07.12.2020

Лемма о немонотонных функциях

Т 4.2

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ немонотонна, то путём путём подстановки констант из этой функции можно получить отрицание.

Лемма о несамодвойственных функциях

О.П. 5.1. Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сохраняет 0, если $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. В противном случае, т.е. когда $f(0, 0, \ldots, 0) = 1$, функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не сохраняет. Аналогично, функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сохраняет 1, если $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$, и не сохраняет 1, если $f(1, 1, \ldots, 1) = 0$,

Т 5.1. Суперпозиция функций, сохраняющих ноль (единицу) снова есть функция, сохраняющая ноль (единицу).
Таким образом, класс функций, сохраняющих ноль (единицу) яв-ся замкнутым классом, и наоборот.

ОП 5.2. функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **самодвойственной**, если для любого вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ имеет место равенство $\overline{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = f(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n)$ или, что то же самое $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \overline{f(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n)}$.
В противном случае, если найдётся такой булев вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq \overline{f(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n)}$ (или, что то же самое $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n)$), то функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **несамодвойственной**.

ОП 5.3. функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **двойственной** для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если для любого вектора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ справедливо равенство $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \overline{f^*(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n)}$.

Т 5.2. Суперпозиция самодвойственных функций яв-ся самодвойственной функцией.
Таким образом класс всех самодвойственных функций замкнут, и наоборот.

Т 5.3. (Лемма о несамодвойственных функциях).
Пусть функция $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не сохраняет 0, функция $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не сохраняет 1 и функция $f_c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ несамодвойственна. Тогда из этих функций можно получить константы 0 и 1.

Теорема Поста

Т 6.1. (Теорема Поста). Система булевых функций Σ функционально полна тогда и только тогда, когда в Σ содержится хотя бы одна функция, не сохраняющая 0, хотя бы одна функция, не сохраняющая 1, хотя бы одна несамодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная и хотя бы одна нелинейная функция. Причём не обязательно все эти пять функций различны между собой.