

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Definiciones

Sea K un cuerpo. Una ECUACIÓN LINEAL CON COEFICIENTES EN K es una expresión del tipo

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b,$$

en la que n es un número natural y a_1, \dots, a_n, b son elementos de K . Los elementos a_i se llaman *coeficientes*, el número b se llama *término independiente* y las variables x_i son las *incógnitas*. Cuando haya pocas incógnitas las representaremos simplemente por las letras $x, y, z, t, w, \dots, etc$. Una SOLUCIÓN de la ecuación consiste en una n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de elementos de K de forma que al sustituir cada incógnita x_i por el elemento α_i se cumple la ecuación, esto es:

$$a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n = b.$$

Se llama SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES EN K (lo escribiremos simplemente SEL para abreviar) a una familia de m ecuaciones lineales sobre K todas ellas con las mismas n incógnitas. Siempre escribiremos un SEL de forma que las incógnitas aparezcan en el mismo orden en todas las ecuaciones. Por tanto, un SEL tiene el siguiente aspecto:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Una SOLUCIÓN de un SEL es una n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de elementos de K que sean solución a la vez de todas las ecuaciones del SEL. También diremos que $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ es solución. El problema principal que abordaremos es el de determinar si un SEL tiene soluciones y, en caso afirmativo, calcularlas todas.

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican según la cantidad de soluciones que tienen. Un SEL se dice INCOMPATIBLE (SI) si no tiene ninguna solución. De lo contrario se dice COMPATIBLE (SC). Un sistema compatible puede ser:

1. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD) si tiene una única solución.

2. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI) si tiene más de una solución.

Discutir un SEL consiste en decidir de qué tipo es según la clasificación anterior. Resolver un SEL consiste en calcular todas las soluciones del SEL si las hay. Ya con una ecuación tan sencilla como $ax = b$ se manifiestan todas las opciones posibles de sistemas.

Diremos que un SEL es HOMOGÉNEO si todos sus términos independientes son iguales a cero. Es evidente que un SEL de este tipo siempre será compatible, pues se tiene por lo menos la solución $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

1.2. Sistemas escalonados

Para resolver cualquier SEL aprenderemos primero a resolver sistemas que sean especialmente sencillos. Estos son los llamados sistemas escalonados.

Diremos que un SEL es ESCALONADO si la primera incógnita de cada ecuación no aparece en ninguna de las siguientes ecuaciones.

Nota: Para que la definición anterior tenga sentido es preciso recordar que siempre escribimos un SEL de forma que las incógnitas aparezcan en el mismo orden en todas las ecuaciones. De lo contrario, un mismo SEL podría ser a la vez escalonado y no serlo. Por ejemplo, el SEL dado por:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ y = 8 \end{cases}$$

no está escalonado, mientras que el mismo SEL escrito como:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -z + y = 0 \\ y = 8 \end{cases}$$

sí cumpliría la definición de SEL escalonado. El problema es que este último SEL no está escrito según nuestro convenio y, por tanto, no tiene sentido plantearse si está escalonado o no.

Para discutir y/o resolver un SEL escalonado procedemos así:

1. Si el SEL contiene una ecuación del tipo $0x_1 + \dots + 0x_n = b$ con $b \neq 0$ entonces el sistema es incompatible. De lo contrario el SEL es compatible y pasamos al paso 2.
2. Identificamos las *incógnitas principales* y las *incógnitas secundarias* del SEL. Las principales son las que aparecen como primera incógnita en alguna de las ecuaciones del sistema. Las secundarias son las restantes. Si todas las incógnitas son principales entonces el SEL es compatible determinado. De lo contrario se trata de un SEL compatible indeterminado. Esto completaría la discusión del SEL.
3. Si no hay incógnitas secundarias entonces la única solución del SEL se calcula despejando directamente las incógnitas principales de abajo hacia arriba. En caso de que haya incógnitas secundarias, entonces se asigna a cada una de ellas un parámetro distinto, y se despejan las incógnitas principales en función de estos parámetros de abajo hacia arriba.

En particular, se deduce del procedimiento anterior que todo SEL escalonado compatible con coeficientes en un cuerpo infinito tiene una única solución o infinitas.

Como ejemplo, vamos a resolver el SEL con coeficientes reales siguiente:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ \quad +y + z = -2 \end{cases},$$

que es claramente escalonado. La variable z es secundaria mientras que x, y son principales. Por tanto, ponemos $z = \lambda$ donde λ es un parámetro real, y despejamos de abajo hacia arriba las incógnitas x, y en función de λ . Se obtiene:

$$\begin{cases} x + 3y = -5 - 2\lambda \\ \quad y = -2 - \lambda \end{cases}.$$

Sustituyendo el valor de y de la segunda ecuación en la primera, obtenemos:

$$x = -3y - 5 - 2\lambda = 6 + 3\lambda - 5 - 2\lambda = 1 + \lambda.$$

Deducimos que estamos ante un SCI con soluciones:

$$x = 1 + \lambda, \quad y = -2 - \lambda, \quad z = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente, el conjunto de soluciones del SEL se escribe como:

$$\{(1 + \lambda, -2 - \lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

1.3. Sistemas equivalentes. Método de Gauss

Diremos que dos SEL son EQUIVALENTES si tienen el mismo número de incógnitas y exactamente las mismas soluciones. Si el número de incógnitas es n , lo que queremos decir es que una n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de elementos de K es una solución del primer SEL si y sólo si lo es también del segundo.

El método de Gauss es un proceso mediante el que cualquier SEL se transforma en un SEL escalonado equivalente. De este modo, las soluciones del nuevo sistema (calculadas por el procedimiento descrito en la sección anterior) coinciden con las soluciones del SEL original.

La conversión de un SEL en otro escalonado se lleva a cabo mediante las siguientes TRANSFORMACIONES ELEMENTALES sobre el SEL:

- (I) Intercambiar el orden de dos ecuaciones cualesquiera del SEL.
- (II) Multiplicar cualquier ecuación del SEL por un elemento de K distinto de cero.
- (III) Sustituir una ecuación del SEL por el resultado de sumarle a dicha ecuación otra ecuación del SEL que ha sido previamente multiplicada por un elemento de K .

Evidentemente, debemos asegurarnos de que este tipo de transformaciones sobre el SEL no alteran las soluciones. Esto se prueba en el siguiente resultado:

Proposición: *Las transformaciones anteriormente descritas transforman un SEL en otro SEL equivalente con el original.*

Demostración: En sencilla aunque pesada de escribir. Llamemos S a un SEL dado por:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \dots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

Denotemos por $E_1, \dots, E_i, \dots, E_j, \dots, E_m$ a las ecuaciones del SEL.

Si intercambiamos dos ecuaciones de orden, por ejemplo E_i y E_j , entonces el SEL resultante S' es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & + & \dots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

que es claramente equivalente con S . Así una transformación de tipo (I) nos lleva a un SEL equivalente.

Si multiplicamos una ecuación E_i de S por un elemento $a \in K$ con $a \neq 0$, entonces el SEL resultante S' es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ (aa_{i1})x_1 & + & (aa_{i2})x_2 & + & \dots & + & (aa_{in})x_n & = & ab_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

Veamos que S es equivalente a S' . Sea $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ una solución de S . Como S y S' tienen todas las ecuaciones iguales salvo quizás la i -ésima, entonces $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es solución de todas las ecuaciones de S' salvo quizás E'_i . Pero también es solución de E'_i , pues como $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, al multiplicar esta igualdad por a , y usar la propiedad asociativa del producto en K , se llega a que $(aa_{i1})x_1 + (aa_{i2})x_2 + \dots + (aa_{in})x_n = ab_i$. Esto prueba que toda solución de S lo es también de S' . Supongamos ahora que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es una solución de S' . Al igual que antes, se sigue que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es solución de todas las ecuaciones de S salvo quizás la i -ésima. Pero también es solución de E_i , pues como $(aa_{i1})x_1 + (aa_{i2})x_2 + \dots + (aa_{in})x_n = ab_i$, al multiplicar esta igualdad por a^{-1} (que existe por ser K un cuerpo y $a \neq 0$), y usar la propiedad asociativa del producto en K , se llega a que $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$. Esto prueba que S y S' son equivalentes. De aquí se concluye que una transformación de tipo (II) nos lleva a un SEL equivalente.

Finalmente, veamos que las transformaciones de tipo (III) también conducen a un SEL equivalente. Sea S' el SEL que resulta de S cuando la ecuación E_j se sustituye por $aE_i + E_j$ con $a \in K$. Por las

propiedades distributivas en K el SEL obtenido es:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ (aa_{i1} + a_{j1})x_1 & + & (aa_{i2} + a_{j2})x_2 & + & \dots & + & (aa_{in} + a_{jn})x_n & = & ab_i + b_j \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

Sea $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ una solución de S . Como S y S' tienen todas las ecuaciones iguales salvo quizás la j -ésima, entonces $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es solución de todas las ecuaciones de S' salvo quizás de E'_j . Como $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ cumple E_i y E_j , entonces $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ y $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j$. Si multiplicamos la primera igualdad por a y la sumamos a la segunda igualdad, obtenemos justamente que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ cumple E'_j . Así, toda solución de S lo es también de S' . Recíprocamente, supongamos que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es una solución de S' . Al igual que antes, se sigue que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es solución de todas las ecuaciones de S salvo quizás de E_j . Como $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ cumple E'_i y E'_j entonces $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ y $(aa_{i1} + a_{j1})x_1 + (aa_{i2} + a_{j2})x_2 + \dots + (aa_{in} + a_{jn})x_n = ab_i + b_j$. Si multiplicamos la primera igualdad por $-a$ y la sumamos a la segunda igualdad, obtenemos justamente que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ cumple E_j . Esto prueba que S y S' son equivalentes y concluye la prueba.

El MÉTODO DE GAUSS para SEL se basa en realizar sobre el SEL tantas transformaciones de tipo (I), (II) o (III) como sea necesario hasta llegar a un SEL escalonado. Por el teorema anterior, el SEL así obtenido es equivalente con el original, por lo que al resolverlo estamos calculando exactamente las soluciones del original.

Ejemplo: Apliquemos el método de Gauss para resolver el SEL con coeficientes en \mathbb{R} dado por:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & +3y & +2z & = & -5 \\ 3x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +y & -z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

que claramente no está escalonado. Para comenzar a escalonar el SEL necesitamos eliminar la incógnita x de la segunda ecuación y de la tercera ecuación. Para ello, utilizamos transformaciones de tipo (III). Sustituimos la segunda ecuación por el resultado de sumarle la primera multiplicada por -3 . Del mismo modo, sustituimos la tercera ecuación por el resultado de sumarle la primera multiplicada por -2 . De este modo, llegamos al SEL dado por:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & +3y & +2z & = & -5 \\ & -8y & -8z & = & 16 \\ & -5y & -5z & = & 10 \end{array} \right. ,$$

que es equivalente con el original pero todavía no está escalonado, ya que la incógnita y es la primera de la segunda ecuación y de la tercera ecuación. En estos momentos observamos que los coeficientes y el término independiente de la segunda ecuación son múltiplos de -8 . De igual modo, los coeficientes y el término independiente de la tercera ecuación son múltiplos de 5 . Aplicamos transformaciones de tipo (II) para simplificar las ecuaciones segunda y tercera: dividimos la segunda ecuación por -8 y la

tercera por 5. Al hacerlo, llegamos al siguiente SEL equivalente con el original:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ y + z = -2 \\ -y - z = 2 \end{cases},$$

que sigue sin estar escalonado ya que la incógnita y es la primera de la segunda ecuación y de la tercera ecuación. Finalmente, para eliminar la incógnita y en la tercera ecuación realizamos una transformación de tipo (III): sustituimos la tercera ecuación por el resultado de sumarla con la segunda ecuación. Así llegamos a este SEL equivalente con el original:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ y + z = -2 \\ y + z = -2 \end{cases},$$

que ya está escalonado. De hecho, este sistema es precisamente el SEL escalonado que resolvimos a modo de ejemplo en la sección anterior. Deducimos que el SEL original es un SCI con soluciones:

$$x = 1 + \lambda, \quad y = -2 - \lambda, \quad z = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente, el conjunto de soluciones del SEL se escribe como:

$$\{(1 + \lambda, -2 - \lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Nota: Si un SEL con coeficientes en un cuerpo infinito es compatible indeterminado, entonces tiene infinitas soluciones. Esto se debe a que, al aplicar el método de Gauss, obtendremos un SEL escalonado equivalente y sabemos que un SCI escalonado sobre un cuerpo infinito tiene infinitas soluciones.

1.4. Expresión matricial del método de Gauss

En la práctica, uno se da cuenta de que al aplicar el método de Gauss se están escribiendo superfluamente las incógnitas: lo que de verdad importa en todo el proceso son los coeficientes del SEL y sus términos independientes. Para abreviar la escritura se suele desarrollar el método de Gauss con la ayuda de las *matrices*.

Sea K un cuerpo y $m, n \in \mathbb{N}$. Una MATRIZ de orden $m \times n$ con coeficientes en K es una colección de $m \cdot n$ elementos de K dispuestos rectangularmente en m filas y n columnas. Denotaremos a las matrices por letras mayúsculas como A, B, C, D, E . Los elementos o entradas de la matriz aparecerán en letras minúsculas y con subíndices. De este modo, toda matriz de orden $m \times n$ es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde cada a_{ij} es un elemento de K . De forma abreviada escribiremos a veces $A = (a_{ij})$. Nótese que cada elemento de A tiene dos subíndices: el primero nos indica la fila y el segundo la columna. Por ejemplo, el elemento a_{23} es el que se encuentra en la segunda fila y en la tercera columna. Diremos que dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de órdenes $m \times n$ y $m' \times n'$ son IGUALES si $m = m'$, $n = n'$ y $a_{ij} = b_{ij}$, para cualesquiera $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$.

La implementación matricial del método de Gauss tiene tres pasos:

1. Escribir la matriz ampliada del SEL.
2. Efectuar transformaciones elementales por filas hasta obtener la matriz ampliada asociada a un SEL escalonado.
3. Escribir el SEL escalonado equivalente al que se ha llegado y resolverlo.

Ejemplo: Queremos resolver el SEL dado por:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Realizamos los siguientes pasos:

1. Escribimos la matriz ampliada del SEL. En nuestro caso particular, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Nótese que cada una de las tres primeras columnas proporciona los coeficientes que acompañan a cada una de las incógnitas, mientras que la cuarta columna es la de términos independientes.

2. Realizamos sobre la la matriz ampliada tantas transformaciones elementales por filas como sea necesario hasta obtener la matriz ampliada de un SEL escalonado. En nuestro caso se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow[(-2)F_1+F_3]{(-3)F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 16 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{8}F_2]{\frac{1}{5}F_3} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

3. Escribimos el SEL obtenido y lo resolvemos. En nuestro ejemplo el SEL al que llegamos es:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ y + z = -2 \end{cases},$$

que es un SCI con soluciones:

$$x = 1 + \lambda, \quad y = -2 - \lambda, \quad z = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente, el conjunto de soluciones del SEL se escribe como:

$$\{(1 + \lambda, -2 - \lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Nota: ¿Es posible realizar transformaciones elementales *por columnas* para resolver un SEL? La respuesta es no y la razón es muy sencilla: este tipo de transformaciones no convierten un SEL dado en otro equivalente. Por ejemplo, consideremos el SEL con coeficientes reales dado por:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases},$$

que es un SCD con solución $x = y = 1$. Su matriz ampliada es:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Al multiplicar por 2 la segunda columna obtendríamos la matriz:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right),$$

que es la matriz ampliada del SEL con coeficientes reales dado por:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases},$$

que es un SCD con solución $x = 1, y = 1/2$.

Ejercicio: Discutir y resolver el siguiente SEL con coeficientes reales:

$$\begin{cases} x + 2y + s = 7 \\ y + z - 2s + t = 2 \\ 2x - y + z + 4s + t = 0 \end{cases}.$$

Ejercicio: Discutir y resolver el siguiente SEL con coeficientes complejos:

$$\begin{cases} ix + 2iy + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2ix + (i+1)z = i \end{cases}.$$

Ejercicio: Discutir y resolver el siguiente SEL con coeficientes reales:

$$\begin{cases} -4y - z = -7 \\ x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}.$$