预习微积分部分练习答案

TechX 人工智能与机器学习课程筹备组

1. 令函数 f 定义为 $f(x)=e^{2x}+\sin\big(x^2\big)$。求 f 的二阶导数表达式。

   解：首先我们需要求出 f 的一阶导数 f'，请注意链式法则的使用：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=f'(x)&=\big(e^{2x}\big)'+\big(\sin\big(x^2\big)\big)'\\&=e^{2x}\cdot(2x)'+\cos\big(x^2\big)\cdot\big(x^2\big)'\\&=2e^{2x}+2x\cos\big(x^2\big)\end{aligned}$$

   接着，我们再根据 f' 求出二阶导数 f''，注意此时不仅需要用到链式法则，还需要用到乘法法则：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)=f''(x)&=\big(2e^{2x}\big)'+\big(2x\cos\big(x^2\big)\big)'\\&=2\big(e^{2x}\big)'+(2x)'\cdot\cos\big(x^2\big)+(2x)\cdot\big(\cos\big(x^2\big)\big)'\\&=4e^{2x}+2\cos\big(x^2\big)+2x\cdot\big(-\sin\big(x^2\big)\big)\cdot\big(x^2\big)'\\&=\boxed{4e^{2x}+2\cos\big(x^2\big)-4x^2\sin\big(x^2\big)}\end{aligned}$$

2. 令多元函数 f 定义为 $f(x_1,x_2)=2e^{2x_1}+3x_1x_2+\sin\big(x_2^2\big)$。求 f 对于变量 x_1 的偏导数。

   解：此题与第一题难度相差不大，只是要记住在求对于 x_1 的偏导数时，x_2 这个变量即可看作一个常量。例如，在求 $3x_1x_2$ 对于 x_1 的偏导数时，我们将 x_2 视作与 3 性质一样的常量，从而得出偏导数为 $3x_2$；而像是 $\sin\big(x_2^2\big)$ 这样只含 x_2 的项则如同常数项一样在求偏导后变为 0。因此，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1,x_2)=4e^{2x_1}+3x_2+0=\boxed{4e^{2x_1}+3x_2}$$

3. 令多元函数 f 定义为 $f(x_1,x_2)=2e^{2x_1}+3x_1x_2-\ln(x_2)$

   解：这道题本质和第二题是一样的，只是需要我们知道“梯度”这个概念其实就是若干个不同的偏导数放在一起。题中的函数是二元函数，所以我们需要求两个偏导数，分别是对于 x_1 和 x_2 的偏导数。过程如下：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=4e^{2x_1}+3x_2,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=3x_1-\frac{1}{x_2}$$

   因此得到 f 的梯度为

$$\boldsymbol{\nabla}f\equiv\operatorname{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=\boxed{\left(4e^{2x_1}+3x_2,\ 3x_1-\frac{1}{x_2}\right)}$$