

## **UNIDAD 11**

# **TRIGONOMETRIA**

### **Objetivo General**

Al terminar esta unidad podrás resolver ejercicios y problemas utilizando las funciones trigonométricas.

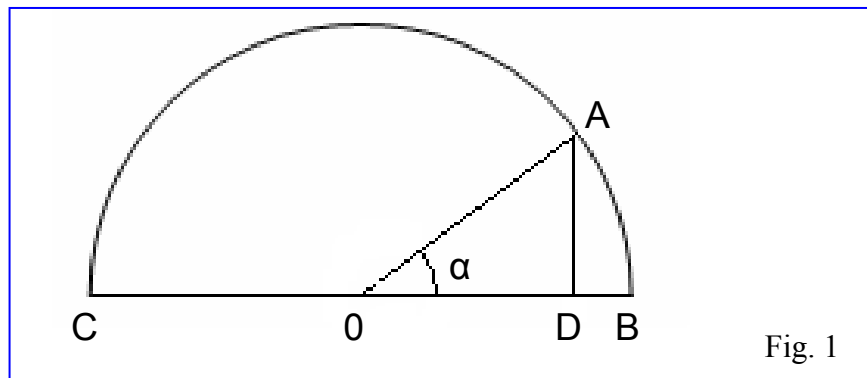
### **Objetivos específicos:**

1. Recordarás las funciones trigonométricas en los triángulos rectángulos.
2. Recordarás el uso de funciones trigonométricas en los ángulos en general.
3. Recordarás los valores de las funciones trigonométricas en ángulos usuales.
4. Recordarás el uso de grados y radianes. Utilización del círculo unitario y proyecciones.
5. Recordarás el uso de las identidades trigonométricas fundamentales.
6. Recordarás la variación de las funciones trigonométricas según al cuadrante al que correspondan los ángulos.
7. Recordarás el uso de funciones trigonométricas inversas.
8. Recordarás la ley de los senos y de los cosenos.

## 1. Recordarás las funciones trigonométricas en los triángulos rectángulos.

### Definición de las funciones trigonométricas en los triángulos.

Tracemos una semicircunferencia de radio igual a la unidad, como en La figura 1. Tomamos un punto cualquiera A de la semicircunferencia e indiquemos por  $\alpha$  el ángulo AOB. Tracemos desde el punto A la perpendicular AD al diámetro BC. Se llama seno del ángulo  $\alpha$  la longitud del segmento AD. El seno del ángulo  $\alpha$  se designa como  $\sin \alpha$ . Por definición se acepta que  $\sin 0^\circ = 0$  y que  $\sin 180^\circ = 0$ .



**El coseno del ángulo  $\alpha$**  se designa como  $\cos \alpha$ . Si el ángulo  $\alpha$  es agudo, el  $\cos \alpha$  es igual a la longitud del segmento OD. Si el ángulo  $\alpha$  es obtuso, el  $\cos \alpha$  es un número negativo cuyo valor absoluto es igual a la longitud del segmento OD. Por definición se acepta que  $\cos 0^\circ = 1$ , que  $\cos 90^\circ = 0$  y que  $\cos 180^\circ = -1$ .

Se llama tangente del ángulo  $\alpha$  a la razón del  $\sin \alpha$  y  $\cos \alpha$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

La tangente del ángulo  $\alpha$  no está definida si  $\alpha = 90^\circ$ . Las funciones  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  y  $\tan \alpha$  se llaman funciones trigonométricas del ángulo  $\alpha$ .

Teorema: Cualquiera que sea  $\alpha$  se tiene  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

### Definición de las funciones trigonométricas en los triángulos rectángulos.

Un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos es recto. Si  $\theta$  es un ángulo agudo, se puede considerar con un ángulo de un triángulo rectángulo y podemos referirnos a las longitudes de la hipotenusa, el lado opuesto y el lado adyacente.

Al introducir un sistema de coordenadas rectangulares como en la figura 2, las longitudes del lado adyacente y del lado opuesto para  $\theta$  son la coordenada de  $x$  y la coordenada de  $y$ , respectivamente, de un punto  $Q$  del lado terminal de  $\theta$ .

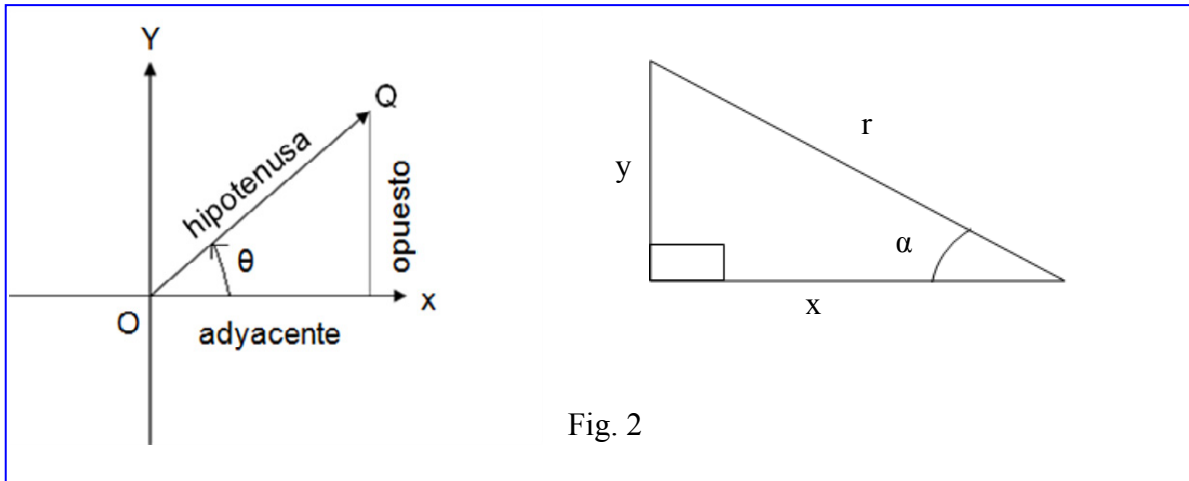


Fig. 2

Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo  $\alpha$  en un triángulo rectángulo, se definen por:

SENO.- Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

COSENO: Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\text{Cos}\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

TANGENTE: Es la razón entre los catetos opuesto y adyacente.

$$\text{Tg}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{y}{x}$$

COTANGENTE: Es la razón entre los catetos adyacente

$$\text{Ctg}\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{x}{y}$$

SECANTE.- Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

$$\text{Sec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{r}{x}$$

COSECANTE: Es la razón entre la hipotenusa al cateto opuesto.

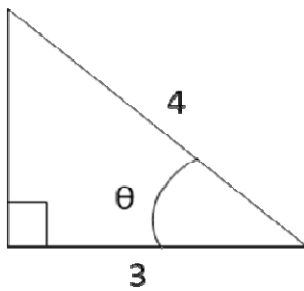
$$\text{Csc}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{r}{y}$$

### Ejemplos:

#### 1) Hallar valores de funciones trigonométricas de un ángulo agudo.

Si  $\theta$  es un ángulo agudo y  $\cos \theta = \frac{3}{4}$ , halla los valores de las funciones trigonométricas de  $\theta$ .

Comenzamos por trazar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo  $\theta$  con el cateto adyacente igual a 3 y la hipotenusa igual a 4, empleamos el teorema de Pitágoras para determinar el lado faltante.



$$3^2 + (\text{opuesto})^2 = 4^2$$

$$(\text{opuesto})^2 = 16 - 9$$

$$\text{opuesto} = \sqrt{7}$$

Al aplicar la definición de funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se obtiene:

$$\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \cos \theta = \frac{3}{4} \quad \text{csc} \theta = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\text{csc} \theta = \frac{4}{\sqrt{7}} \quad \sec \theta = \frac{4}{3} \quad \cot \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

## 2) Hallar los valores de las funciones trigonométricas de 45°.

Determina los valores de las funciones trigonométricas que corresponden a un ángulo de 45°.

Se considera un triángulo rectángulo isósceles, cuyos dos lados iguales tienen longitud 1.

Por teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa es  $\sqrt{2}$ . En consecuencia, los correspondientes a 45° son:

$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^{\circ} \qquad \tan 45^{\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{csc} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = \sec 45^{\circ} \qquad \cot 45^{\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

## 3) Hallar la altura de un asta bandera.

Un agrimensor observa que en un punto A ubicado al nivel del suelo a una distancia de 25 ft de la base B de un asta bandera, el ángulo entre el suelo y la parte superior del asta es de 30°. Calcula la altura del asta al décimo de pie más cercano.

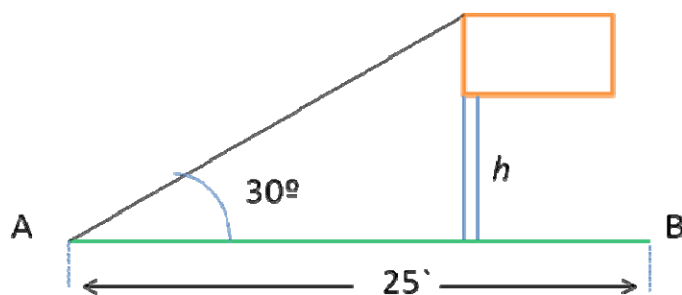


Fig a

Si la altura del asta es  $h$ , entonces, por la figura a, vemos que

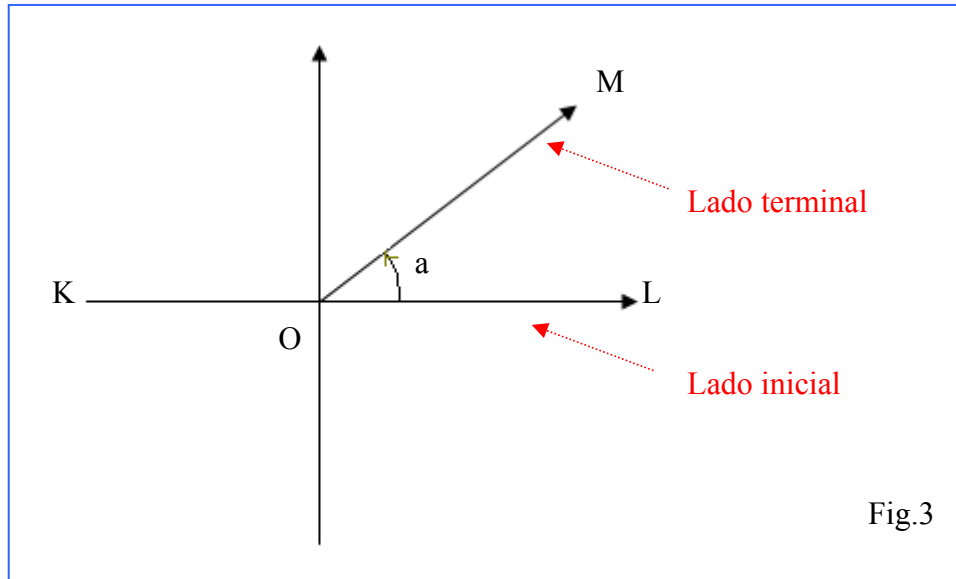
$$\tan 30^{\circ} = \frac{h}{25} \quad \text{o bien} \quad h = 25 \tan 30^{\circ}$$

Se usa el valor de  $\tan 30^{\circ}$  y hallamos  $h$ :

$$h = 25 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 14.4 \text{ ft}$$

## 2. Recordarás el uso de funciones trigonométricas en los ángulos en general.

En un ángulo de cualquier magnitud, consideremos una recta OM girando alrededor de un punto fijo “O” que pertenece también a la recta KL, ayudándonos de la figura 3.



El lado OM, desde su posición original OL da lugar a la abertura, que se denomina “ángulo a”, el lado del ángulo, a partir del cuál empieza el giro angular, se llama “lado inicial” y al lado cuyo movimiento genera al ángulo y determina su magnitud por la posición que ocupa al obtenerse el giro, recibe el nombre de “lado terminal”.

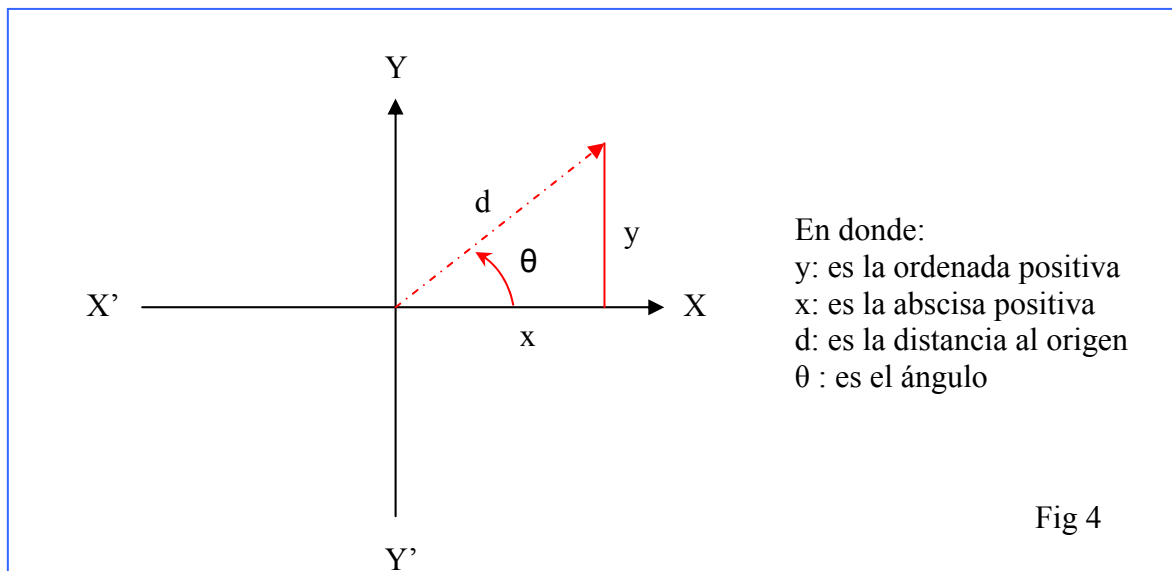
Se establece que un ángulo pertenece a un determinado cuadrante cuando su lado Terminal detiene su giro en dicho cuadrante; en el caso en que coincida con los ejes a  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y  $360^\circ$ , se establece que el ángulo es límite de dos cuadrantes.

### Ejemplos

En las siguientes figuras se representa a los ángulos que tienen su lado terminal en el primero, segundo, tercer y cuarto cuadrante; consideremos sus coordenadas horizontal y vertical, así como la distancia de un punto en el lado Terminal hacia el origen, dando lugar a la formación de un triángulo de referencia para cada ángulo.

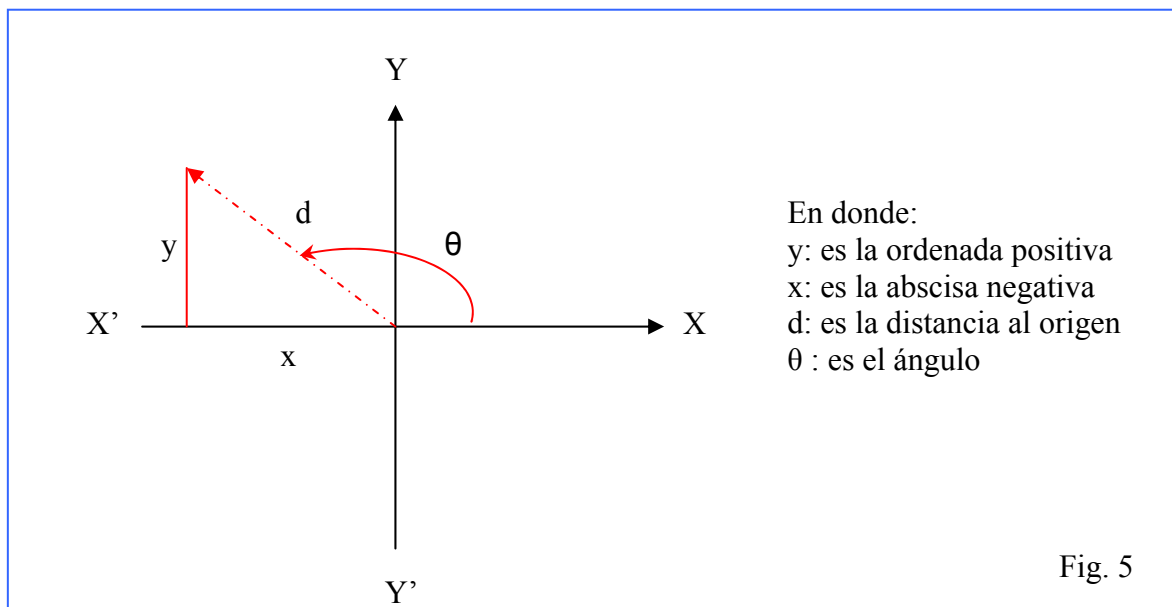
## 1) Primer cuadrante

Ver figura 4



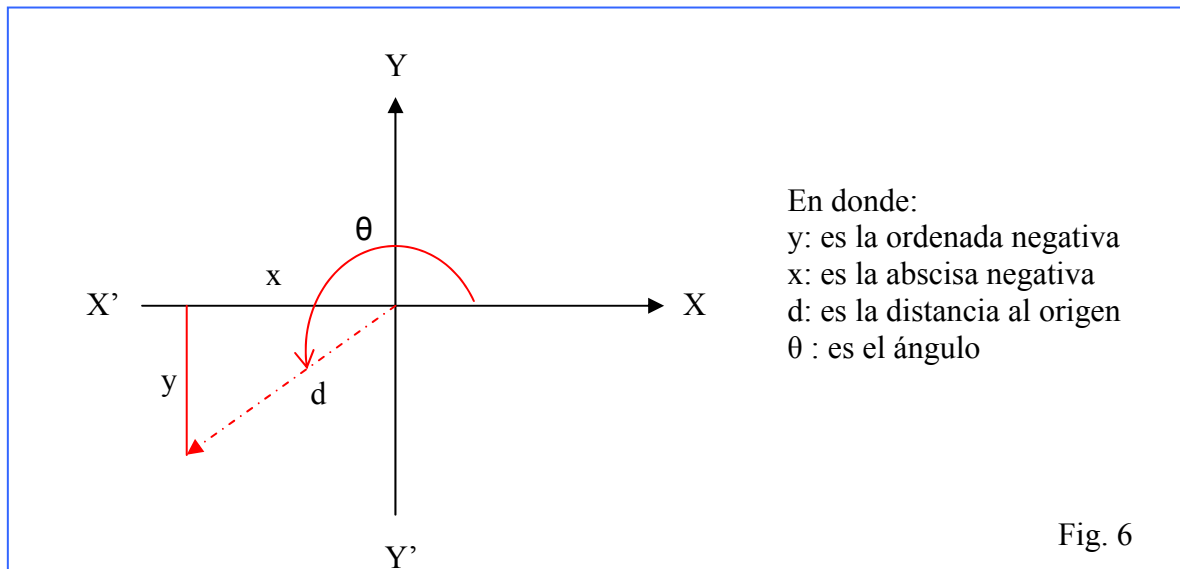
## 2) Segundo cuadrante

Ver figura 5



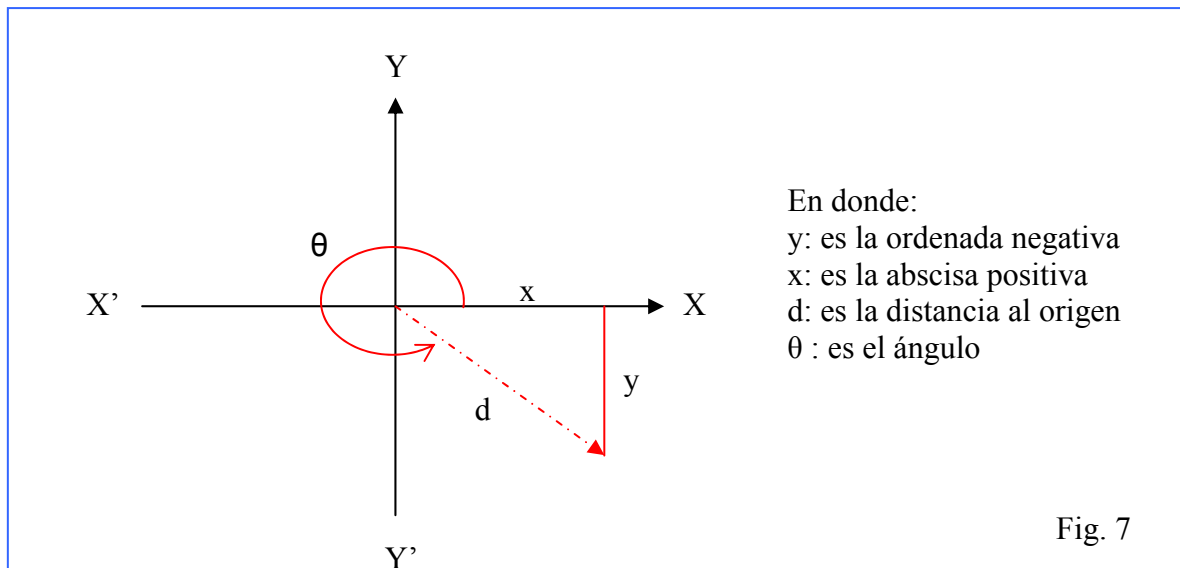
### 3) Tercer cuadrante

Ver figura 6



### 4) Cuarto cuadrante

Ver figura 7





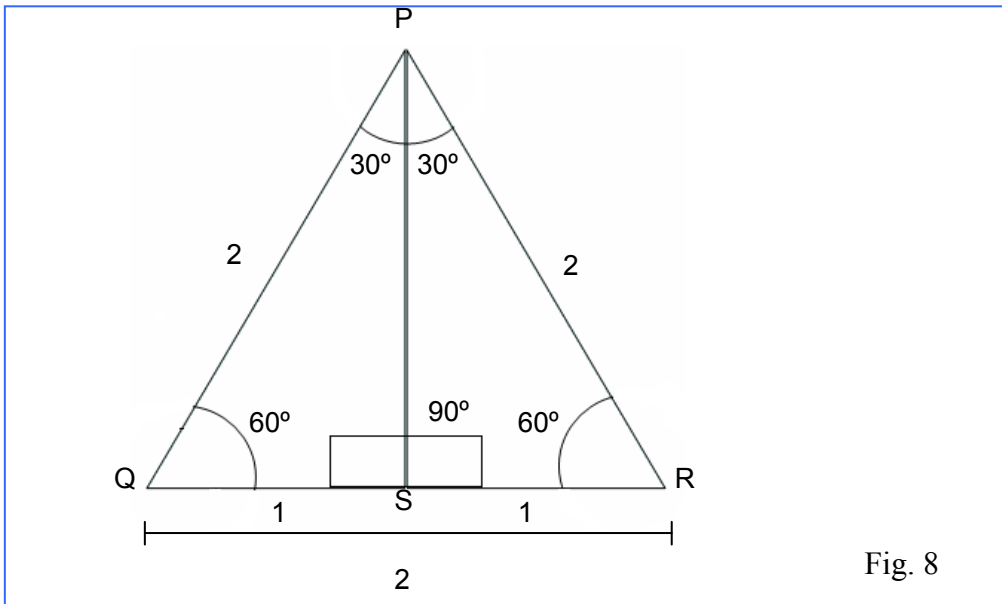
A continuación se muestra una tabla con los signos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes.

FUNCIÓN	CUADRANTES			
	I	II	III	IV
SENO	+	+	-	-
COSENO	+	-	-	+
TANGENTE	+	-	+	-
COTANGENTE	+	-	+	-
SECANTE	+	-	+	+
COSECANTE	+	+	-	-

### 3. Recordarás los valores de las funciones trigonométricas en ángulos usuales.

#### Funciones trigonométricas de ángulos notables.

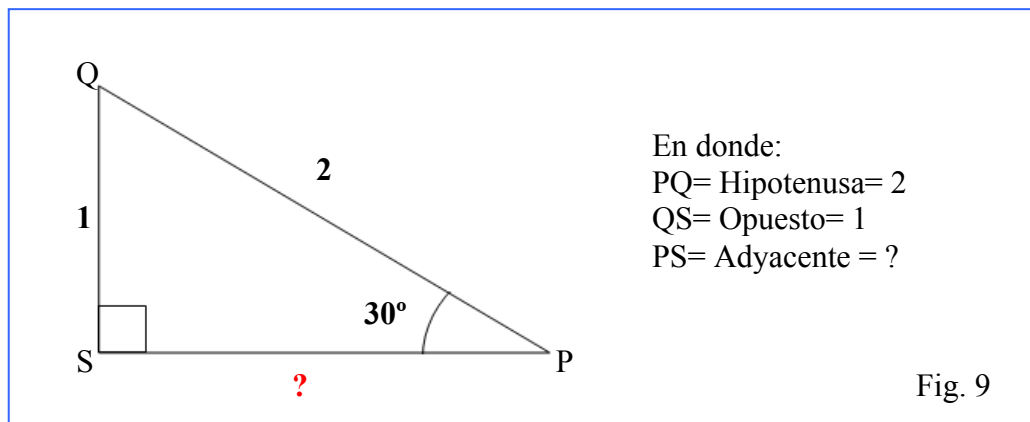
Sea  $\triangle PQR$  un triángulo equilátero que se muestra en la figura número 8, en donde la longitud de cada uno de sus lados es igual a las unidades; trazando su altura respectiva, se obtienen dos triángulos rectángulos.



#### Ejemplos:

##### 1) Obtener las funciones trigonométricas para el $\angle 30^\circ$

Tomando como referencia el triángulo (figura 9) PQS y el  $\angle 30^\circ$ , para determinar las funciones trigonométricas tenemos que:



Por Teorema de Pitágoras:

$$ADY = \sqrt{HIP^2 - OP^2}$$

$$ADY = \sqrt{2^2 - 1^2}$$

$$ADY = \sqrt{4-1}$$

$$ADY = \sqrt{3}$$

Así se obtienen las **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°**

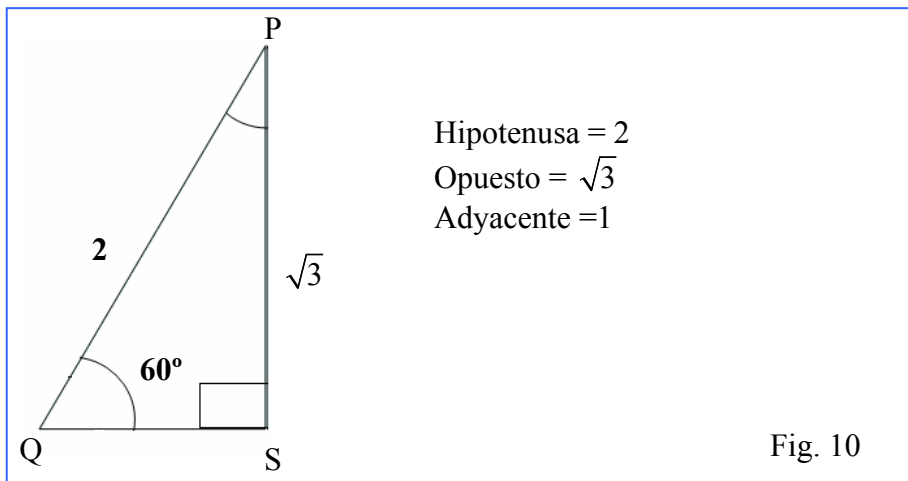
$$\text{Sen}30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{Ctg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{Cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Sec}30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{Csc}30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

## 2) Obtener las funciones trigonométricas para el ángulo de 60°

Así mismo tomando como referencia el triángulo PQS y el  $\angle 60^\circ$  vistos en la figura número 10, para determinar las funciones trigonométricas, tenemos que:



Así obtenemos las **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 60°**

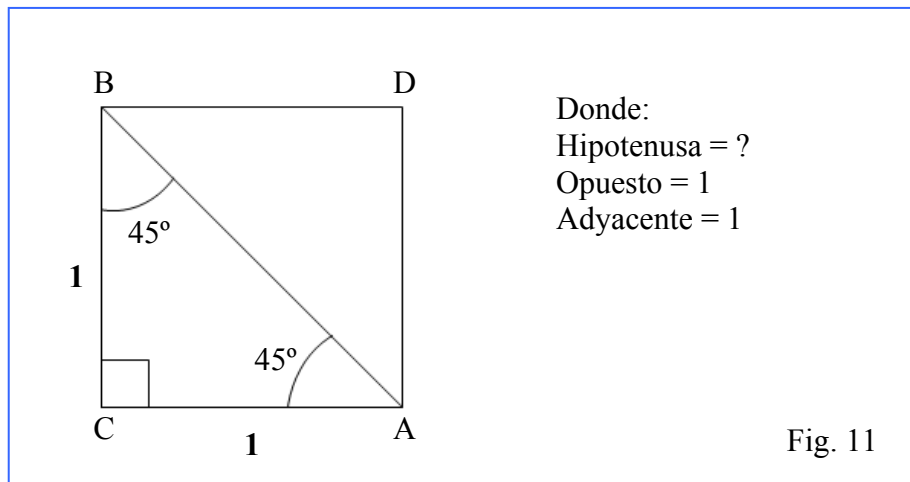
$$\text{Sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Ctg}60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Cos}60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{Sec}60^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{Tg}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \text{Csc}60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

### 3) Obtener las funciones trigonométricas para el ángulo de 45°

Para determinar los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo de 45°, se considera el triángulo ABC mostrado en la figura 11 que se forma al trazar la diagonal AB en un cuadrado de lados iguales a la unidad.



#### **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45°**

$$\text{Sen}45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ctg}45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Cos}45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Sec}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Tg}45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Csc}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

A continuación se muestran las funciones trigonométricas para los ángulos más usuales.

#### **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 150°**

$$\text{Sen}150^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ctg}150^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{Cos}150^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Sec}150^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Tg}150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Csc}150^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

### **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 210°**

$$\begin{array}{ll}\text{Sen}210^\circ = -\frac{1}{2} & \text{Ctg}210^\circ = \sqrt{3} \\ \text{Cos}210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Sec}210^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \text{Tg}210^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{Csc}210^\circ = \frac{2}{-1} = -2\end{array}$$

### **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 225°**

$$\begin{array}{ll}\text{Sen}225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{Ctg}225^\circ = 1 \\ \text{Cos}225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{Sec}225^\circ = \sqrt{2} \\ \text{Tg}225^\circ = 1 & \text{Csc}225^\circ = \sqrt{2}\end{array}$$

### **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 240°**

$$\begin{array}{ll}\text{Sen}240^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Ctg}240^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{Cos}240^\circ = -\frac{1}{2} & \text{Sec}240^\circ = -2 \\ \text{Tg}240^\circ = \sqrt{3} & \text{Csc}240^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}\end{array}$$

### **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 300°**

$$\begin{array}{ll}\text{Sen}300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{Ctg}300^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{Cos}300^\circ = \frac{1}{2} & \text{Sec}300^\circ = 2 \\ \text{Tg}300^\circ = \sqrt{3} & \text{Csc}300^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}\end{array}$$

### **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 315°**

$$\begin{array}{ll}\text{Sen}315^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{Ctg}315^\circ = -1 \\ \text{Cos}315^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{Sec}315^\circ = \sqrt{2} \\ \text{Tg}315^\circ = -1 & \text{Csc}315^\circ = \sqrt{2}\end{array}$$

## **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 330°**

$$\text{Sen}330^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ctg}330^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\text{Cos}330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Sec}330^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Tg}330^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Csc}330^\circ = -2$$

#### 4. Recordarás el uso de grados y radianes. Utilización del círculo unitario y proyecciones.

##### Sistemas de unidades empleados para medir ángulos

###### 1. Sistema Sexagesimal.

La circunferencia se divide en 360 partes llamados **grados**, el grado en 60 partes llamadas minutos y el minuto en otras 60 partes que son los segundos.

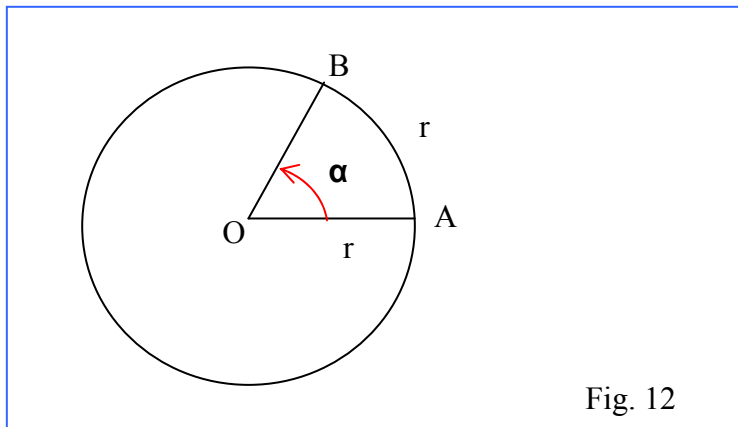
###### 2. Sistema Centesimal.

En este sistema la circunferencia se considera dividida en 400 grados, cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

###### 3. Sistema Cíclico

Llamado también circular, al igual que los anteriores tiene como base una subdivisión del círculo. Este sistema se forma y define de la siguiente manera: en una circunferencia cualquiera se señal un arco de longitud igual al radio de la circunferencia y se trazan los radios correspondientes a cada extremo del arco; el ángulo central que forman esos dos radios se llama **radián**; el radián se divide decimalmente, es decir, en décimos, centésimos, milésimos, etc.

El radián es el ángulo central subtenido por un arco igual a la longitud del radio del círculo. Se llama valor natural o valor circular de un ángulo  $\alpha$  a la razón que hay entre  $\widehat{AB}$  y el radio  $\overline{OA}$ , como se puede visualizar en la figura 12. Se expresa:  $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{\overline{OA}}$



### Ejemplos:

1) Si consideramos que  $90^\circ$  sexagesimales equivalen a 100 grados centesimales, obtener las equivalencias para grados, minutos y segundos.

$$\frac{90^\circ}{100\text{g.c.}} = \frac{9^\circ}{10\text{g.c.}} \quad \text{Para Grados}$$

$$\text{Como: } \frac{90^\circ(60')}{100\text{g.c.}(100)} = \frac{540'}{1000\text{m.c.}} = \frac{54'}{100\text{m.c.}} = \frac{27'}{50\text{m.c.}} \quad \text{Para los minutos}$$

$$\text{Como: } \frac{27'(60'')}{50\text{m.c.}(100\text{s.c.})} = \frac{162''}{5000\text{s.c.}} = \frac{81''}{2500\text{s.c.}} \quad \text{Para los segundos}$$

### Relación entre grado sexagesimal y el radián

2) Si  $2\pi$  radianes equivalen a  $360^\circ$ , ¿A cuántos grados sexagesimales equivaldrá un radián?

Establezcamos la siguiente relación.

$$\begin{array}{l} 2\pi \text{ -----} \rightarrow 360^\circ \\ 1 \text{ radián-----} \rightarrow X \text{ grados sexagesimales} \end{array}$$

Despejando, tenemos:

$$X \text{ grados sexagesimales} = \frac{(360^\circ)(1\text{radian})}{2\pi\text{radianes}} \cos^{-1} \theta$$

$$\text{Simplificando: } X = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Si establecemos la siguiente relación:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \text{ -----} \rightarrow 2\pi \text{ radianes} \\ 1^\circ \text{ -----} \rightarrow X \text{ radianes} \end{array}$$

Despejando y simplificando tenemos:

$$X\text{radianes} = \frac{(2\pi\text{radianes})(1^\circ)}{360^\circ} = \frac{\pi\text{radianes}}{180^\circ}$$

En ambas fórmulas se toma  $\pi = 3.1416$  radianes.



### 3) Obtener las equivalencias en radianes para los grados dados.

$10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{radianes}$	$80^\circ = \pi \text{radianes}$	$315^\circ = \frac{7\pi}{4} \text{radianes}$
$20^\circ = \frac{2\pi}{9} \text{radianes}$	$210^\circ = \frac{7\pi}{6} \text{radianes}$	$330^\circ = \frac{11\pi}{6} \text{radianes}$
$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{radianes}$	$225^\circ = \frac{5\pi}{4} \text{radianes}$	$360^\circ = 2\pi \text{radianes}$
$35^\circ = \frac{7\pi}{36} \text{radianes}$	$240^\circ = \frac{4\pi}{3} \text{radianes}$	$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0.0174533 \text{radianes}$
$50^\circ = \frac{5\pi}{18} \text{radianes}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{radianes}$	$1' = \frac{\pi}{10800} = 0.0002909 \text{radianes}$
	$300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{radianes}$	$1'' = \frac{\pi}{648000} = 0.000004848 \text{radianes}$

#### Definición de las funciones trigonométricas en términos de un círculo unitario.

Si  $t$  es un número real y  $P(x, y)$  es el punto del círculo unitario  $U$  que corresponde a  $t$ , entonces tenemos que:

$\sin t = y$	$\cos t = x$	$\tan t = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0$
$\csc t = \frac{1}{y} \text{ si } y \neq 0$	$\sec t = \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0$	$\cot t = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0$

Las fórmulas de esta definición expresan valores de función en términos de coordenadas de un punto  $P$  en un círculo unitario. Por esta razón, las funciones trigonométricas se llaman a veces **funciones circulares**.

## 5. Recordarás el uso de las identidades trigonométricas fundamentales.

### Identidades Fundamentales.

**Definición de Identidad Trigonométrica-** Es una igualdad algebraica entre razones de un mismo ángulo, que se cumple para cualquier valor asignado al ángulo.

**Funciones Trigonómicas recíprocas.** Dos cantidades son recíprocas si su producto es igual a la unidad.

### Ejemplos:

1) Verificar que  $\frac{2}{5}$  es un recíproco a  $\frac{5}{2}$

Tenemos que  $\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{10}{10} = 1$ , por lo tanto queda demostrado que  $\frac{2}{5}$  es recíproco a  $\frac{5}{2}$

2) Mediante el uso de identidades fundamentales y sea  $t$  un número real tal que  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ , expresar  $\text{sen } t$  en términos de  $\text{cost}$ .

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \text{tomando la identidad de Pitágoras}$$

$$\text{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \quad \text{despejando } \text{sen}^2 t$$

$$\text{sen } t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad \text{obtenemos la raíz cuadrada}$$

$$\text{sen } t = \sqrt{1 - \cos^2 t} \quad \text{sen } t > 0 \text{ si } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

3) Expresar  $\text{tant}$  en términos de  $\text{sen } t$

Tomamos la identidad fundamental  $\tan t = \frac{\text{sen } t}{\cos t}$  lo que falta es expresar  $\cos t$  en términos

de  $\text{sen } t$ . Esto se efectúa despejando  $t$  de la ecuación  $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$  y se tiene:

$$\cos t = \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \quad \text{para } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto

$$\tan t = \frac{\text{sen } t}{\cos t} = \frac{\text{sen } t}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}} \quad \text{para } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

#### 4) Deducir las fórmulas fundamentales o identidades principales.

$$\operatorname{Tg}\theta = \frac{\operatorname{Sen}\theta}{\operatorname{Cos}\theta}$$

$$\operatorname{Ctg}\theta = \frac{\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sen}\theta}$$

De  $\operatorname{Sen}^2 + \operatorname{Cos}^2 = 1$  se deduce que:

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Sen}^2\theta = 1 - \operatorname{Cos}^2\theta & & \operatorname{Cos}^2\theta = 1 - \operatorname{Sen}^2\theta \\ \operatorname{Sen}\theta = \sqrt{1 - \operatorname{Cos}^2\theta} & y & \operatorname{Cos}\theta = \sqrt{1 - \operatorname{Sen}^2\theta} \end{array}$$

Si dividimos  $\operatorname{Sen}^2 + \operatorname{Cos}^2 = 1$  por  $\operatorname{Cos}^2\theta$ , resulta  $\frac{\operatorname{Sen}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta} + \frac{\operatorname{Cos}^2\theta}{\operatorname{Cos}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\theta}$

Sustituyendo por anteriores fórmulas, como  $\operatorname{Tg}\theta = \frac{\operatorname{Sen}\theta}{\operatorname{Cos}\theta}$  y  $\operatorname{Sec}\theta = \frac{1}{\operatorname{Cos}\theta}$  resulta:

$\operatorname{Tg}^2\theta + 1 = \operatorname{Sec}^2\theta$ , de donde se deduce:

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Tg}^2\theta = \operatorname{Sec}^2\theta - 1 & & \operatorname{Sec}^2\theta = \operatorname{Tg}^2 + 1 \\ \operatorname{Tg}\theta = \sqrt{\operatorname{Sec}^2\theta - 1} & y & \operatorname{Sec}\theta = \sqrt{\operatorname{Tg}^2 + 1} \end{array}$$

De la igualdad  $\operatorname{Sen}^2 + \operatorname{Cos}^2 = 1$ , dividimos por  $\operatorname{Sen}^2\theta$ , resulta:  $\frac{\operatorname{Sen}^2\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta} + \frac{\operatorname{Cos}^2\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{Sen}^2\theta}$

Sustituyendo por fórmulas anteriores, como:  $\operatorname{Ctg} = \frac{\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sen}\theta}$  y  $\operatorname{Csc} = \frac{1}{\operatorname{Sen}\theta}$  resulta:

$1 + \operatorname{Ctg}^2\theta = \operatorname{Csc}^2\theta$  de donde se deduce:

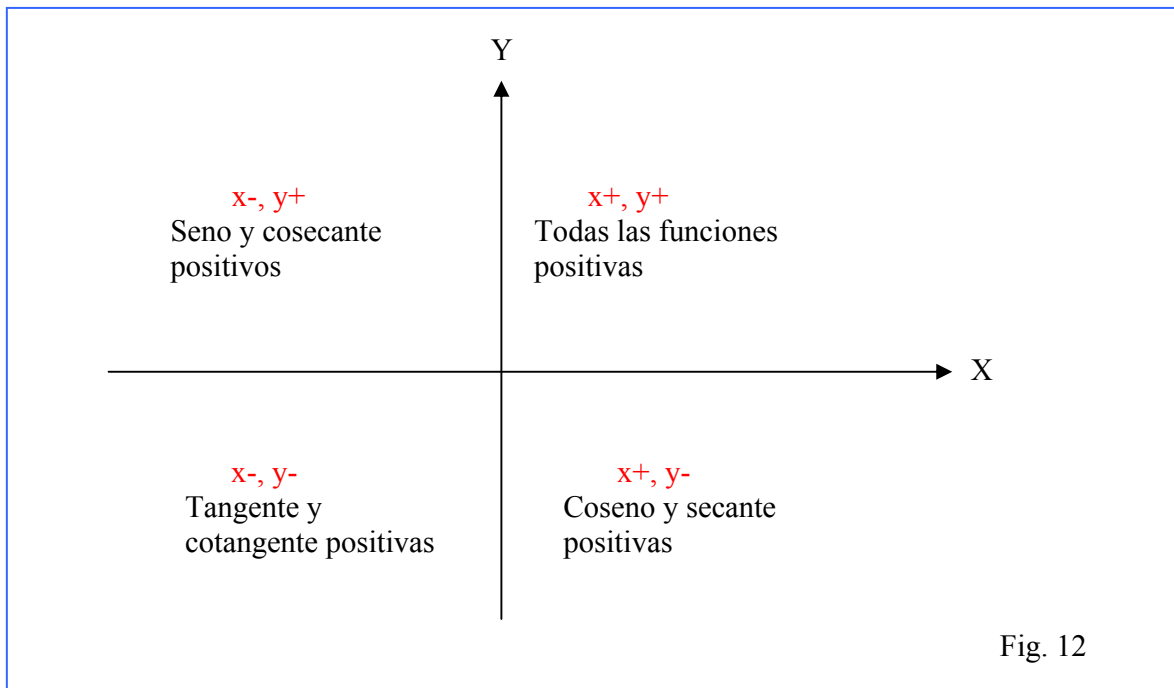
$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Ctg}^2\theta = \operatorname{Csc}^2\theta - 1 & & \operatorname{Csc}^2\theta = 1 + \operatorname{Ctg}^2\theta \\ \operatorname{Ctg}\theta = \sqrt{\operatorname{Csc}^2\theta - 1} & y & \operatorname{Csc}\theta = \sqrt{1 + \operatorname{Ctg}^2\theta} \end{array}$$

## 6. Recordarás la variación de las funciones trigonométricas según al cuadrante al que correspondan los ángulos.

Una función trigonométrica de un ángulo puede ser un número negativo, a excepción del primer cuadrante, en otros casos la abscisa, la ordenada o ambas pueden ser negativas. Es sencillo determinar en cada caso el signo algebraico de una función. Por ejemplo, puesto que en el tercer cuadrante y siempre es negativa, el seno de todo ángulo situado en ese cuadrante es negativo, dado que es igual a la razón de un número negativo a otro positivo. Análogamente, dado que  $x$  es siempre negativa en el tercer cuadrante, la tangente de todo ángulo situado a este cuadrante será positiva, puesto que es igual al cociente de dos números negativos.

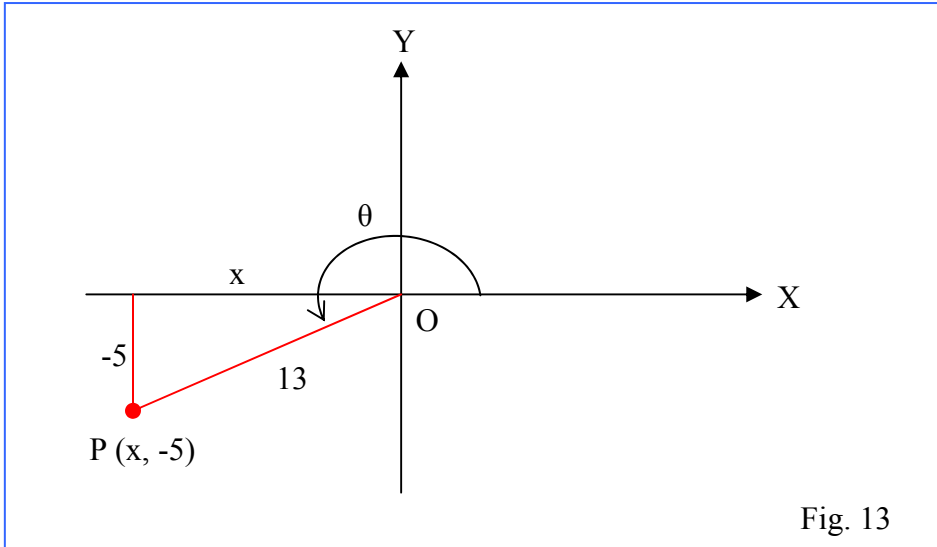
Por lo tanto se concluye que las 6 funciones trigonométricas de los ángulos situados en el primer cuadrante son todas positivas. Que las únicas funciones positivas para ángulos del segundo cuadrante son el seno y la cosecante; para el tercero, la tangente y la cotangente, y para el cuarto, el coseno y la secante.

A continuación se muestra la figura 12 con un cuadro que facilita la comprensión de lo antes explicado.



### Ejemplos:

1) Supóngase que el ángulo  $\theta$  queda en el tercer cuadrante y que el  $\operatorname{sen} \theta = -\frac{5}{13}$  (ver figura 13), encontrar todas las funciones trigonométricas.



De este valor se deduce que el lado terminal del ángulo hay un punto cuyo radio vector es 13, cuya ordenada es -5 y cuya abscisa es negativa. Si la abscisa se representa por  $x$ , entonces, de acuerdo con la relación  $x^2 + y^2 = r^2$ , resulta:

$$x^2 + (-5)^2 = 13^2$$

$$x = -12$$

Por lo tanto, los valores de las otras funciones trigonométricas, son:

$$\cos \theta = -\frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{5}{12}$$

$$\cot \theta = \frac{12}{5}$$

$$\sec \theta = -\frac{13}{12}$$

$$\csc \theta = -\frac{13}{5}$$

Si para un ángulo dado se da el valor de una de las funciones trigonométricas, pero no se indica el cuadrante en el que se halla el ángulo, existen entonces dos ángulos menores de  $360^\circ$  para los cuales el valor de la función trigonométrica dada es el mismo.

**2) Para**  $\tan \theta = \frac{3}{4}$

Habr  un ángulo  $\theta$  en el primer cuadrante cuyo punto sería (4, 3) y otro en el tercer cuadrante con coordenadas (-4, -3). De igual manera se tendrán dos valores para cada una de las otras funciones, excepto para  $\cot \theta = \frac{4}{3}$ . En cualquier caso resulta:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

y, por lo tanto }, las otras funciones serán:

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$$

$$\cot \theta = \frac{4}{3} \quad y \quad \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\sec \theta = \pm \frac{5}{4}$$

$$\csc \theta = \pm \frac{5}{3}$$

## 7. Recordarás el uso de funciones trigonométricas inversas.

Las ecuaciones

$$u = \tan \theta$$

$$\theta = \tan^{-1} u = \arctan u$$

Determinan la misma relación entre el ángulo  $\theta$  y su tangente. Si se da  $\theta$ , existe exactamente un valor correspondiente de  $u$ ; pero si se da  $u$ , entonces existe más de un valor correspondiente de  $\theta$ . De hecho, existen dos en cualquier intervalo de longitud  $2\pi$ ; en consecuencia, no existe límite en cuanto al número de valores de  $\theta$  si se da  $u$ .

### Propiedades para $\text{sen}^{-1}$

$$1) \text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = \text{sen}(\arcsen x) = x \text{ si } -1 \leq x \leq 1$$

$$2) \text{sen}^{-1}(\text{sen } y) = \arcsen(\text{sen } y) = y \text{ si } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

### Ejemplos:

#### 1) Usando las propiedades de $\text{sen}^{-1}$ , hallar al valor exacto para $\text{sen}(\text{sen}^{-1} \frac{1}{2})$

El modo difícil de encontrar el valor de esta expresión es hallar primero el ángulo  $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ ;

o sea,  $\frac{\pi}{6}$  y evaluar  $\text{sen}(\frac{\pi}{6})$ , con lo que se obtiene  $\frac{1}{2}$ . El modo fácil es usar la propiedad (1) citada anteriormente, así:

$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \text{ya que} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1$$

#### 2) Hallar el valor exacto para $\text{sen}^{-1}(\text{sen} \frac{\pi}{4})$

Puesto que  $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ , es viable utilizar la propiedad (2) a fin de obtener:

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen} \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

### 3) Hallar el valor exacto para $\text{sen}^{-1}(\text{sen} \frac{2\pi}{3})$

En este ejemplo debemos tener cuidado dado que  $\frac{2\pi}{3}$  no está entre  $-\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{\pi}{2}$ , no se puede utilizar la propiedad (2). En lugar de esto, primero se evalúa la expresión anterior,  $\text{sen} \frac{2\pi}{3}$ , y luego se aplica la definición de  $\text{sen}^{-1}$ :

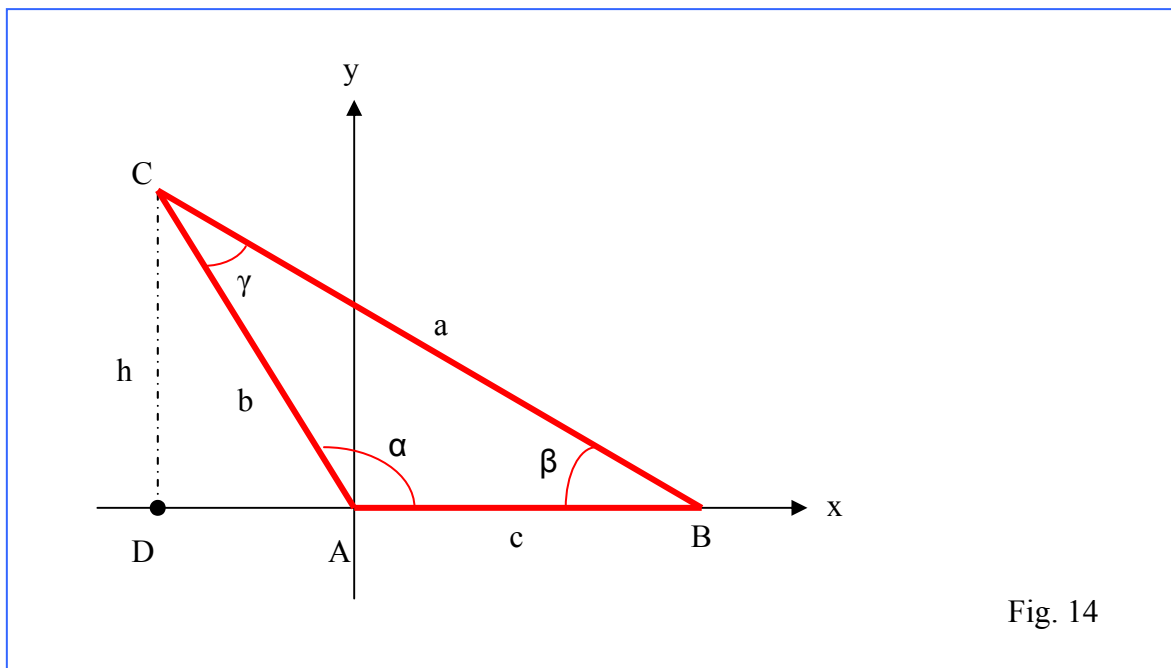
$$\text{sen}^{-1}(\text{sen} \frac{2\pi}{3}) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$



## 8. Recordarás la ley de los senos y de los cosenos.

### Ley de los senos

Un triángulo oblicuo (u oblicuángulo) es aquel que no contiene un ángulo recto. En la figura 14 del triángulo ABC, usaremos las literales A, B, C, a, b, c,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  para distinguir las partes del triángulo. Colocamos un ángulo  $\alpha$  en posición estándar, de modo que B se localice en el eje x positivo.



Considera la línea que pasa por C, paralela al eje de las y, y que corta al eje x en el punto D. Si hacemos  $d(D, C) = h$ , entonces la ordenada de C es h. De las definiciones de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, tendremos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{b} \quad y \quad h = b \text{ sen } \alpha$$

Con referencia al triángulo BDC, se ve que

$$\text{sen } \beta = \frac{h}{a} \quad y \quad h = a \text{ sen } \beta$$

En consecuencia, puedes escribir

$$b \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \beta$$

como

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b}$$

Si  $\alpha$  se pone en posición estándar con C en el eje positivo de las x, entonces, por el mismo razonamiento,

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

Las dos últimas igualdades nos dan el siguiente resultado:

Ley de los senos: Si ABC es un triángulo oblicuo con los ángulos y lados marcados en la forma acostumbrada, entonces:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

Se deduce que la ley de los senos se puede usar para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuo siempre que se conozca cualquiera de dos puntos.

### Ejemplos:

**1) Usar la ley de los senos ALA (dos ángulos y cualquier lado): Dado un triángulo ABC con  $\alpha = 48^\circ$ ,  $\gamma = 57^\circ$  y  $b = 47$ , calcula las partes restantes.**

Veamos la figura 15. Como la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ ,

$$\beta = 180^\circ - (57^\circ + 48^\circ) = 75^\circ$$

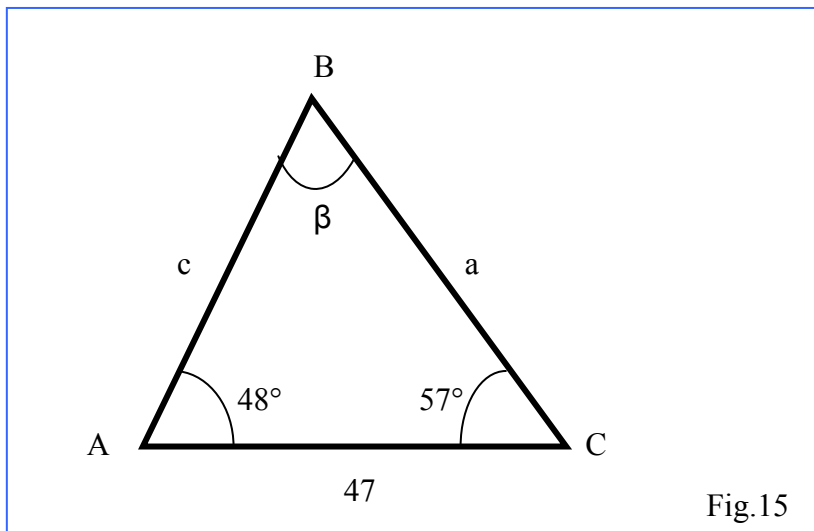


Fig.15

Dado que se conoce el lado b y los tres ángulos, se puede encontrar a usando la fórmula de la ley de los senos donde intervengan a,  $\alpha$ , b y  $\beta$ :

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \quad \text{ley de los senos}$$

$$a = \frac{b \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta} \quad \text{despejar } a$$

$$= \frac{47 \text{ sen } 48^\circ}{\text{sen } 75^\circ} \quad \text{sustituir por } b, \alpha \text{ y } \beta$$

$$\approx 36 \quad \text{calcular al entero mas cercano}$$

Para hallar  $c$ , basta sustituir  $c = \frac{a}{\sen \alpha}$  con  $\frac{c}{\sen \gamma}$  de la solución precedente con  $a$ , con la que resulta

$$c = \frac{b \sen \gamma}{\sen \beta} = \frac{47 \sen 57^\circ}{\sen 75^\circ} \approx 41$$

**2) Usar la ley de los senos LLA (dos lados y un ángulo): Calcular las partes del triángulo ABC con  $\alpha = 67^\circ$ ,  $a = 100$  y  $c = 125$**

Dado que se conocen  $\alpha$ ,  $a$  y  $c$ , se pueden encontrar  $\gamma$  con la fórmula de la ley de los senos en donde aparece  $a$ ,  $\alpha$ ,  $c$  y  $\gamma$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sen \gamma}{c} &= \frac{\sen \alpha}{a} && \text{ley de los senos} \\ \sen \gamma &= \frac{c \sen \alpha}{a} && \text{despejar } \sen \gamma \\ &= \frac{125 \sen 67^\circ}{100} && \text{sustituir por } c, \alpha \text{ y } a \\ &\approx 1.1506 \end{aligned}$$

Como  $\sen \gamma > 1$ , no se puede construir un triángulo con las partes dadas.

### Ley de los cosenos

Cuando se dan cualquiera de los siguientes casos utilizamos la ley de los cosenos

- 1) Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)
- 2) Tres lados (LLL)

Ley de los cosenos: Si ABC es un triángulo marcado en la forma acostumbrada, entonces:

$$1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$3) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

### 3) Demostrar la primera fórmula para la ley de los cosenos.

Dado el triángulo ABC (ver figura 16), pongamos el ángulo  $\alpha$  en posición estándar. Se ha dibujado  $\alpha$  como obtuso, pero el análisis también es válido si  $\alpha$  es agudo.

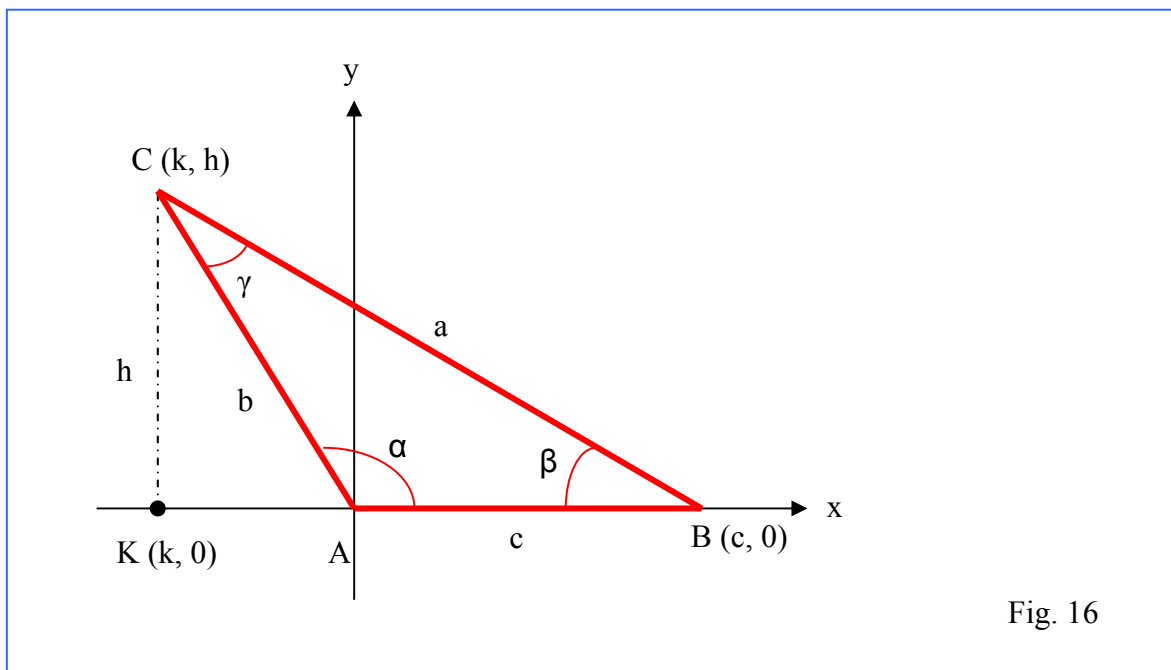


Fig. 16

Se considera la línea que pasa por C, paralela al eje y y cortando al eje x en el punto K(k, 0). Si hacemos  $d(C, k) = h$ , entonces C tiene coordenadas (k, h). Por la definición de funciones trigonométricas de cualquier ángulo:

$$\cos \alpha = \frac{k}{b} \quad y \quad \sin \alpha = \frac{h}{b}$$

Al despejar k y h se obtiene

$$k = b \cos \alpha \quad y \quad h = b \sin \alpha$$

Como el segmento AB tiene longitud c, las coordenadas de B son (c, 0) y obtenemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= [d(B, C)]^2 = (k - c)^2 + (h - 0)^2 && \text{formula de la distancia} \\ &= (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2 && \text{sustituir con k y h} \\ &= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \sin^2 \alpha && \text{elevar al cuadrado} \\ &= b^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{factorizando} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha && \text{por identidad de Pitagoras} \end{aligned}$$

Nuestro resultado es la primera fórmula expresada en la ley de los cosenos. Las fórmulas segunda y tercera se pueden obtener al poner  $\beta$  y  $\gamma$ , respectivamente, en posición estándar en un sistema coordenado.