Булева алгебра. Алгебра булевых отношений.

Опр. 4.3. Пусть даны две булевые алгебры

$B_1 = \{B_1; \wedge, \vee_1, ^{-1}, 0_1, 1_1\}$ и $B_2 = \{B_2; \wedge_2, \vee_2, ^{-2}, 0_2, 1_2\}$,

где $\wedge_1, \vee_1, ^{-1}, 0_1, 1_1$ – операции и границы первой алгебры, а $\wedge_2, \vee_2, ^{-2}, 0_2, 1_2$ – второй.

Алгебры B_1 и B_2 называются изоморфными, если существует биекция $\varphi: B_1 \to B_2$, сохраняющая операции в алгебрах, т.е. для любых элементов $a, b \in B_1$ выполняются равенства:

1) $\varphi(a \vee_1 b) = \varphi(a) \vee_2 \varphi(b)$

2) $\varphi(a \wedge_1 b) = \varphi(a) \wedge_2 \varphi(b)$

3) $\varphi(\bar{a}^1) = \overline{\varphi(a)}^2$

4) $\varphi(0_1) = 0_2$

5) $\varphi(1_1) = 1_2$

Обозначается это как $B_1 \cong B_2$, а указанная биекция φ называется <u>изоморфизмом алгебры</u> B_1 на алгебру B_2.

Изоморфные булевые состоят из разных элементов, но они обладают одинаковыми свойствами. Это позволяет, получив какие-либо свойства алгебры B_1, автоматически переносить эти свойства на изоморфную алгебру B_2. В частности, если $\leq_1$, $\leq_2$ - вышеуказанные частные порядки, заданные на алгебрах B_1 и B_2 соответственно, то из неравенства $a \leq_1 b$ следует неравенство $\varphi(a) \leq_2 \varphi(b)$.

Булева алгебра подмножеств.

Теорема 5.1. Для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

1) Законы коммутативности $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

2) Законы ассоциативности $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3) Законы дистрибутивности $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) Законы поглощения $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

5) Законы идемпотентности $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

6) Закон двойного дополнения $\bar{\bar{A}} = A$

7) Законы универсальных границ $A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup \varnothing = A$

$A \cap U = A$

$A \cup U = U$

$A \cap \bar{A} = \varnothing$

$A \cup \bar{A} = U$

8) Законы де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Теорема 5.2. Для любых множеств A и B следующие условия эквивалентны:

а) $A \subseteq B$ б) $A \cup B = B$ ~~в)~~ $A \cap B = A$

Алгебра булевых векторов

Опр. 6.1. Булевым вектором длины n называется любой элемент n-й степени множества $A = \{0, 1\}$.

Пусть A_n множество всех булевых векторов длины n и зададим на A_n операции так, чтобы получилась булева алгебра A_n, которая называется алгеброй булевых векторов.