

24.11.2020

Алгебра Булавкина. Логические и булевы функции.

Задание 1.

Способ 1.

x	y	z	b ₁	b ₂
0	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$$b_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee$$

$$\vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz =$$

$$= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus$$

$$\oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus$$

$$\oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xyz(z \oplus 1) =$$

$$= (xy \oplus x \oplus y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus$$

$$\oplus (\underline{xyz} \oplus \underline{xz} \oplus \underline{yz} \oplus \underline{z}) \oplus$$

$$\oplus (\underline{xyz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{zy} + \underline{y}) \oplus$$

$$\oplus (\underline{xyz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{xz} \oplus \underline{x}) \oplus$$

$$\oplus \underline{xyz} =$$

$$= xyz \oplus \underline{xy} \oplus yz \oplus \underline{xz} \oplus \underline{z} \oplus \underline{y} \oplus \underline{x} \oplus 1 + xz =$$

$$= xyz \oplus yz \oplus xz \oplus 1 \oplus xy$$

(mod 2).

$$f_1(0,0,0) = a_0 = 1$$

$$f_1(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 \cdot 1 = 1$$

$$f_1(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 \cdot 1 = 1$$

$$f_1(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_6 \cdot 1 = 0$$

$$f_1(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 = 1$$

$$f_1(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 = 0$$

$$f_1(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 = 0$$

$$f_1(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 \oplus a_6 \cdot 1 \oplus$$

$$\oplus a_7 \cdot 1 = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$1 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$1 \oplus 0 \oplus 0 + a_6 = 0 \Rightarrow a_6 = 1$$

$$1 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$1 \oplus 0 \oplus 0 + a_5 = 0 \Rightarrow a_5 = 1$$

$$1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = 1$$

$$1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_7 = 1 \Rightarrow a_7 = 0$$

$$f(x,y,z) = 1 \oplus 0x \oplus 0y \oplus 0z \oplus 1xy \oplus 1xz \oplus 1yz \oplus 1xyz =$$

$$= xy \oplus xz \oplus yz \oplus xyz \oplus 1$$

Cnocode 1.

$$\begin{aligned} f_2(x, y, z) &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz = \\ &= \underline{xyz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{yz} \oplus \underline{xz} \oplus \underline{x} \oplus \underline{y} \oplus \underline{z} \oplus 1 \oplus \\ &\oplus \underline{xyz} \oplus \underline{yz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{xz} \oplus \underline{x} \oplus \\ &\oplus \underline{xyz} \oplus \underline{xz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{yz} = y \oplus xyz \oplus xz \oplus z \oplus 1 \end{aligned}$$

Cnocode 2.

$$f_2(0, 0, 0) = a_0 = 1$$

$$f_2(0, 0, 1) = a_0 \oplus a_3 \cdot 1 = 0$$

$$f_2(0, 1, 0) = a_0 \oplus a_2 \cdot 1 = 0$$

$$f_2(0, 1, 1) = a_0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_6 \cdot 1 = 1$$

$$f_2(1, 0, 0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 = 1$$

$$f_2(1, 0, 1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 = 1$$

$$f_2(1, 1, 0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 = 0$$

$$f_2(1, 1, 1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 \oplus$$

$$\oplus a_6 \cdot 1 \oplus a_7 \cdot 1 = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$1 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$$

$$1 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_6 = 1 \Rightarrow a_6 = 0$$

$$1 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_5 = 1 \Rightarrow 0 \oplus a_5 = 1 \Rightarrow a_5 = 1$$

$$1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_4 = 0 \Rightarrow 0 \oplus a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$$

$$\underline{1} \oplus \underline{0} \oplus \underline{1} \oplus \underline{1} \oplus \underline{0} \oplus \underline{1} \oplus \underline{0} \oplus a_7 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \oplus a_7 = 1 \Rightarrow a_7 = 1$$

$$xyz \oplus xz \oplus y \oplus z \oplus 1$$

Задача 2.

$$f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee$$

$$\vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} =$$

$$= \underline{xyz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{yz} \oplus \underline{xz} \oplus x \oplus$$

$$\oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus \underline{xyz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{yz} \oplus \underline{y} \oplus$$

$$\oplus \underline{xyz} \oplus yz \oplus \underline{xyz} \oplus xy =$$

$$= xy \oplus yz \oplus xz \oplus x \oplus z \oplus 1$$

f_1 - яв-ся линейной

Способ 1.

$$f_1(x, y, 0) = xy \oplus y0 \oplus x0 \oplus$$

$$\oplus x \oplus 0 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1$$

$$\underline{f_1(x, y, 0)} = xy \oplus x \oplus 1 = \bar{x} \vee y$$

$$\bar{x} \vee y = \overline{x \wedge \bar{y}} = \underline{f_1(x, \bar{y}, 0)}$$

Способ 2. Пусть $y = 1$.

$$\text{Тогда } f(x, 1, z) = \underline{x} \oplus \underline{z} \oplus xz \oplus \underline{x} \oplus \underline{z} \oplus 1 = xz \oplus 1 =$$

x	y	z	f ₁	f ₂
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

$$= \overline{x \wedge z} = \bar{x} \vee \bar{z} \Rightarrow f_1(x, 1, z) = x \wedge z \quad u$$

$$f_1(\bar{x}, 1, \bar{z}) = x \vee z$$

$$f_2(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz =$$

$$= \underline{xyz} \oplus \underline{yz} \oplus \underline{xz} \oplus z \oplus \underline{xyz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{yz} \oplus y \oplus$$

$$\oplus \underline{xyz} \oplus \underline{xy} \oplus \underline{xz} \oplus x \oplus \underline{xyz} \oplus xz \oplus xyz =$$

$$= xyz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus xz \quad f_2(x, y, z) \text{ — минимизация.}$$

Случай 1.

$$f_2(x, y, 0) = xy0 \oplus x \oplus y \oplus 0 \oplus x0 = x \oplus y$$

$$\underline{f_2(x, y, 0) = x \oplus y = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}}$$

$$\bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge y} = f_2$$

Случай 2.

Пусть $y = 1$

$$f_2(x, 1, z) = \underline{xz} \oplus x \oplus 1 \oplus z \oplus \underline{xz} = x \oplus z \oplus 1.$$

Codec 1.

$$\begin{aligned}
 f_2(x, y, z) &= \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} = \\
 &= xyz \oplus yz \oplus xz \oplus z \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus \\
 &\oplus xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz = \\
 &= xyz \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z
 \end{aligned}$$

Codec 2.

$$f_2(0, 0, 0) = a_0 = 0$$

$$f_2(0, 0, 1) = a_0 \oplus a_3 \cdot 1 = 1$$

$$f_2(0, 1, 0) = a_0 \oplus a_2 \cdot 1 = 1$$

$$f_2(0, 1, 1) = a_0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_6 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$f_2(1, 0, 0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 = 1$$

$$f_2(1, 0, 1) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$f_2(1, 1, 0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 f_2(1, 1, 1) &= a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 \cdot 1 \\
 &\oplus a_6 \cdot 1 \cdot 1 \oplus a_7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1
 \end{aligned}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_3 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_6 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \Rightarrow a_6 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_4 = 0$$

$$0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_7 = 1 \Rightarrow a_7 = 1$$

$$f(x, y, z) = xyz \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z.$$