01. 12. 2020

Монотонные и немонотонные функции. Самодвойственные и несамодвойственные функции.

Задание 1. Проверьте на монотонность функции f_1 и f_2, заданные следующей таблицей.

x	y	z	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

<u>Решение</u>: из опр. 4.2 следует,

что f_1 - немонотонная функция, поскольку существует пара векторов, например: $(0,0,1) < (1,0,1)$ для которых $f(0,0,1) > f(1,0,1)$, где $f_1(0,0,1) = 1$, $f_2(1,0,1) = 0$.

А f_2 - монотонная функция, поскольку:

а) для вектора $(1,0,0)$
Из неравенства $(0,0,0) < (1,0,0)$
$\Rightarrow$ $f_2(0,0,0) \leq f_2(1,0,0)$, т.е. $0 \leq 0$

б) для вектора $(0,1,0)$
Из неравенства $(0,0,0) < (0,1,0)$
$\Rightarrow$ $f_2(0,0,0) \leq f_2(0,1,0)$, т.е. $0 \leq 0$

Задание 2. Из немонотонной функции, значения которой представлены в таблице, получите отрицание.

<u>Решение</u>:

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	1	1	0	1	1	0

Из Т.2.3. можно получить отрицание.

f_1 - немонотонная функция, поскольку $(0,0,0) < (1,1,1)$ $\Rightarrow$ $f(0,0,0) > f(1,1,1)$, где $f_1(0,0,0) = 1$, $f_1(1,1,1) = 0$.

Построим возрастающую цепочку векторов, в которой каждый вектор отличается от соседних ровно одной координатой.

$(0,0,0) < (1,0,0) < (1,0,1) < (1,1,1)$.

Самостоятельно определите максимальную длину и их количество среди возрастающих цепочек.
Для всех векторов из построенной цепочки вычислим значения функции.

$f(0,0,0)=1$
$f(1,0,0)=0$
$f(1,0,1)=1$
$f(1,1,1)=0$

Тогда из первых двух векторов можно построить отрицание, поскольку $f(0,0,0)>f(1,0,0)$, то $f(x,0,0)=\bar{x}$.

Аналогично происходит смена значений функции с 1 на 0 для соседних векторов $(1,0,1)$ и $(1,1,1)$.
Поэтому также $f(1,y,1)=\bar{y}$.
Примечание: можно было взять и другие пары векторов.

Задание 3. Определите самодвойственные функции, заданные таблично.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Решение:

Из опр. 5.2. видно, что для первых трёх функций f_0, f_1, f_2 существуют одинаковые симметричные значения, так что эти функции несамодвойственны.

Однако последняя функция f_3 яв-ся самодвойственной, поскольку симметричные значения функции различны.

Задание 4.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Решение: Пусть $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не сохраняет "0", $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не сохраняет "1" и функция $f_c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ несамодвойственна. Тогда из этих функций можно получить константы "0" и "1".

Процедура получения констант заключается в следующем. По условию $f_0(0, 0, \dots, 0) = 1$. Возможны два случая: $f_0(1, 1, \dots, 1) = 1$ и $f_0(1, 1, \dots, 1) = 0$.

Случай 2. Пусть теперь $f_0(0, 0, \dots, 0) = 1$ и $f_0(1, 1, \dots, 1) = 0$. Отсюда видно, что $\varphi(x) = f_0(x, x, \dots, x) = \bar{x}$. Поскольку функция $f_c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не является самодвойственной, то существует такой вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, что $f_c(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_c(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = c$, где "c" принимает значение "0" или "1". Тогда функция $f_c(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n})$ и будет константой "c", а $\varphi(f_c(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n}))$ будет константой $\bar{c}$. Здесь "x^{α}" равно "x", если $\alpha = 1$, и $x^{\alpha} = \bar{x}$, если $\alpha = 0$. Поэтому в выражениях $f_c(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n})$ и $\varphi(f_c(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n}))$ для всех "i", для которых $a_i = 0$, надо x^{α_i} заменить на $\varphi(x)$.

Из таблицы видно, что эта функция не сохраняет "0" и не сохраняет "1". Кроме того, эта функция не яв-ся самодвойственной, т.к. $f(0,0,1) = 1 = f(1,1,0) = f(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$, а также $f(0,1,0) = 0 = f(1,0,1) = f(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$. Таким образом, три функции совпадают с одной. Поскольку $f(0,0,0) = 1$ и $f(1,1,1) = 0$, то имеет место случай 2) вышеуказанного алгоритма $\Rightarrow$ $\varphi(x) = f(x,x,x) = \bar{x}$. Рассмотрим в отдельности каждой из случаев нарушения условия самодвойственности.

а) Итак, имеем $f(0,0,1) = f(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}) = 1$. Значит $f(x^0, x^0, x^1) = f(x, x, \bar{x})$ [illegible] определяют константу 1. Поскольку в этом представлении надо $\bar{x}$ заменить на $\varphi(x) = f(x,x,x)$, то понятно, что для представления единицы лучше взять второе представление. Итак $1 \equiv f(x, x, f(x,x,x))$, или, что несколько сложнее, $1 \equiv f(f(x,x,x), f(x,x,x), x)$. Для получения константы 0 надо взять отрицание 1.