Limite de funcții

Def Fie $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2)$ sp. top, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $a \in A$, $l \in Y$ și $f: A \to Y$.

Spunem că f are limita l și scriem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dacă $\forall W \in \mathcal{V}_l$, $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $\forall x \in V \cap A$, avem că $f(x) \in W$.

Dar noi nu lucrăm cu spații topologice și NU VĂ DĂ NIMENI LA EXAMEN SPAȚII TOPOLOGICE!

Obs. În orice spațiu metric, limita unei funcții într-un punct e unică.

Def. Fie $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ și $f: A \to \mathbb{R}$. Funcția f are limita l în punctul x_0 dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $|f(x) - l| < \varepsilon$, $\forall x \in A$, $x \neq x_0$ și $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$.

Notație: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Def. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$ pentru $\forall$ șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent către x_0, șirul

(*) $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent către l. (pe asta o vom folosi mult așa că băgați-o la cap)

Teoremă (criteriul cleștelui / two policemen and a drunk theorem)

Fie $f, g, h: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ (punct de acumulare) și $V \in \mathcal{V}_{x_0}$.

Dacă $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in V \cap A \setminus \{x_0\}$ și $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

Limite remarcabile pe $\mathbb{R}$:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin / \operatorname{tg} / \arcsin / \operatorname{arctg} x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a \in (0, \infty)$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^r - 1}{x} = r$, $r \in \mathbb{R}$.

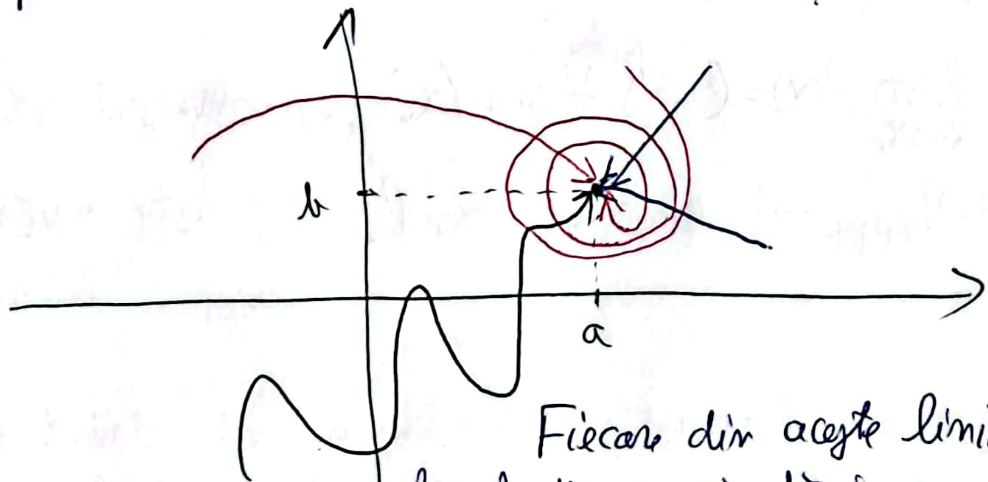
Toată lumea știe regula lui l'Hospital așa că trecem la

Limite de mai multe variabile

unde nu o puteți aplica :)

Pe $\mathbb{R}$ aveam că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, dacă limitele laterale în x_0 erau egale cu a. Adică aveam două moduri prin care puteam ajunge în x_0. Dar pentru o funcție de două variabile, de exemplu, nu mai e atât de simplu. De ce?

Să zicem că vrem să calculăm ceva gen $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$. Acum, ~~...~~ (x,y) se apropie de (a,b) dintr-un număr infinit de direcții.



Fiecare din aceste linii bombastice cu săgeată în cap are câte o ecuație $y = g(x)$.

Presupunem ~~...~~ $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = L$.

Dacă $f(x,y) \to L_1$ prin direcția C_1 și $f(x,y) \to L_2$ prin direcția C_2, atunci $L_1 = L_2 = L$.

Dacă cumva $L_1 \neq L_2$, atunci $\nexists \lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$.

Obs. Am vorbit ~~cum~~ despre cum alege direcții, dar putem folosi și șiruri.

Exemple de funcții de două variabile care nu au limită:

1) ~~$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$~~

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$.

Vreau să arăt că $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. ~~Deci~~

Deci, alegem două funcții (direcții) pentru care să avem limitele în $(0,0)$ diferite.

~~Fie $g(x,y)$~~

Prima direcție: $y=0$. Înlocuim y cu 0 și avem că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x+0} = 0.$$

A doua direcție: $y = -x+x^2$. Înlocuim y cu $-x+x^2$ și obținem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x(-x+x^2)}{x+(-x+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-1+x)}{x^2} = -1$$

Am găsit două direcții cu limitele diferite, deci $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

2) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Vreau să arăt că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0$.

Idee: ~~Scoate~~ Folosesc definiția cu șiruri (negația ei) (*) căutați steluța în prima pag.

Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ două șiruri cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$. Am găsit șir care contrazice def $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0$.

Acum hai să vedem cum calculăm acele limite când ele există.

Metoda I: Înlocuiți (x,y) cu punctul în care aveți de calculat limita și vă rugați să nu aveți caz de nedeterminare ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}$, etc)

Metoda II: Calcule până scăpați de nedeterminare și apoi înlocuiți.

Metoda III: Substituție. Înțelegeți mai ușor prin următorul exemplu:

Haideți să calculăm:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{ (limita fundamentală)}$$

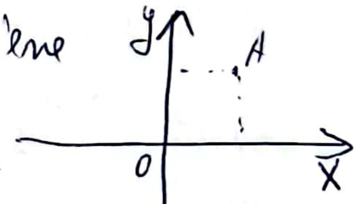
Fie $t \overset{not}{=} x^2y$

$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow t\to 0$

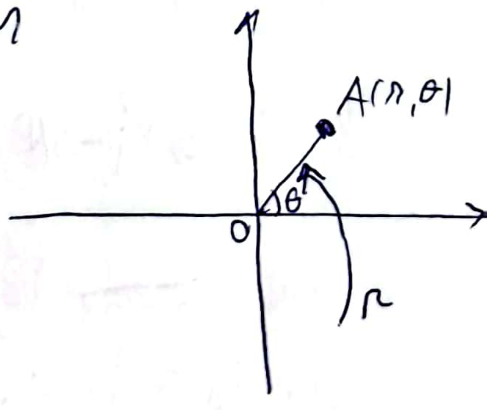
Metoda IV. Substituție prin coordonate polare

Ce sunt alea coordonate polare???

Pornim de la coordonatele carteziene. Un punct are coordonatele x și y, adică $A(x,y)$. x și y sunt coordonatele carteziene



Un punct A în coordonate polare va fi de forma $A(r,\theta)$, unde $r \in \mathbb{R}_+$ se numește rază și $\theta \in [0,2\pi)$ se numește unghi. θ se măsoară în sens trigonometric, iar $r = OA$ (distanța de la punct la origine).



Legătura dintre coordonatele carteziene și cele polare este $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

Cum le folosim pentru a calcula o limită? Uite așa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^3\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0.$$

$\cos^3\theta \in [-1,1]$

Fie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

($\cos\theta, \sin\theta \in [-1,1]$, iar înmulțit cu 0 dau 0, de aia punem doar $r\to 0$, raza când e 0, evident că x și y sunt 0, uitați-vă la desen)

Metoda V. Separăm limita (limita produsului/sumei este produsul/suma limitelor dacă ele există)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x}\ln(2y+1)-\ln(2y+1)}{x\ln(3y+1)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\frac{\ln(2y+1)}{\ln(3y+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\ln(2y+1)}{\ln(3y+1)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} 2e^{2x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2}{2y+1}}{\frac{3}{3y+1}} =$$

$$= 2\lim_{y\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{3y+1}{2y+1} = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Metoda VI. Criteriul cleștelui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4}.$$

Avem că $0 \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| = \frac{|x|^3}{x^2+y^4} \underset{(y^4\ge 0)}{\le} \frac{|x|^3}{x^2} = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

0

Deci, din criteriul cleștelui, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4} = 0.$

Funcții continue

Definiție: Fie $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ sp top $a \in X$ și $f: X \to Y$
Spunem că f e continuă în a dacă $(\forall)$ $W \in \mathcal{V}_{f(a)}$ avem $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_a$

În contextul definiției precedente spunem că f e cont (pe X) dacă f e cont în orice $x \in X$

Prop:
Fie $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ sp. top, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, $f: A \to Y$
Sunt echivalente:

1) f. cont în a

2) $(\forall)$ $W \in \mathcal{V}_{f(a)}$, $(\exists)$ $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(V \cap A) \subset W$

* Obs: 1) Fie $(X, \mathcal{T})$ sp. top $a \in X$ și $f: X \to \mathbb{R}$
Atunci f - cont în $a \Leftrightarrow (\forall)$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_a$ a.î. $(\forall)$ $x \in V_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

2) Fie (X, d_1), (Y, d_2) s.p. metrice $a \in X$ și $f: X \to Y$
Atunci f e cont în $a \Leftrightarrow \forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)$ $x \in X$ cu prop că $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

3) Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Atunci f e cont în $a \Leftrightarrow$ $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $\exists$ $\delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)$ $x \in A$ cu prop că $|x - a| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

4) Fie $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $+\infty \in A$ și $f: A \to \mathbb{R}$. Atunci f e cont în $+\infty \iff \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) x \in A$ cu prop că $x > \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(+\infty)| < \varepsilon$

5) Fie $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $+\infty \in A$ și $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ a.î. $f(+\infty) = +\infty$. Atunci f e cont în $+\infty \iff (\forall) \varepsilon > 0$ $(\exists) \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) x \in A$ cu prop că $x > \delta_\varepsilon$ avem $f(x) > \varepsilon$

*

Prop: Fie $(X, \mathcal{G}_1)$, $(Y, \mathcal{G}_2)$, $(Z, \mathcal{G}_3)$ sp. top, $a \in X$, $f: X \to Y$ cont în a și $g: Y \to Z$ cont în $f(a)$. Atunci $g \circ f: X \to Z$ cont în a

Prop: Fie $(X, \mathcal{G})$ un sp top, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A$, $(Y, \mathcal{G}_2)$ un sp top, $f: X \to Y$

1) f - cont în a atunci $f|_A: A \to Y$ e cont în a

2) Dacă $A \in \mathcal{V}_a$ și $f|_A: A \to Y$ e cont în a, atunci $f: X \to Y$ e cont în a

important

Prop: Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp metrice $a \in X$ și $f: X \to Y$. Sunt echivalente:

1) f cont în a

2) $(\forall) (x_n)_n \subset X$ a.î. $\lim_{n \to \infty} x_n \overset{d_1}{=} a$ avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} f(a)$

important

Prop

Fie $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ sp top, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in A \cap A'$ și $f: A \to Y$

Sunt echivalente: 1) f cont în A

2) $\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Prop: Fie $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ sp top și $f: X \to Y$. Sunt ech:

1) f continuă

2) $(\forall) D \subset Y$, o deschisă $(D \in \tau_2)$, avem că $f^{-1}(D) \subset X$ e deschisă $(f^{-1}(D) \in \tau_1)$

3) $(\forall) F \subset Y$, o închisă, avem că $f^{-1}(F) \subset X$ e închisă

4) $(\forall) B \subset Y$, avem $f^{-1}(\bar{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$

5) $(\forall) A \subset X$, avem $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

important

Prop: Fie (X, τ) un sp top $a \in X$ și $f, g: X \to \mathbb{R}$ dacă ~~funcții~~ func. cont. în a. Atunci $f+g$, $f \cdot g$ și $|f|$ cont în a

important

Prop: Fie (X, τ_1) un sp top, $\emptyset \neq K \subset X$ o mulțime compactă (Y, τ_2) și fie $f: X \to Y$ o funcție continuă. Atunci $f(K)$ e mult compactă

Teoremă

Fie $(X, \mathcal{T})$ un sp top, $\emptyset \neq K \subset X$, o multime compactă și $f: K \to \mathbb{R}$ cont. Atunci $\exists$, x_* și $x^* \in K$ a.î. $f(x_*) = \min\{f(x) \mid x \in K\}$ și $f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in K\}$

Funcții Uniform Continue

Definiție

Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp. metrice și $f: X \to Y$.
Spunem că f e uniform cont (u.c) dacă $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)$ $x, a \in X$ cu prop că $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon$ avem $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Obs: $(\forall)$ functie u.c este funcție continuă (~~...~~ NU ȘI RECIPROC)

Definiție:

Fie (X, d) un sp metric și $(x_n)_n \subset X$. Spunem că $(x_n)_n$ e șir Cauchy în ~~..~~ raport cu metrica d dacă $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $m, n \in \mathbb{N} \geq n_\varepsilon$ avem $d(x_m, x_n) < \varepsilon$

important

Prop: Fie (X, d_1) (Y, d_2) sp. metrice a.î. X este mulțime compactă și $f: X \to Y$ o funct continuă.
Atunci f e u.c.

~~Prop: Fi~~

Prop: Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp. metrice $(x_n)_n \subset X$ un șir Cauchy în raport cu metrica d_1 și $f: X \to Y$, o funcție u.c.
Atunci $(f(x_n)_n) \subset Y$ e șir Cauchy în raport cu metrica d_2

important

Prop: Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ sau $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ sau $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Sunt ~~echivalente~~ echivalente

1) f u.c

2) $\exists\, \tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}$ cont a.î. $\tilde{f}|_{(a,b]} = f$ sau $\tilde{f}|_{[a,b)} = f$ sau $\tilde{f}|_{(a,b)} = f$

importantă VITALĂ

Prop: Fie (X, d_1), (Y, d_2) sp metrice și $f : X \to Y$. Sunt ech:

1) f u.c

2) $(\forall)(x_n)_n \subset X$ și $(y_n)_n \subset X$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = 0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0$

importantă VITALĂ

Prop: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ și $f : A \to \mathbb{R}$ sunt ech

1) f u.c

2) $(\forall)(x_n)_n \subset A$ și $(\forall)(y_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$

important

Prop: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat ($\mathring{I} \neq \emptyset$ și nu se reduce la un singur element) și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata mărginită.

Atunci f e u.c.

important

Prop: Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ și $f: A \to \mathbb{R}$

Sunt ech: 1) f u.c.

2) $\exists\, a \in A$ a.î. f e u.c pe $A \cap (-\infty, a]$ și f e u.c pe $A \cap [a, \infty)$

1) Studiați continuitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unde

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ fiind o funcție compusă din operații cu funcții elementare.

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Deci f nu e continuă în origine.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| =$$

$$= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} \ge \sqrt{y^2} = |y| \Leftrightarrow 1 \ge \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f$ e cont în $(0,0)$

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Studiați continuitatea și uniform continuitatea lui f.

f este continuă fiind compusă di produsul cu funcții continue pe $\mathbb{R}\setminus\{0,0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ ("0 · mărginit")

Deci f e cont și în $x=0$

f derivabilă pe $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \left(x\sin\frac{1}{x}\right)' = \sin\frac{1}{x} + x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'\left(\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$= \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

$$|f'(x)| = \left|\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right| \le \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}_{\le 1} + \underbrace{\left|\frac{1}{x}\right|\left|\cos\frac{1}{x}\right|}_{\le 1} \le 2$$

$(\forall)\ x \in (-\infty,-1] \cup [1;\infty)$

Deci f este u.c pe $(-\infty;-1]$ și pe $[1,\infty)$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă pe } [-1,1] \\ [-1,1] \text{ compactă} \end{array}\right| \Rightarrow f$ este u.c. pe $[-1;1]$

2.

f e u.c pe $(-\infty; -1]$
f e u.c pe $(-1, 1)$
f e u.c pe $[1; \infty)$
$\Rightarrow f$ e u.c pe $\mathbb{R}$

3. Fie $a \geq 0$ și $f:(a,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$
Arătați că f e u.c. $\Leftrightarrow a > 0$

"$\Leftarrow$" Știm că $a > 0$, arătăm că f e u.c.

$$f'(x) = \frac{1}{x}, (\forall) x \in (a; \infty)$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{x} < \frac{1}{a}, (\forall) x \in (a; +\infty) \Rightarrow f \text{ e u.c.}$$

$x \in (a; +\infty) \Rightarrow a < x \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{x}$

"$\Rightarrow$"

Știm că f e u.c. și arătăm că $a > 0$
Presupunem prin absurd că $a = 0$
Alegem $(x_n)_n \subset (0, +\infty)$, $(y_n)_n \subset (0, +\infty)$

$$x_n = e^{-n}, y_n = e^{-2n}$$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{2n}} \right) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n \to \infty} (-n + 2n) = \infty \neq 0$$

Deci f nu e u.c $\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ așadar $a > 0$

4. Fie $f:(0;\frac{2}{\pi}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Arătați că f nu este u.c.

f nu este u.c. $\Rightarrow$ Atunci $\exists\ \tilde{f}: [0,\frac{2}{\pi}]$ continuă a.î. $\tilde{f}/_{(0,\frac{2}{\pi})} = f$

$\tilde{f}$ - cont în 0 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$$

Deci $(\exists)\ \lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$

Alegem $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin(2n\pi) = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Contradicție $1 \neq 0 \Rightarrow f$ nu e u.c