Булевы алгебры. Применения булевых функций для изучения множеств.

13.10.2020

Булевой алгеброй $\mathcal{B}$ называется множество B с заданными на нём двумя бинарными алгебраическими операциями, одной унарной алгебраической операцией и фиксированными элементами 0 и 1, т.е. $\mathcal{B} = \{B, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1\}$.

Булевым вектором длины n называется любой упорядоченный набор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i, i = \overline{1,n}$ принимают значения 0 или 1.

Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где a_i и b_i, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, принимают значения 0 или 1. Полагаем, что

$$a \vee b = (\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2), \ldots, \max(a_n, b_n));$$
$$a \wedge b = (\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2), \ldots, \min(a_n, b_n));$$

$$\bar{a} = (1-a_1, 1-a_2, 1-a_3, 1-a_4, 1-a_5).$$

Пусть A – подмножество множества B. Характеристической функцией подмножества A во множестве B называется функция $\chi_B^A(x)$ следующего вида:

$$\chi_B^A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

для любого элемента $x \in B$.

Задание 1. Дано множество $N = \{1, 2, \ldots, 9\}$ и подмножества $A = \{1, 2, 5, 6, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 8\}$, $C = \{1, 4, 7, 8, 9\}$. Определите из каких элементов состоит $X = (A \setminus \bar{B}) \cup (B \cap C) \cup (\bar{B} \setminus C)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	0	0	1	1	0	0	1
B	0	1	1	1	0	0	1	1	0
C	1	0	0	1	0	0	1	1	1
$\bar{B}$	1	0	0	0	1	1	0	0	1
$A \setminus \bar{B}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$B \cap C$	0	0	0	1	0	0	1	1	0
$\bar{B} \setminus C$	0	0	0	0	1	1	0	0	0
X	0	1	0	1	1	1	1	1	0

$X = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Задание 2. Докажите равенство множеств на основе булевой алгебры с использованием булевых векторов.

1) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$X^A(x)$	$X^B(x)$	$X^C(x)$	$X^{B\cap C}(x)$	$X^{A\setminus(B\cap C)}(x)$	$X^{A\setminus B}(x)$	$X^{A\setminus C}(x)$	$X^{(A\setminus B)\cup(A\setminus C)}(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

2) $\overline{A \setminus B} = B \cup \overline{A}$

$X^A(x)$	$X^B(x)$	$X^{A\setminus B}(x)$	$X^{\overline{A\setminus B}}(x)$	$X^{\overline{A}}(x)$	$X^{B\cup\overline{A}}(x)$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

3) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

$\chi^{A}(x)$	$\chi^{B}(x)$	$\chi^{C}(x)$	$\chi^{A \cap (B \setminus C)}(x)$	$\chi^{(A \cap B) \setminus (A \cap C)}(x)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

4) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$\chi^{A}(x)$	$\chi^{B}(x)$	$\chi^{C}(x)$	$\chi^{(A \cup B) \setminus C}(x)$	$\chi^{(A \setminus C) \cup (B \setminus C)}(x)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Задание 3. Определите как связаны между собой множества ($\subset$, $\supset$, $\cap$)

$\chi^A(x)$	$\chi^B(x)$	$\chi^C(x)$	$\chi^X(x)$	$\chi^Y(x)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

Из таблицы видно, что на тех местах, где $\chi^X(x) = 1$, значения $\chi^Y(x)$ тоже равны 1. Это означает, что если $x \in X$, то $x \in Y$, т.е. $X \subseteq Y$. Далее, есть элементы x такие, что $\chi^Y(x) = 1$, а $\chi^X(x) = 0$. Это означает, что существует такие элементы x, что $x \in Y$, но $x \notin X$. Следовательно, имеет место строгое включение, т.е. множество X яв-ся подмножеством множества Y и обозначается как $X \subset Y$.

$\chi^A(x)$	$\chi^B(x)$	$\chi^C(x)$	$\chi^X(x)$	$\chi^Y(x)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Если для какого-то x $\chi^X(x) = 1$, то для этого же x $\chi^Y(x) = 0$, или наоборот, если для какого-то x $\chi^X(x) = 0$, то для этого же x $\chi^Y(x) = 1$. Это означает, что если $x \in X$, то $x \notin Y$, или наоборот, если $x \in Y$, то $x \notin X$. Следовательно, множества X и Y не пересекаются, т.е. $X \cap Y = \emptyset$.

1) $A \triangle B$ и $\bar{A} \cap B$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$\chi^{A}_{(x)}$	$\chi^{B}_{(x)}$	$\chi^{A\setminus B}_{(x)}$	$\chi^{B\setminus A}_{(x)}$	$\chi^{A\triangle B}_{(x)}$	$\chi^{\bar{A}\cap B}_{(x)}$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0

$A \triangle B \supset \bar{A} \cap B$

2) $B \setminus (A \cup C)$ и $(A \cap C) \setminus B$

$\chi^{A}_{(x)}$	$\chi^{B}_{(x)}$	$\chi^{C}_{(x)}$	$\chi^{B\setminus(A\cap C)}_{(x)}$	$\chi^{(A\cap C)\setminus B}_{(x)}$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

$B \setminus (A \cup C) \cap (A \cap C) \setminus B = \varnothing$