Теорема Поста

Задание 1. Можно ли с помощью функций записать все булевые функции. 08.12.2020

а) $f_1(x,y) = x \wedge y$, $f_2(x,y) = x \to y$

x	y	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	+	–	+	–
f_2	–	+	–	–	–

$f_1(x,y) = xy$

$f_2(x,y) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee xy = (x\oplus 1)(y \oplus 1) \oplus$
$\oplus (x \oplus 1)y \oplus xy = xy \oplus x \oplus 1$

Не яв-ся функционально полной.

б) $f_2(x,y) = x \downarrow y$, $f_2(x,y) = x \oplus y$

x	y	f_1	f_2
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

	T_0	T_1	L	M	S
f_1	–	–	–	–	–
f_2	+	–	+	–	–

$f_2(x,y) = \bar{x}y \oplus x\bar{y} = (x \oplus 1)y \oplus (1 \oplus y)x$

Яв-ся функционально полной.

Задание 2. Является ли система $\{f_i\}$ функционально полной:

x	y	z	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

	T_0	T_1	L	M	S
f_1	–	–	–	–	+
f_2	–	–	–	–	–

$f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} =$

$= (x \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz \oplus xy(z \oplus 1) =$

$= xyz \oplus xy \oplus yz \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus$

$\oplus xyz \oplus yz + xz + x \oplus xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z = xy \oplus yz \oplus \cancel{1 \oplus xz}$

f_1 – не яв-ся функционально полной.

$f_i(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz$

$f_0(0,0,0) = a_0 = 1$

$f_1(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$

$f_2(0,1,0) = 1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$

$f_3(0,0,1) = 1 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$

$f_4(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 1 \Rightarrow a_4 = 1$

$f_5(1,0,1) = 1 \oplus 1 \oplus$

$f_6 \cdot (0,1,1) = 1 \oplus a_6 = 0 \Rightarrow a_6 = 1$

$f_7\ (1,1,1) = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_7 = 0 \Rightarrow a_7 = 0$

$f\ (x,y,z) = 1 \oplus x \oplus xy \oplus yz$

f - является функционально полной.

Задание 3.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

	T_0	T_1	L	M	S
f	–	–	–	–	–

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee$
$\vee\ x\bar{y}z = xyz \oplus xy \oplus yz \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus$
$\oplus z \oplus 1 \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus$
$\oplus xyz \oplus yz \oplus xy z \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus$
$\oplus xyz \oplus xz = xyz \oplus xy \oplus xz \oplus zy \oplus z \oplus 1$

$f(x,y,0) = xy0 \oplus xy \oplus x0 \oplus y0 \oplus 0 \oplus 1 =$
$= xy \oplus 1 = \bar{x} \vee \bar{y}$

$f(a,a,a) = a$

$x \vee y = f(f(x,x,x), f(y,y,y), 0)$
$x \wedge y = f(f(x,y,0), f(x,y,0), f(x,y,0))$

$f(0,0,1) = 0 = f(1,1,0) \Rightarrow f(x,x,\bar{x}) \equiv 0 \Rightarrow f(x,x, f(x,x,x)) \equiv$
$\equiv 0$

$x \vee y = f(f(x,x,x), f(y,y,y), f(x,x, f(x,x,x)))$

$x \wedge y = f(f(x,y, f(x,x, f(x,x,x))), f(x,y, f(x,x,x)), f(x,y,$
$f(x,x,x)))).$