Классы булевых функций

Замкнутые и полные классы булевых функций.

ОП 1.1. Пусть дана булева функция $f(x_1, x_2, \dots x_m)$ от m переменных и m функций $f_1(x_1, x_2 \dots x_n)$, $\dots$, $f_m(x_1, x_2, \dots x_n)$ от n переменных.

ОП 1.2. Система булевых функций Σ называется <u>замкнутым классом</u>, если любая суперпозиция любых функций из Σ снова принадлежит Σ. Иначе говоря Σ яв-ся замкнутым, если операция взятия суперпозиции функции из Σ не выводит за пределы Σ.

Пусть Σ - произвольная система функций.

Обозначим через [Σ] совокупность всех функций, которые получаются из Σ с помощью суперпозиции.

Система [Σ] называется замыканием класса Σ.

ОП1.3. Система функций Σ называется функционально полной, если булева функция представима в виде суперпозиции функции из Σ.

A	B	A ↓ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

"↓" это функция называется стрелка Пирса

"|" называется штрих Шеффера

"⊕" называется сложение по модулю два

Алгебра Жегалкина

ОП 2.1. Множество всех булевых функций F с заданными на нём операциями ∧ и ⊕ называется алгеброй Жегалкина.

Т 2.1. В алгебре Жегалкина для любых булевых функций X, Y, Z выполняются следующие равенства:

1) $XY = YX$ и $X \oplus Y = Y \oplus X$

2) $(XY)Z = X(YZ)$ и $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$

3) $X(Y \oplus Z) = XY \oplus XZ$

4) $XX = X$ и $X \oplus X = 0$

5) $X \cdot 1 = X$ и $X \cdot 0 = 0$

6) $X \oplus 1 = \bar{X}$ и $X \oplus 0 = X$

7) $X \vee Y = XY \oplus X \oplus Y$ причём $X \vee Y = X \oplus Y$ тогда и только тогда, когда $XY = 0$.

ОП 2.2. Сумма по модулю двух произведений переменных $x_1, x_2 \ldots x_n$ называется полиномом Жегалкина. Если K – слагаемое полинома Жегалкина, содержащее наибольшее кол. переменных в качестве сомножителей, то кол. этих переменных называется степенью полинома. Максимальная слагаемых полинома при n переменных равен 2^n.

Т 2.2. Любую булеву функцию можно представить единственным образом в виде полинома Жегалкина.

Способы нахождения полинома Жегалкина:

1 способ) (с помощью СДНФ)

1) находим СДНФ.

2) в полученной СДНФ, согласно равенству "6", заменяем $\bar{X}$ на $X \oplus 1$.

3) согласно равенству "7", заменяем ∨ на ⊕
4) Используя равенства "1-7" теоремы, раскрываем скобки и приводим подобные члены.

2 способ (с помощью неопределённых коэффициентов)

1) Из переменных строится полином Жегалкина с макс. кол. слагаемых и неизвестными коэф., которые равны 0 или 1.

2) Придадим переменным последовательно значения $(0,0,\dots,0), (0,0\dots1), \dots (1,1\dots1)$. При этих значениях переменных вычисляем значения полинома Жегалкина и приравниваем их к соответствующим значениям функции.

3) Получаем систему из 2^n линейных уравнений с 2^n неизвестными.
Решая её, находим коэффициенты. Подставляя найденные коэффициенты в выше указанный полином Жегалкина в общем виде, находим требуемый полином.