06.10.2020

ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ

Дизъюнкция, состоящая из переменных или их отрицаний, называется элементарной суммой.

Конъюнкция состоящая из переменных или их отрицаний, называется элементарным произведением.

Дизъюнкция элементарных произведений называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Конъюнкция элементарных сумм называется конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Любая алгебра высказываний может быть приведена к равносильным ей ДНФ и КНФ.

Задание 1. Постройте ДНФ и КНФ для формул.

а) $A = (X \to Y) \sim (X \wedge \bar{Y})$

$A \equiv (\bar{X} \vee Y) \sim (X \wedge \bar{Y}) = [(\bar{X} \vee Y) \to (X \wedge \bar{Y})] \wedge [(X \wedge \bar{Y}) \to (\bar{X} \vee Y)] =$

$=[(\overline{\bar X \vee Y}) \vee (X\wedge \bar Y)]\wedge[(\overline{X\wedge \bar Y})\vee(\bar X\vee Y)] = [(X\wedge\bar Y)\vee(X\wedge\bar Y)]\wedge$

$\wedge[(\bar X\vee Y)\vee(\bar X\vee Y)] = (X\wedge\bar Y)\wedge(\bar X\vee Y) = X\wedge\bar Y\wedge(\bar X\vee Y)$ – КНФ

$(X\wedge\bar Y)\wedge(\bar X\vee Y) = (X\wedge\bar Y\wedge\bar X)\vee(X\wedge\bar Y\wedge Y)$ – ДНФ.

б) $B = \{[((x\to y)\to\bar x)\to\bar y]\to\bar z\}\to z$

$B \equiv \overline{\{[((x\to y)\to\bar x)\to\bar y]\to\bar z\}}\vee z = \overline{\{\overline{[((x\to y)\to x)\to\bar y]}\vee\bar{\bar z}\}}\vee$

$\vee z = \{[((x\to y)\to\bar x)\to\bar y]\wedge z\}\vee z = \{[\overline{((x\to y)\to\bar x)}\vee\bar y]\wedge z\}\vee z =$

$=\{[(\overline{\overline{(x\to y)}\vee\bar x})\vee\bar y]\wedge z\}\vee z = \{[((x\to y)\wedge x)\vee\bar y]\wedge z\}\vee z =$

$=\{[((x\to y)\wedge x)\vee\bar y]\wedge z\}\vee z = \{[((\bar x\vee y)\wedge x)\vee\bar y]\wedge z\}\vee z =$

$=\{[(x\vee\bar y)\wedge(y\vee\bar y)]\wedge z\}\vee z = (x\vee\bar y\vee z)\wedge(z\vee z) = (x\vee\bar y\vee z)\wedge$

$\wedge z$ – КНФ.

$B\equiv(x\vee\bar y\vee z)\wedge z\equiv(x\wedge z)\vee(\bar y\wedge z)\vee(z\wedge z)\equiv x\wedge z\vee\bar y\wedge z\vee z$ – ДНФ.

Очевидно, что одна и та же формула имеет множество равносильных КНФ и ДНФ. Поэтому используют специальный однозначно определённый вид.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется ДНФ, обладающая следующими свойствами:

1) в ней нет одинаковых слагаемых
2) в любом слагаемом нет одинаковых множителей.
3) в любом слагаемом ни одна переменная не содержится вместе со своим отрицанием.
4) в любом множителе присутствуют все переменные или их отрицания.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется КНФ, обладающая следующими свойствами:

1) в ней нет одинаковых множителей.
2) в любом множителе нет одинаковых слагаемых
3) в любом множителе ни одна переменная не содержится вместе со своим отрицанием.
4) в любом множителе присутствуют все переменные или их отрицания.

Т. Любая не тождественно ложная формула имеет единственную СДНФ. Любая не тождественно истинная формула имеет единственную СКНФ.

Утверждение. Для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует такая формула алгебры высказываний $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что $\varphi(A(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Задание 2. Найдите СДНФ и СКНФ для формулы.

а) $A = \overline{[(x \wedge y) \to \bar{x}]} \wedge \overline{[(x \wedge y) \to \bar{y}]}$

1. Составить таблицу истинности для A и $\bar{A}$.

x	y	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \to \bar{x}$	$(x \wedge y) \to \bar{y}$	A	$\bar{A}$
0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0

2. A истинно при $x \wedge y \Rightarrow$ СДНФ$(A) = x \wedge y$

3. $\bar{A}$ истинно при $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \Rightarrow$

СКНФ$(A) = \overline{\text{СДНФ}(\bar{A})} = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}} = (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$

б) $B = (x \sim \bar{y}) \to [y \wedge (\bar{z} \sim x)]$

1. Составить таблицу истинности для B и $\bar{B}$.

x	y	z	$x \sim \bar{y}$	$\bar{z} \sim x$	$y \wedge (\bar{z} \sim x)$	B	$\bar{B}$
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0

2. СДНФ$(B) = \overline{xyz} \vee \overline{xy}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$

3. СКНФ$(B) = \overline{\text{СДНФ}(\bar{B})} = \overline{\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z} = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge$

$\wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$