08.09.2020. Свойства операций и равенство множества

ОП 2.1 $A = B$, если они содержат одни и те же элементы.

Для доказательства равенства двух множеств необходимо доказать 2 утверждения:

1) $\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$

2) $\forall x: x \in B \Rightarrow x \in A$

Свойства операций

1°. Идемпотентность $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

2°. Коммутативность $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

3°. Ассоциативность $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4°. Дистрибутивность $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5°. Свойства пустого множества $A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup \varnothing = A$

6°. Свойства универсального множества $A \cap U = A$

$A \cup U = U$

7°. Законы де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

8°. Свойства дополнения $A \cap \bar{A} = \varnothing$

$A \cup \bar{A} = U$

9°. Законы поглощения $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

10°. Инволютивность $\bar{\bar{A}} = A$

11° Законы склеивания $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$
$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

1° Идемпотентность $A \cup A = A$
Доказательство:
1) $A \cup A \subseteq A$
Пусть $x \in A \cup A \Rightarrow x \in A$ или $x \in A \Rightarrow x \in A$

2) $A \cup A \supseteq A$
Пусть $x \in A \Rightarrow x \in A$ или $x \in A \Rightarrow x \in A \cup A$

$A \cap A = A$
Доказательство:
1) $A \cap A \subseteq A$
Пусть $x \in A \cap A \Rightarrow x \in A$ и $x \in A \Rightarrow x \in A$.

2) $A \cap A \supseteq A$
Пусть $x \in A \Rightarrow x \in A$ и $x \in A \Rightarrow x \in A \cap A$

2° Коммутативность $A \cup B = B \cup A$
Доказательство:
1) $A \cup B \subseteq B \cup A$
Пусть $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ или $x \in B \Rightarrow x \in B$ или $x \in A \Rightarrow x \in B \cup A$

2) $B \cup A \supseteq A \cup B$
Пусть $x \in B \cup A \Rightarrow x \in B$ или $x \in A \Rightarrow x \in A$ или $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

$A \cap B = B \cap A$
1) $A \cap B \subseteq B \cap A$
Пусть $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ и $x \in B \Rightarrow x \in B$ и $x \in A \Rightarrow x \in B \cap A$

2) $A \cap B \supseteq B \cap A$
Пусть $x \in B \cap A \Rightarrow x \in B$ и $x \in A \Rightarrow x \in A$ и $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

3° Ассоциативность $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Доказательство:
1) $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$
Пусть $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ или $x \in (B \cup C) \Rightarrow$ а) $x \in A$ или (б) $x \in B$ или в) $x \in C$)

а) Пусть $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

б) Пусть $x \in B \Rightarrow x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$
в) Пусть $x \in C \Rightarrow x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1) $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$
Пусть $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ и $x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ и $(x \in B$ и $x \in C) \Rightarrow x \in A$ и $x \in B$ и $x \in C \Rightarrow (x \in A$ и $x \in B)$ и $x \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

2) $A \cap (B \cap C) \supseteq (A \cap B) \cap C$
Пусть $x \in A \cap (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B)$ и $x \in C \Rightarrow (x \in A$ и $x \in B)$ и $x \in C \Rightarrow x \in A$ и $x \in B$ и $x \in C \Rightarrow x \in A$ и $(x \in B$ и $x \in C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

4° Дистрибутивность $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Доказательство:
1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Пусть $x \in A \Rightarrow x \in A$ или $x \in (B \cap C) \Rightarrow$ а) $x \in A$ или
б) $(x \in B$ и $x \in C)$
а) Пусть $x \in A \Rightarrow x \in A$ и $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
б) Пусть $x \in B$ и $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A$ или $x \in B)$ и $(x \in A$ или $x \in C)$
а) Пусть $x \notin A \Rightarrow x \in B$ и $x \in C \Rightarrow x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$
б) Пусть $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

5° Свойства пустого множества $A \cap \varnothing = \varnothing$
Доказательство:
1) $A \cap \varnothing \subseteq \varnothing$
Пусть $x \in A \cap \varnothing \Rightarrow x \in A$ и $x \in \varnothing \Rightarrow x \in \varnothing$
2) $A \cap \varnothing \supseteq \varnothing$
Пусть $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ и $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A \cap \varnothing$

$A \cup \varnothing = A$
1) $A \cup \varnothing \subseteq A$
Пусть $x \in A \cup \varnothing \Rightarrow x \in A$ или $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$
2) $A \cup \varnothing \supseteq A$
Пусть $x \in A \Rightarrow x \in A$ или $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A \cup \varnothing$

7° Законы де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Доказательство:

1) $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

Пусть $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \in U$ и $x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in U$ и $(x \notin A$ и $x \notin B) \Rightarrow x \in U$ и $x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in U$ и $x \notin B \Rightarrow x \in \bar{A}$ и $x \in U$ и $x \notin B \Rightarrow x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $\overline{A \cup B} \supseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

Пусть $x \in \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in U$ и $x \notin A$ и $x \in U$ и $x \notin B \Rightarrow x \in U$ и $x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in U$ и $(x \notin A$ и $x \notin B) \Rightarrow x \in U$ и $x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$

9° Законы поглощения $A \cup (A \cap B) = A$

Доказательство:

1) $A \cup (A \cap B) \subseteq A$

Пусть $x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A$ или $x \in (A \cap B) \Rightarrow$ а) $x \in A$ или б) $(x \in A$ и $x \in B)$

а) Пусть $x \in A$

б) Пусть $x \in A$ и $x \in B \Rightarrow x \in A$

2) $A \cup (A \cap B) \supseteq A$

Пусть $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B)$

11° Законы склеивания $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

Доказательство:

1) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \subseteq A$

Пусть $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \Rightarrow x \in (A \cap B)$ или $x \in (A \cap \bar{B}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in \bar{B}) \Rightarrow x \in A$ и $x \in (B \cup \bar{B}) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A$ и $x \in U \Rightarrow x \in A$

2) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \supseteq A$

Пусть $x \in A \Rightarrow x \in A$ и $x \in U \Rightarrow x \in A$ и $x \in (B \cup \bar{B}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in \bar{B}) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$