TechX-Linear Algebra
线性代数预习材料

机器学习入门

线性方程(Linear Equations)

- 何为线性方程？
  - 线性方程又为一次方程式(未知数次数为1)
  - 一个未知数: 未知数x因变量y的关系是y=2x+1
  - 未知数可以有多个: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $-2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0$, or $-x_1 + 2x_3 = -7$
  - 线性方程的一般形式:
    - $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + \ldots + c \cdot x_n + d = 0$ (a,b,…,c为系数; $x_1, x_2, \ldots, x_n$为未知数)
    - 线性方程的解集在坐标系中表示为一个超平面(hyperplane); 例如, 直线就是线性方程的一种可能解集在坐标系的表现形式

  - 因为超平面是一个复杂的概念, 所以在这里我们的所有例子都会围绕直线来进行; 大家可以先记住这些知识点:
    - 点(point)是在一维的超平面
    - 线(line)是在二维的超平面
    - 面(plane)是在三维的超平面

线性方程组(System of Linear Equations)

- 两个或以上线性方程可以构成线性方程组
- 线性方程组可以有
  - 0个解
    - 所有超平面(hyperplane)平行, 比如平行的两条直线, 平行的两个面
  - 1个解
    - 所有超平面(hyperplane)相交于一点, 比如相交于一点的两条直线, 注意: 两个平面无法相交于一点, 因为平面作为线性方程组的解集代表着无限解
  - 无限解
    - 所有超平面重合或相交
      - 比如, 两条或多条直线重合
      - 比如, 两个或多个平面相交
- 举例: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = -7 \end{cases}$

矩阵(Matrix)

- 何为矩阵
  - 矩阵(更准确地说是复数矩阵)是一个长方形形状的数组, 由行和列组成
  - 比如: 右侧的矩阵A由三列不同的数组组成:

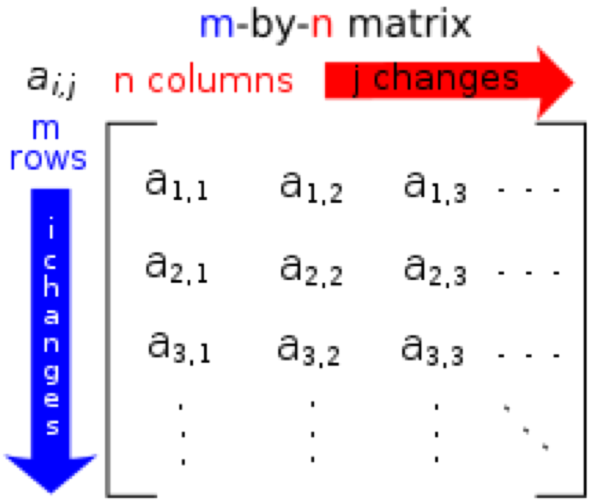
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - 但我们也可以说, 矩阵A由三行不同的数组组成:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 矩阵的表示
  - 矩阵A的每一个元素都可以用”坐标”的形式来表示
  - 比如: 右侧矩阵的第一个元素“**1**”位于第一行第一列, 表示做$\boldsymbol{a_{1,1}}$, 这里$\boldsymbol{a}$**是一种习惯性**用法, 代表位于此的矩阵元素
- 若矩阵的行、列数相等, 则我们称这个矩阵为”方阵(square matrix)”;
  你可以理解为: 之所以有这个名称是因为这样的矩阵像个正方形
- 我们可以将矩阵看成数组, 也可以将矩阵看作**线性方程的另一种表现形式**



矩阵(Matrix)-线性方程组的另一种表现形式

假如, 我们有一个像这样的线性方程组:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 3 \\ -2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 = 0 \\ -1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 = -7 \end{cases}$$

我们可以将ta写成这样的式子:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

矩阵A　向量x　向量b

若让矩阵为A, 第一个向量为x, 第二个向量为b, 则:

$$Ax = b$$

我们还可以把这个线性方程组写成增广矩阵(Augmented Matrix)

$$Ax = b \longrightarrow \{A|b\}$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right\}$$

为了简便(懒), 我们用竖线代表由未知数组成的向量

线性方程组求解-高斯消元法(Gaussian Eliminations)

- 高斯消元法基于基本行运算的性质
- 何为基本行运算(Elementary Row Operations):
  - 1. 交换两个方程式的位置(Swap two equations)
  - 2. 方程式乘以任意常数,或扩大这个方程式任意非零数倍(Multiply the equations by a nonzero constant)
  - 3. 将一个方程式的倍数与另一方程式相加(Add a multiple of one equation to another)
- 基本行运算的性质: 对于线性方程组的基本行运算(Elementary Row Operations)不会改变方程组的解

线性方程组求解-高斯消元法(Gaussian Eliminations)

当线性方程组由n个方程组成, n个未知数, 我们可以将方程组写成一个方阵(square matrix)。
求解方阵时, 我们的目标是通过基本行运算将矩阵转化为特定的形式, 也就是单位矩阵。

$$\{A|b\} \xrightarrow{\text{EROs}} \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & b \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{array}\right\}$$

*这是一种特殊矩阵: 单位矩阵 (Identity Matrix)

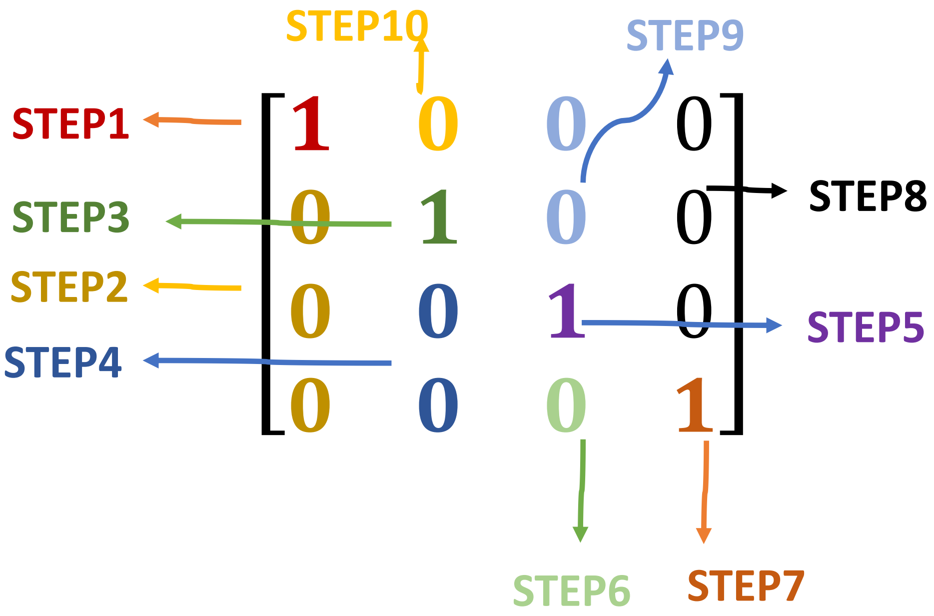
***后面会讲到*

*EROs: Elementary Row Operations(基本行运算)

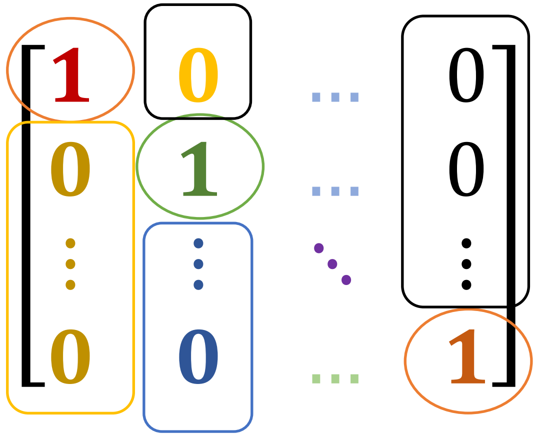
高斯消元法(Gaussian Eliminations)

- 在使用消元法时我们通常将方程组写为增广矩阵(Augmented Matrix): $\{A|b\}$
- 我们想要尝试通过消元法转化为一种特殊形式: $\{A|b\} \xrightarrow{\text{EROs}} \left\{\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \end{array}\right\}$
- 线性方程求解一般步骤:

假设矩阵A是4×4,当转化A为单位矩阵时, 每一步尝试将特定位置的数字转化为单位矩阵中相对应的数字。
简便的转化顺序是这样:



如果是一个一般形式的矩阵, 记住这个次序:
先 变"1"
再 变"1"下面的"0"
当你把所有"1"下面的数字都变为"0"时:
后 变"1"上面的"0"



高斯消元法演示(Gaussian Eliminations)

如下是消元法的演示, R1=the 1st Row, R2=the 2rd row, ..., etc.

Step 1: 因为$a_{1,1}$已经是1, 因此我们想要将$a_{2,1}$& $a_{3,1}$ 转化为0

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right\} \xrightarrow[R3+R1]{R2+2R1} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right\}$$

高斯消元法演示(Gaussian Eliminations)

Step 2: 我们想要将$a_{2,2}$转化为1

$$
\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right\}
\xrightarrow[\text{R3+R1}]{\text{R2+2R1}}
\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right\}
\quad
\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right\}
$$

高斯消元法演示(Gaussian Eliminations)

Step 3: 我们想要将$a_{3,2}$转化为0

$$\left\{\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\-2&4&6&0\\-1&0&2&-7\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{R3+R1}]{\text{R2+2R1}}\left\{\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&6&8&6\\0&1&3&-4\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&3&-4\\0&6&8&6\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{R3-6R2}}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&3&-4\\0&0&-10&30\end{array}\right\}$$

高斯消元法演示(Gaussian Eliminations)

Step 4: 我们想要将$a_{3,3}$转化为1

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{R3+R1}]{\text{R2+2R1}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{R3-6R2}}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{R3/-10}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\}$$

进行到这里我们得到x_3 = -3, 因为 $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -3$

通过回代(back substitution)我们可以得到x_1, x_2

但是我们可以继续进行消元法去得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 从而直接得到所有解

我们称之后的步骤为高斯对角消除

通过高斯对角消除, 我们可以从最后的矩阵直接得到x_1 x_2 x_3

高斯对角消除演示(Gaussian Diagonal Elimination)

Step 5: 我们想要将$a_{1,3}$ $a_{2,3}$ 转化为0

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{R3+R1}]{\text{R2+2R1}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{R3-6R2}}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{R3/-10}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{R2-3R3}]{\text{R1-R3}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\}$$

高斯对角消除演示(Gaussian Diagonal Elimination)

Step 6: 我们想要将$a_{1,2}$ 转化为0

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -7 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{R3+R1}]{\text{R2+2R1}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{R3-6R2}}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{R3/-10}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{R2-3R3}]{\text{R1-R3}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{-R2+R1}} \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\}$$

这就是答案啦!
你能看出来x_1 x_2 x_3分别是什么吗? 看不出来没有关系,
下一页告诉你 ☺

高斯对角消除演示(Gaussian Diagonal Elimination)

记得在之前的slides我们讲过
矩阵是线性方程组的一种表现形式

所以:

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{1}\cdot x_1 + \mathbf{0}\cdot x_2 + \mathbf{0}\cdot x_3 = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}\cdot x_1 + \mathbf{1}\cdot x_2 + \mathbf{0}\cdot x_3 = \mathbf{5} \\ \mathbf{0}\cdot x_1 + \mathbf{0}\cdot x_2 + \mathbf{1}\cdot x_3 = \mathbf{-3} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

☺

矩阵加减法(Matrix Addition/Subtraction)

- 矩阵加减法要求被操作的矩阵有相同的维度-行列数相同

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- 举例: $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{1+1} & \mathbf{2+2} \\ \mathbf{3+2} & \mathbf{4+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{1-1} & \mathbf{2-2} \\ \mathbf{3-2} & \mathbf{4-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$

矩阵乘法-矩阵✖矢量(Multiply Matrix by a Scalar)

- 如果C是一个矢量(scalar), A是一个矩阵, 那么$C \cdot A$的每一项就是$C(a_{i,j})$, 这里 $a_{i,j}$ 代表矩阵A的每一个元素
- 举例: $C = \pi, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
- $C \cdot A = \pi \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\pi & 2\pi & 3\pi \\ 4\pi & 5\pi & 6\pi \end{bmatrix}$

矩阵乘法-矩阵✖向量(Multiply Matrix by a Vector)

方法一：点乘(dot product)

若$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1} \\ \overrightarrow{a_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_n} \end{bmatrix}$, $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ax} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a_1} \cdot x_1 \\ \overrightarrow{a_2} \cdot x_2 \\ \vdots \\ \overrightarrow{a_n} \cdot x_\mathrm{n} \end{bmatrix}$, 这里$a_{1,\ldots,}a_n$是行向量$(row\ vector)$

举例:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \end{bmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} \mathbf{1}x_1 + \mathbf{3}x_2 + \mathbf{5}x_3 + \mathbf{7}x_4 \\ \mathbf{2}x_1 + \mathbf{4}x_2 + \mathbf{6}x_3 + \mathbf{8}x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{3} \cdot 0 + \mathbf{5} \cdot 0 + \mathbf{7} \cdot -1 \\ \mathbf{2} \cdot 2 + \mathbf{4} \cdot 0 + \mathbf{6} \cdot 0 + \mathbf{8} \cdot -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2+0+0-7} \\ \mathbf{4+0+0-8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} \\ \mathbf{-4} \end{bmatrix}$$ ☺

矩阵乘法-矩阵✖向量(Multiply Matrix by a Vector)

方法二: 列的线性组合(linear combination of columns)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot -1 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 + 0 - 7 \\ 4 + 0 + 0 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$ ☺

矩阵乘法-矩阵✖矩阵(Matrix Multiplication)

- 矩阵A是m行p列(m-by-p), 矩阵B是p行n列(p-by-n)
- 当矩阵A的列数等于矩阵B的行数时两个矩阵可以相乘

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\\2 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}$$

举例:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\\2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 2} & \mathbf{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot -1}\\ \mathbf{4\cdot 1+5\cdot 0+6\cdot 2} & \mathbf{4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot -1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{5}\\ \mathbf{16} & \mathbf{17}\end{bmatrix}$$

☺

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\\2 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}$$

单位矩阵(Identity Matrix)

- 何为单位矩阵
  - 单位矩阵是一个方阵, 从左上角沿着对角线至右下角上的元素为1,其余元素都为0
- 符号
  - 我们通常用”I”来代表单位矩阵
- 性质
  - 单位矩阵好比数字乘法中的”1”,1乘以任何数都是1,同样单位矩阵乘以任何矩阵得到原矩阵

举例:

若A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathrm{AI} = \mathrm{IA} = \mathrm{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

矩阵求逆(Matrix Inverse)

- 逆矩阵定义
  - 若$A \cdot B = I$(Identity Matrix), 则B与A互为逆矩阵, B写作A^{-1}, A写作 B^{-1}
- 求解逆矩阵
  - 若一个矩阵C有与之互逆的矩阵, 我们说C是可逆的, 反之, C不可逆
  - 只有方阵(square matrix)是*有可能*可逆的(invertible),所有*非*方阵的矩阵*没有*逆矩阵
  - 方阵*有可能*是可逆(invertible/non-singular)*或*不可逆的(non-invertible/singular)

- 当矩阵的维度是2-by-2时
  - $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

- 当矩阵的维度更为复杂时
  - 我们可以用基本行运算(EROs)去找逆矩阵

*EROs: Elementary Row Operations

矩阵求逆(Matrix Inverse)

*I_n 代表着维度为 n 的单位矩阵

比如: 若n=3, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 已知方阵A(n-by-n), 若A^{-1}存在则$A \cdot A^{-1}$=I_n
- $\{A|I_n\} \xrightarrow{\text{EROs}} \{I_n|A^{-1}\}$

为什么呢?

在之前的slides我们讲过增广矩阵可以写成这种形式: $\{A|b\} \Longrightarrow Ax = b$

所以 $\{A|I_n\}$ 可转化为 $Ax = I_n$

等号两边在同方位(同左或同右)乘以同一矩阵 x不变: $A^{-1}Ax = A^{-1}\, I_n$

因为$A^{-1}A = I_n$ $\quad I_n x = A^{-1}\, I_n$

因为$A^{-1}\, I_n = A^{-1}$ $\quad I_n x = A^{-1}$

所以 $\{A|I_n\} \longrightarrow \{I_n|A^{-1}\}$

矩阵求逆(Matrix Inverse)

- $\{A|I_\mathrm{n}\} \xrightarrow{\text{EROs}} \{I_\mathrm{n}|A^{-1}\}$

- 求解逆矩阵时,通过基本行运算,我们把增广矩阵中左边的矩阵转化为单位矩阵, 那么此时右边的矩阵就是我们想要的逆矩阵

举例:

$$(A|I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{-3R1+R2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R2/-2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{-2R2+R1}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

☺

矩阵行列式(Matrix Determinant)

- 所有不可逆矩阵的行列式值都为0
- 已知矩阵A可逆, 那么A的行列式写作$|A|$或$\det(A)$
- 求解可逆矩阵的行列式
  - 2×2矩阵的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\boxed{\boldsymbol{ad - bc}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{ad - bc}$ =
det(A)

矩阵行列式(Matrix Determinant)

- 所有不可逆矩阵的行列式值都为0
- 已知矩阵A可逆, 那么A的行列式写作$|A|$或$\det(A)$
- 求解可逆矩阵的行列式
  - 2×2矩阵的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\boxed{\boldsymbol{ad-bc}}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{ad-bc}$ = **det(A)**

偶数位矩阵为负

奇数位矩阵为正

  - 3×3矩阵的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad |A| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ d & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ g & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} & c \\ \boldsymbol{d} & e & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & h & \boldsymbol{i} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & f \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & i \end{bmatrix}$$

转置矩阵 (Matrix Transpose)

- A的转置矩阵(transpose)写作A^T
- A(n-by-m)的横行(rows)是转置矩阵A^T的列行(columns)
  - Mathematically, ${A^T}_{\mathrm{ij}} = A_{ij}\ for\ 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$

举例:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- 转置矩阵的性质:
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(rA)^T = rA^T$, where r is a scalar
  - $(AB)^T = B^T A^T$

Reference

- Boundless. “Boundless Algebra.” *Lumen*, courses.lumenlearning.com/boundless-algebra/chapter/introduction-to-matrices/.
- “Matrix Addition.” *Wikipedia*, Wikimedia Foundation, 31 Mar. 2020, en.wikipedia.org/wiki/Matrix_addition.