09.11.2020

Теория множеств

Алгебра высказываний

На формулах бинарное отношение $\rho: A \rho B$ тогда и только тогда, когда $A \equiv B$.

ρ яв-ся отношением эквивалентности $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ все формулы разбиваются на непересекающиеся классы, которые равносильны между собой формул. Обозначим такие классы $[A]$ - это совокупность всех формул алгебры высказываний, которые равносильны A.

Далее представлены $[И]$ класс тождественно истинных формул и $[Л]$ - класс всех ложных формул:

$$[A] \vee [B] = [A \vee B]$$
$$[A] \wedge [B] = [A \wedge B]$$
$$\overline{[A]} = [\bar{A}]$$

Совокупность всех классов образует булеву алгебру. На практике вместо формул используют их представления.

Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - формула алгебры высказываний. Построим используя эту фор-

ную булеву функцию в $(x_1, x_2, \dots x_n)$.
Для булева вектора $(a_1, a_2, \dots a_n)$ переменным высказывания $X_1, X_2, \dots X_n$ придадим высказывания: $X_i = И$, если $a_i = 1$, и $X_i = Л$, если $a_i = 0$, $i = 1, 2, \dots n$. При данных значениях переменных высказываний вычислим значение формулы $A(X_1, X_2, \dots X_n)$. Далее полагаем $f(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$, если $A(X_1, X_2, \dots X_n)$ есть $И$, и $f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ - в противном случае.

- Каждой формуле алгебры высказываний ставится в соответствие единственная булева функция. Таким образом, имеем инъективное отображение φ из булевой алгебры высказываний в алгебру булевых функций.
- Чтобы показать изоморфизм булевой алгебры высказываний на алгебру булевых функций, нужно показать, что отображение φ сюръективно.

Т. 8.1 Любую формулу алгебры высказываний можно равносильными преобразованиями привести к виду, в котором в качестве бинарных операций будут присутствовать только дизъюнкция и конъюнкция, а отрицание будет стоять над переменными высказываниями.

ОП 8.1 Пусть даны переменные высказывания $X_1, X_2, \ldots X_n$.

Дизъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний называется элементарной суммой.

↑Переменные или их отрицания называются слагаемыми элементарной суммы.

Конъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний называется элементарным произведением.

↑Переменные или их отрицания называется сомножителями элементарного произведения.

ОП 8.2 Дизъюнкция элементарных произведений называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Элементарные произведения называются слагаемыми ДНФ.

ОП8.3. Конъюнкция элементарных сумм называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ). Элементарные суммы называются сомножителями КНФ.

ОП8.4. Совершенной дизъюнктивной нормальной формой от n переменных (СДНФ) называется такая ДНФ, обладающая следующими свойствами:

1) нет одинаковых слагаемых;
2) в любом слагаемом нет одинаковых множителей;
3) в любом слагаемом ни одна переменная не содержится вместе со своим отрицанием;
4) в любом слагаемом присутствуют все переменные или их отрицания.

ОП8.5. Совершенной конъюнктивной нормальной формой от n переменных (СКНФ) называется такая КНФ, обладающая свойствами:

1) нет одинаковых множителей;
2) в любом множителе нет одинаковых слагаемых;
3) в любом множителе ни одна переменная не содержится вместе со своим отрицанием;
4) в любом множителе присутствуют все переменные или их отрицания.

Т8.2. Любая не тождественно ложная формула имеет единственную СДНФ.

• Для не тождественно ложной формулы

$A(X_1, X_2, \dots X_n)$ СДНФ находится следующим

образом:

1) Для формулы $A(X_1, X_2, \dots X_n)$ строится таблица истинности.
2) Выбираются те истинные векторы $(a_1, a_2, \dots a_n)$ для которых формула $A(X_1, X_2, \dots X_n)$ принимает значение И, т. е. $A(a_1, a_2, \dots a_n) = И$.
3) По каждому такому вектору $(a_1, a_2, \dots a_n)$ строится произведение $X_1^{a_1}, X_2^{a_2}, \dots X_n^{a_n}$.
4) Дизъюнкция всех построенных произведений и есть СДНФ.

• Для не тождественно истинной формулы

$A(X_1, X_2, \dots, X_n)$ алгоритм нахождения СКНФ

следующий:

1) Находится СДНФ для формулы $\bar{A}(X_1, X_2, \dots X_n)$.
2) В построенной СДНФ все конъюнкции меняются на дизъюнкции, и на оборот, переменные со знаком отрицания, записываются без него, и на оборот. В результате получаем СКНФ для формулы $A(X_1, X_2, X_3, \dots X_n)$

Покажем, что для любой булевой функции

$f(X_1, X_2, \dots X_n)$ сущ. такая формула $A(X_1, X_2, \dots X_n)$

что $\varphi[A(X_1, X_2 \dots X_n)] = f(X_1, X_2 \dots X_n)$. Алгоритм

нахождения для функции $f(X_1, X_2, \dots X_n)$

соответствующей формулы $A(X_1, X_2 \dots X_n)$

заключается в следующем:

Пусть булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана своими значениями на любом булевом векторе $(a_1, a_2, \ldots a_n)$. При отождествлении $0 \leftrightarrow Л$ и $1 \leftrightarrow И$, получим таблицу истинности. По этой таблице таблице строим СДНФ (или СКНФ).

Полученная формула будет представлять функцию $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$