24.11.2020

Алгебра Жегалкина. Линейные и нелинейные функции.

Задание 1. Получите полином Жегалкина для следующих функций, значения которых заданы таблицей 1.

Решение:

<u>Способ 1.</u> Нахождение полинома Жегалкина с помощью СДНФ.

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} = [X \oplus 1 = \bar{X};\ X \vee Y = X \oplus Y]$$

$$= (X \oplus 1)(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (X \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) =$$

$= [X(Y \oplus Z) = XY \oplus XZ] = (xy \oplus y \oplus x \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus$

$\oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus xy = [X \oplus X = 0] =$

$= x \oplus y \oplus z \oplus 1.$

Таблица 1

x	y	z	f_1	f_2
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Способ 2. Нахождение полинома Жегалкина методом неопределённых коэффициентов, построим в общем виде полином Жегалкина с максимальным количеством слагаемых и неизвестными коэффициентами:

$f(x,y,z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus$

$\oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz$

Составим систему из 2^3 уравнений:

$f_1(0,0,0) = a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 0 \oplus a_3 0 \oplus$

$\oplus a_4 00 \oplus a_5 00 \oplus a_6 00 \oplus a_7 000 = 1$

$f_1(0,0,1) = a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 0 + a_3 1 \oplus a_4 00 \oplus a_5 01 \oplus$

$\oplus a_6 01 \oplus a_7 001 = 0$

$f_1(0,1,0) = a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 1 \oplus a_3 0 \oplus a_4 01 \oplus a_5 00 \oplus$

$\oplus a_6 10 \oplus a_7 010 = 0$

$f_1(0,1,1) = a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 1 \oplus a_3 1 \oplus a_4 01 \oplus a_5 01 \oplus$

$\oplus a_6 11 \oplus a_7 011 = 1$

$f_1(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 0 \oplus a_3 0 \oplus a_4 10 \oplus a_5 10 \oplus$

$\oplus a_6 00 \oplus a_7 100 = 0$

$f_1(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 0 \oplus a_3 1 \oplus a_4 10 \oplus a_5 11 \oplus$

$\oplus a_6 01 \oplus a_7 101 = 1$

$f_1(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 1 \oplus a_3 0 \oplus a_4 11 \oplus a_5 10 \oplus$

$\oplus a_6 10 \oplus a_7 110 = 1$

$f_1(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 1 \oplus a_3 1 + a_4 11 \oplus$

$\oplus a_5 11 \oplus a_6 11 \oplus a_7 111 = 0$

Далее находим значения неизвестных коэффициентов

$a_0 = 1$

$a_0 \oplus a_3 1 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$

$a_0 \oplus a_2 1 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$

$a_3 \oplus a_1 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$

$a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 1 \oplus a_4 11 = 1 \Rightarrow \quad 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_4 = 1 \Rightarrow a_4 = 0$

$a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_3 1 \oplus a_5 11 = 1 \Rightarrow 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_5 = 1 \Rightarrow a_5 = 0$

$a_0 \oplus a_2 1 \oplus a_3 1 \oplus a_6 11 = 1 \Rightarrow 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_6 = 1 \Rightarrow a_6 = 0$

$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 + a_7 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_7 = 0 \Rightarrow a_7 = 0$

Записываем полученный результат, подставляя найденные значения коэффициентов.

$f(x,y,z) = 1 \oplus 1x \oplus 1y \oplus 1z \oplus 0xy + 0xz \oplus 0yz \oplus$

$\oplus 0xyz = 1 \oplus x \oplus y \oplus z$

Задание 2. Покажите, что функция является нелинейной, и получите из неё конъюнкцию и дизъюнкцию.

Решение:

x	y	z	b_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

f является нелинейной, поскольку число "единиц" равняется 5.

Находим полином Жегалкина

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee$

$\vee xy\bar{z} \vee xyz = (x\oplus 1)(y\oplus 1)z \oplus$

$\oplus (x\oplus 1)y(z\oplus 1) \oplus x(y\oplus 1)(z\oplus 1) \oplus$

$\oplus xy(z\oplus 1) \oplus xyz = xyz \oplus z \oplus$

$\oplus y \oplus xy \oplus x = xyz \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus z$

Способ 1. Приведение функции к виду $\varphi(x,y) = xy \oplus$

$\oplus ax \oplus \beta y \oplus \gamma$

$f(x,y,0) = xy0 \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 0 = xy \oplus x \oplus y = \varphi(x,y)$

Из полученной новой формулы, находим конъюнкцию и дизъюнкцию.

$f(x,y,0) = xy \oplus x \oplus y = x \vee y$

$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} = f_1(\bar{x},\bar{y},0)$

Способ 2.

Иногда дизъюнкцию и конъюнкцию можно получить по-другому, что бывает даже проще.

Рассматривая ту же самую функцию, полагаем $y=1$.

Тогда $f(x,1,z)= xz \oplus x \oplus x \oplus 1 \oplus z = xz \oplus z \oplus 1 =$

$= (x \oplus 1)z \oplus 1 = \overline{\bar{x} \wedge z} = x \vee \bar{z} \Rightarrow \overline{f(\bar{x},1,\bar{z})} = x \wedge z$ и

$f(x,1,\bar{z}) = x \vee z.$