1. Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$. Arătați, folosind definiția, că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Sol.:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \overset{def.}{\Longleftrightarrow} (\forall)\, \varepsilon > 0,\ (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (\forall)\, n \geq n_\varepsilon,$$

avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$, fixat în mod arbitrar.

Căutăm $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$$

$$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Alegem $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$.

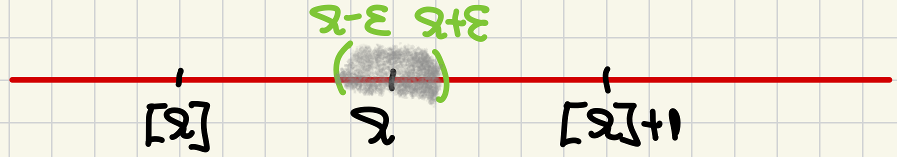
$(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, avem $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Deci $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ $\square$

2. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$. Arătați că $l \in \mathbb{Z}$.

Sol.: Știm că $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$, deci știm că $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$.

Presupunem prin absurd că $l \notin \mathbb{Z}$.



Alegem $\varepsilon>0$ a.î. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap\mathbb{Z}=\emptyset$, deci alegem $\varepsilon>0$ a.î. $[x]<x-\varepsilon$ și $x+\varepsilon<[x]+1$.

$$[x] < x-\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon < \underbrace{x-[x]}_{>0}$$

$$x+\varepsilon < [x]+1 \Leftrightarrow \varepsilon < \underbrace{[x]+1-x}_{>0}$$

Putem alege un $\varepsilon>0$ ca mai sus, deoarece $x-[x]>0$ și $[x]+1-x>0$. Mai exact, $(\forall)$ ε din intervalul $\left(0, \min\{x-[x], [x]+1-x\}\right)$ verifică faptul că $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap\mathbb{Z}=\emptyset$.

Pentru $\varepsilon>0$ a.î. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap\mathbb{Z}=\emptyset$, $(\exists)$ $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n\geq n_\varepsilon$, avem $x_n\in(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Cum $x_n\in\mathbb{Z}$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}$, rezultă că $x_n\in\overbrace{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\cap\mathbb{Z}}^{=\emptyset}$ $(\forall)$ $n\geq n_\varepsilon$, contradicție.

Rămâne că $x\in\mathbb{Z}$. $\square$

Criteriul raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi

Fie $(x_n)_n\subset(0,+\infty)$ a.î. $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\overset{not.}{=\!=}x\in[0,+\infty]$ $\overset{def.}{=\!=}[0,+\infty)\cup\{\infty\}$.

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0.$

2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty.$

3) Dacă $l=1$, atunci acest criteriu nu decide.

3. Fie $a\in(0,+\infty)$. Determinați $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot a^n$.

Sol.: Fie $x_n=n\cdot a^n$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\cdot a^{\cancel{n+1}}}{n\cdot \cancel{a^n}}=a\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=a$$

Cf. Criteriului raportului pentru șiruri cu termeni pozitivi, avem:

1) Dacă $a<1$ (i.e. $a\in(0,1)$), atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0.$

2) Dacă $a>1$ (i.e. $a\in(1,+\infty)$), atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty.$

3) Dacă $a=1$, acest criteriu nu decide.

Fie $a=1$.

$x_n=n\cdot 1^n=n$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Deci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

Am obținut:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\begin{cases}0, & \text{dacă } a\in(0,1)\\ +\infty, & \text{dacă } a\in[1,+\infty)\end{cases}\qquad\square$$

Criteriul radicalului pentru șiruri cu termeni pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset [0,+\infty)$ a.î. $(\exists) \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not.}{=} l \in [0,+\infty]$.

1) Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3) Dacă $l=1$, atunci acest criteriu nu decide.

4. Fie $a,b \in (0,+\infty)$. Determinați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a\cdot n^2+3n+5}{b\cdot n^2+2n+3}\right)^n$.

Sol.: Fie $x_n = \left(\dfrac{a\cdot n^2+3n+5}{b\cdot n^2+2n+3}\right)^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a\cdot n^2+3n+5}{b\cdot n^2+2n+3} = \frac{a}{b}$$

Cf. Criteriului radicalului pentru șiruri cu termeni pozitivi, avem:

1) Dacă $\frac{a}{b}<1$ (i.e. $a<b$), atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $\frac{a}{b}>1$ (i.e. $a>b$), atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3) Dacă $\frac{a}{b}=1$ (i.e. $a=b$), atunci criteriul nu decide.

Fie $a=b$.

$$x_n=\left(\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}\right)^n, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}-1\right)^n$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{an^2}+3n+5-\cancel{an^2}-2n-3}{an^2+2n+3}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{n+2}{an^2+2n+3}\right)^{\frac{an^2+2n+3}{n+2}}\right]}_{\downarrow n\to+\infty \atop e}{}^{\frac{n(n+2)}{an^2+2n+3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n}{an^2+2n+3}}=e^{\frac{1}{a}}$$

Am obținut $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\begin{cases}1, & a<1\\ +\infty, & a>1\\ e^{\frac{1}{a}}, & a=1\end{cases}$ $\square$

Propoziție: Fie $(x_n)_n\subset(0,+\infty)$ a.î. $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\overset{\text{not.}}{=\!=}l\in[0,+\infty]$.

Atunci $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$.

5. Determinați $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$.

Sol.: Fie $x_n=n, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$$

Deci $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$ $\square$

6. Fie $x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că $(x_n)_n$ este convergent.

Sol.: Arătăm că $(x_n)_n$ este monoton și mărginit.

Monotonia

Fie $n\in\mathbb{N}^*$.

$$x_{n+1}-x_n=\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)-\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n}}-\ln n\right)=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$$

$$=\frac{1}{n+1}-\left(\ln(n+1)-\ln n\right)$$

Fie $f_n:[n,n+1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\ln x$

1) f_n continuă pe $[n,n+1]$
2) f_n derivabilă pe $(n,n+1)$

$\overset{T.L.}{\Longrightarrow}$ $(\exists)\ c_n\in(n,n+1)$ a.î. $f_n'(c_n)=\frac{f_n(n+1)-f_n(n)}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}$

$\Rightarrow (\exists)\ c_n\in(n,n+1)$ a.î. $\frac{1}{c_n}=\ln(n+1)-\ln n$

$$n<c_n<n+1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{n+1}<\frac{1}{c_n}}<\frac{1}{n}$$

Deci, $\frac{1}{n+1}-\left(\ln(n+1)-\ln n\right)<0$

Așadar, $(x_n)_n$ este strict descrescător (1)

Mărginirea

Deoarece $(x_n)_n$ este strict descrescător, avem că $x_n \le x_1 = 1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $f_k : [k, k+1] \to \mathbb{R}$,

$f_k(x) = \ln x$.

1) f_k continuă pe $[k, k+1]$
2) f_k derivabilă pe $(k, k+1)$

$\overset{T.L.}{\Longrightarrow} (\exists)\, c_k \in (k, k+1)$ a.î. $f_k'(c_k) = \dfrac{f_k(k+1) - f_k(k)}{\cancel{k}+1-\cancel{k}}$

$\Rightarrow (\exists)\, c_k \in (k, k+1)$ a.î. $\dfrac{1}{c_k} = \ln(k+1) - \ln k$

$k < c_k < k+1 \Rightarrow \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{c_k} < \dfrac{1}{k}$

$k = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < 1$

$k = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

$\vdots$

$k = n \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$

$(+)$

$(\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n)$

$< 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Rightarrow \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \Big| -\ln n$

$\Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < x_n \Rightarrow x_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$

Așadar $0 < x_n \le 1, (\forall) n \in \mathbb{N}$ (i.e. $(x_n)_n$ mărginit) (2)

(1)
(2)
$\overset{T.W.}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_n$ este convergent $\square$