

Минимизация булевых функций с помощью карты Карно

15.12.20

Минимизация булевых функций с помощью карты Карно происходит в три этапа:

- I По количеству переменных строится карта Карно;
- II Готовится карта Карно для заданной булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- III Проводится процесс минимизации функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример: Если имеем три переменных x_1, x_2, x_3 , то их можно разбить на две группы единственным способом. В одной группе будет одна переменная, а в другой - две. Какие переменные в какую группу войдут роли не играет. Итак, имеем два набора конъюнкций: x_1 и \bar{x}_1 - первый набор, $x_2, x_3, x_2\bar{x}_3, \bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_2x_3$ - второй набор.

Карта Карно по этим переменным имеет вид:

	x_2x_3	$x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	\bar{x}_2x_3
x_1				
\bar{x}_1				

Для четырех и более переменных карта Карно строится аналогичным способом.

Задача 1. Найдите минимальную ДНФ с помощью карты Карно для $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3)$

Решение: Построим таблицу значений для функции $f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$\bar{x}_2 \vee x_3$	f
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Найдем СДНФ для

$f(x_1, x_2, x_3)$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Построим карту Карно:

	$x_2 x_3$	$x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 x_3$
x_1	1		1	1
\bar{x}_1	1			

из карты Карно можно сделать вывод, что СДНФ сокращается до 2-х выражений.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2$$

Задание 2. Найти минимальную ДНФ с помощью карт Карно для функций $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$, значения которых представлены в таблице.

x	y	z	f_1	f_2
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Решение: Найдем ДНФ:

$$f_1 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$$

$$f_2 = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

	yz	$\bar{y}z$	$y\bar{z}$	$y\bar{z}$
x	1	1	1	
\bar{x}			1	1

В результате получим:

$$f_1(x, y, z) = xz \vee \bar{x}\bar{z} \vee xy$$

$$f_2(x, y, z) = x \vee y$$

Задание 3.

Найдите минимальную ДНФ с помощью карт Карно.

$$f(x, y, z, u) = xyz\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z}u \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{u} \vee x\bar{y}z\bar{u} \vee x\bar{y}z\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{u}$$

Решение:

В итоге получим:

$$f(x, y, z, u) = \bar{y}\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee$$

$$\vee xz\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{u} \vee$$

$$\vee \bar{x}y\bar{z} \vee xz\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z\bar{u}$$

	zu	$z\bar{u}$	$\bar{z}\bar{u}$	$\bar{z}u$
xy		1		
$x\bar{y}$		1	1	1
$\bar{x}y$	1	1	1	
$\bar{x}\bar{y}$			1	