Algorithme EM : Poisson

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \geq 0, \text{ avec } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

mélange de Poisson à K composantes

$$P(X=x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k f_k(x), \quad f_k(x) = e^{-x}\frac{x^k}{k!}.$$

$$\pi_k = P(Z=k)$$

$$\mathbb{E}[X|Z=k] = \lambda_k$$

- Vraisemblance : $P(x,z,\theta) = \prod_{i=1} P(x_i, z_i; \theta)$

$$= \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{K} P(x_i, z_i)^{\mathbb{1}_{\{z_i=k\}}}$$

$$\log P(x,z,\theta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{\{z_i=k\}} \log \underbrace{P(x_i, z_i=k)}_{P(z_i=k;\theta)P(x_i|z_i=k;\theta)}$$

- Étape "E" :

On calcule $Q(\theta,\theta^q) = \mathbb{E}_{Z|X,\theta^q}[\log P(X,Z;\theta)]$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{z_i=k\}}]}_{t_{ik}^{(q)}} \log \pi_k f_k(x_i,\theta)$$

On a $\boxed{t_{ik}^{(q)} = \dfrac{\pi_k^{(q-1)} f(x_i; \theta_k^{(q-1)})}{\sum_{l=1}^{K} \pi_l^{(q-1)} f(x_i, \theta_l^{(q-1)})}}$ (Bayes)

Étape "M" : On calcule $\theta^{(q+1)} = \arg\max_\theta Q(\theta,\theta^q)$

où $\theta^{(q)} = (\pi_0^{(q)}, \dots, \pi_{K-1}^{(q)}, \lambda_0^{(q)}, \dots, \lambda_K^{(q)})$

Ici, $f_k(x_i,\theta) = e^{-\lambda_k}\dfrac{\lambda_k^{x_i}}{x_i!} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \forall k \in [\![1,K]\!]$

On calcule les $\lambda_k^{(q+1)}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial}{\partial \lambda_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{K} t_{il}^{(q)}\left(\log \pi_l + \log\left(e^{-\lambda_l}\frac{\lambda_l^{x_i}}{x_i!}\right)\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_{ik}^{(q)} \frac{\partial}{\partial \lambda_k}\left(\log\left(e^{-\lambda_k}\frac{\lambda_k^{x_i}}{x_i!}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_{ik}^{(q)}\left(\frac{x_i}{\lambda_k} - 1\right) = 0, \text{ d'où après calculs.}$$

$$\boxed{\lambda_k^{(q+1)} := \frac{\sum_i t_{ik}^{(q)} x_i}{\sum_i t_{ik}}}$$

- Pour les $\pi_k^{(q+1)}$, on utilise le Lagrangien, à cause de la contrainte $\sum_k \pi_k = 1$.

$$\mathcal{L}(\theta,\mu) = Q(\theta,\theta^q) + \mu\left(\sum_l \pi_l - 1\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_k} = \frac{\partial}{\partial \pi_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{K} t_{il}^{(q)} \log\left(\pi_l e^{-\lambda_l}\frac{\lambda_l^{x_i}}{x_i!}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \pi_k}\left(\mu\left(\sum_l \pi_l - 1\right)\right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{ik}^{(q)}}{\pi_k} + \mu = 0$$

D'où $\forall k$, $\pi_k^{(q+1)} = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_{ik}^{(q)}}{\mu}$.

Or, $\sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$, d'où $-\dfrac{n}{\mu} = 1$, ie $\boxed{\mu = -n}$, et

$$\boxed{\pi_k^{(q+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{ik}^{(q)}}{n}}$$

On calcule donc successivement les trois quantités encadrées jusqu'à vérifier le critère d'arrêt.