Теория множеств

28.10.2020

Алгебра булевых функций.

Булевой функцией от "n" переменных называется любое отображение $f: A_n \to \{0, 1\}$.

Таким образом, булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ отображает любой булев вектор длины n в 0 или 1.

Пусть F_n – множество всех булевых функций от n переменных. Зададим на множестве F_n операции так, чтобы в итоге получилась булева алгебра, которая называется алгеброй булевых функций от n переменных. Для булевых функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ определим булевы функции $(f \vee g)(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(f \wedge g)(x_1, x_2, ..., x_n)$. Чтобы определить эти функции, надо задать значения на любом булевом векторе $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Положим

$(f \vee g)(a_1, a_2, ..., a_n) = max(f(a_1, a_2, ..., a_n), g(a_1, a_2, ..., a_n))$

и $(f \wedge g)(a_1, a_2, ..., a_n) = min(f(a_1, a_2, ..., a_n), g(a_1, a_2, ..., a_n))$

В качестве универсальных граней берём: $0(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $1(x_1, x_2, ..., x_n)$ такие, чтобы для любых булевых векторов иметь $0(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ и

$1(a_1, a_2, \dots a_n) = 1$ все свойства булевой алгебры выполнены.

Алгебра F_n состоит из 2^{2^n} функций.

Частичный порядок для булевых функций, как для элементов булевой алгебры, совпадает с общим понятием частичного порядка для произвольных функций.

Алгебра высказываний

Под высказыванием понимаем любое повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинное оно или ложное.

Высказыванием будем обозначать заглавными буквами: истинность высказывания обозначаем буквой "И", а ложность "Л".

На множестве всех высказываний введём четыре бинарные алгебраические операции и одну унарную.

Отрицанием высказывания "А" называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание "А" ложно.

Обозначается отрицание как $\overline{A}$, читается как "не A", "не верно, что A" и т.п.

Конъюнкцией высказывания "A" и "B" называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания "A" и "B".

Дизъюнкцией высказываний "A" и "B" называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний "A" или "B".

Обозначается дизъюнкцией как $A \vee B$ и читается "A или B".

Импликацией высказываний A и B называется такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

Обозначается импликация $A \rightarrow B$ при этом A называется посылкой, а B следствием.

Читается как "если A, то B", "из A следует B", "A влечёт B" и т.п.

Эквивалентностью 2-х высказываний A и B называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания принимают одинаковые значения. Обозначения эквивалентность как: $A \sim B$ и читается как "A эквивалентно B", "A тогда и только тогда, когда B" и т.п.

Таким образом, на множестве всех высказываний введены четыре бинарные алгебраические операции $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ и одна унарная $\overline{}$.