Булевы алгебры. Применение булевых функций для изучения множеств. 20.10.2020.

Задание 1. Определите как связаны между собой множества ($\subset, \supset, \cap$); $A \cup (B \cap C)$ и $(B \cup C) \setminus \overline{((B \setminus C) \cup (C \setminus B))}$.

Рассмотрим следующий случай.

$X^A(x)$	$X^B(x)$	$X^C(x)$	$X^X(x)$	$X^Y(x)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Из таблицы видно, что $X^X(x) = X^Y(x) = 1$ только когда $x \in A, x \in B, x \notin C$ ~~или~~ $x \in A$, $x \notin B, x \in C$. Равенства $X^X(x) = X^Y(x) = 1$ означает, что соответствующий элемент x принадлежит одновременно и X и Y. Очевидно, что если $x \in X$ и $x \in Y$, то для этого элемента $X^X(x) = X^Y(x) = 1$. Таким образом,

$X \cap Y = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) =$

$(A \cap B) \cap (\overline{C} \cup C) = (A \cap B) \cap U =$
$= A \cap B.$

$X^A(x)$	$X^B(x)$	$X^C(x)$	$X^{A \cup (B \cap C)}(x)$	$X^{(B \cup C) \setminus \overline{((B \setminus C) \cup (C \setminus B))}}(x)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Пусть $X = A \cup (B \cap C)$, а $Y = (B \cup C) \setminus \overline{((B \setminus C) \cup (C \setminus B))}$. Построим следующую ← таблицу.

Тогда $X \cap Y = (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = A \cap ((\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C}))$.

Задание 2. Дано множество $U = \{x_1, x_2, \dots, x_{10}\}$. Подмножества X, Y, Z заданы характеристическими функциями

$$\chi^X = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0);$$
$$\chi^Y = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1);$$
$$\chi^Z = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0);$$

Определите характеристические функции подмножеств.
$A = [(X \cup Y) \setminus Z] \setminus [(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)]$ и $B = (\bar{X} \cup Y) \cap (\bar{Y} \cup Z) \cap (\bar{Z} \cup X)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
χ^X	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
χ^Y	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
χ^Z	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
χ^A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ^B	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

$$\chi^A = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0);$$
$$\chi^B = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0);$$

Бинарные отношения на множествах (повтор.)

Задание 3. Определите св-ва отношения $\rho = \{\langle m, n \rangle : m, n \in \mathbb{N}, m - n = 2\}$.

Решение:

- Отношение ρ яв-ся антирефлексивным, т.к. $m - m = 0 \neq 2$
- Отношение ρ яв-ся не симметричным, т.к. $m - n = 2 \Rightarrow n - m = -(m - n) = -2 \neq 2$, т.е. не яв-ся симметричным и $m - n = 2$ и $n - m = 2 \not\Rightarrow m = n$, т.е. не яв-ся антисимметричным
- Отношение ρ яв-ся транзитивным, т.к. $m - n = 2$ и $n - p = 2 \Rightarrow m - p = 2$, но $(m - n) + (n - p) = m - p = 2 + 2 = 4 \neq 2$.

Задание 4. Пусть $\rho = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in R, 2x \geqslant 3y \}$. Найдите $Dom\rho$, $Im\rho$, ρ^{u}, $\rho \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{u}$, $\rho^{u} \circ \rho$.

Решение:

$Dom\rho = R$;

$Im\rho = R$;

$\rho^{u} = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in R; 2y \geqslant 3x \}$;

$\rho \circ \rho = \{ \langle x, y \rangle : \exists z \ \langle x, z \rangle \in \rho_1$ и $\langle z, y \rangle \in \rho_2 \}$

$\rho \circ \rho = \{ \langle x, y \rangle : \exists z \ 2x \geqslant 3z$ и $2z \geqslant 3y \} = \{ \langle x, y \rangle : \exists z \ \frac{2}{3} x \geqslant z$ и $z \geqslant \frac{3}{2} y \} = \{ \langle x, y \rangle : 4x \geqslant 9y \}$;

$\rho^{u} \circ \rho = \{ \langle x, y \rangle : \exists z \ 2x \geqslant 3z$ и $2y \geqslant 3z \} = \{ \langle x, y \rangle : \exists z \ \frac{2}{3} x \geqslant z$ и $\frac{2}{3} y \geqslant z \} = \{ \langle x, y \rangle : x = y \} = R^2$;

$\rho \circ \rho^{u} = \{ \langle x, y \rangle : \exists z \ 2z \geqslant 3x$ и $2z \geqslant 3y \} = \{ \langle x, y \rangle : \exists z \ z \geqslant \frac{3}{2} x$ и $z \geqslant \frac{3}{2} y \} = \{ \langle x, y \rangle : x = y \} = R^2$;