Model de examen la Calcul Diferențial și Integral

1. a) Studiați convergența seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(n+3)!}{(2n+1)!\,x^n}$ în funcție de valorile parametrului $x \in (0,\infty)$.

<u>Soluție.</u> Fie $x_n = \frac{n!\,(n+3)!}{(2n+1)!\,x^n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}\,\overset{n+4}{\cancel{(n+4)!}}}{\underset{(2n+2)\cdot(2n+3)}{\cancel{(2n+3)!}}\,\underset{x}{\cancel{x^{n+1}}}} \cdot \frac{\cancel{(2n+1)!}\,\cancel{x^n}}{\cancel{n!}\,\cancel{(n+3)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+4)}{(2n+2)(2n+3)\,x} = \frac{1}{4x}.$$

Conform Criteriului raportului pentru serii cu termeni strict pozitivi avem:

1) Dacă $\frac{1}{4x} < 1$ $\left(\text{i.e. } x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)\right)$, seria este convergentă.

2) Dacă $\frac{1}{4x} > 1$ $\left(\text{i.e. } x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)\right)$, seria este divergentă.

3) Dacă $\frac{1}{4x} = 1$ $\left(\text{i.e. } x = \frac{1}{4}\right)$, Criteriul raportului nu decide.

Dacă $x=\frac{1}{4}$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+3)!}{(2n+1)!\left(\frac{1}{4}\right)^n} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(n+3)!\cdot 4^n}{(2n+1)!}.$$

Fie $x_n = \frac{n!\,(n+3)!\,4^n}{(2n+1)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{4(n+1)(n+4)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4(n^2+5n+4)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\cancel{4n^2}+10n+6-\cancel{4n^2}-20n-16}{4n^2+20n+16} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-10n^2-10n}{4n^2+20n+16} = -\frac{10^{(2}}{4} = -\frac{5}{2} < 1.$$

Conform Criteriului Raabe-Duhamel, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+3)!\,4^n}{(2n+1)!}$ este divergentă.

Am obținut: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(n+3)!}{(2n+1)!\,x^n}$ → convergentă, dacă $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$
→ divergentă, dacă $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$. $\square$

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și neconstantă cu proprietatea că $f(x+1)=f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Arătați că funcția $g:(0,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, este continuă, dar nu este uniform continuă.

Soluție. Fie $a\in(0,1)$ și $(x_n)_n\subset(0,1)$ a.î.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}$.

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{x_n}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ f\text{ continuă}}}{=} f\left(\frac{1}{a}\right)=g(a)\Rightarrow$$

$\Rightarrow g$ continuă în a.

Cum $a\in(0,1)$ a fost ales arbitrar rezultă că g este continuă pe $(0,1)$.

f neconstantă $\Rightarrow \exists\, x,y\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)\neq f(y)$.

Fie $x_n=\dfrac{1}{x+n}$ $\forall n\geq n_0$ și $y_n=\dfrac{1}{y+n}$ $\forall n\geq n_0$, unde $n_0\in\mathbb{N}$ este suficient de mare ($n_0\geq$ $\geq\max\{|[x]|+2, |[y]|+2\}$).

$$g(x_n)=f\left(\frac{1}{x_n}\right)=f(x+n)=f(\underbrace{x+n-1}+1)=$$

$$=f(x+n-1)=f(\underbrace{x+n-2}+1)=f(x+n-2)=\ldots=$$

$$=f(x)\ \forall\ n\geq n_0.$$

$$g(y_n)=f(y)\ \forall\ n\geq n_0.$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(g(x_n)-g(y_n)\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x)-f(y)\right)=f(x)-f(y)\neq 0.$

Deci g nu este uniform continuă. $\square$

2. Arătați că ecuația $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-$ $-2yz-9=0$ definește într-o vecinătate a punctului $(1,1,1)$ funcția implicită $z=z(x,y)$ și determinați $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$, $dz(1,1)$.

Soluție. Fie $D=\mathbb{R}^3$, $F:D\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z)=5x^2+$ $+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-9$.

$D=\mathbb{R}^3$ deschisă, $(1,1,1)\in D$.

1) $F(1,1,1) = 5+5+5-2-2-2-9 = 0.$

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 10x - 2y - 2z \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 10y - 2x - 2z \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 10z - 2x - 2y \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \text{ continue pe } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \text{ deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow F$ de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$.

3) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 10-2-2 = 6 \neq 0.$

Conform T.F.i. $\exists\, U$ o vecinătate deschisă a lui $(1,1)$, $\exists\, V$ o vecinătate deschisă a lui 1 și $\exists!\, z: U \to V$ (z funcția implicită) a.î.:

a) $z(1,1) = 1.$

b) $F(x,y,z(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in U.$

c) z este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} \quad \forall (x,y)\in U,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} \quad \forall (x,y)\in U.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,z(1,1))}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,z(1,1))} =$$

$$= -\frac{10\cdot 1 - 2\cdot 1 - 2z(1,1)}{10\cdot z(1,1) - 2\cdot 1 - 2\cdot 1} \underset{z(1,1)=1}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{10-2-2}{10-2-2} = -1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,z(1,1))}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,z(1,1))} =$$

$$= -\frac{10\cdot 1 - 2\cdot 1 - 2z(1,1)}{10\cdot z(1,1) - 2\cdot 1 - 2\cdot 1} \underset{z(1,1)=1}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{10-2-2}{10-2-2} = -1.$$

$dz(1,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $dz(1,1)(u,v) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)u + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)v = -u-v$. □

3. a) Calculați $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

<u>Soluție.</u>

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty (\operatorname{arctg} x)' \operatorname{arctg} x\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b (\operatorname{arctg} x)' \operatorname{arctg} x\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}^2 b - \operatorname{arctg}^2 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}. \;\square$$

b) Folosind eventual funcția Γ determinați $\int_0^\infty x^6 e^{-x^2}\,dx$.

<u>Soluție.</u> $\int_0^\infty x^6 e^{-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=}$

S.V. $x^2 = t \Leftrightarrow x = \sqrt{t}$

$2x\,dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$$= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^6 e^{-t}\cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{3-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt =$$

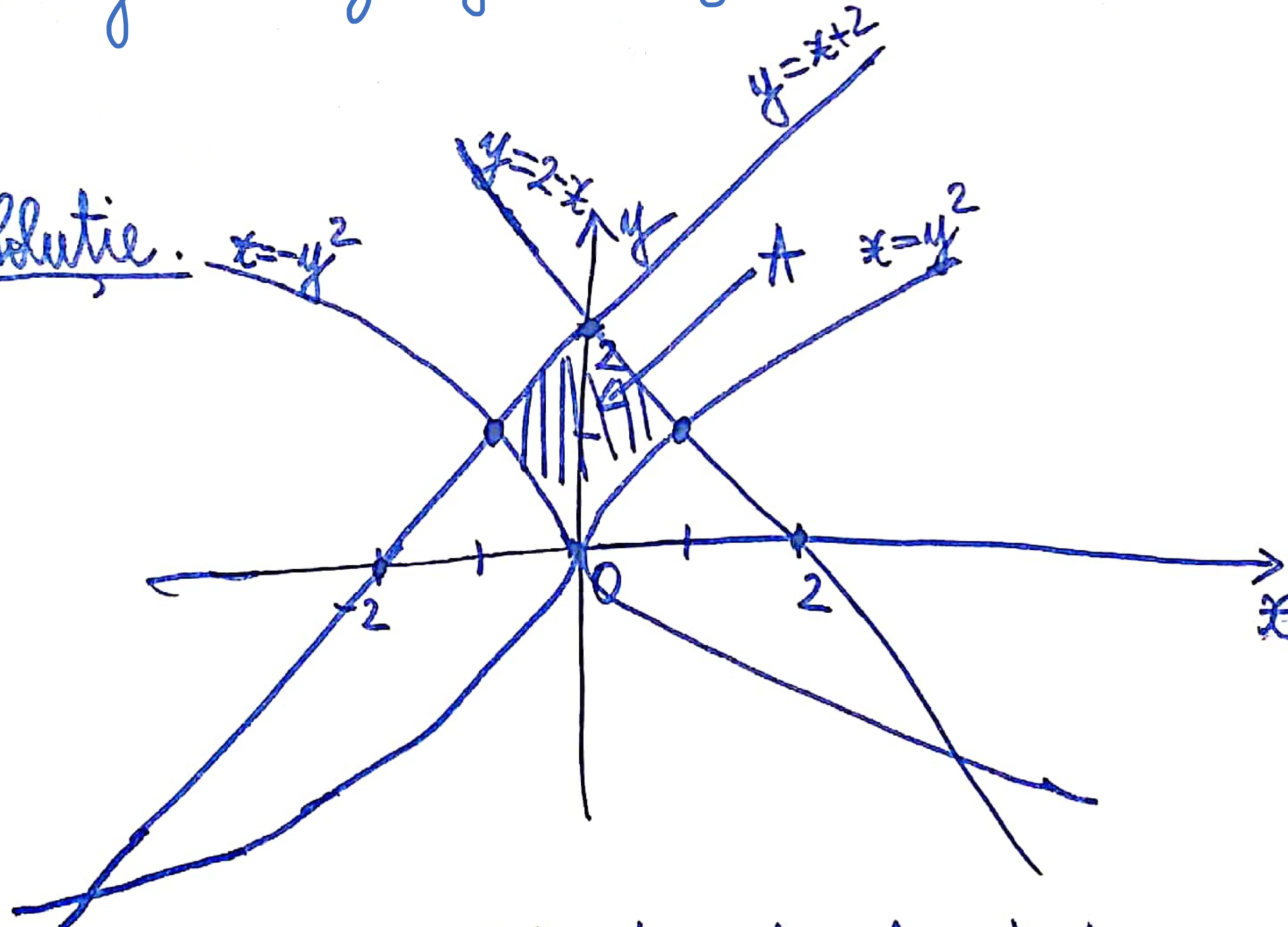
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{5}{2}} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{7}{2}-1} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{15}{8}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16}\sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{16}. \square$$

4. Calculați $\iint_A (xy+2y)\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0,\ x\leq y^2,\ x\geq -y^2,\ y\leq x+2,\ y\leq 2-x\}$.

Soluție.



Determinăm punctele de intersecție dintre parabola $x=-y^2$ și dreapta $y=x+2$ și punctele de intersecție dintre parabola $x=y^2$ și dreapta $y=2-x$.

$$\begin{cases} x=-y^2 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y^2 \\ y=-y^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y^2 \\ y^2+y-2=0. \end{cases}$$

Rezolvăm ecuația $y^2+y-2=0$

$\Delta = 1+8=9.$

$\sqrt{\Delta}=3.$

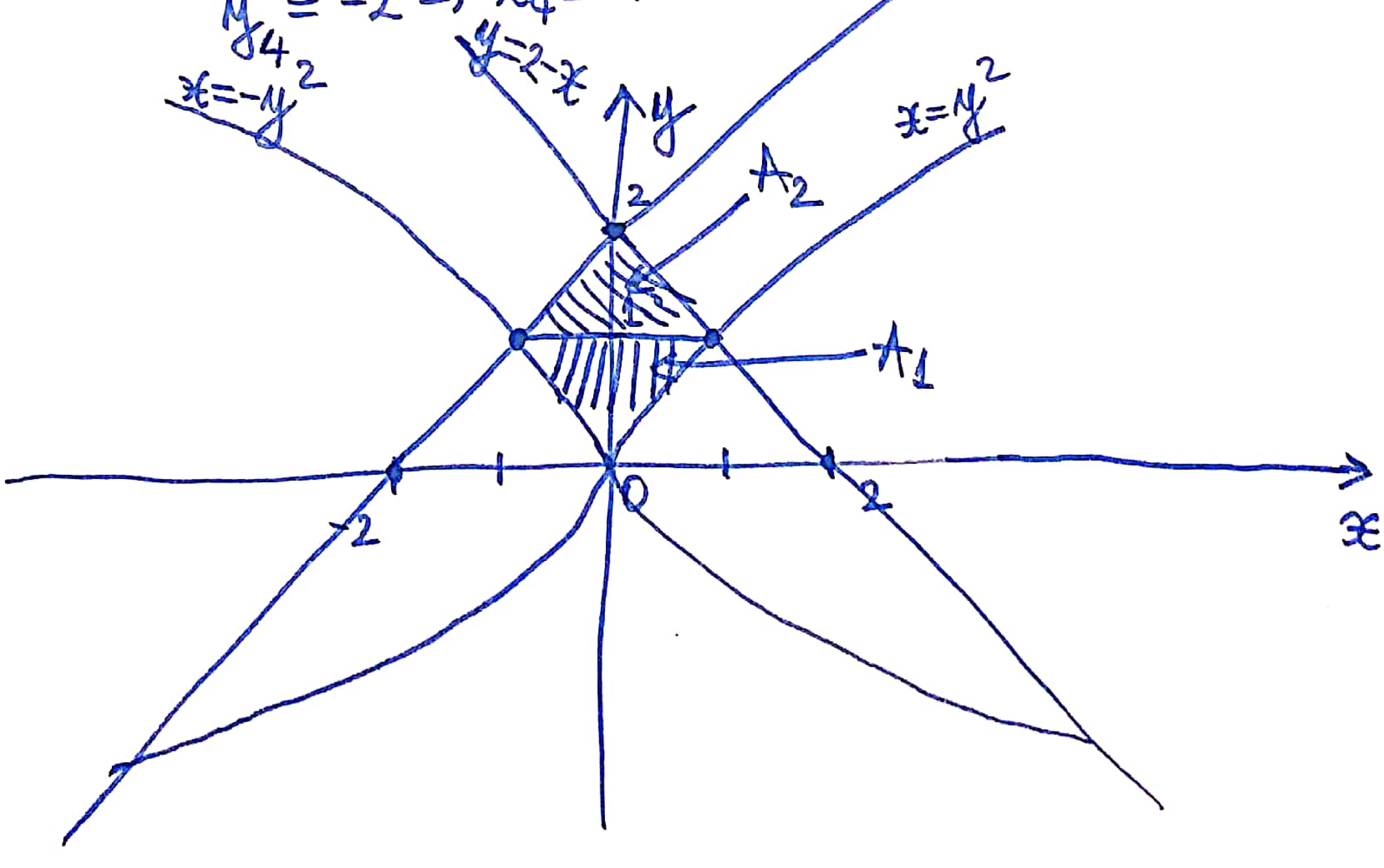
$y_1=\frac{-1+3}{2}=1 \Rightarrow x_1=-1.$

$y_2=\frac{-1-3}{2}=-2 \Rightarrow x_2=-4.$

$$\begin{cases} x=y^2 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ y=2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ y^2+y-2=0. \end{cases}$$

Avem: $y_3=1 \Rightarrow x_3=1.$

$y_4=-2 \Rightarrow x_4=4.$



Fie $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[0,1],\ -y^2\leq x\leq y^2\}$.

Fie $\varphi,\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\varphi(y)=-y^2$, $\psi(y)=y^2$.

φ,ψ continue.

A_1 mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[1,2],\ y-2\leq x\leq 2-y\}$.

Fie $\theta,\eta:[1,2]\to\mathbb{R}$, $\theta(y)=y-2$, $\eta(y)=2-y$.

θ,η continue.

A_2 mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

$A=A_1\cup A_2$.

$\mu(A_1\cap A_2)=0$.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy+2y$.

f continuă.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_A (xy+2y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{A_1}(xy+2y)\,dx\,dy+\iint_{A_2}(xy+2y)\,dx\,dy=$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-y^2}^{y^2} (xy + 2y)\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{y-2}^{2-y} (xy+2y)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} y \Big|_{x=-y^2}^{x=y^2} + 2yx \Big|_{x=-y^2}^{x=y^2} \right) dy \; +$$

$$+ \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} y \Big|_{x=y-2}^{x=2-y} + 2yx \Big|_{x=y-2}^{x=2-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 2y(y^2+y^2)\, dy + \int_1^2 2y(2-y-y+2)\, dy =$$

$$= 4\int_0^1 y^3\, dy + 8\int_1^2 y\, dy - 4\int_1^2 y^2\, dy =$$

$$= \cancel{4} \frac{y^4}{\cancel{4}} \Big|_{y=0}^{y=1} + \overset{4}{\cancel{8}} \frac{y^2}{\cancel{2}} \Big|_{y=1}^{y=2} - 4 \frac{y^3}{3} \Big|_{y=1}^{y=2} =$$

$$= 1 + 12 - \frac{28}{3} = \overset{3)}{13} - \frac{28}{3} = \frac{39-28}{3} = \frac{11}{3}. \square$$