Бинарные отношения на множествах

15.09.2020

Декартовым произведением множества A на множество B называется множество всех упорядоченных пар эл. $\langle a, b \rangle$, где $a \in A$, $b \in B$.

$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B \}$

Задание 1.

Пусть $A = \{x, y\}$; $B = \{1, 2, 3\}$

Найдите $A \times B$ и $B \times A$

Решение:

$A \times B = \{\langle x, 1\rangle, \langle x, 2\rangle, \langle x, 3\rangle, \langle y, 1\rangle, \langle y, 2\rangle, \langle y, 3\rangle\}$

$B \times A = \{\langle 1, x\rangle, \langle 1, y\rangle, \langle 2, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 3, x\rangle, \langle 3, y\rangle\}$

Любое подмножество ρ декартова квадрата $A \times A$ называется бинарным отношением на множестве A.

$x \rho y$, $\langle x, y \rangle \in \rho$ (элемент x находится с элементом y в отношении ρ)

Множество всех первых элементов ρ называется областью значения отношения.

$Dom\, \rho = \{ x : x \rho y$ для некоторого $y\}$

Множество всех вторых элементов ρ называется областью значения отношения.

$Im\, \rho = \{ y : x \rho y$ для некоторого $x\}$

$Dom\, \rho \cup Im\, \rho$ – поле отношения ρ.

Инверсией отношения ρ называется множество пар $\langle y, x \rangle$ т., ч. $\langle x, y \rangle \in \rho$

$\rho^{\cup} = \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in \rho\}$

Задание 2.

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 4, 5\}$

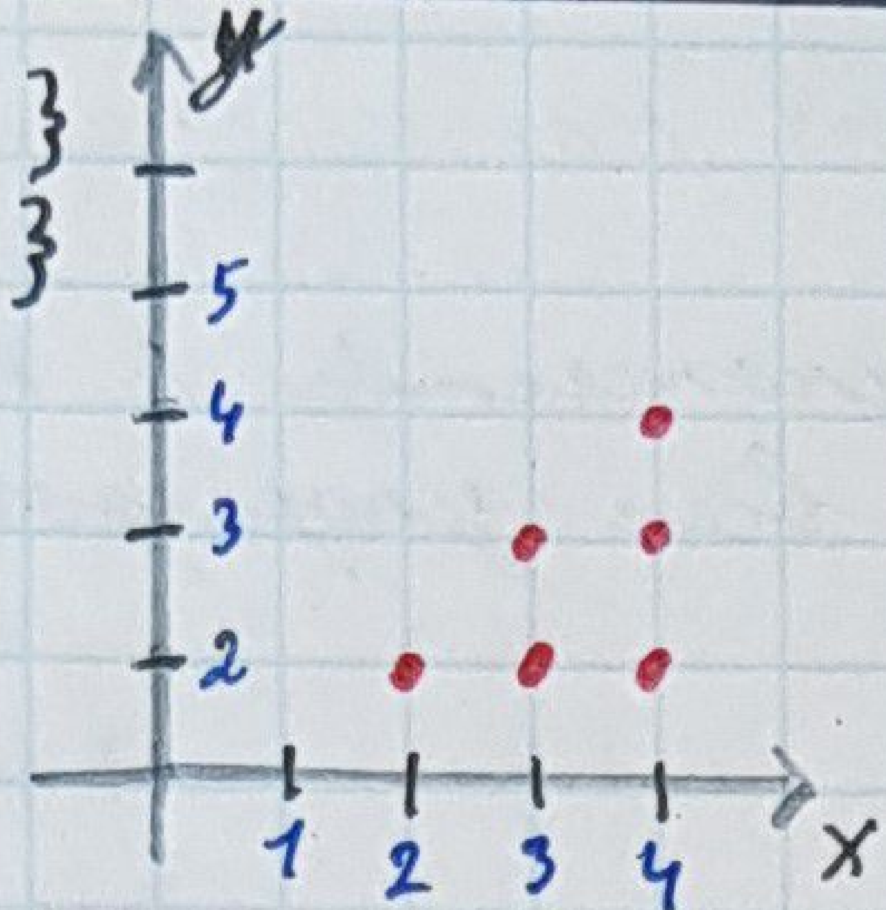
$\rho = \{\langle x, y\rangle, x \in A, y \in B : x \geq y\}$

Найдите множество элементов ρ

$\rho = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

$\mathrm{Dom}\,\varrho = \{2,3,4\}$

$\mathrm{Im}\,\varrho = \{2,3,4\}$



$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

График отношения   Матрица отношения.

Задания 3.

Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\varrho = \left\{ \langle x,y \rangle \mid \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ на } X \times X$$

Найдите множество элементов ϱ.

Решение:

$\varrho = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Dom}\,\varrho = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\mathrm{Im}\,\varrho = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Произведением двух бинарных отношений ϱ_1 и ϱ_2 называется множество всех пар $\langle x,y\rangle : \langle x,z\rangle \in \varrho_1\ \langle z,y\rangle \in \varrho_2$ для некоторого элемента z

$\varrho_1 \circ \varrho_2 = \{\langle x;y\rangle : \exists z : \langle x,z\rangle \in \varrho_1 \text{ и } \langle z,y\rangle \in \varrho_2\}$

Задание 4.

Пусть

$\varrho_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$\varrho_2 = \{\langle 2,5\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 5,5\rangle\}$

Найти произведение бинарных отношений $\varrho_2 \circ \varrho_1$ и $\varrho_1 \circ \varrho_2$

Решение:

$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

$\varrho_1 \circ \varrho_2 = \{\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

Бинарное отношение ϱ на множестве A называется:

- Рефлексивным, если $\forall x \in A$ находится сам с собой в отношении ϱ.

$\forall x \in A \rightarrow x \rho x$

Антирефлексивным, если $\forall x \in A$ не находится сам с собой в отношении ρ

$\forall x \in A \rightarrow x \bar{\rho} x$

Нерефлексивным, если ρ не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным.

Отношение ρ на множестве A называется:

- симметричным, если $\forall x, y \in A$ из $x \rho y$ всегда $\Rightarrow y \rho x$
- антисимметричным, если $\forall x, y \in A$ из $x \rho y$ и $y \rho x \Rightarrow x = y$
- несимметричным, если оно не является ни симметричным, ни антисимметричным.

Задание 5.

Определить являются ли отношения

- рефлексивными (антирефлексивными)
- симметричными (антисимметричными)
- транзитивными

2)

Пусть $A = \{2, 3, 4\}$

$\rho = \{ \langle x, y \rangle, x \in A, y \in A : x \geq y \}$

$\rho = \{ \langle 2,2 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$

Решение:

Отношение ρ яв-ся рефлексивным, антисимметричным.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x \geq y$

$y \geq z \Rightarrow x \geq z$

3) Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\rho = \left\{ \langle x, y \rangle \mid \frac{2x+y}{3} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ на } X \times X$$

$\rho = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,2 \rangle, \langle 5,5 \rangle \}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Отношение ρ яв-ся рефлексивным, симметричным.