



MATEMÁTICAS BÁSICAS

DESIGUALDADES

DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO EN UNA VARIABLE

La expresión $a \neq b$ significa que " a " no es igual a " b ".

Según los valores particulares de a y de b , puede tenerse $a > b$, que se lee " a mayor que b ", cuando la diferencia $a - b$ es positiva y $a < b$ que se lee " a menor que b ", cuando la diferencia $a - b$ es negativa.

La notación $a \geq b$, que se lee " a es mayor o igual que b ", significa que $a > b$ o que $a = b$ pero no ambos. Por su parte, la notación $a \leq b$ que se lee " a es menor o igual que b ", significa que $a < b$ o que $a = b$ pero no ambos.

Una *desigualdad* se obtiene al escribir dos expresiones numéricas o algebraicas relacionadas con alguno de los símbolos $>$, $<$, \geq o \leq .

Ejemplos de desigualdades:

- 1) $4 > 3$
- 2) $a < 10$
- 3) $b \geq 5$
- 4) $x^2 \leq 1$

Lo mismo que en las igualdades, en toda desigualdad, los términos que están a la izquierda del signo mayor o menor, forman el primer miembro de la desigualdad, y los términos de la derecha, forman el segundo miembro.

De la definición de desigualdad, se deduce que:

- Todo número positivo es mayor que cero
- Todo número negativo es menor que cero
- Si dos números son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto
- Si $a > b$ entonces $b < a$.

Los signos $>$ o $<$ determinan dos sentidos opuestos en las desigualdades, dependiendo si el primer miembro es mayor o menor que el segundo. Se dice que una desigualdad cambia de sentido, cuando el miembro mayor se convierte en menor o viceversa.

Existen dos clases de desigualdades: las absolutas y las condicionales.

- Desigualdad *absoluta* es aquella que se verifica para cualquier valor que se atribuya a las literales que figuran en ella. Por ejemplo: $x^2 + 1 > x$
- Desigualdad *condicional* es aquella que sólo se verifica para ciertos valores de las literales. Por ejemplo: $3x - 15 > 0$ que solamente satisface para $x > 5$. En este caso se dice que 5 es el límite de x .

Las desigualdades condicionales se llaman *inecuaciones*.

Sean $a, b \in \mathbf{R}$ y $a \neq 0$, una desigualdad de primer grado en una variable x se define como:

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ ax + b \geq 0 \\ ax + b < 0 \\ ax + b \leq 0 \end{cases}$$

Propiedades de las desigualdades:

Sean a, b, c tres números reales.

I. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se añade o se resta un mismo número a cada miembro

Esto es, si $a > b$, entonces se cumple que $a + c > b + c$.

Ejemplos.

1) Si a la desigualdad $7 > 3$ se le suma 2 a ambos miembros, entonces, se cumple que $7 + 2 > 3 + 2$, ya que: $9 > 5$

2) Si a la desigualdad $16 > 8$ se le resta 5 a ambos miembros, entonces, se cumple que $16 - 5 > 8 - 5$, ya que: $11 > 3$

Consecuencia de esta propiedad, puede suprimirse un término en un miembro de una desigualdad, teniendo cuidado de agregar en el otro miembro el término simétrico del suprimido. Es decir, se puede pasar un término de un miembro a otro, cambiando su signo, porque esto equivale a sumar o restar una misma cantidad a los dos miembros.

Ejemplo.

$$8x - 4 > 3x - 9$$

$$8x - 3x > -9 + 4$$

II. Una desigualdad no cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor positivo, o se dividen por un mismo divisor, también positivo.

Esto es, dado un número $c > 0$, si $a > b$ entonces se cumple que $a \cdot c > b \cdot c$ y que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Ejemplos.

1) Si a la desigualdad $5 > 2$ se multiplica por 3 a ambos miembros, entonces, se cumple que $5 \cdot 3 > 2 \cdot 3$, ya que $15 > 6$

2) Si a la desigualdad $36 > 28$ se divide por 4 a ambos miembros, entonces, se cumple que $\frac{36}{4} > \frac{28}{4}$, ya que $9 > 7$

III. Una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo factor negativo, o se dividen por un mismo divisor, también negativo.

Esto es, dado un número $c < 0$, si $a > b$ entonces se cumple que $a \cdot c < b \cdot c$ y que $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ejemplos.

1) Si a la desigualdad $6 > 3$ se multiplica por -4 a ambos miembros, entonces, se cumple que $6(-4) < 3(-4)$, ya que $-24 < -12$

2) Si a la desigualdad $16 > 10$ se divide por -2 a ambos miembros, entonces, se cumple que

$$\frac{16}{-2} < \frac{10}{-2}, \text{ ya que } -8 < -5$$

Consecuencia de la propiedad anterior pueden cambiarse todos los signos de una desigualdad, con tal que se cambie el sentido de la misma; porque esto equivale a multiplicar sus dos miembros por -1 .

Ejemplo.

$$-6x + 18 < 2 - 4x$$

$$6x - 18 > -2 + 4x$$

INECUACIONES ENTERAS

Las inecuaciones son desigualdades entre expresiones algebraicas. A diferencia de las ecuaciones, que sólo se verifican para algunos valores de la variable, las inecuaciones tienen infinitas soluciones. El procedimiento para resolverlas es similar al de las ecuaciones, sólo que deben tenerse en cuenta las propiedades de las desigualdades.

Para resolver una inecuación de primer grado se transponen los términos (pasar los términos de un miembro a otro cambiando el signo equivale a aplicar la propiedad I) para que aquellos que contienen a la incógnita queden en el primer miembro y los términos independientes en el otro. Finalmente, para despejar la incógnita se divide por el valor del coeficiente, teniendo en cuenta la segunda o tercera propiedad de las desigualdades, según el signo del coeficiente.

Ejemplos.

Resolver las siguientes inecuaciones enteras:

1) $4x + 6 > 2x - 8$

Solución.

Se transponen términos:

$$4x - 2x > -8 - 6$$

se reducen los términos semejantes:

$$2x > -14$$

dividiendo por 2:

$$x > \frac{-14}{2} \Rightarrow x > -7$$

2) $13x - 3x + 2 - 5x \geq -10 + 2x + 6$

Solución.

Se transponen términos:

$$13x - 3x - 5x - 2x \geq -10 + 6 - 2$$

se reducen los términos semejantes:

$$3x \geq -6$$

dividiendo por 3:

$$x \geq \frac{-6}{3} \Rightarrow x \geq -2$$

$$3) \quad 5x + 6 - 3x > 34 + 8x - 10$$

Solución.

Se transponen términos:

$$5x - 3x - 8x > 34 - 10 - 6$$

se reducen los términos semejantes:

$$-6x > 18$$

dividiendo por -6 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:

$$x < \frac{18}{-6} \Rightarrow x < -3$$

$$4) \quad 3x - 2 - 5x - 10x - 6 > 13 - 8x + 4 + 23 + 4x$$

Solución.

Se transponen términos:

$$3x - 5x - 10x + 8x - 4x > 13 + 4 + 23 + 2 + 6$$

se reducen los términos semejantes:

$$-8x > 48$$

dividiendo por -8 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:

$$x < \frac{48}{-8} \Rightarrow x < -6$$

$$5) \quad 5(2x - 3) + 1 + 4(3x - 5) \leq 3(x + 10) + 4(2x + 8) + x$$

Solución.

Eliminando paréntesis:

$$10x - 15 + 1 + 12x - 20 \leq 3x + 30 + 8x + 32 + x$$

Se transponen términos:

$$10x + 12x - 3x - 8x - x \leq 30 + 32 + 15 - 1 + 20$$

se reducen los términos semejantes:

$$10x \leq 96$$

$$\text{dividiendo por } 10: \quad x \leq \frac{96}{10} \Rightarrow x \leq \frac{48}{5}$$

Una inecuación de primer grado literal es aquella que contiene otras expresiones literales aparte de la incógnita, las cuales deben considerarse como valores constantes.

Para resolver inecuaciones literales se efectúa el mismo procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores. La variante es que cuando se tengan todos los términos que contengan a la incógnita en el primer miembro de la inecuación, se factoriza para poder despejarla.

$$6) \quad 2ax - 3b(x - 4) - 6abx > 5(x + a) - ab$$

Eliminando paréntesis:

$$2ax - 3bx + 12b - 6abx > 5x + 5a - ab$$

Se transponen términos:

$$2ax - 3bx - 6abx - 5x > 5a - ab - 12b$$

factorizando x :

$$x(2a - 3b - 6ab - 5) > 5a - ab - 12b$$

$$\text{si } (2a - 3b - 6ab - 5) > 0, \text{ entonces la solución es } x > \frac{5a - ab - 12b}{2a - 3b - 6ab - 5}$$

$$\text{si } (2a - 3b - 6ab - 5) < 0, \text{ entonces la solución es } x < \frac{5a - ab - 12b}{2a - 3b - 6ab - 5}$$

INECUACIONES FRACCIONARIAS

Para resolver una inecuación fraccionaria de primer grado, se multiplican sus dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores con el objeto de eliminarlos y se reduce para convertirla en una inecuación entera. Cuando el denominador contiene la incógnita, tiene que analizarse cuando es tanto positiva como negativa. Para ambos casos debe obtenerse la respectiva intersección de las restricciones. La solución de la inecuación, es la unión de los dos intervalos obtenidos.

Ejemplos.

Resolver las siguientes inecuaciones fraccionarias:

$$1) \frac{2}{5} + \frac{1}{3}x > \frac{4}{5}x - \frac{7}{3}$$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 15:

$$15\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}x\right) > 15\left(\frac{4}{5}x - \frac{7}{3}\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$6 + 5x > 12x - 35$$

se transponen términos:

$$5x - 12x > -35 - 6$$

Se reducen los términos semejantes:

$$-7x > -41$$

dividiendo por -7 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:

$$x < \frac{-41}{-7} \Rightarrow x < \frac{41}{7}$$

$$2) \frac{5}{4} + \frac{2}{3}x - 8 \geq \frac{2}{5}x - \frac{1}{2} - 3x$$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 60:

$$60\left(\frac{5}{4} + \frac{2}{3}x - 8\right) \geq 60\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2} - 3x\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$75 + 40x - 480 \geq 24x - 30 - 180x$$

se transponen términos:

$$40x - 24x + 180x \geq -30 - 75 + 480$$

Se reducen los términos semejantes:

$$196x \geq 375$$

dividiendo por 196:

$$x \geq \frac{375}{196}$$

$$3) \frac{9}{4} + \frac{5}{3}x - 4 > \frac{2}{6}x + \frac{10}{4} + \frac{8}{6}x$$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 12:

$$12\left(\frac{9}{4} + \frac{5}{3}x - 4\right) > 12\left(\frac{2}{6}x + \frac{10}{4} + \frac{8}{6}x\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$27 + 20x - 48 > 4x + 30 + 16x$$

se transponen términos:

$$20x - 4x - 16x > 30 - 27 + 48$$

Se reducen los términos semejantes:

$$0x > 51$$

como la división por cero no está definida, entonces la expresión presenta un enunciado falso. Nótese

que simplificando la inecuación se llega a $\frac{5}{3}x - \frac{7}{4} > \frac{5}{3}x + \frac{5}{2}$, expresión que es imposible que se cumpla.

$$4) \frac{7}{6x} + \frac{5}{3} > \frac{8}{6} - \frac{1}{4x}$$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $12x$:

Si $x > 0$ se tiene:

$$12x\left(\frac{7}{6x} + \frac{5}{3}\right) > 12x\left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4x}\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$14 + 20x > 16x - 3$$

se transponen términos:

$$20x - 16x > -3 - 14$$

Se reducen los términos semejantes:

$$4x > -17$$

dividiendo por 4 :

$$x > -\frac{17}{4}$$

dadas las restricciones $x > 0$ y $x > -\frac{17}{4}$, su intersección es $x > 0$

Si $x < 0$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido $x < -\frac{17}{4}$

dadas las restricciones $x < 0$ y $x < -\frac{17}{4}$, su intersección es $x < -\frac{17}{4}$

la solución está dada por: $\left(-\infty, -\frac{17}{4}\right) \cup (0, \infty)$

$$5) \frac{4}{5x} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2x} \leq 2 - \frac{1}{3x} - \frac{7}{2x}$$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $30x$:

Si $x > 0$ se tiene:

$$30x\left(\frac{4}{5x} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2x}\right) \leq 30x\left(2 - \frac{1}{3x} - \frac{7}{2x}\right)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$24 - 20x - 15 \leq 60x - 10 - 105$$

se transponen términos:

$$-20x - 60x \leq -10 - 105 - 24 + 15$$

Se reducen los términos semejantes:

$$-80x \leq -124$$

dividiendo por -80 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:

$$x \geq \frac{-124}{-80} \Rightarrow x \geq \frac{31}{20}$$

dadas las restricciones $x > 0$ y $x \geq \frac{31}{20}$, su intersección es $x > \frac{31}{20}$

Si $x < 0$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido: $x \leq \frac{31}{20}$

dadas las restricciones $x < 0$ y $x \leq \frac{31}{20}$, su intersección es $x < 0$

Por lo tanto, la solución está dada por: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{31}{20}, \infty\right)$

$$6) \frac{2}{5-x} + 3 > 0$$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $5-x$:

$$(5-x)\left(\frac{2}{5-x} + 3\right) > (5-x)0$$

Si $5-x > 0$, que implica $x < 5$ se tiene:

$$2 + (5-x)3 > 0$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$2 + 15 - 3x > 0$$

se transponen términos:

$$-3x > -2 - 15$$

Se reducen los términos semejantes:

$$-3x > -17$$

dividiendo por -3 y aplicando la tercera propiedad, la desigualdad cambia de sentido:

$$x < \frac{-17}{-3} \Rightarrow x < \frac{17}{3}$$

dadas las restricciones $x < 5$ y $x < \frac{17}{3}$, su intersección es $x < 5$

Si $5-x < 0$, que implica $x > 5$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido $x > \frac{17}{3}$

dadas las restricciones $x > 5$ y $x > \frac{17}{3}$, su intersección es $x > \frac{17}{3}$

Por lo tanto, la solución está dada por: $(-\infty, 5) \cup \left(\frac{17}{3}, \infty\right)$

$$7) \frac{5}{2x-6} + 18 < -12$$

Se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es $2x-6$:

$$(2x-6)\left(\frac{5}{2x-6} + 18\right) < (2x-6)(-12)$$

Si $2x-6 > 0$, que implica $x > 3$ se tiene:

$$5 + (2x-6)18 < (2x-6)(-12)$$

se efectúan las operaciones para cada término:

$$5 + 36x - 108 < -24x + 72$$

se transponen términos:

$$36x + 24x < 72 - 5 + 108$$

Se reducen los términos semejantes:

$$60x < 175$$

dividiendo por 60 :

$$x < \frac{175}{60} \Rightarrow x < \frac{35}{12}$$

dadas las restricciones $x > 3$ y $x < \frac{35}{12}$, su intersección es $\frac{35}{12} < x < 3$

Si $2x - 6 < 0$, que implica $x < 3$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido $x > \frac{35}{12}$

dadas las restricciones $x < 3$ y $x > \frac{35}{12}$, no existe intersección

Por lo tanto, la solución está dada por: $\frac{35}{12} < x < 3$.

GRÁFICA DE UNA INECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de valores de x que cumplan la desigualdad. Gráficamente, la solución de una inecuación de primer grado está representada por un intervalo del eje de las abscisas a partir de un valor límite a . Si la solución es de la forma $x > a$, entonces la región será todos los números que estén a la derecha de a sin incluirlo. Si la solución es de la forma $x \geq a$, la región incluye al valor a . De la misma forma, si la solución es de la forma $x < a$, entonces la región será todos los números que estén a la izquierda de a sin incluirlo. Si la solución es de la forma $x \leq a$, la región incluye al valor a . Dependiendo del tipo de desigualdad el conjunto solución puede ser uno o dos intervalos, la totalidad de los números reales o el conjunto vacío.

Ejemplos.

Representar gráficamente la solución de las siguientes inecuaciones de primer grado:

$$1) 4(x+1) > 2 - 3(2x+6)$$

Solución.

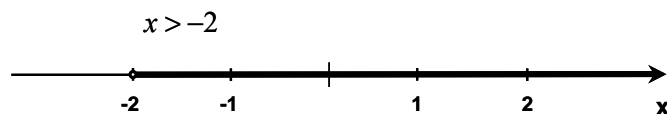
$$4x + 4 > 2 - 6x - 18$$

$$4x + 6x > 2 - 18 - 4$$

$$10x > -20$$

$$x > \frac{-20}{10}$$

$$x > -2$$



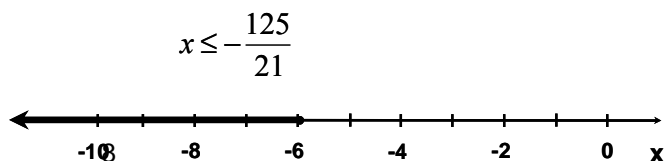
$$2) \frac{3}{4} - 7x - \frac{9}{2} \geq \frac{5}{3} - 8x + \frac{11}{4}x + 5$$

$$12\left(\frac{3}{4} - 7x - \frac{9}{2}\right) \geq 12\left(\frac{5}{3} - 8x + \frac{11}{4}x + 5\right)$$

$$9 - 84x - 54 \geq 20 - 96x + 33x + 60$$

$$-84x + 96x - 33x \geq 20 + 60 - 9 + 54$$

$$-21x \geq 125$$



$$x \leq -\frac{125}{21}$$

$$3) -\frac{3}{x} + \frac{7}{2} < \frac{13}{4} - \frac{5}{8x}$$

si $x > 0$

$$8x \left(-\frac{3}{x} + \frac{7}{2} \right) < 8x \left(\frac{13}{4} - \frac{5}{8x} \right)$$

$$-24 + 28x < 26x - 5$$

$$28x - 26x < -5 + 24$$

$$2x < 19$$

$$x < \frac{19}{2}$$

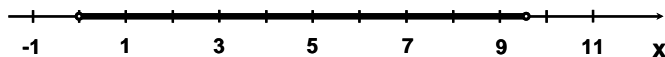
dadas las restricciones $x > 0$ y $x < \frac{19}{2}$, su intersección es $0 < x < \frac{19}{2}$

Si $x < 0$ entonces el resultado de la desigualdad cambia de sentido $x > \frac{19}{2}$

dadas las restricciones $x < 0$ y $x > \frac{19}{2}$, no hay intersección.

Por lo tanto, la solución está dada por: $0 < x < \frac{19}{2}$

$$0 < x < \frac{19}{2}$$



DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

Una desigualdad de segundo grado o desigualdad cuadrática, tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$. Su solución generalmente representa un intervalo o la unión de dos intervalos de números reales.

Para resolver una desigualdad cuadrática se usan los conceptos de *número crítico* y *número de prueba*.

Un número crítico de la desigualdad mencionada es una raíz real de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

Si r_1 y r_2 son números críticos y $r_1 < r_2$, entonces el polinomio $ax^2 + bx + c$ sólo puede cambiar de signo algebraico en r_1 y r_2 por lo tanto el signo más o menos de $ax^2 + bx + c$ será constante en cada uno de los intervalos $(-\infty, r_1)$, (r_1, r_2) , (r_2, ∞) .

Para determinar si estos intervalos son o no solución de la inecuación, se evalúa con un número x de prueba arbitrario en $ax^2 + bx + c$ para cada intervalo. Los resultados obtenidos sirven para ubicar el conjunto de soluciones de la desigualdad.

Un procedimiento sistemático para la resolución de inecuaciones cuadráticas es el siguiente:

1. Se trasladan todos los términos de la inecuación al miembro de la izquierda.
2. Se hallan los números críticos r_1 y r_2 de la ecuación cuadrática y se forman los intervalos $(-\infty, r_1)$, (r_1, r_2) , (r_2, ∞) .
3. Se prueban con valores de fácil sustitución localizados en dichos intervalos para determinar cuáles son los que satisfacen la desigualdad.

Ejemplos.

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $x^2 - 9 > 0$

Solución.

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

Los números críticos son:

$$r_1 = 3 \text{ y } r_2 = -3$$

los intervalos solución pueden ser $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $x^2 - 9 > 0$:

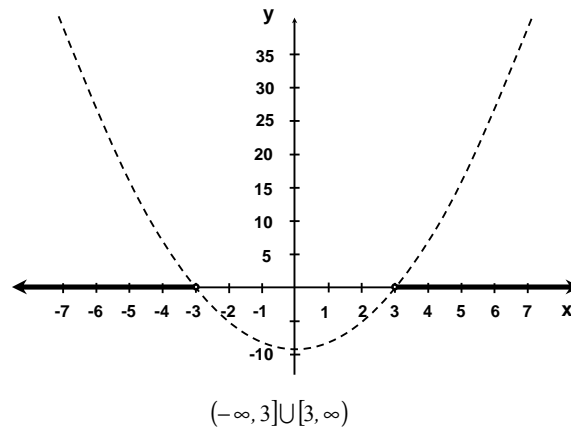
para $x = -4$ del intervalo $(-\infty, -3)$ se tiene: $(-4)^2 - 9 = 16 - 9 = 7 > 0$

para $x = 0$ del intervalo $(-3, 3)$ se tiene: $0^2 - 9 = 0 - 9 = -9 < 0$

para $x = 4$ del intervalo $(3, \infty)$ se tiene: $(4)^2 - 9 = 16 - 9 = 7 > 0$

Los valores que cumplen la desigualdad son el primero y el tercero, por lo que la solución es: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

La gráfica de la parábola se ubica por arriba del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son mayores que cero:



2) $x^2 - 4 < 0$

Solución.

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \pm 2$$

Los números críticos son:

$$r_1 = 2 \text{ y } r_2 = -2$$

los intervalos solución pueden ser $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $x^2 - 4 < 0$:

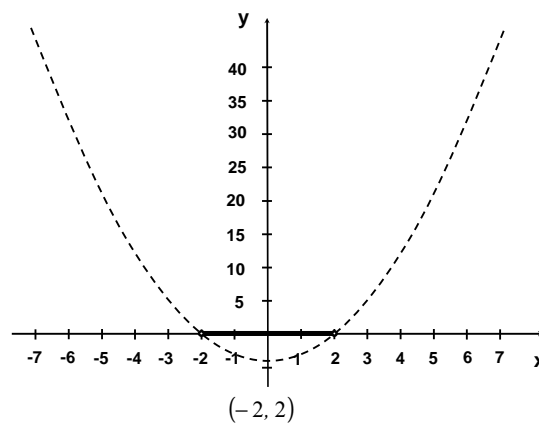
para $x = -5$ del intervalo $(-\infty, -2)$ se tiene: $(-5)^2 - 4 = 25 - 4 = 21 > 0$

para $x = 0$ del intervalo $(-2, 2)$ se tiene: $0^2 - 4 = 0 - 4 = -4 < 0$

para $x = 5$ del intervalo $(2, \infty)$ se tiene: $5^2 - 4 = 25 - 4 = 21 > 0$

El valor que cumple la desigualdad es el segundo, por lo que la solución es: $(-2, 2)$.

La gráfica de la parábola se ubica por abajo del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son menores que cero:



3) $2x^2 \geq 10x$

Solución.

$$2x^2 - 10x \geq 0$$

$$2x^2 - 10x = 0$$

$$x(2x - 10) = 0$$

Los números críticos son:

$$r_1 = 0$$

$$2x - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow r_2 = \frac{10}{2} = 5$$

los intervalos solución pueden ser: $(-\infty, 0]$, $[0, 5]$ y $[5, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $2x^2 - 10x > 0$:

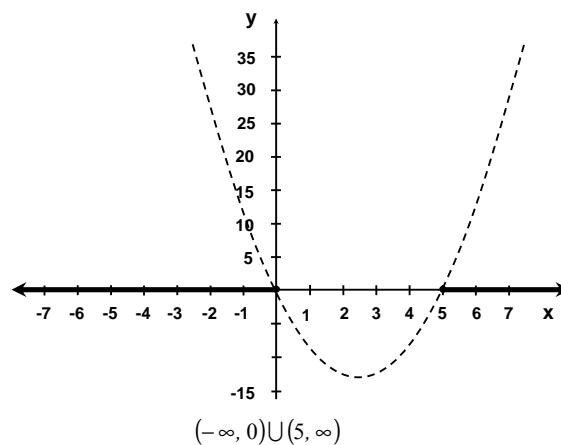
para $x = -1$ del intervalo $(-\infty, 0]$ se tiene: $2(-1)^2 - 10(-1) = 2 + 10 = 12 > 0$

para $x = 3$ del intervalo $[0, 5]$ se tiene: $2(3)^2 - 10(3) = 18 - 30 = -12 < 0$

para $x = 6$ del intervalo $[5, \infty)$ se tiene: $2(6)^2 - 10(6) = 72 - 60 = 12 > 0$

Los valores que cumplen la desigualdad son el primero y el tercero, por lo que la solución es: $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$.

La gráfica de la parábola se ubica por arriba del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son mayores o iguales que cero:



$$4) 3x^2 \leq -12x$$

Solución.

$$3x^2 + 12x \leq 0$$

$$3x^2 + 12x = 0$$

$$x(3x + 12) = 0$$

Los números críticos son:

$$r_1 = 0$$

$$3x + 12 = 0 \Rightarrow 3x = -12 \Rightarrow r_2 = \frac{-12}{3} = -4$$

los intervalos solución pueden ser: $(-\infty, -4]$, $[-4, 0]$ y $[0, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $3x^2 + 12x < 0$:

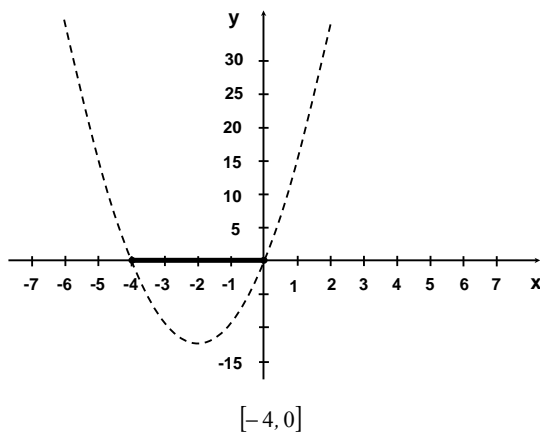
para $x = -5$ del intervalo $(-\infty, -4]$ se tiene: $3(-5)^2 + 12(-5) = 75 - 60 = 15 > 0$

para $x = -2$ del intervalo $[-4, 0]$ se tiene: $3(-2)^2 + 12(-2) = 12 - 24 = -12 < 0$

para $x = 1$ del intervalo $[0, \infty)$ se tiene: $3(1)^2 + 12(1) = 3 + 12 = 15 > 0$

El valor que cumple la desigualdad es el segundo, por lo que la solución es: $[-4, 0]$.

La gráfica de la parábola se ubica por abajo del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son menores que cero:



5) $x^2 - 8 < 2x$

Solución.

Trasponiendo términos: $x^2 - 2x - 8 < 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$a = 1, b = -2, c = -8$$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

Los números críticos son:

$$r_1 = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$r_2 = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Nótese que la ecuación también puede factorizarse y los números críticos pueden obtenerse más rápidamente:

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 4$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow r_2 = -2$$

los intervalos solución pueden ser: $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$ y $(4, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $x^2 - 2x - 8 < 0$:

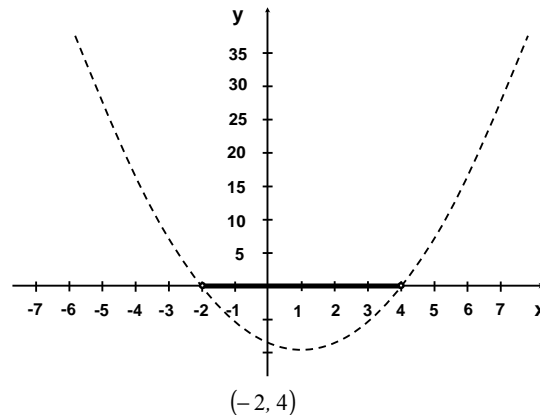
para $x = -3$ del intervalo $(-\infty, -2)$ se tiene: $(-3)^2 - 2(-3) - 8 = 9 + 6 - 8 = 7 > 0$

para $x = 0$ del intervalo $(-2, 4)$ se tiene: $0^2 - 2(0) - 8 = 0 + 0 - 8 = -8 < 0$

para $x = 5$ del intervalo $(4, \infty)$ se tiene: $5^2 - 2(5) - 8 = 25 - 10 - 8 = 7 > 0$

Por lo tanto, el valor que cumple la desigualdad es el segundo, por lo que la solución es: $(-2, 4)$.

La gráfica de la parábola se ubica por abajo del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son menores que cero:



6) $2x^2 + 4x \geq 30$

Solución.

Trasponiendo términos: $2x^2 + 4x - 30 \geq 0$

Simplificando: $x^2 + 2x - 15 \geq 0$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow r_1 = -5$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow r_2 = 3$$

los intervalos solución pueden ser $(-\infty, -5]$, $[-5, 3]$ y $[3, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $2x^2 + 4x - 30 \geq 0$:

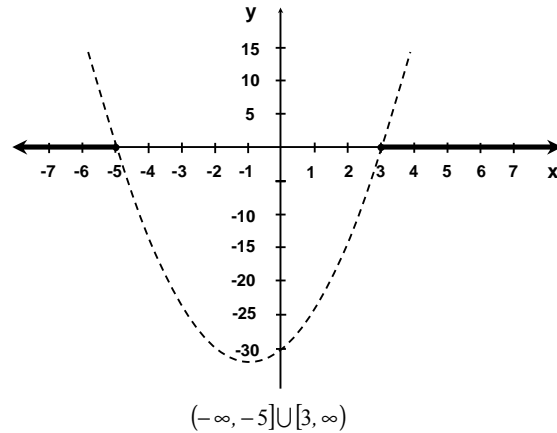
para $x = -6$ del intervalo $(-\infty, -5]$ se tiene: $2(-6)^2 + 4(-6) - 30 = 72 - 24 - 30 = 18 > 0$

para $x = 0$ del intervalo $[-5, 3]$ se tiene: $2(0)^2 + 4(0) - 30 = 0 - 0 - 30 = -30 < 0$

para $x = 4$ del intervalo $[3, \infty)$ se tiene: $2(4)^2 + 4(4) - 30 = 32 + 16 - 30 = 18 > 0$

Los valores que cumplen la desigualdad son el primero y el tercero, por lo que la solución es: $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$.

La gráfica de la parábola se ubica por arriba del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son mayores que cero:



$$7) \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x < 4$$

Solución.

$$6\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x\right) < 6(4)$$

$$x^2 + 2x < 24$$

Trasponiendo términos:

$$x^2 + 2x - 24 < 0$$

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -24$$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-24)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 10}{2} \end{aligned}$$

Los números críticos son:

$$r_1 = \frac{-2 + 10}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$r_2 = \frac{-2 - 10}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

los intervalos solución pueden ser $(-\infty, -6)$, $(-6, 4)$ y $(4, \infty)$

probando con tres números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad

$$x^2 + 2x - 24 < 0:$$

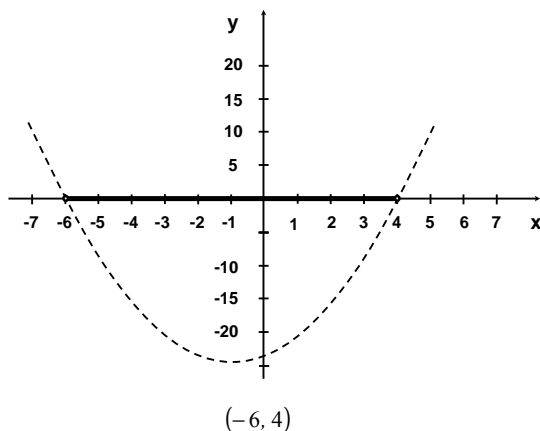
$$\text{para } x = -7 \text{ del intervalo } (-\infty, -6) \text{ se tiene: } (-7)^2 + 2(-7) - 24 = 49 - 14 - 24 = 11 > 0$$

$$\text{para } x = 0 \text{ del intervalo } (-6, 4) \text{ se tiene: } 0^2 + 2(0) - 24 = 0 - 0 - 24 = -24 < 0$$

$$\text{para } x = 5 \text{ del intervalo } (4, \infty) \text{ se tiene: } (5)^2 + 2(5) - 24 = 25 + 10 - 24 = 11 > 0$$

Por lo tanto, el valor que cumple la desigualdad es el segundo, por lo que la solución es: $(-6, 4)$.

La gráfica de la parábola se ubica por abajo del eje x en los intervalos solución de la desigualdad porque sus ordenadas son menores que cero:



$$8) 5x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x$$

Solución.

$$\text{Trasponiendo términos: } 4x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$a = 4, b = -4, c = 1$$

Sustituyendo en la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8}$$

Los números críticos son:

$$r_1 = \frac{4+0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$r_2 = \frac{4-0}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

los intervalos solución pueden ser $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

probando con dos números ubicados en esos intervalos para saber si cumplen la desigualdad $4x^2 - 4x + 1 < 0$:

para $x = 0$ del intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ se tiene: $4(0)^2 - 4(0) + 1 = 0 - 0 + 1 = 1 > 0$

para $x = 1$ del intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ se tiene: $4(1)^2 - 4(1) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1 > 0$

Ninguno de los valores que cumplen la desigualdad, por lo que no tiene solución.

Nótese como la desigualdad $4x^2 - 4x + 1 < 0$ se puede expresar como:

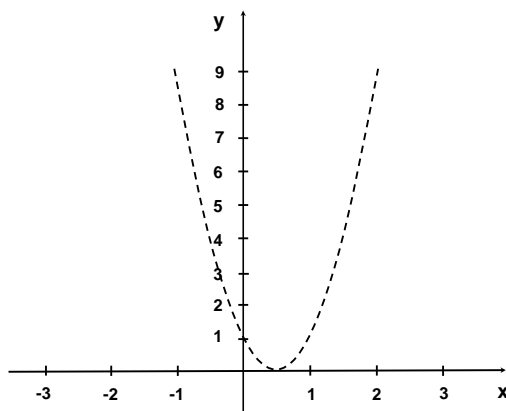
$$(2x)^2 - 2(2x) + 1 < 0$$

Factorizando:

$$(2x-1)^2 < 0$$

Puesto que el cuadrado de cualquier número real siempre es mayor o igual a cero, entonces se comprueba que esta inecuación no tiene solución.

Toda la parábola se localiza por arriba del eje x , por eso no hay solución:



$$9) -6x^2 + 8x + 1 < -3x^2 + 4x + 5$$

Solución.

Trasponiendo términos: $-3x^2 + 4x - 4 < 0$

Convirtiendo esta desigualdad a un trinomio cuadrado perfecto, se tiene:

$$-3x^2 + 4x - 4 < 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 4 > 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x > -4 \Rightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) > -4$$

$$\Rightarrow 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) > -4 + \frac{4}{3} \Rightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 > -\frac{8}{3} \Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 > -\frac{8}{9}$$

Puesto que el cuadrado de cualquier número real siempre es mayor o igual a cero, entonces se trata de una desigualdad absoluta.

Toda la parábola se localiza por abajo del eje x y su solución es cualquier número real:

