Замкнутые и полные классы булевых функций.

Задание 1. Проверить, что сложение по модулю два обладает следующими свойствами:

а) $X \oplus 0 = X$; б) $X \oplus 1 = \bar{X}$; в) $X \oplus X = 0$; г) $(X \oplus y)z = Xz \oplus yz$;

д) $X \vee y = Xy \oplus X \oplus y$; е) $Xy \vee Xz \vee yz = Xy \oplus Xz \oplus yz$;

Решение:

Построим таблицу значений

X	0	1	$X \oplus 0$	$X \oplus 1$	$X \oplus X$
0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0

Построим таблицу значений

X	y	z	$X \oplus y$	$(X \oplus y)z$	$Xz \oplus yz$	$Xy \vee Xz \vee yz$	$Xy \oplus Xz \oplus yz$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

$(xy \vee xz) \vee yz = (xyz \oplus xy \oplus xz) \vee yz = (xyz \oplus xy \oplus xz)yz \oplus (xyz \oplus xy \oplus xz) \oplus yz = xyzyz \oplus xyyz \oplus xzyz \oplus (xyz \oplus xy \oplus xz) \oplus yz = xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz = xy \oplus xz \oplus yz$

Построим таблицу значений

X	y	$x \vee y$	$xy \oplus x \oplus y$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Задание 2. Выразите через штрих Шеффера | следующие функции:

а) $\bar{X}$; б) xy ; в) $x \vee y$

Решение:

При решении будем дополнительно использовать таблицу значений.

X	y	x|y	x|x	xy	(x|y)|(x|y)
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

а) $\bar{x} = x|x$;

б) $xy = (x|y)|(x|y)$;

в) $x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = \overline{(x|x) \wedge (y|y)} =$

$= \overline{[(x|x) \wedge (y|y)]}[(x|x) \wedge (y|y)] =$

$= (x|x) \wedge (y|y) = [(x|x)|(y|y)]|$

$|[(x|x)|(y|y)] = \{[(x|x)|(y|y)][(x|x)|(y|y)]\}|\{[(x|x)|(y|y)]|$

$$|[(x|x)|(y|y)]\} = \{A = (x|x)|(y|y)\} = (A|A)|(A|A) = (\bar{A})|(\bar{A}) =$$

$$= \overline{\bar{A}} = A = (x|x)|(y|y)$$

б) $xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \overline{(x|x) \vee (y|y)} = [(x|x) \vee (y|y)]|[(x|x) \vee (y|y)] =$

$= (x|y)|(x|y); \quad (x|x) \vee (y|y) = ((x|x)|(x|x))|((y|y)|(y|y)) = x|y$

$((x|x)|(x|x)) = \bar{x}|\bar{x} = \overline{\bar{x}} = x$

Задание 3. Выразите с помощью суперпозиции

а) импликацию через $\{1, \oplus, \wedge\}$;

б) конъюнкцию через $\{\rightarrow, ^-\}$;

в) дизъюнкцию через $\{\rightarrow, ^-\}$;

Решение:

а) $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = (x \oplus 1) \vee y = (x \oplus 1)y \oplus (x \oplus 1) \oplus y = xy \oplus$

$\oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus y = xy \oplus x \oplus 1$

$f_1(x,y) = 1;$
$f_2(x,y) = x \oplus y;$
$f_3(x,y) = x \wedge y;$

$x \rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1 = f_2(f_3(x,y); f_2(x, f_1(x,y)))$

$\overline{\overline{x \wedge y}} = \bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \rightarrow \bar{y}};$

б) $x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \overline{x \rightarrow \bar{y}};$

$f_1(x,y) = x \rightarrow y;$
$f_2(x) = \bar{x};$
$x \wedge y = \overline{x \rightarrow \bar{y}} = f_2(f_1(x, f_2(y)))$

в) $x \vee y = \bar{x} \rightarrow y = f_1(f_2(x), y)$