MODEL DE EXAMEN LA CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL

Oficiu: 1 punct

1. (2 puncte) a) Studiaţi convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+3)!}{(2n+1)!x^n}$$

în funcţie de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

(1 punct) b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi neconstantă cu proprietatea că $f(x+1) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că funcţia $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, este continuă, dar nu este uniform continuă.

2. (2 puncte) Arătaţi că ecuaţia $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 9 = 0$ defineşte într-o vecinătate a punctului $(1,1,1)$ funcţia implicită $z = z(x,y)$ şi determinaţi $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$, $dz(1,1)$.

3. (1 punct) a) Calculaţi

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

(1 punct) b) Folosind eventual funcţia Γ, determinaţi

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx.$$

(2 puncte) 4. Calculaţi

$$\iint_A (xy + 2y) dxdy,$$

unde A este mulţimea plană mărginită de $x = y^2$, $x = -y^2$, $y = x + 2$ şi $y = 2 - x$.