

Основные логические операции. Таблица истинности.

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Отрицанием \bar{A} (не A) называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно.

Конъюнкцией $A \wedge B$ (A и B) называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B .

Дизъюнкцией $A \vee B$ (A или B) называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A или B .

Импликацией $A \rightarrow B$ (если A , то B) называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

Эквивалентностью $A \sim B$ (A эквивалентно B) называется высказывание, которое истинно тогда и только, когда высказывания A и B принимают одинаковые значения.

A	B	\bar{A}	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \sim B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Формула алгебры высказываний, принимающая значение 1 (истина) при любом наборе значений входящих в нее переменных, называется тождественно истинной или

тавтологией.

Задача 1. Среди предложенных высказываний и определите их истинность.

- "Любой человек имеет брата" явл-ся логичным высказыванием.
- "На ФМФ изучают математический анализ" явл-ся истинным высказыванием.
- "Который час?" не явл-ся высказыванием.
- "Существует человек, который младше своего отца" явл-ся истинным высказыванием.
- " $x^2 - 7x + 2 = 0$ " не является высказыванием.
- "Северная сторона" не является высказыванием.
- "Обь впадает в Средиземное море" является логичным высказыванием.

Задача 2. Пусть даны высказывания:

- A - "Студент Петров изучает английский язык".
 B - "Студент Петров увлекается по математическому анализу".

Дайте словесную формулировку следующим высказываниям:

- $A \wedge \bar{B}$ "Студент Петров изучает английский язык и не увлекается по математическому анализу".
- $A \rightarrow B$ "Если Петров изучает английский язык, то он увлекается по математическому анализу".
- $B \sim \bar{A}$ "Петров не увлекается по математическому анализу тогда и только тогда, когда он не изучает английский язык".

Задача 3. Постройте таблицу истинности для формулы.

a) $A = [(\overline{p \wedge q}) \rightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})] \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	\bar{p}	\bar{q}	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$(\overline{p \wedge q}) \rightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$	A
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1

8) $B = [P \sim (Q \vee P)] \sim [P \sim (Q \vee P)]$ - тождественно истинное

P	Q	$Q \vee P$	$\overline{Q \vee P}$	$P \sim (\overline{Q \vee P})$	$P \sim (Q \vee P)$	B
0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0

Задача 4. Докажите тождественную истинность формулы.
 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \vee (x_2 \sim (x_3 \rightarrow x_1))$

x_1	x_2	x_3	\bar{x}_2	$x_1 \rightarrow \bar{x}_2$	$x_3 \rightarrow x_1$	$x_2 \sim (x_3 \rightarrow x_1)$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Две формулы называются равносильными, если они принимают одинаковые значения при одних и тех же переменных ($A \equiv B \Leftrightarrow A \sim B$ - тождественно истинно).

Задание 5. Докажите равносильность формулы.

a) $X \sim Y \equiv (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$

X	Y	$X \sim Y$	$X \rightarrow Y$	$Y \rightarrow X$	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

б) $X \rightarrow Y \equiv \bar{X} \vee Y$

X	Y	$X \rightarrow Y$	\bar{X}	$\bar{X} \vee Y$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Задание 6. Докажите эквивалентность формулы.

$[A \vee (\bar{A} \wedge B)] \sim (A \vee B)$

A	B	\bar{A}	$\bar{A} \wedge B$	$A \vee (\bar{A} \wedge B)$	$A \vee B$	$[A \vee (\bar{A} \wedge B)] \sim (A \vee B)$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Задача 7. Докажите равносильность формулы с помощью равносильных преобразований.

$$a) (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow C;$$

$$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (\bar{A} \vee C) \wedge (\bar{B} \vee C) \equiv C \vee (\bar{A} \wedge \bar{B});$$

$$(A \vee B) \rightarrow C \equiv \overline{(A \vee B)} \vee C \equiv (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee C \equiv C \vee (\bar{A} \wedge \bar{B});$$

Задача 8. Упростите формулу.

$$\begin{aligned} a) (X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow \bar{Y}) &\equiv (\bar{X} \vee Y) \vee (\bar{X} \vee \bar{Y}) \equiv \bar{X} \vee (Y \vee \bar{Y}) \equiv \\ &\equiv \bar{X} \vee 1 \equiv 1 \end{aligned}$$