



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

INGÉNIEUR CIVIL : POURSUITE CURSUS

MECA-H303

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DES MACHINES

Projet dynamique des machines

Membres groupe:

Wael AMMAR
Teddy BILBA
Celine JACOBS

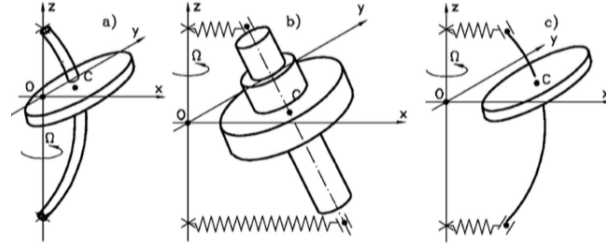
Titulaire:

Pr. Christophe COLLETTE

2016-2017

1 Contexte

Le but de ce rapport est de présenter une étude dynamique du modèle de Jeffcott. Ce dernier est composé d'un disque en rotation autour d'un arbre qui est lié à un support au moyen de ressorts. L'équation dynamique de ce système sous forme matricielle est :



$$M\ddot{q} + (C_n + C_r - i\Omega G)\dot{q} + (K - i\Omega C_r)q = 0 \quad (1)$$

q représente la matrice des coordonnées polaires (r, ϕ) , M la matrice des masses et du moment d'inertie, G la matrice gyroscopique et K la matrice des raideurs. Les matrices C_n et C_r sont respectivement les matrices d'amortissement linéaire et en rotation.

$$q = \begin{bmatrix} r \\ \phi \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_t \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} cn_1 & cn_2 \\ cn_3 & cn_4 \end{bmatrix}, \quad C_r = \begin{bmatrix} cr_1 & cr_2 \\ cr_3 & cr_4 \end{bmatrix}$$

Dans le cas présent, nous nous intéresserons uniquement à la réponse libre de ce système, c'est à dire que le terme de mouvement forcé est nul. Afin de garantir l'intégrité de ce dispositif au cours du mouvement, il est important d'en prédire les modes de comportement critique. Pour ce faire, nous allons analyser des diagrammes de Campbell qui permettent ce genre d'étude. La diagramme ci-dessous incarne la situation de référence de l'étude dynamique. Les valeurs des paramètres qui y sont associés sont présentés dans la figure 2. Sauf mention explicite, les valeurs des paramètres seront toujours ces dernières.

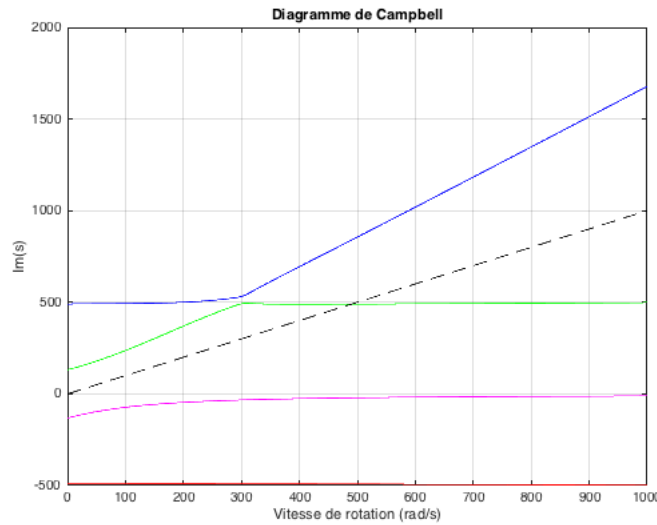


Figure 1: Diagramme de Campbell de référence

```

% **** Variables **** %
m = 10;
Jt = 120;
Jp = 200;
Omega = 0:1000;
cr1 = 1000; cr2 = 1000; cr3 = 1000; cr4 = 1000; %e4
cn1 = 1000; cn2 = 1000; cn3 = 1000; cn4 = 1000; %e4
k11 = 2.5e6; k12 = 1e6; k21 = k12; k22 = k11; %e6

```

Figure 2: Paramètres de référence

On peut observer, sur la figure 1, une vitesse critique à 500 rad/s, qui correspond à 4775 rpm. En fonction des applications, la vitesse de rotation peut varier mais nous allons considérer une valeur maximale de 5000 rpm. La plupart des applications courantes des rotors satisfont cette condition, bien qu'il existe des cas où les vitesses sont beaucoup plus élevées, mais nous ne nous y intéresserons pas ici. Dans les sections suivantes, nous allons observer comment les différents paramètres du système influencent cette vitesse critique ou si ils induisent l'apparition d'états critiques supplémentaires. Nous allons directement considérer une situation non triviale (aucun des paramètres n'est nul), puisque cela correspond plus à la réalité.

2 Les coefficients de raideur

Les premiers paramètres étudiés sont les éléments de la matrice K présentée précédemment. Ceux disposés sur sa diagonale représentent les raideurs propres des ressorts présents (exprimées en N/m) alors que les deux autres K_{21} et K_{12} traduisent un effet de couplage de l'ensemble des ressorts.

Commençons par la variation simultanée des raideurs propres, choisies comme égales.

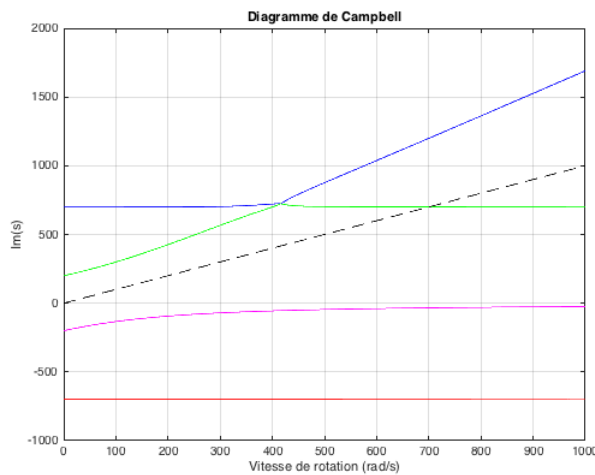


Figure 3: Campbell : $K_{11} = 5 \times 10^6$

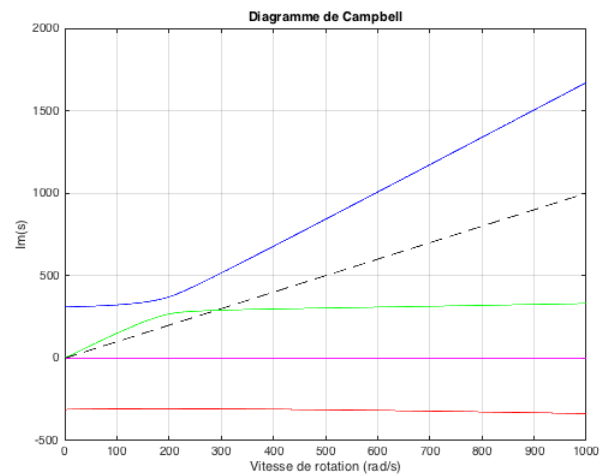


Figure 4: Campbell : $K_{11} = 10^6$

Passons ensuite au coefficient de couplage K_{12}

Pour interpréter les différents résultats, il est possible de se baser sur la formule de la figure 8 donnant la valeur des vitesses critiques (sans amortissement pris en compte):

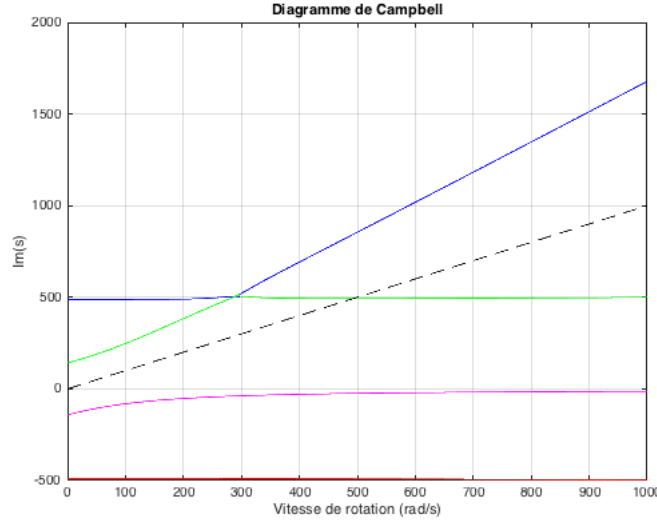


Figure 5: Campbell : $K_{12} = 5 \times 10^5$

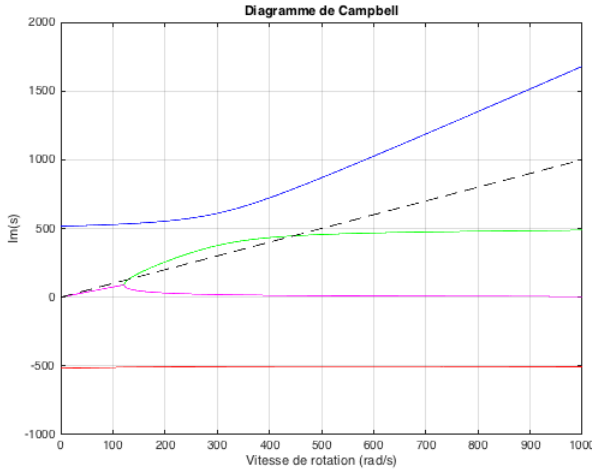


Figure 6: Campbell : $K_{12} = 3 \times 10^6$

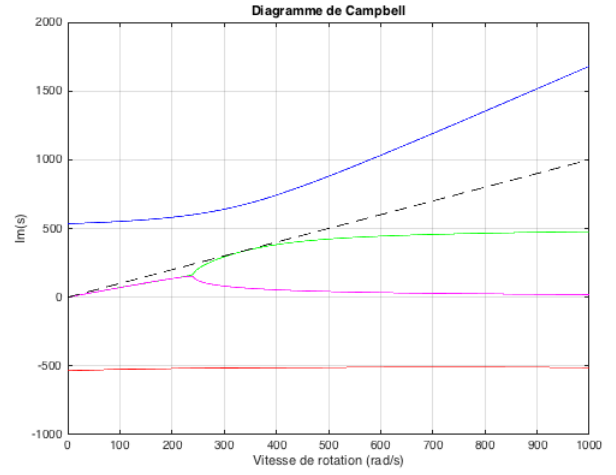


Figure 7: Campbell : $K_{12} = 4 \times 10^6$

$$\Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \sqrt{K_{11} - \frac{K_{22}}{\delta'} \pm \sqrt{\left(K_{11} + \frac{K_{22}}{\delta'}\right)^2 - 4 \frac{K_{12}^2}{\delta'}}}$$

Figure 8: Equation des vitesses critiques de rotation

Où δ' est un nombre adimensionnel liant la masse ainsi que les moments d'inertie polaire et transversale (J_t et J_p) :

$$\delta' = J_p/m \times \frac{\delta - 1}{\delta}, \quad \delta = J_p/J_t \quad (2)$$

Les valeurs de J_p et J_t choisies (200 et 120) impliquent un δ' positif et une seule vitesse critique pour des raisons expliquées dans la section sur l'excentricité et les effets gyroscopiques. Pour commencer, concernant les raideurs K_{11} et K_{22} , la vitesse critique y est proportionnelle, comme attendu de manière intuitive (si la raideur augmente, le rotor devrait tourner plus vite pour atteindre une vitesse critique). En effet, la vitesse critique

passé à 300 rad/s lorsque K_{11} est abaissé à $10^6 N/kg$ et atteint jusqu'à 700 rad/s lorsque la raideur monte à $5 \times 10^6 N/kg$. Cette analyse est confirmée en observant la formule ci-dessus. δ' étant positif, les termes contenant K_{11} et K_{22} ont une contribution positive.

Ensuite, pour l'influence du couplage, le coefficient K_{12} modifie le nombre de pôles en augmentant. De un pôle à 500 rad/s quand K_{12} vaut $10^6 N/kg$, on passe à deux pôles en 130 et 440 rad/s puis à un pôle en 330 rad/s pour finir par ne plus avoir de point critique au-delà. Cela peut être dû au fait que K_{12} apparaît avec une contribution négative sous la première racine. Ainsi, si

$$4K_{12}^2/\delta' > (K_{11} + \frac{K_{22}}{\delta'})^2$$

alors le système n'admet aucune vitesse critique réelle. Dans le cas contraire, on voit par le symbole $+/-$ que deux solutions sont possibles également.

3 L'amortissement

Maintenant, nous allons analyser l'influence de l'amortissement sur le mouvement et les vitesses critiques. Cet amortissement se sépare en deux catégories: l'amortissement linéaire dont les différents coefficients sont notés c_n ("n" pour non rotatifs) et l'amortissement en rotation noté c_r (unités:kg/s). Supposons dans cette section que $c_{r,i} = c_{n,i}$, quel que soit i allant de 1 à 4. Cette symétrisation des coefficients permet d'avoir une vue générale de l'impact de l'amortissement sur le système.

3.1 Eléments diagonaux

De plus, dans le but de séparer les phénomènes de couplage des amortissements propres, premièrement seuls les éléments de la diagonale seront modifiés et ce de la même valeur. Les différents diagrammes de Campbell sont exposés ci-dessous.

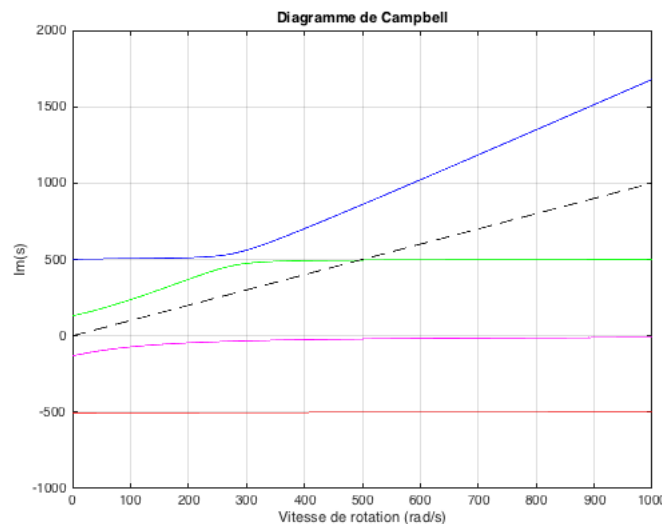


Figure 9: Campbell : $c_{r1} = c_{n1} = c_{n4} = c_{r4} = 0$

Dans les cas où $c_r = c_n = 0$ et $c_r = c_n = 500$, on peut observer que la vitesse critique se situe aux environs de 500 rad/s. Par contre pour le cas où on augmente l'amortissement $c_r = c_n = 5000$, on remarque que cette vitesse diminue se situant au voisinage de 250

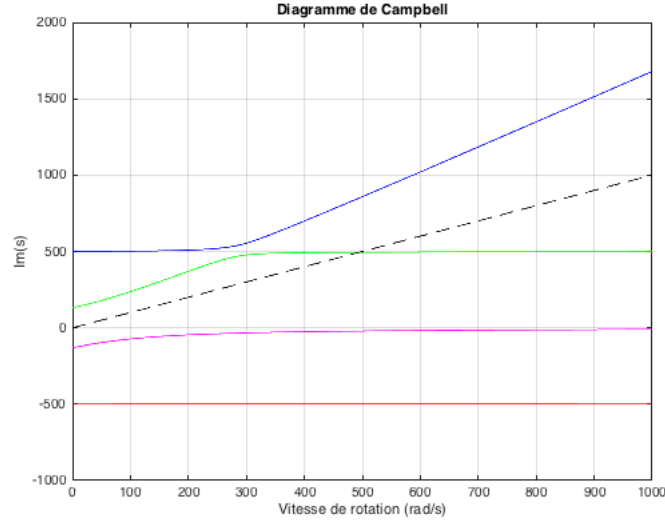


Figure 10: Campbell : $cr_1 = cn_1 = cn_4 = cr_4 = 500$

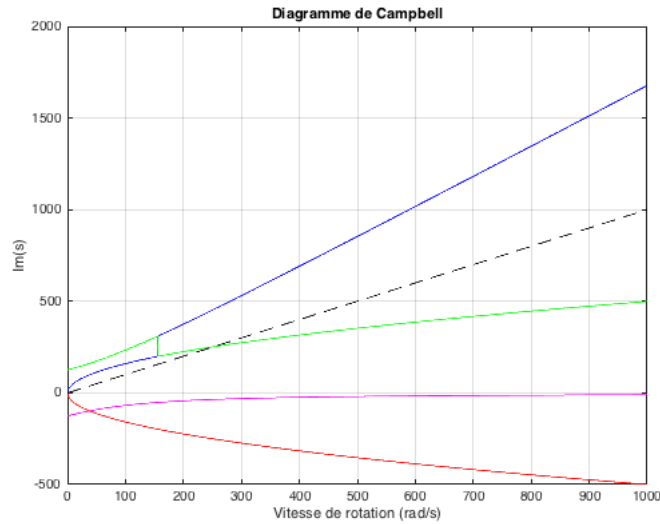


Figure 11: Campbell : $cr_1 = cn_1 = cn_4 = cr_4 = 5000$

rad/s. Les vitesses critiques sont dues à une résonance entre une fréquence naturelle et une fonction de forçage agissant sur le rotor. Ceci nécessite la présence d'une source d'énergie fournie par la rotation.

3.2 Couplage

Ensuite, les coefficients de couplage d'amortissement (indices 2 et 3) sont à leur tour modifiés de façon similaire.

Malheureusement, il y a un petit problème au niveau de la fonction `pole(sys)` de Matlab et elle ne donne pas les pôles dans le même ordre, ce qui résulte en un bug graphique (saut dû à une apparente "discontinuité" du pôle). En fait, il s'agit juste de la position de 2 pôles qui sont inversés dans la matrice que la fonction renvoie. Nous avons réussi à régler ce soucis dans la plupart des cas, mais des exceptions subsistent (figure 11 ou 13 par exemple).

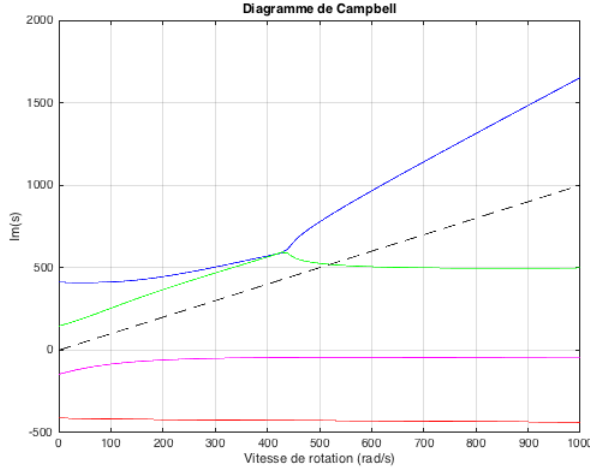


Figure 12: $cr_2 = cn_2 = cn_3 = cr_3 = 5000$

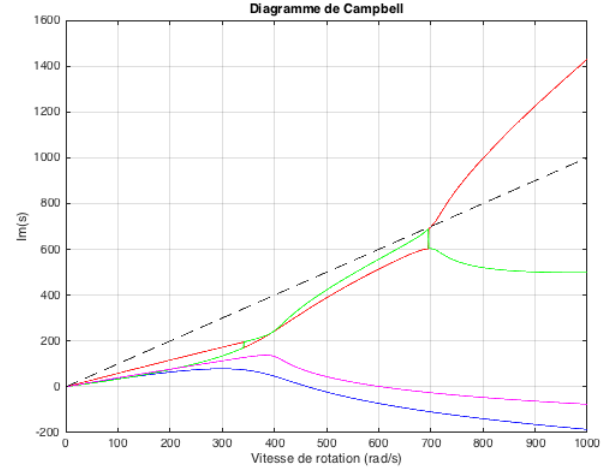


Figure 13: $cr_2 = cn_2 = cn_3 = cr_3 = 15000$

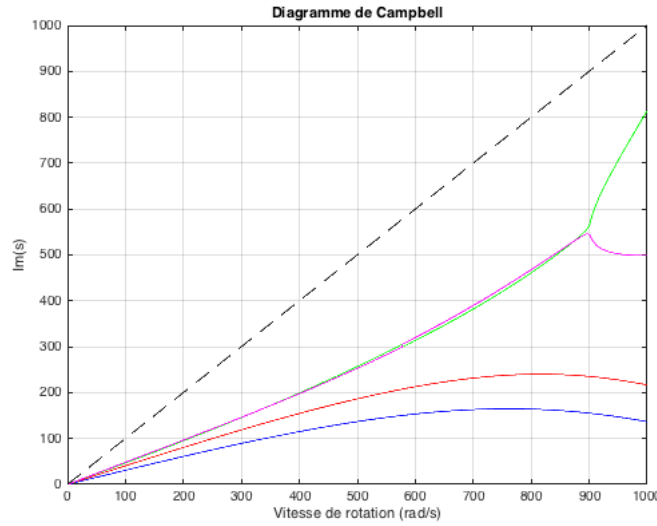


Figure 14: Campbell : $cr_2 = cn_2 = cn_3 = cr_3 = 30000$

En ce qui concerne le couplage, on voit qu'il a l'effet inverse aux coefficients d'amortissement de diagonale. Il n'y a qu'un mode critique et celui-ci croît lorsque l'amortissement augmente, et ce de façon exponentielle (en tout cas pas de manière linéaire). Pour une valeur de l'amortissement de 30000 kg/s, la vitesse critique existe mais dépasse les 1000 rad/s (≈ 5000 rpm) ce qui n'est pas toujours atteignable pour des raisons de résistance des matériaux (le dispositif subira des dommages avant d'atteindre une telle vitesse; en tout cas dans notre hypothèse de rotor communs, n'atteignant pas de trop grande vitesses).

4 L'excentricité

Par ailleurs, on peut également modifier l'écart entre le centre géométrique et le centre de gravité du système, ce qui est équivalent à changer la valeur du moment d'inertie transversal du dispositif noté J_t . Pour les valeurs du moment d'inertie suivantes, on obtient les diagrammes de Campbell ci-dessous.

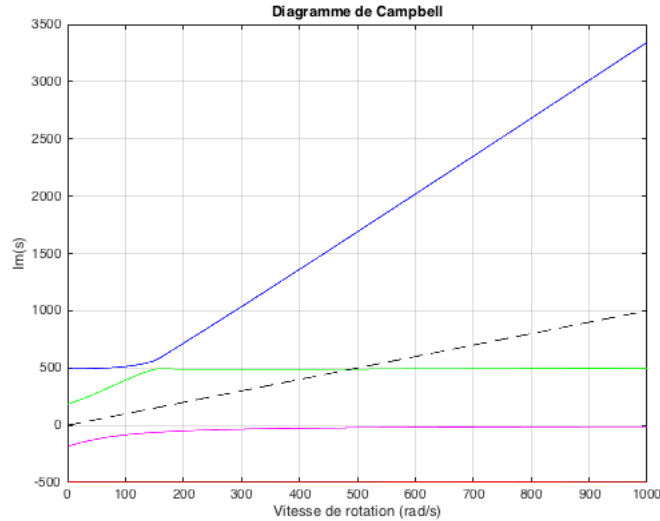


Figure 15: Campbell : $J_t = 60$

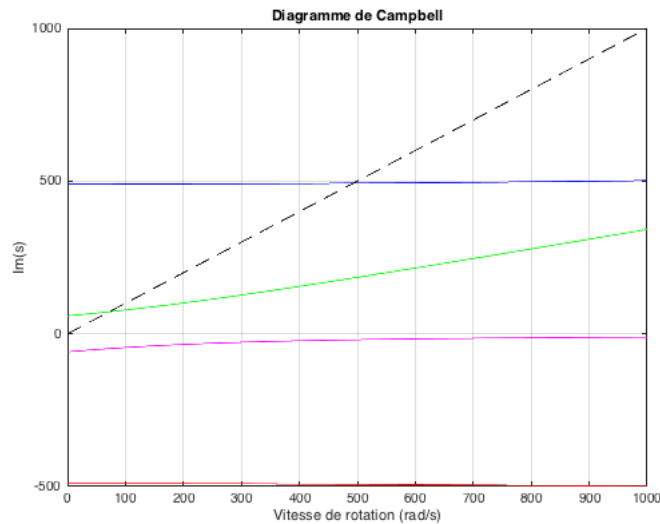


Figure 16: Campbell : $J_t = 600$

Dans le cas où J_t vaut 60, on peut observer que la vitesse critique est légèrement inférieure aux 500 rad/s initiaux et que le pôle bleu appartenant à l'hyperbole croît beaucoup plus vite (cette hyperbole correspond à un mouvement conique du rotor alors que les pôles horizontaux traduisent un mouvement cylindrique du rotor). En revanche, dans le cas où J_t vaut 600, observe deux vitesses critiques: celle à 500 rad/s et une autre à 90 rad/s. Cette situation correspond à un moment d'inertie transversal (J_t) supérieur au moment d'inertie polaire (J_p). Le système se trouve donc bien dans le cas d'un "rotor long" qui admet bien deux valeurs de vitesse critique.

5 Les effets gyroscopiques

Les effets gyroscopiques apparaissent dans le modèle à partir du moment où le rotor de Jeffcott n'est plus considéré comme un point de masse m mais comme un solide caractérisé par des moments d'inertie. C'est la comparaison de leurs valeurs qui permet de déterminer

le nombre de pôles du dispositif. Ces effets sont intrinsèques au modèle et ne peuvent donc être véritablement modifiés par l'expérimentateur. Néanmoins, il est intéressant d'en étudier l'impact sur le rotor pour des valeurs différentes.

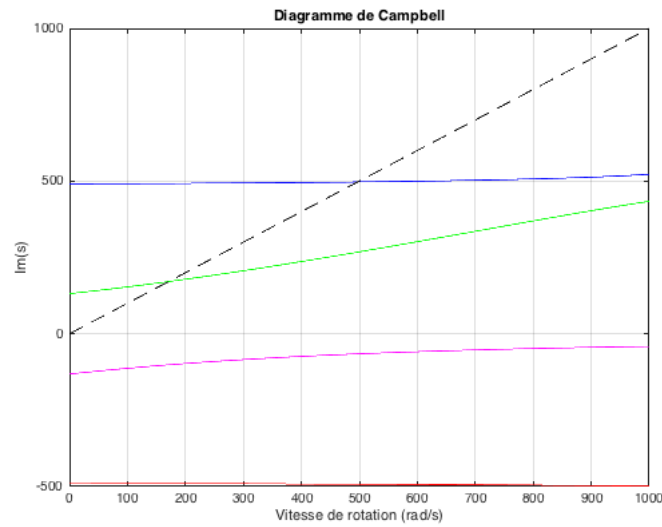


Figure 17: Campbell : $J_p = 50$

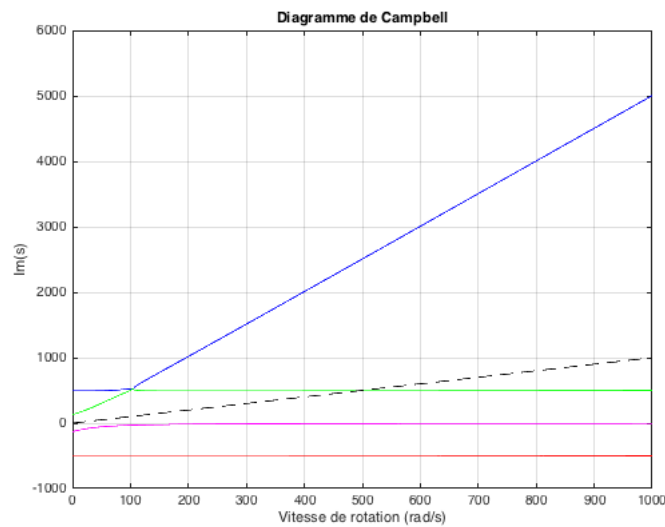


Figure 18: Campbell : $J_p = 600$

L'étude de l'effet gyroscopique s'opère en faisant varier le paramètre J_p . En effet, c'est la présence d'un moment d'inertie polaire qui provoque un mouvement gyroscopique du rotor. Pour les 2 valeurs prises ci-dessus, on observe qu'on se trouve dans une évolution du système analogue à l'étude de l'excentricité. Ceci est prévisible puisque que ces deux paramètres apparaissent dans la formule de caractérisation du rotor.

$$\delta = \frac{J_p}{J_t} \quad (3)$$

Si $\delta < 1$, le rotor est dit "long" et il admet deux vitesses critiques. Ce qui est bien le cas lorsque $J_p = 50$

Dans le cas contraire, si $\delta > 1$, le rotor est vu comme un disque et il admet une seule vitesse critique comme lorsque $J_p = 600$. Ainsi, les diagrammes de Campbell confirment cette théorie.

6 Conclusion

En résumé, tous les paramètres étudiés influencent le mouvement du rotor de Jeffcott et ses vitesses critiques. Il faut prendre garde aux valeurs appliquées à chacun d'entre eux dans la mesure du possible afin de garantir un bon fonctionnement ainsi qu'une fiabilité du dispositif. En effet, certains paramètres font partie intégrante du problème sans possibilité d'être modifiés par le constructeur, c'est notamment le cas des divers couplages. Mais d'autres peuvent être modifiés, tels que les raideurs individuelles ou encore, en plus faible mesure, l'excentricité qui pourrait être réduite par un calibrage adéquat.

Le projet était très intéressant car il est très utile de pouvoir prédire un comportement excessif d'une machine ou d'un mécanisme quel que soit son domaine d'application. Cependant, l'avancée du projet a été un peu perturbée par des bugs liés à Matlab (plutôt notre méconnaissance du logiciel). Il aurait été intéressant d'étudier plus de paramètres ou d'autres dispositions du rotor (anisotropie, augmenter une certaine raideur mais diminuer l'excentricité et un des amortissement). En effet, ce genre de situations sont très faciles à analyser numériquement, mais plus dangereuses à mettre en pratique si le rotor venait à passer par une vitesse critique. Il aurait aussi fallu inclure d'autres graphes (root locus, simulation temporelle, diagrammes de bode) mais le nombre de pages était limité. De plus, les diagrammes de Campbell fournissent assez d'information pour se suffire à eux-mêmes.