 + 3 = -2$.

La ecuación de la recta es $y = \frac{5}{2}x - 2$, su pendiente es $\frac{5}{2}$ porque es el numero que multiplica a la variable, y su intercepto con el eje y es -2 porque es el numero que aparece sin variable.

Como la función es lineal, su dominio y rango son los reales: $Dom\ f = \mathbb{R}$ y $Ran\ f = \mathbb{R}$
Para graficar hacemos una tabla de valores, donde en la fila de x colocaremos los valores desde el -2 al 2. En el eje y colocamos el resultado de reemplazar cada valor en la ecuación $\left(y = \frac{5}{2}x - 2\right)$. Así:

$$Para\ x = -2: \quad y = \frac{5}{2}x - 2 = \frac{5}{2}(-2) - 2 = -5 - 2 = -7$$
$$Para\ x = -1: \quad y = \frac{5}{2}x - 2 = \frac{5}{2}(-1) - 2 = -2.5 - 2 = -4.5$$
$$Para\ x = 0: \quad y = \frac{5}{2}x - 2 = \frac{5}{2}(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

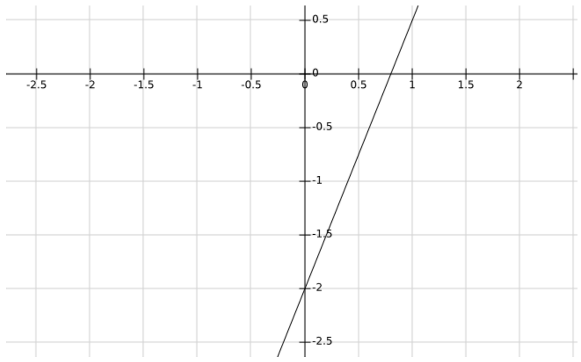
$Para\ x = 1$: $\quad y = \frac{5}{2}x - 2 = \frac{5}{2}(1) - 2 = 2.5 - 2 = 0.5$

$Para\ x = 2$: $\quad y = \frac{5}{2}x - 2 = \frac{5}{2}(2) - 2 = 5 - 2 = 3$

Consignamos los valores en la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	-4.5	-2	0.5	3

Tomamos los valores de la tabla y los graficamos en el plano cartesiano:



2.3. MATERIAL DE APOYO

Para ampliar tus conocimientos puedes mirar los siguientes vídeos:

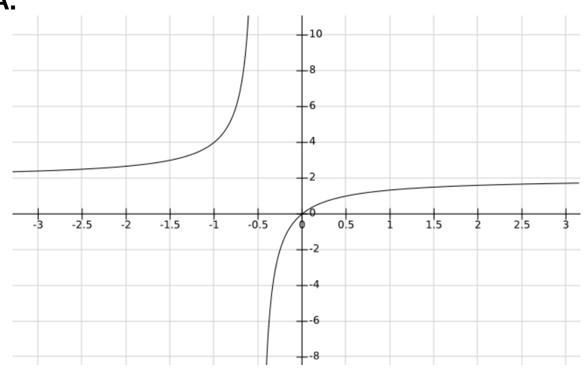
Dominio y rango de una función gráficamente:
https://www.youtube.com/watch?v=H40lcwlgPMk
Dominio y rango de una función matemáticamente:
https://www.youtube.com/watch?v=4DIk2WiVv44&t=128s (Ver desde el minuto 6:50 al 8:20)
https://www.youtube.com/watch?v=NADZ1qa_zRw
https://www.youtube.com/watch?v=2DkHvJFha2k
https://www.youtube.com/watch?v=zXpU-jBPO0k
Función lineal:
https://www.youtube.com/watch?v=bo3JsAc9CbE
https://www.youtube.com/watch?v=AoZpzAoC1Qg&t=223s
https://www.youtube.com/watch?v=G-sduIBzvVU&t=260s

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN 2

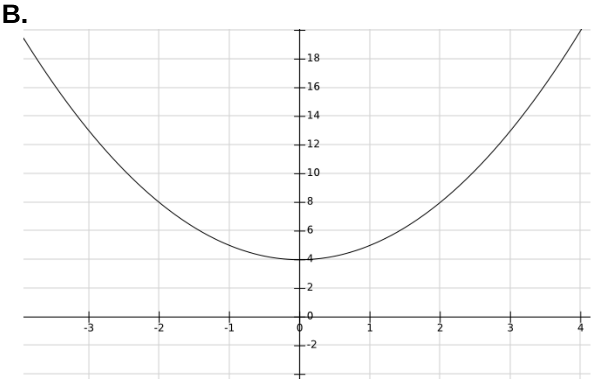
Para justificar sus respuestas, detalle todos los procedimientos utilizados.

1. Determinar por simple inspección el dominio y el rango de cada función graficada.

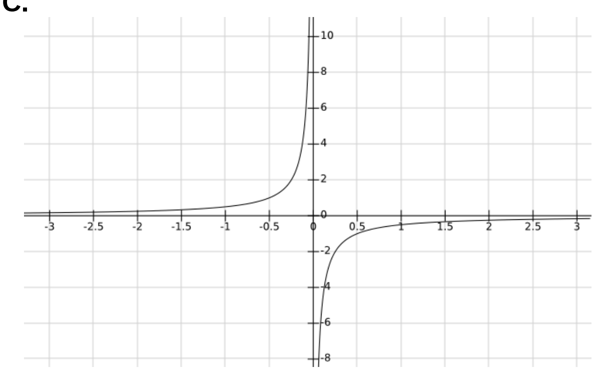
A.



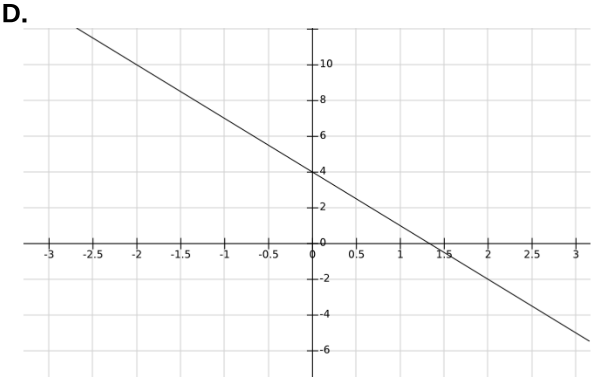
B.



C.



D.



2. Determine el dominio y rango de las funciones:

A. $f(x) = 5x + 15$

B. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 23x - 24$

C. $f(x) = \frac{4x-2}{x-5}$

D. $f(x) = \frac{8x-5}{2-4x}$

3. Determine el dominio de las funciones (Valor 0,5 puntos):

A. $f(x) = \sqrt{x+3}$

B. $f(x) = \sqrt[4]{3x-7}$

4. Identificar cuáles de las siguientes funciones son lineales. En caso de serlo, señale su pendiente (m) y por cual valor del eje y cruzaran sus graficas (Valor 0,5 puntos).

Función	¿Es función lineal?	¿Por qué?	Pendiente (m)	Intercepto con el eje y (b)
$f(x) = 6x^2 + 23x - 2$				
$h(x) = 64x^2 - 25$				
$f(x) = -2x + 2$				
$f(x) = 100x + 20$				
$g(x) = 23x - 0.07$				

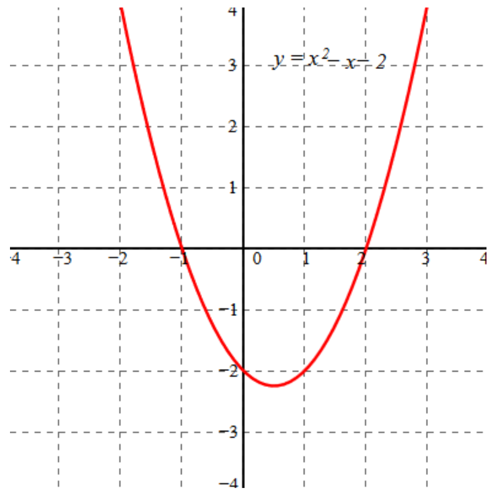
5. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2,-6) y (5,7), identifique la pendiente y el intercepto con el eje y, luego grafíquela y establezca el dominio y el rango. Valor 2 puntos.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Quiere decir esto que el máximo exponente de la función debe ser 2 para que esta se considere una función cuadrática. Algunas veces esta función aparece en formas incompletas: $f(x) = ax^2$, $f(x) = ax^2 + bx$, $f(x) = ax^2 + c$

La grafica de esta función es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$. El punto más alto o el punto más bajo de una parábola (dependiendo de hacia dónde abra) se llama vértice, y se determina mediante la expresión:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$



El dominio de una función cuadrática son todos los números reales ($Dom\ f = \mathbb{R}$ ó $(-\infty, \infty)$), y su rango esta determinado así:

- Si $a > 0$, entonces $Ran\ f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty\right)$
- Si $a < 0$, entonces $Ran\ f = \left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$

Las funciones cuadráticas suelen algunas veces atravesar el eje x. Estos sitios son llamados puntos de corte, y se calculan igualando la función a cero.

Ejemplo 7. Dada la función $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ determinar:

A. El vértice.
B. Los puntos de corte con el eje x.
C. Una tabla de valores.
Grafica de la función.

A. *El vértice.*

Para el vértice aplicamos $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
Recordamos que la función es $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ y que por ello, $a = 2, b = -8, c = 6$. Reemplazamos en $-\frac{b}{2a}$:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(2)} = -\frac{-8}{4} = -(-2) = 2$$

Ahora evaluamos la función con el valor 2:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 6 = 2(4) - 16 + 6$$
$$= 8 - 16 + 6 = -2$$

Para escribir el vértice escribimos el primer valor calculado y luego el segundo. El vértice está ubicado en (2,-2).

B. *Los puntos de corte con el eje x.*

Igualamos la función a cero, y hallamos los valores de x, sea por factorización o por formula cuadrática:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 0$$
$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

Como $a = 2, b = -8, c = 6$, aplicaremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(6)}}{2(2)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4}$$

$$x_1 = \frac{8 + 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{8 - 4}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Por tanto, la función corta al eje x en los números 1 y 3.

C. *Una tabla de valores.*

Como $-\frac{b}{2a}$ nos dio como resultado 2, en la tabla de valores colocamos dos números antes y dos después:

x	0	1	2	3	4
y					

Luego reemplazamos cada valor en la función:

$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

$f(0) = 2(0)^2 - 8(0) + 6 = 2(0) - 0 + 6 = 0 + 0 + 6 = 6$

$f(1) = 2(1)^2 - 8(1) + 6 = 2(1) - 8 + 6 = 2 - 8 + 6 = 0$

$f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 6 = 2(4) - 16 + 6 = 8 - 16 + 6 = -2$

$f(3) = 2(3)^2 - 8(3) + 6 = 2(9) - 24 + 6 = 18 - 24 + 6 = 0$

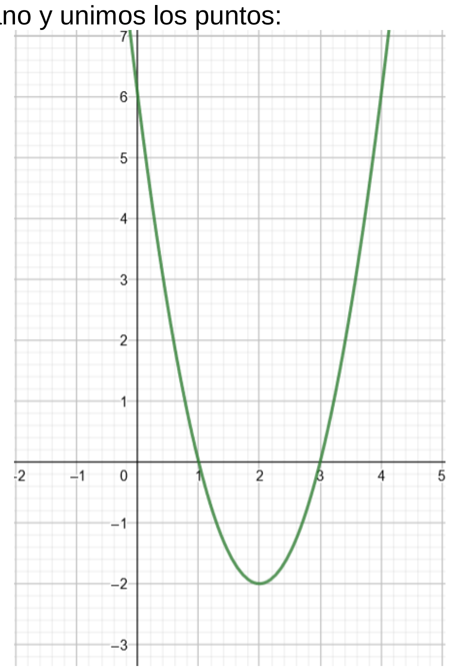
$f(4) = 2(4)^2 - 8(4) + 6 = 2(16) - 32 + 6 = 32 - 32 + 6 = 6$

Escribimos estos valores en la tabla:

x	0	1	2	3	4
y	6	0	-2	0	6

D. *Grafica de la función.*

Graficamos los puntos de la tabla en el plano cartesiano y unimos los puntos:



E. *Dominio y rango.*

Como la función es cuadrática, $Dom\ f = \mathbb{R}$.

Como la función es $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, y el número que acompaña a la variable cuadrática es positivo aplicamos: Si $a > 0$, entonces $Ran\ f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty\right)$ (Ver dos paginas atrás).

$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ya fue calculado cuando hallamos el vértice: $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -2$.

Reemplazamos en $Ran\ f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty\right)$:$Ran\ f = [-2, \infty)$

FUNCIÓN RACIONAL

Una función racional es toda función de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $Q(x) \neq 0$, y $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales. Ejemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{3x+2}{x-3} \qquad g(x) = \frac{2-x}{x} \qquad h(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

Para graficar una función racional debe determinarse el dominio y el rango de la función, tal como se explicó en páginas anteriores. De ahí surgirán números que la función no toma, los cuales son llamados asíntotas.

Ejemplo 8. Hallar el dominio, rango, asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$, y graficarla:

Primero reemplazamos y en lugar de $f(x)$:

$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$

Para hallar el dominio despejamos y, pero ya se encuentra despejada. Como existe variable en el denominador, igualamos este a cero:

$$x - 3 = 0$$

Despejamos x:

$$x = 3$$

Por tanto, el dominio son todos los reales a excepción del 3. $Dom\ f = \mathbb{R} - \{3\}$. Esto también se puede escribir en forma de intervalo: $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$. La asíntota vertical se encuentra en $x = 3$.

Para hallar el rango despejamos x de la función:

$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$

$y(x-3) = 2x - 5$	Pasamos a multiplicar $x - 3$ pues esta dividiendo.
$yx - 3y = 2x - 5$	Realizamos las operaciones: $y(x-3) = yx - 3y$
$-3y = 2x - 5 - yx$	Pasamos todos los términos con x a la derecha.
$-3y + 5 = 2x - yx$	Como -5 no tiene x, debe pasar a la izq.

$$-3y+5=x(2-y)$$

Sacamos factor común x a $2x-yx$

$$\frac{-3y+5}{(2-y)}=x$$

Pasamos $2-y$ que se encontraba multiplicando a dividir al lado izq.

Como existe variable en el denominador, igualamos este a cero:

$$2-y=0$$

Despejamos y:

$$2=y$$

Entonces el rango son todos los números reales a excepción del 2: $Ran\, f=\mathbb{R}-\{2\}$. También puede escribirse como $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. La asíntota horizontal se encuentra en $y=2$.

Para graficar la función debemos crear la tabla de valores. Se dan valores a la izquierda y a la derecha de la asíntota vertical:

x	1	2	3	4	5
y					

Evaluamos la función para cada valor:

$$y=\frac{2x-5}{x-3}$$

$$y(1)=\frac{2(1)-5}{(1)-3}=\frac{2-5}{1-3}=\frac{-3}{-2}=1.5$$

$$y(2)=\frac{2(2)-5}{(2)-3}=\frac{4-5}{2-3}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$y(3)=\frac{2(3)-5}{(3)-3}=\frac{6-5}{3-3}=\frac{1}{0}=Indeterminado$$

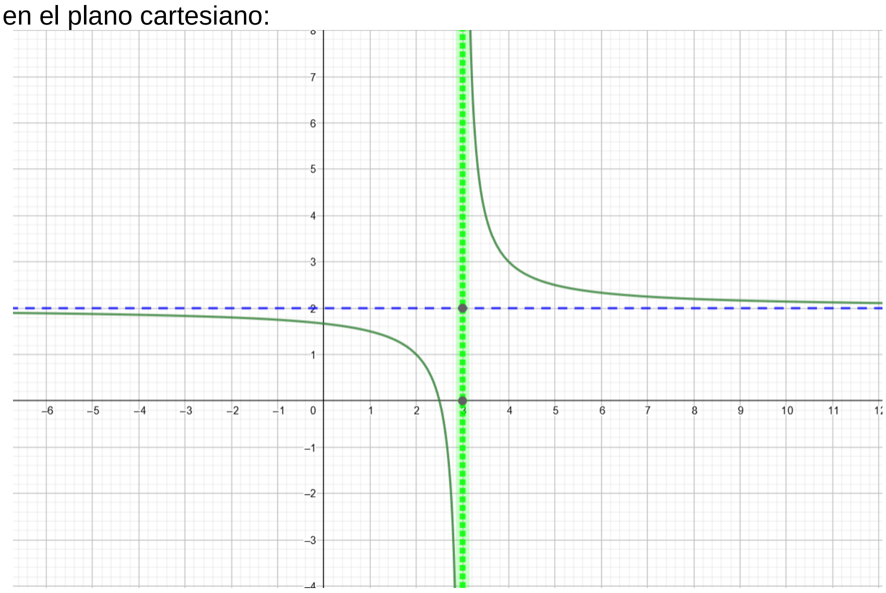
$$y(4)=\frac{2(4)-5}{(4)-3}=\frac{8-5}{4-3}=\frac{3}{1}=3$$

$$y(5)=\frac{2(5)-5}{(5)-3}=\frac{10-5}{5-3}=\frac{5}{2}=2.5$$

Completamos la tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	1.5	1	Indeterminado	3	2.5

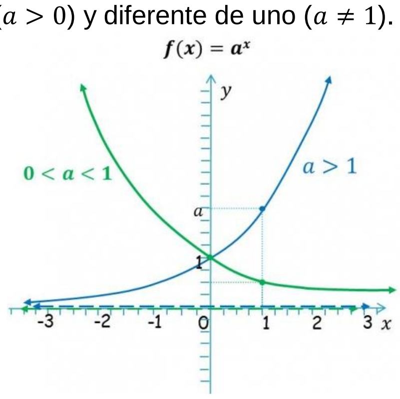
Luego graficamos en el plano cartesiano:



La línea punteada verde (····) es la asíntota vertical, la línea a trazos azul (- - -) es la asíntota horizontal. Las dos líneas curvas representan la función, y nunca atraviesa a las asíntotas, se acercan hasta el infinito, pero nunca llegan a esos puntos.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Una función exponencial es una función que tiene la forma $f(x)=a^x$, donde a es una constante mayor que cero ($a>0$) y diferente de uno ($a\neq 1$).



Sus características son:

- ❖ $Dom\, f=\mathbb{R}$ y $Ran\, f=\mathbb{R}^+$.
- ❖ La función exponencial es creciente si $a>1$ y es decreciente para $0<a<1$.
- ❖ El punto de corte con el eje y es el punto (0,1), ya que $f(0)=a^0=1$.
- ❖ La función pasa por el punto $(1,a)$, ya que $f(1)=a^1=a$

Ejemplos:

$$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x \qquad g(x)=2^x \qquad h(x)=e^x$$

Un caso especial de la función exponencial se presenta cuando a es el número irracional $e=2.7182\ldots$

Ejemplo 8.

A. Determinar si la función $f(x) = 2^x$ es creciente o decreciente, graficarla y determinar su dominio y rango.

B. Determinar si la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es creciente o decreciente, graficarla y determinar su dominio y rango.

Solución.

A. Como las funciones exponenciales tienen la forma $f(x) = a^x$, por tanto en este caso $a = 2$. Como es un número mayor que cero, entonces la función es creciente.

Planteamos la tabla de valores con los números desde el -2 al 2:

x	-2	1	0	1	2
y					

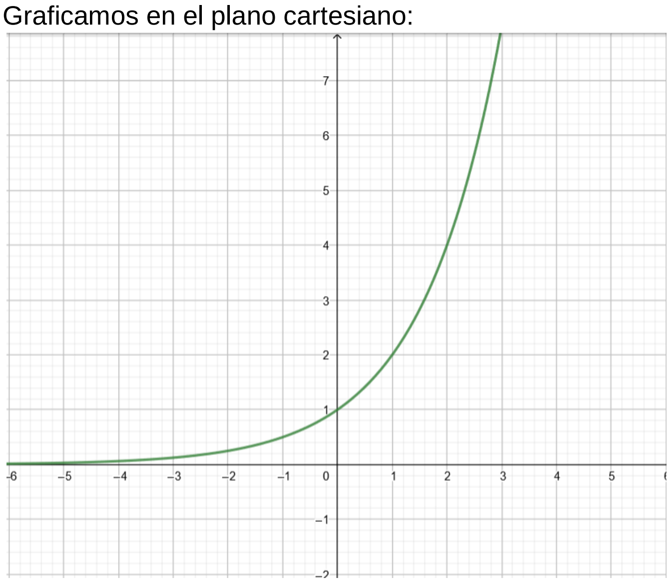
Reemplazamos los valores de x en la función:

$f(x) = 2^x$
$f(-2) = 2^{-2} = 0.25$
$f(-1) = 2^{-1} = 0.5$
$f(0) = 2^0 = 1$
$f(1) = 2^1 = 2$
$f(2) = 2^2 = 4$

Escribimos los valores en la tabla:

x	-2	1	0	1	2
y	0.25	0.5	1	2	4

Graficamos en el plano cartesiano:



Por tanto, $Dom\ f = \mathbb{R}$ y $Ran\ f = \mathbb{R}^+$

B. En este caso, teniendo en cuenta que las funciones exponenciales tienen la forma $f(x) = a^x$, entonces $a = \frac{1}{2}$. Como es menor que 1, la función es decreciente.

Planteamos la tabla de valores con los números desde el -2 al 2:

x	-2	1	0	1	2
y					

Reemplazamos los valores de x en la función:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (0.5)^{-2} = 4$

$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (0.5)^{-1} = 2$

$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = (0.5)^{0} = 1$

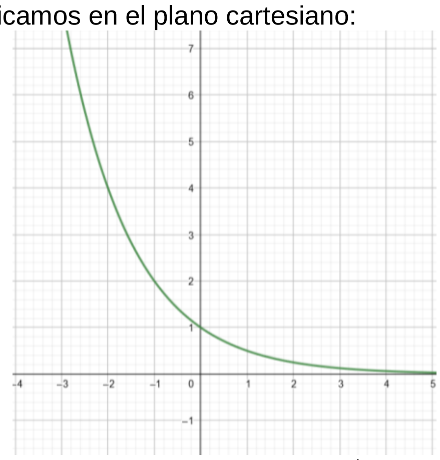
$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = (0.5)^{1} = 0.5$

$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = (0.5)^{2} = 0.25$

Escribimos los valores en la tabla:

x	-2	1	0	1	2
y	4	2	1	0.5	0.25

Graficamos en el plano cartesiano:



Por tanto, $Dom\ f = \mathbb{R}$ y $Ran\ f = \mathbb{R}^+$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

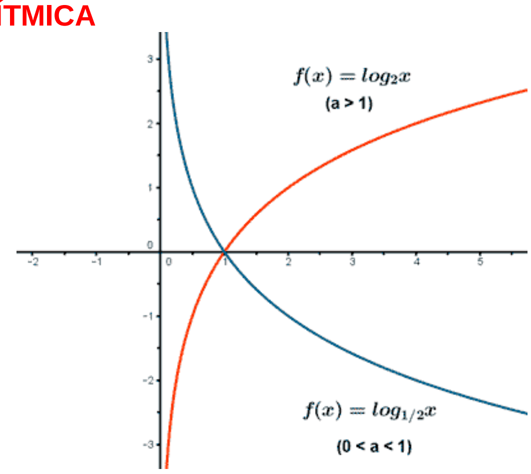
Una función logarítmica es de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Sus características son:

- ❖ $Dom\ f = \mathbb{R}^+$ y $Ran\ f = \mathbb{R}$.
- ❖ La función es creciente para $a > 1$ y decreciente para $0 < a < 1$.

Son ejemplos de funciones logarítmicas:

$f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x \qquad g(x) = \ln x \qquad h(x) = \log_3 x$



Recuerde que el logaritmo $\ln x$ es un logaritmo con base e=2.7182… (Número de Euler), por tanto: $\ln x = \log_e x$

Las calculadoras calculan logaritmos base 10 y base e. Para calcular logaritmos diferentes hacemos lo siguiente:

$\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} =$
3

$$\log_5 625 = \frac{\log 625}{\log 5} = 4$$

Ejemplo 9.

A. Determinar si la función $f(x) = log_3 x$ es creciente o decreciente, graficarla y determinar su dominio y rango.

B. Determinar si la función $f(x) = log_{0.5} x$ es creciente o decreciente, graficarla y determinar su dominio y rango.

Solución.

A. Como las funciones logarítmicas tienen la forma $f(x) = \log_a x$, por tanto en este caso $a = 3$. Como es un número mayor que cero, entonces la función es creciente.

Planteamos la tabla de valores con los números desde el -2 al 2:

x	0	1	2	3	4
y					

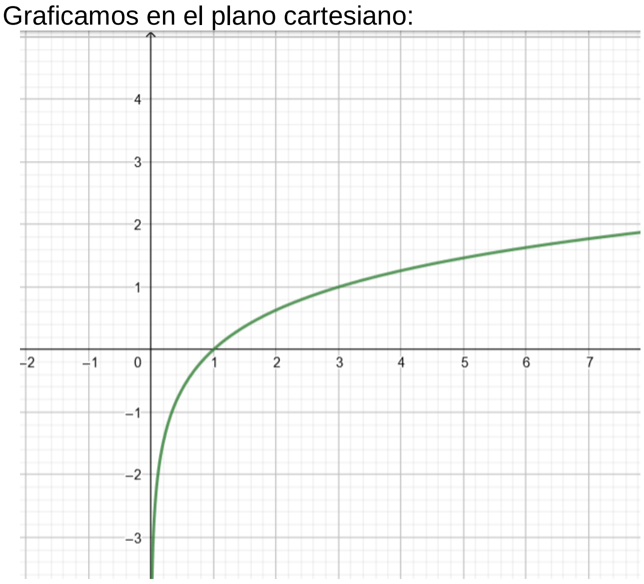
Reemplazamos los valores de x en la función:

$$f(x) = \log_3 x$$
$$f(0) = \log_3(0) = \frac{\log(0)}{\log 3} = Indeterminado$$
$$f(1) = \log_3(1) = \frac{\log(1)}{\log 3} = 0$$
$$f(2) = \log_3(2) = \frac{\log(2)}{\log 3} = 0.63$$
$$f(3) = \log_3(3) = \frac{\log(3)}{\log 3} = 1$$
$$f(4) = \log_3(4) = \frac{\log(4)}{\log 3} = 1.26$$

Escribimos los valores en la tabla:

x	0	1	2	3	4
y	Indeterminado	0	0.63	1	1.26

Graficamos en el plano cartesiano:



Por regla y por la gráfica, todas las funciones logarítmicas tienen como dominio y rango: $Dom\ f = \mathbb{R}^+$ y $Ran\ f = \mathbb{R}$.

B. El término que corresponde a a en la función$f(x) = \log_{0.5} x$ es $\frac{1}{2}$. Como es menor que 1, la función es decreciente.

Planteamos la tabla de valores con los números desde el -2 al 2:

x	0	1	0	2	3
y					

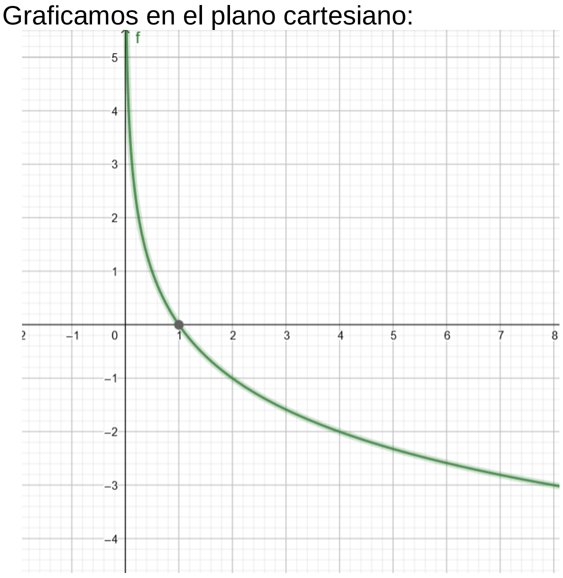
Reemplazamos los valores de x en la función:

$$f(x) = \log_{0.5} x$$
$$f(0) = \log_{0.5}(0) = \frac{\log(0)}{\log 0.5} = Indeterminado$$
$$f(1) = \log_{0.5}(1) = \frac{\log(1)}{\log 0.5} = 0$$
$$f(2) = \log_{0.5}(2) = \frac{\log(2)}{\log 0.5} = -1$$
$$f(3) = \log_{0.5}(3) = \frac{\log(3)}{\log 0.5} = -1.58$$
$$f(4) = \log_{0.5}(4) = \frac{\log(4)}{\log 0.5} = -2$$

Escribimos los valores en la tabla:

x	0	1	0	2	3
y	Indeterminado	0	-1	-1.58	-2

Graficamos en el plano cartesiano:



Por regla y por la gráfica, todas las funciones logarítmicas tienen como dominio y rango: $Dom\ f = \mathbb{R}^+$ y $Ran\ f = \mathbb{R}$.

2.4 MATERIAL DE APOYO

Función cuadrática:
https://www.youtube.com/watch?v=6JQw45YO3Fs
https://www.youtube.com/watch?v=YlhOfpREfHE

Función exponencial
https://www.youtube.com/watch?v=3NgRp_6qBnc
https://www.youtube.com/watch?v=cyiw50JOxsl
https://www.youtube.com/watch?v=8eBeaiEuzx8

Función Racional:
https://www.youtube.com/watch?v=4PWf27vLNQs&t=447s
https://www.youtube.com/watch?v=X6iM8MBKLyU
https://www.youtube.com/watch?v=NADZ1qa_zRw&t=475s

Función logarítmica
https://www.youtube.com/watch?v=C0vUje9Uduc
https://www.youtube.com/watch?v=AUr9FXrZR9M

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN 3

Para justificar sus respuestas, detalle todos los procedimientos utilizados.

1. Dada la función: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
Determinar:
A. El vértice
B. Los puntos de corte con el eje x.
C. Una tabla de valores.
D. Grafica de la función.
E. Dominio y rango.
2. Hallar el dominio, rango, asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x-5}{2-4x}$, y graficarla.
3. Determinar si la función $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ es creciente o decreciente, graficarla y determinar su dominio y rango.
4. Determinar si la función $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \log_5 \mathrm{x}$ es creciente o decreciente, graficarla y determinar su dominio y rango.

3. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES Y SUCESIONES

3.1 CONCEPTUALIZACIÓN & DESARROLLO DE EJEMPLOS

SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Para determinar las coordenadas polares de un punto P dado en coordenadas cartesianas (x, y), se ubica el punto P y se construye un triángulo rectángulo correspondiente y se halla la hipotenusa junto al ángulo que forma con el eje X. Para calcular la hipotenusa se utiliza el teorema de Pitágoras.

Un punto P en **coordenada polares** se denota como $P(r,\ \theta)$, donde r es la distancia del punto P al origen de coordenadas o **polo,** O. Y θ, es el ángulo en radianes comprendido entre $0\ y\ 2\pi$ que forma el segmento OP con la parte positiva del eje X denominado **eje polar**. Las coordenadas del polo son (0, 0).

Ejemplo 1. Halla las coordenadas polares del punto que tiene por coordenadas cartesianas (12;5) (ver figura 1).

Solución. $r^2 = 12^2 + 5^2 \implies r = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$
Como $\tan\theta = \frac{5}{12}$, entonces $\theta = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = 22{,}6º$

Por tanto, las coordenadas polares de P son (13, 22,6º) aproximadamente.

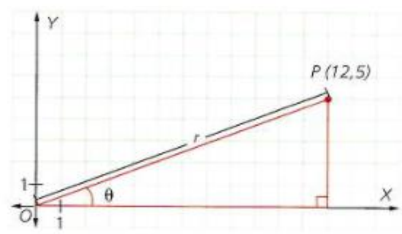


Figura 1

Conversión entre coordenadas cartesianas y polares

Si un punto tiene por coordenadas cartesianas P(x, y) y por coordenadas polares $P(r,\ \theta)$, se puede establecer que:

$$P(r,\theta) = \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{x}{y} \end{cases} \qquad P(x,y) = \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{y} \longrightarrow x = r\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \longrightarrow y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Las primeras coordenadas se utilizan para pasar de coordenadas cartesianas a polares, y las segundas para pasar de polares a cartesianas.

Ejemplo 2. Hallar las coordenadas cartesianas del punto de coordenadas polares $P(3,\pi)$,
Solución.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 3\cos\pi = -3 \\ y = r\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{sen}\pi = 0 \end{cases} \longrightarrow P(-3, 0)$$

Curvas en coordenadas polares

Una forma de trazar la gráfica de una ecuación polar consiste en transformarla a coordenadas cartesianas.

Ejemplo 3. La gráfica de la ecuación polar r=3 consta de todos los puntos que se encuentran a tres unidades del polo. En otras palabras, esta gráfica es un circulo que tiene su centro en el origen y radio 3 (figura 2). Esto se puede confirmar utilizando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación en coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = 3^2$.

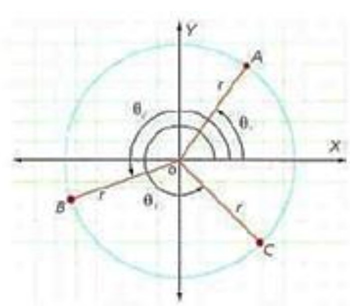


Figura 2

SUCESIONES

Una sucesión de números reales se define como una relación entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales.

Ejemplo 4.

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \text{Sucesión.} \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & a_n, & \ldots & \end{array}$$

Al 1 se le asigna a_1, al 2 se le asigna a_2, y así sucesivamente. Los números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$ se les llaman términos de la sucesión. El número a_n, se le denomina el Término n-ésimo de la sucesión. La sucesión completa se denota $\{a_n\}$

FORMAS PARA DETERMINAR UNA SUCESIÓN

(i) Conociendo los términos o elementos de la sucesión, se establece el término n-ésimo o término general de la sucesión.

(ii) Conociendo el término n-ésimo o término general (patrón), se establecen los términos que forman la sucesión.

Ejemplo 5. Establecer el término general de la sucesión cuyos términos son:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6} \ldots\right\}$$

Solución. Analizamos de la siguiente manera: Como a_n es una función de $\mathrm{N} \rightarrow \mathrm{R}$,

Al número natural uno (1) lo transforma en $\frac{3}{2}$: $1 \rightarrow \frac{3}{2}$

Al número natural dos (2) lo transforma en $\frac{4}{3}$: $2 \rightarrow \frac{4}{3}$

Al número natural tres (3) lo transforma en $\frac{5}{4}$: $3 \rightarrow \frac{5}{4}$

.
.
.

Al número natural cinco (5) lo transforma en $\frac{7}{6}$: $5 \rightarrow \frac{7}{6}$ Se observa que los términos de la sucesión son números fraccionarios, donde el numerador está formado por el número natural más 2, y el denominador es el número natural más 1; entonces, luego el término general de la sucesión es

$$\{a_n\} = \left\{\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}\right\}, \mathrm{n} \epsilon N$$

Ejemplo 6. Encontrar los cuatro primeros términos de la sucesión, cuyo término general es: $\{\mathrm{a_n}\} = \left\{\frac{2^{\mathrm{n}}}{2\mathrm{n}+1}\right\}$, con $\mathrm{n}\epsilon\mathrm{N}$.

Solución

En el término general $\left\{\frac{2^{\mathrm{n}}}{2\mathrm{n}+1}\right\}$, como $\mathrm{n}\epsilon\mathrm{N}$, reemplazamos directa y sucesivamente a n por los números naturales, o sea:

Primer término: $\frac{2^{(1)}}{2(1)+1} = \frac{2}{3}$, segundo término: $\frac{2^{(2)}}{2(2)+1} = \frac{4}{5}$, tercer término: $\frac{2^{(3)}}{2(3)+1} = \frac{8}{7}$, cuarto término: $\frac{2^{(4)}}{2(4)+1} = \frac{16}{9}$.

Luego: $\{\mathrm{a_n}\} = \left\{\frac{2^{\mathrm{n}}}{2\mathrm{n}+1}\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{7}, \frac{16}{9}, \ldots\right\}$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

Representar gráficamente los términos de una sucesión, permite visualizar e identificar en forma práctica algunas características de las mismas, además de ser una ayuda importante para el cálculo del límite de ellas.

Como una sucesión es una función de $\mathrm{N} \rightarrow \mathrm{R}$, podemos hacer su representación gráfica mediante un plano cartesiano (sistema de coordenadas), o sobre una recta numérica (recta real).

Ejemplo 7. Representar en el plano cartesiano la sucesión cuyo término general es:

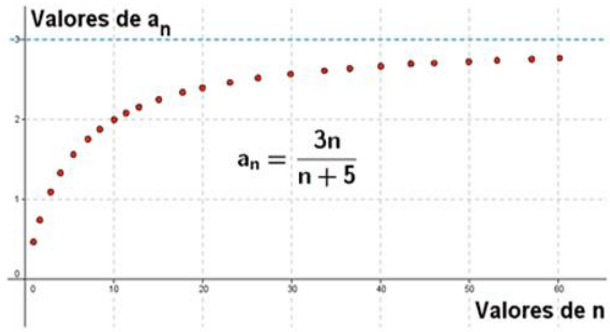
$$\left\{\frac{3n}{n+5}\right\}, n\epsilon N$$

Solución. en la expresión $\left\{\frac{3n}{n+5}\right\}$ sustituimos a n por 1, 2, 3, …, 100, … y se obtienen los siguientes resultados:

$a_1 = \frac{3 \cdot 1}{1+5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $a_3 = \frac{3 \cdot 3}{3+5} = \frac{9}{8} = 1{,}13$

$a_2 = \frac{3 \cdot 2}{2+5} = \frac{6}{7} = 0{,}86$ $a_{10} = \frac{3 \cdot 10}{10+5} = \frac{30}{15} = 2$

$a_{100} = \frac{3 \cdot 100}{100+5} = \frac{300}{105} = 2{,}86$ $a_{1000} = \frac{3 \cdot 1000}{1000+5} = \frac{3000}{1005} = 2{,}99$



SUCESIONES MONÓTONAS

Una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si sus términos son no decrecientes

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

o si sus términos son no crecientes

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots.$$

Observación: Si $a_n < a_{n+1}$, la sucesión es estrictamente creciente.

Si $a_n > a_{n+1}$, la sucesión es estrictamente decreciente.

Ejemplo 8. Son ejemplos de sucesiones estrictamente crecientes:

$a_n = \frac{7n+3}{2n+1} = \left\{\frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \frac{24}{7}, \frac{31}{9}, \frac{38}{11}, \ldots\right\}$ $a_n = 2n^{n+1} = \{2,16,162,2048,31250, \ldots\}$

Esto sucede porque en ambas $a_1 < a_2 < a_3, \ldots, a_n < \cdots a_{n+1}$, es decir, los valores de los términos de cada sucesión aumentan progresivamente.
Son ejemplos de sucesiones decrecientes:

$a_n = \frac{n}{n^2+1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \ldots\right\}$ $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \left\{\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{5}, \ldots\right\}$

Esto sucede porque en ambas $a_1 > a_2 > a_3, \ldots, a_n > a_{n+1}$ es decir, los valores de los términos de la sucesión disminuyen progresivamente.

Ejemplo 9. La sucesión $a_n = 1^n = \{1,1,1,1,1, \ldots\}$ es una sucesión constante, ya que todos sus términos son iguales, es decir, $a_n = a_{n+1}$ para todo n.

SUCESIONES ACOTADAS

1. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada superiormente** o por arriba si existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo n. El número M es llamado una **cota superior** de la sucesión.
2. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada inferiormente** o por abajo si hay un número real N tal que $N \leq a_n$ para todo n. El número N es llamado una **cota inferior** de la sucesión.
3. Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada** si lo está superior e inferiormente.

Axioma de Completitud

Todo conjunto no vacío de números reales que tiene una cota inferior tiene una máxima cota inferior. También, todo conjunto de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior.

Una sucesión es **acotada** si y sólo si tiene una cota superior y una cota inferior. Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ tiene una cota superior y una cota inferior, por tanto, es acotada. Las cotas son 1 y 0.

Ejemplo 10.

(i) La sucesión $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}$ es una sucesión acotada, puesto que $0 < a_n \leq 1$. Una cota superior de la sucesión es 1 y una inferior es 0.

(ii) Para $a_n = \frac{5}{n+1} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, 1, \frac{5}{6}, \ldots\right\}$, se tiene que $0 < a_n \leq 5$ para todo n.
Así, una cota superior de la sucesión es 5 y una inferior es 0.

(ii) La sucesión $a_n = 2n + 1 = \{3,5,7,9,11, \ldots\}$ es acotada inferiormente por m=3, pero no tiene una cota superior.

LÍMITE DE SUCESIONES

Sea L un número real. El **límite** de una sucesión $\{a_n\}$ es L, escrito como

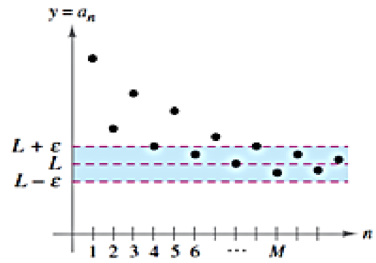
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ siempre que $n > M$. Si el límite L de una sucesión existe, entonces la sucesión **converge** a L. Si el límite de una sucesión no existe, entonces la sucesión **diverge**.

Las sucesiones cuyos términos tienden a valores límite, tales sucesiones se llaman **convergentes**. Por ejemplo, la sucesión: $\{1/2^n\}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ converge a 0.

Gráficamente, esta definición dice que finalmente (para $n > M$ y $\varepsilon > 0$) los términos de una sucesión que converge a L quedarán dentro de la franja entre las rectas $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$, como se muestra en la figura



Para $n > M$, todos los términos de la sucesión distan de L menos de ε unidades

SUCESIONES CONVERGENTES - SUCESIONES DIVERGENTES

Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si el límite tiende a un valor determinado. Una sucesión $\{a_n\}$ es divergente si el límite de ella no existe.

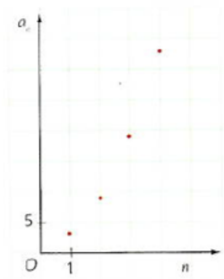
Las propiedades de los límites son validas para sucesiones convergentes y divergentes, con la observación de que sean ciertas, cuando tengan sentido matemático, es decir, siempre que no se produzcan **indeterminaciones.**

Las indeterminaciones son: $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \cdot \infty$; ∞^0; 0^0; 1^∞

Pero el hecho de que aparezca una indeterminación a la hora de calcular un límite no significa que no se pueda calcular dicho límite; sino que para dicho calculo habrá que elegir otros procedimientos.

Ejemplo 11. Sea $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{3n+2} = \frac{4}{3}$ Esta es una sucesión convergente.

Ejemplo 12. Los términos de la sucesión $a_n = 1 + 2n^2$ crecen indefinidamente a medida que n también lo hace. Así a_n no se acerca a un $L \in R$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty}(1 + 2n^2) = +\infty$. La sucesión $1 + 2n^2$ es divergente (figura 3).



Otras sucesiones

Existen sucesiones que ni son convergentes a un número ni son divergentes hacia $+\infty$ o $-\infty$. Estas reciben el nombre de **sucesiones alternantes.**

Ejemplo 13. $a_n = (-1)^n$ es una sucesión que oscila entre -1 y 1 (figura 4), es decir, ni converge ni diverge, alterna entre los valores dados.

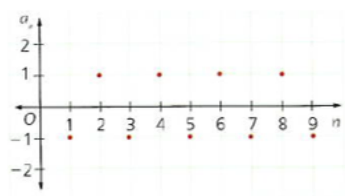


Figura 4

Propiedades de los límites de sucesiones

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que:

a. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

b. $\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot a;\ k \in \mathbb{R}$

c. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$

d. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

e. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, siempre que $b \neq 0$

f. $\lim_{n\to\infty} k^{a_n} = k^a$

g. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

h. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right) = a^b$

i. $\lim_{n\to\infty} k = k$, esto es, el límite de una sucesión constante $a_n = k$ es la misma constante.

Además, si dos sucesiones son divergentes hacia $+\infty$, la sucesión formada por la suma de los términos de ambas también diverge hacia $+\infty$, es decir:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ y\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty, entonces\ \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

Ejemplo 14. Observa cómo se aplican las propiedades anteriores para evaluar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}$. En este caso no se puede aplicar el límite del cociente puesto que las sucesiones del numerador y del denominador no convergen. Sin embargo, se pueden transformar así:

$$\frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}=\frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} \longleftarrow \text{Se factorizó } n^2 \text{ y se simplificó}$$

Al aplicar la propiedad e. se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\frac{3+0+0}{4+0+0}=\frac{3}{4}$$

Indeterminaciones en el cálculo de límites de sucesiones

Para **calcular el límite de una sucesión**, se aplican las propiedades de los límites. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no siempre se pueden aplicar las propiedades y es necesario buscar técnicas particulares para eliminar indeterminaciones, aunque en algunos casos esto puede no ser posible.

El límite de una sucesión, en la que el término general es un polinomio en n, es $+\infty$ si el coeficiente de mayor grado de dicho polinomio es positivo y $-\infty$, si es negativo.

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ Cuando una sucesión es un cociente de polinomios y resulta la **indeterminación** $\frac{\infty}{\infty}$**,** su límite se calcula dividiendo tanto el numerador como el denominador entre el término de mayor grado.

Ejemplo 15.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^5-2n}{n^5-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^5}{n^5}-\frac{2n}{n^5}}{\frac{n^5}{n^5}-\frac{n^2}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n^4}}{1-\frac{1}{n^3}}=\frac{2-0}{1-0}=2$$

Indeterminación $\infty-\infty$ Si dos sucesiones son enteras, se factoriza la potencia de mayor exponente, si son racionales, se llevan a común denominador; y si poseen radicales, se multiplica y divide por el conjugado de la expresión, para verificar la indeterminación o eliminarla.

Ejemplo 16.

- $\lim\limits_{n\to\infty}3n^6-8n^2=\lim\limits_{n\to\infty}n^6\left(3-\frac{8}{n^4}\right)=\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{n-4}-\frac{n^2}{n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5(n-2)-n^2(n-4)}{(n-2)(n-4)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^6-2n^5-n^3+4n^2}{n^2-6n+8}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^6}{n^6}-\frac{2n^5}{n^6}-\frac{n^3}{n^6}+\frac{4n^2}{n^6}}{\frac{n^2}{n^6}-\frac{6n}{n^6}+\frac{8}{n^6}}=\frac{1}{0}=\infty$$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=0$

Indeterminación 1^∞ Para calcular $\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^{b_n}$, donde $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ y $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ se aplica la expresión

$$\lim_{n\to\infty}{a_n}^{b_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}b_n(a_n-1)}$$

Ejemplo 17.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n^3-2n^2-n-2}{n^3+2n}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

3.2 MATERIAL DE APOYO

Sistemas de coordenadas Polares https://www.youtube.com/watch?v=fphQvh8K1zo
Concepto de Sucesión https://www.youtube.com/watch?v=IXEe11Sfwgo
Formas para determinar una sucesión https://www.youtube.com/watch?v=FGoSqeFl5zg
Representación gráfica de una sucesión https://www.youtube.com/watch?v=ILuHzQcXP8c
Término general de una sucesión https://www.youtube.com/watch?v=s0KyIBidOCg
Sucesiones Monótonas https://www.youtube.com/watch?v=dSMuOHP-vWg
Sucesiones Monótonashttps://www.youtube.com/watch?v=srsOAB8jeWk
Sucesiones Acotadas https://www.youtube.com/watch?v=YY7diFtlu_Q
Convergencia y divergencia de sucesiones https://www.youtube.com/watch?v=RPdGE-RHlLI
Limite de Sucesiones https://www.youtube.com/watch?v=bIW3wls4qr0
Indeterminación de límites de sucesión https://www.youtube.com/watch?v=Pwh_zS-XjO4

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN 4

Para justificar sus respuestas, detalle todos los procedimientos utilizados.

1) Halla las coordenadas polares de los siguientes puntos que tienen coordenadas cartesianas y representa su gráfica.

A) $(-1,\ 0)$. **B)** $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ **C)** $(3,\ 3)$

2) Pasa a coordenadas cartesianas los puntos que tienen por coordenadas polares

A) $(2,\ \pi)$. **B)** $(3,\ 3\frac{\pi}{2})$ **C)** $(0,\ 0)$

3) Encuentra los primeros cinco términos y el décimo termino de cada sucesión y representa su grafica en el plano. Además, indica si es convergentes, divergentes o ninguna de estas.

A) $a_n = \frac{2}{2n+1}$. **B)** $b_n = (-1)^n \cdot n$ **C)** $a_n \cdot b_n$

4) Halla el término general de cada una de las siguientes sucesiones. Clasifícalas como convergentes, divergentes o ninguna de estas.

A) $-1,\ 2, -3,\ 4, -5, \ldots$ **B)** $3, -2,\ \frac{5}{3},\ \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots$ **B)** $-3, -1, -\frac{1}{3},\ 0, \frac{1}{5}, \ldots$

5) Clasifica las siguientes sucesiones si son monótonas o no

A) $a_n = 2^n$ **B)** $\frac{(-1)^n}{n^2}$

6) Calcula los siguientes límites

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n^2-2}$ b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-5n-1}{9n^2+2}$ c. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$ e. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{5n^2-8n+6}$ d. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{n^3+3n^2}$ d. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)$ f. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{2n}$

7) Con base en la lectura de la Sección 4. EDUCACIÓN ECONÓMICA Y FINANCIERA, responda:

A. ¿Cuál de los dos tipos de interés es mejor opción de ahorro y por qué?
B. ¿Cuál es la mejor opción para esta familia? ¿Qué argumentos sustentan esa opción?

4. EDUCACIÓN ECONÓMICA Y FINANCIERA

Tema: Ahorro

Eje temático: Finanzas

Situación- problema:

Para la familia Ordóñez este no es un buen momento. La madre perdió su trabajo y esto les dejó una gran inestabilidad económica, ya que sus ingresos representaban buena parte de las entradas del hogar. Después de hacer un análisis de los ingresos y de los gastos, y consciente de las situaciones que en la vida se pueden presentar, esta familia se ha propuesto ahorrar $200.000 anuales durante diez años, para cumplir la meta de enviar a su único hijo a la universidad. Las opciones de ahorro que han analizado son: guardar el dinero en la casa, depositarlo en un fondo que le garantiza un interés simple efectivo anual del 10% o depositarlo en una entidad financiera en la que tiene una cuenta de ahorros, la cual le pagará un interés compuesto del 7% anual.

Solución. Analicemos las opciones mediante el cálculo del interés simple y el interés compuesto

Opción 1
Dejar el dinero en la casa: no generaría intereses, así que al cabo de diez años tendría $2.000.000 ahorrados.

Opción 2
Depositarlo en el fondo: 10% de interés simple anual. Aplicando la fórmula de interés simple: $F = P(1+in)$
Donde

- F= dinero tras cumplirse el tiempo.
- P: capital o dinero inicial
- i= tasa de interés (entre 0 y 1). Recuerda que si te comentan 10% debe dividirlo entre 100 para colocarlo en la formula
- n: tiempo

Año	Inversión	Interés	Dinero total
1	200.000	20.000	220.000
2	400.000	40.000	460.000
3	600.000	60.000	720.000
4	800.000	80.000	1.000.000
5	1.000.000	100.000	1.3000.000
6	1.200.000	120.000	1.620.000
7	1.400.000	140.000	1.960.000
8	1.600.000	160.000	2.320.000
9	1.800.000	180.000	2.700.000
10	2.000.000	200.000	3.100.000

Al final del primer año tendrá 200.000 + 20.000

Al final del segundo año tendrá (200.000 + 2 X 20.000) + (200.000 + 20.000)
Al final del tercer año tendrá
(200.000 + 3 X 20.000) + (200.000 + 2 20.000) + (200.000 + 20.000)
Así sucesivamente, al final del décimo año tendrá:
(200.000 + 10 X 20.000) + (200.000 + 9 X 20.000) + (200.000 + 8 X 20.000) + …. + (200.000 + 1X20.000)
= 200.000 10 + 20.000 (10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)
= 2.000.000 + 20.000 (55)
= 2.000.000 + 1 100.000
= $3.100.000 = Total del ahorro con esta opción.

El total de los intereses al cabo de los diez años con esta opción será de: $1.100.000. Al finalizar cada año esta familia tendrá acceso a los intereses causados, ya que no los está reinvirtiendo. Por ello, no generan interés en el cálculo.

Opción 3
Entidad financiera: ofrece un interés compuesto del 7% anual.

La fórmula de interés compuesto es

$$F = P(1+i)^n$$

Si deseamos calcular el interés hacemos:

$$F = P(i)^n$$

Año	Inversión	Interés
1	200000	14000
2	414000	28980
3	642980	45008,6
4	887988,6	62159,202
5	1150147,8	80510,35
6	1430658,15	100146,07
7	1730804,22	121156,295
8	2051960,51	143637,236
9	2395597,75	167691,842
10	2763289,59	193430,271
Total		956719,864

La entidad bancaria le da un total de $956719,864 por concepto de intereses en los diez años. El total del dinero es $2956719,864

5. TALLER DE PRUEBAS SABER

1. En la tabla se presentan los cinco mejores puntajes en el examen Saber 11° de un colegio.

Código del estudiante	Puntaje
1	200
2	260
3	300
4	440
5	350

¿Entre qué valores se encuentran todos los puntajes mostrados en la tabla?

A. Entre 200 y 350.
B. Entre 200 y 440.
C. Entre 260 y 350.
D. Entre 260 y 440.

2. Los valores dominantes en un conjunto de datos son aquellos que aparecen con mayor frecuencia, siempre y cuando dicha frecuencia sea mayor o igual que dos. Una manera de calcularlos es efectuando el siguiente procedimiento:

Paso 1. Contar la cantidad de veces que aparece cada dato.

Paso 2. Seleccionar el dato o los datos que más se repiten, teniendo en cuenta que el número de apariciones debe ser mayor o igual que dos.

En la siguiente tabla se muestran los datos obtenidos en un curso de 5 estudiantes:

Peso (kg)	22	26	29	35	41
Estatura (m)	1,25	1,28	1,28	1,34	1,42
Edad (años)	9	10	11	11	12

¿Para cuál o cuáles de los datos de la tabla es posible determinar los valores dominantes utilizando el procedimiento descrito?

A. Únicamente para edad.
B. Únicamente para peso.
C. Para edad y para estatura.
D. Para peso y para estatura.

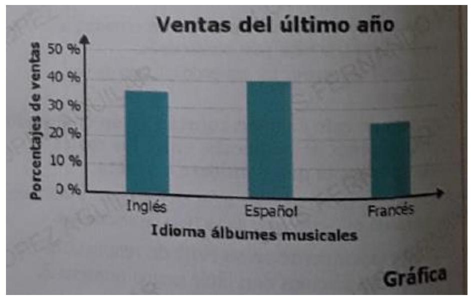
3. La tabla muestra algunos datos que evidencian la relación entre dos unidades de medida de la temperatura.

°C	K
-273	0
-3	270
0	273
10	283

Una persona afirma que los datos de la columna K siempre serán mayores que los de la columna °C. ¿Es verdadera esta afirmación?

A. No, porque, en la primera fila, el valor de °C es mayor que el de K.
B. Sí, porque la columna K es 273 unidades mayor que la columna °C.
C. No, porque la columna K aumenta independientemente de la columna °C.
D. Sí, porque, en la última fila, el valor de °C y de K son positivos.

4. La gráfica muestra el porcentaje de ventas del último año de una empresa de álbumes musicales en tres idiomas: inglés, francés y español.



Al ver la gráfica, un ejecutivo de la empresa, interpreta que la menor parte de los álbumes musicales vendidos en el último año fueron los del idioma francés.

¿La interpretación del ejecutivo es correcta?

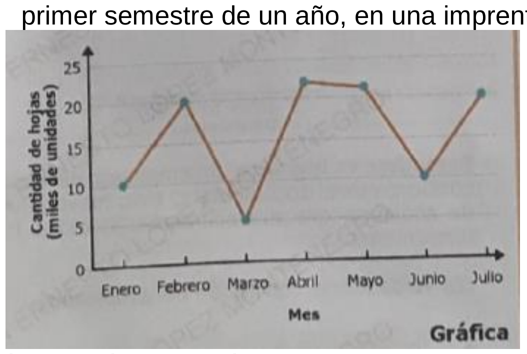
A. Si, porque la barra de los álbumes en francés está al extremo derecho de la gráfica.
B. No, porque la barra de mayor altura es la de álbumes en español y los otros dos álbumes tienen ventas menores.
C. Si, porque la barra que representa los álbumes vendidos en francés es la de menor
D. No, porque el menor valor corresponde a los álbumes en inglés que están a la izquierda en el eje horizontal.

5. Por cada moneda que Miguel introduce en su alcancía en un día, al día suiente introduce el doble. El viernes Miguel insertó 512 monedas.

¿Cuántas monedas introdujo en su alcancía el miércoles de esa misma semana?

A. 32 B. 64
C. 128 D. 508

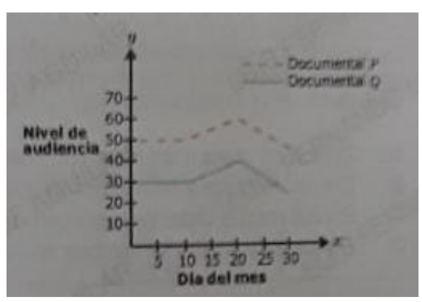
6. La gráfica presenta la cantidad de hojas, en miles de unidades, que se utilizaron durante el primer semestre de un año, en una imprenta.



Según la gráfica, ¿cuál fue el mes en que hubo mayor gasto de hojas en la imprenta?

A. Febrero. B. Mayo.
C. Marzo. D. Abril.

7. Un canal de televisión presenta varios documentales en el horario de la noche. En la gráfica se muestra el nivel de audiencia de los documentales P y Q, durante su primer mes al aire.



Basándose en la gráfica, un empleado del canal concluyó que el documental Q tuvo mayor de audiencia que el documental P todos días del mes.
¿Es verdadera la conclusión del empleado?
A. Sí, porque las funciones P(x) y Q(x) tienen rangos diferentes.
B. No, porque las funciones P(x) y Q(x) tienen dominios iguales.
C. Si, porque P(x) = Q(x) - 20; por tanto, Q(x) es mayor.
D. No, porque P(x) = Q(X) + 20; por tanto, P(x) es mayor.

8. Los términos de una sucesión se calculan con este procedimiento.

Paso 1. El primer término de la sucesión es f(1)=1.
Paso 2. El término de la posición n se calcula utilizando el término de la posición n-1, por medio de la fórmula:

$$f(n) = 1 + \frac{1}{f(n-1)}$$

Por ejemplo:

$$f(2) = 1 + \frac{1}{f(1)}$$
$$f(2) = 1 + \frac{1}{1}$$
$$f(2) = 2$$

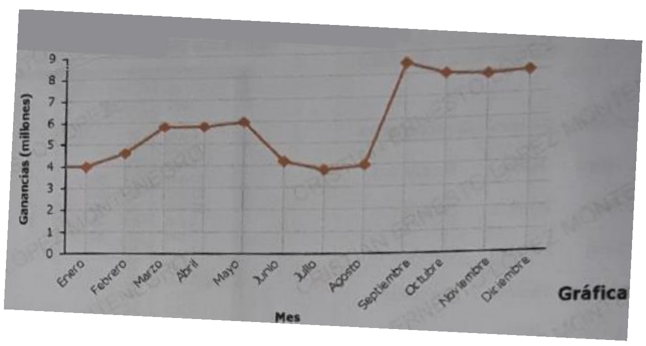
¿Cuál es el valor de f(3)?

A. ½ B. 3/2
C. 1/3 D. 2/3

9. El dueño de una tienda, que únicamente vende empanadas, quiere saber si su negocio está produciendo ganancias o pérdidas mensuales.
Él sabe que, independientemente de la cantidad de empanadas que venda, tiene gastos mensuales de $500.000.
Si en el mes se vende una cantidad n de empanadas y por cada empanada vendida se obtiene una ganancia x, entonces el negocio producirá pérdidas si:

A. $\frac{n}{x} < 500.000$
B. $\frac{n}{x} > 500.000$
C. $nx < 500.000$
D. $nx > 500.000$

10. La gráfica muestra las ganancias mensuales de una empresa durante un año.



Para analizar la variabilidad de sus ganancias, la empresa compara los cuatro trimestres del año (enero-marzo; abril-junio; julio-septiembre; octubre-diciembre) por separado, y establece el rango estadístico para cada uno, que es la diferencia entre el mayor y menor valor de un grupo de datos numéricos. El menor rango estadístico se dio en el trimestre octubre-diciembre, porque
A. se registraron las mayores ganancias.
B. las ganancias mensuales en este trimestre fueron menores que las de septiembre.
C. la suma de las ganancias de estos tres meses es menor que la suma de las ganancias anteriores.
D. se obtuvieron ganancias casi iguales en los tres meses.