ARHITECTURA SISTEMELOR DE CALCUL SEMINAR 0x01

NOTIȚE SUPORT SEMINAR

Cristian Rusu

PACHET, EX 1

- **care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?**
- **este 0, cărțile sunt ordonate crescător**
- **amestecăm aleator cărțile, câtă informație avem acum?**
  - în câte feluri putem combina cele 52 de cărți?
  - 52!
  - deci informația este $\log_2(52!)$
    - cum calculăm valoarea asta?
    - $\log_2(a \times b) = \log_2(a) + \log_2(b)$
    - $\log_2(52!) = 225.6$ biți
    - cu aproximarea lui Stirling: $\log_2(52!) \approx 52\log_2(52) - 52\log_2 e = 221.4$ biți
  - algoritmic, cum amestecăm cărțile (eficient)?
    - aveți la dispoziție o funcție care returnează o valoare aleatoare în intervalul [0,1]

PACHET, EX 1

- **care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?**

- **este 0, cărțile sunt ordonate crescător**

- **amestecăm aleator cărțile, câtă informație avem acum?**
  - algoritmic, cum amestecăm cărțile (eficient)?
    - aveți la dispoziție o funcție care returnează o valoare aleatoare în interalul [0,1]
      - considerăm cărțile sortate crescător
      - calculăm i = round(52*rand())
      - selectăm din pachet cartea i
      - swap cartea i cu cartea 52
      - calculăm i = round(51*rand())
      - selectăm din pachet cartea i
      - swap cartea i cu cartea 51
      - ...
  - verificați algoritmul “Fisher–Yates shuffle”

.

URNA, EX 2

$$H(X) = E(I(X)) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{N} -p_i \log_2 p_i$$

- **în urnă: 5 bile roșii, 3 bile albastre**
- **observăm la extragere o bilă albastră, câtă informație am primit?**

$$I(\text{bila albastra}) = \log_2\left(\frac{1}{\frac{3}{8}}\right) = \log_2\left(\frac{8}{3}\right) = 1.42 \text{ biti}$$

- **cât era entropia urnei inainte de extragere?**

$$H(\text{urna}) = \frac{5}{8}\log_2\left(\frac{8}{5}\right) + \frac{3}{8}\log_2\left(\frac{8}{3}\right) = 0.95 \text{ biti}$$

- **cât este entropia urnei după extragere?**

$$H(\text{urna dupa extragere}) = \frac{5}{7}\log_2\left(\frac{7}{5}\right) + \frac{2}{7}\log_2\left(\frac{7}{2}\right) = 0.86 \text{ biti}$$

- **întrebare suplimentară: continuați calculul entropiei considerând că extragem în continuare (una câte una) toate bilele albastre**
- **întrebare suplimentară: repetați calculul entropiei considerând că extragem (una câte una) toate bilele roșii din urna originală**

BALANȚA, EX 3

- **12 bile, una dintre ele are o greutate diferită față de celelalte**
- **găsiți bila diferită cu un număr minim de cântăriri**

- **întrebări inițiale:**
  - câte cântăriri avem nevoie cu soluția “simplă”?
    - cântărim două câte două bilele (6 experimente): un experiment va reduce opțiunile la două bile, apoi comparăm fiecare bilă cu una din cele care es cu siguranță standard (2 experimente)
    - deci cu 8 cântăriri putem sigur găsi bila
  - câtă informație trebuie să descoperim?
    - care e bila diferită? $\log_2(12) = 3.58$
    - dacă este mai ușoară sau mai grea: 1 bit, dacă nu știm care situație este

.

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **să analizăm sistematic**
  - avem 3 valori ce trebuie specificate când facem o cântarire
    - câte bile putem în stanga balanței
    - câte bile putem în dreapta balanței
    - câte bile rămân pe masă
  - toate posibilitățile care ne interesează:
    - 6 cu 6, 0 pe masă
    - 5 cu 5, 2 pe masă
    - 4 cu 4, 4 pe masă
    - 3 cu 3, 6 pe masă
    - 2 cu 2, 8 pe masă
    - 1 cu 1, 10 pe masă

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **6 cu 6, 0 pe masă**
  - care sunt rezultatele posibile?
    - balanța cade spre stânga
    - balanța cade spre dreapta
    - balanța este echilibrată
  - care sunt probabilitățile pentru fiecare posibilitate?

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care
știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **6 cu 6, 0 pe masă**
  - care sunt rezultatele posibile?
    - balanța cade spre stânga (1/2)
    - balanța cade spre dreapta (1/2)
    - balanța este echilibrată (0)
  - care este entropia acestui alfabet?

$$H(6 \text{ cu } 6) = \frac{1}{2}\log_2(2) + \frac{1}{2}\log_2(2) = 1 \text{ bit}$$

.

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care
știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **5 cu 5, 2 pe masă**
  - care sunt rezultatele posibile?
    - balanța cade spre stânga (5/12)
    - balanța cade spre dreapta (5/12)
    - balanța este echilibrată (2/12 = 1/6)
  - care este entropia acestui alfabet?

$$H(5 \text{ cu } 5) = 2 \times \frac{5}{12} \log_2\left(\frac{12}{5}\right) + \frac{1}{6} \log_2(6) = 1.48 \text{ biti}$$

.

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **4 cu 4, 4 pe masă**
  - care sunt rezultatele posibile?
    - balanța cade spre stânga (1/3)
    - balanța cade spre dreapta (1/3)
    - balanța este echilibrată (1/3 = 4/12)
  - care este entropia acestui alfabet?

$$H(4 \text{ cu } 4) = 3 \times \frac{1}{3} \log_2(3) = 1.58 \text{ biti}$$

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **3 cu 3, 6 pe masă**
  - care sunt rezultatele posibile?
    - balanța cade spre stânga (1/4)
    - balanța cade spre dreapta (1/4)
    - balanța este echilibrată (1/2 = 6/12)
  - care este entropia acestui alfabet?

$$H(3 \text{ cu } 3) = 2 \times \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{1}{2} \log_2(2) = 1.5 \text{ biti}$$

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **Rezumat:**
  - 6 cu 6, 0 pe masă H = 1 bit
  - 5 cu 5, 2 pe masă H = 1.48 biți
  - 4 cu 4, 4 pe masă H = 1.58 biți
  - 3 cu 3, 6 pe masă H = 1.5 biți

  - ce alegem?

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **4 cu 4, 4 pe masă H = 1.58 biți**
  - facem experimentul, care sunt posibilitățile?
    - (caz 1) balanța cade la stânga
      - bilele pe partea stângă sunt mai grele
      - bilele pe partea dreaptă sunt mai ușoare
      - bilele de pe masa au aceeași greutate
    - (caz 2) balanța cade la dreapta
      - bilele pe partea dreaptă sunt mai grele
      - bilele pe partea stângă sunt mai ușoare
      - bilele de pe masa au aceeași greutate
    - (caz 3) balanța este echilibrată
      - bilele de pe masă conțin bila diferită

  - dacă este cazul 3, am redus numărul de bile de verificat la 4
  - dacă este cazul 1 sau 2, nu știm dacă bila este pe stânga sau pe dreapta dar știm sigur că nu e pe masa

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

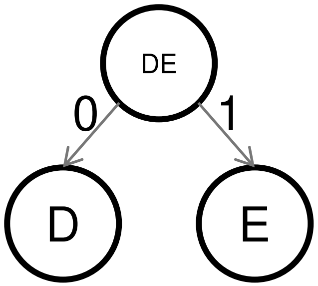
- **4 cu 4, 4 pe masă H = 1.58 biți**
  - (caz 3) balanța este echilibrată
    - bilele de pe masă conțin bila diferită
  - să numerotăm bilele:
    - pe partea dreaptă 1 2 3 4
    - pe partea stângă 5 6 7 8
    - pe masă 9 10 11 12
  - ce măsuratoare urmează?
    - 1 2 3 9 vs 4 5 10 11
      - dacă e echilibru, bila 12 este defectă (mai grea sau mai ușoară)
      - dacă balanța cade pe stânga
        - fie 9 e diferită și e grea
        - fie 10 sau 11 sunt diferite și una dintre ele e mai ușoară
        - măsuram 10 vs 11
          - dacă sunt egale, 9 e diferită și e mai grea sigur
          - dacă nu sunt egale, cea mai ușoară este cea diferită
      - dacă balanța cade pe dreapta ... procedura este similară
  - continuați voi ... cu celelalte cazuri

ÎNTREBĂRI SCURTE, EX 5

- a) $p = C_2^N / 2^N$
- b) $p = C_{N/2}^N / 2^N$, presupunem N par
- c) $p = (\frac{3}{4}N + 1) / 2^N$, presupunem N divizibil la 4
- d) $p = 2^{N-1} / 2^N = 1 / 2$
- e) $p = 2^{N-1} / 2^N = 1 / 2$
- f) $p = N / 2^N$
- g) $p = 2^{N/2} / 2^N = 1 / 2^{N/2}$, presupunem N par
- h) $p \approx [(2^N - 1) / \ln(2^N - 1)] / 2^N \approx [2^N / \ln(2^N)] / 2^N = 1 / \ln(2^N)$
- i) $p = (1 + \sum_{i=1}^{N/2} C_{2i}^N) / 2^N = 1 / 2$, presupunem N par
- j) $p = 1 / 2^N$

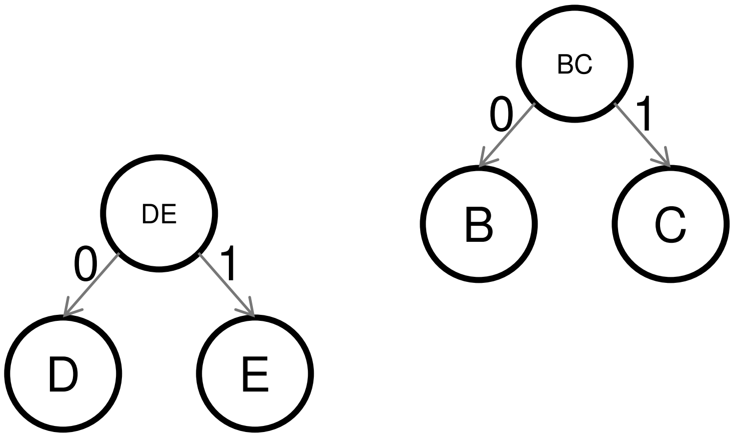
https://en.wikipedia.org/wiki/Prime-counting_function

HUFFMAN, EX 6



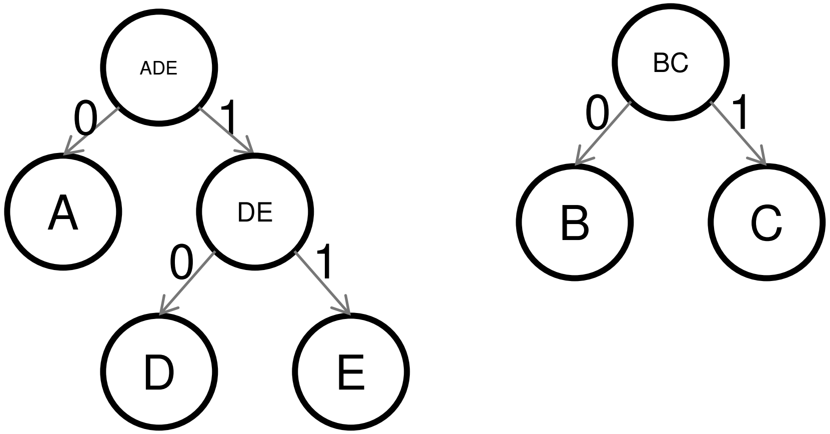
luăm două elemente cele mai improbabile (D și E, era OK C și E)
probabilitatea DE este 1/6 + 1/12 = 3/12 = 1/4

HUFFMAN, EX 6



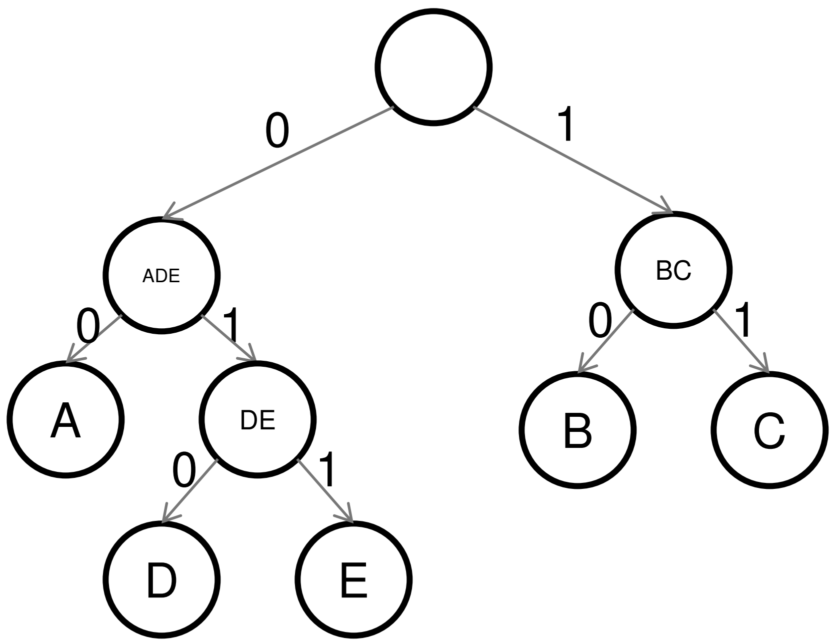
următorul element de adăugat acum este C cu probabilitate 1/6
dar 1/6 este mai puțin decât probabilitatea DE, deci C nu va fi singur
probabilitatea BC este ¼ + 1/6 = 10/24 = 5/12

HUFFMAN, EX 6



următorul element este A și are probabilitate 1/3
nu contează pe care arbore îl punem, fie împreună cu DE fie cu BC
(dacă îl puneți lângă BC codul lui A e diferit dar are aceeași dimensiune)

HUFFMAN, EX 6



arborele complet și codurile:
A = 00
B = 10
C = 11
D = 010
E = 011

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- **tot ce e *D* este sunt biți de date**
- **tot ce e *P* sunt biți de paritate**

D_{00}	$\boxed{D_{01}}$	D_{02}	$\boxed{P_{0\ell}}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	$\boxed{P_{c1}}$	P_{c2}	$\boxed{P_{c\ell}}$

- **să presupun că D_{01} se schimbă (din 0 în 1, sau invers)**
- **câți biți din mesaj se schimbă?**
  - 3 biți de paritate + bitul de date
- **care este distanța Hamming minimă?**
  - 4 biți se schimbă, deci 4

.

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- **este acest mesaj corect?**
  - dacă nu, de ce?

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- **pare corect, toți biții de paritate se potrivesc cu ce observăm**

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- **este acest mesaj corect?**
  - dacă nu, de ce?

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

1	0	1	1
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1

- **nu este corect: bitul de paritate P_{c1} semnaleaza o eroare, dar biții de paritate de linie nu semnalează nimic: deci problema este chiar P_{c1} care a fost corupt**

.

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- **este acest mesaj corect?**
  - dacă nu, de ce?

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0

- **nu este corect: bitul de paritate $P_{0\ell}$ este greșit, bitul de paritate P_{c0} este greșit => bitul de date D_{00} este greșit deci trebuie schimbat din 0 în 1; verificare: bitul total $P_{c\ell}$ este 0 deci ne trebuie în mesaj un număr impar de biți (deci cu schimbare este corect)**

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- **este acest mesaj corect?**
  - dacă nu, de ce?

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	1	1	1

- **nu este corect: toți biții de paritate de rând și coloane sunt OK, dar bitul de paritate total $P_{c\ell}$ nu e OK => deci bitul în eroare este chiar $P_{c\ell}$**

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- **este acest mesaj corect?**
  - dacă nu, de ce?

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

- **nu este corect: toți biții de paritate $P_{1\ell}$, $P_{2\ell}$, P_{c1} și P_{c2} sunt greșiți, iar bitul de paritate $P_{c\ell}$ este corect => eroare este undeva pe linia/coloana 1 și 2: deci putem detecta erori de 2 biți dar nu le putem corecta**

RATA ENTROPIEI, EX 10

- **lungimea medie a mesajului**
  - 1x*p* + 2x(1-*p*) = 2 – *p*

- **entropia în cazul nostru**

$$H = p\log_2\frac{1}{p} + (1-p)\log_2\frac{1}{1-p}$$

- **rata entropiei**

$$R = \frac{p\log_2\frac{1}{p} + (1-p)\log_2\frac{1}{1-p}}{2-p}$$

- **cum maximizăm?**
  - derivăm $R' = \frac{2\log_2\frac{1}{p} - \log_2\frac{1}{1-p}}{(2-p)^2}$ și egalăm cu zero $\longrightarrow \log_2\frac{1-p}{p^2} = 0$
  - *p* este soluția ecuației $p^2 + p - 1 = 0 \longrightarrow p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

care este legătura cu raportul de aur?

.

MAXIMIZAREA ENTROPIEI, EX 11

- **considerăm că avem probabilități astfel încât $p_1 < p_2$**
- **avem că $p_1 + \varepsilon < p_2 - \varepsilon$ pentru ε destul de mic**
- **vrem să arătăm că**

$$H(\{p_1+\epsilon, p_2-\epsilon, p_3, \ldots, p_N\}) > H(\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N\})$$

- **trebuie să arătăm că**

$$H(\{p_1+\epsilon, p_2-\epsilon, p_3, \ldots, p_N\}) - H(\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N\}) > 0$$

- **diferența dintre cele două entropii se scrie ca**

$$-p_1 \log_2\left(\frac{p_1+\epsilon}{p_1}\right) - \epsilon \log_2(p_1+\epsilon) - p_2 \log_2\left(\frac{p_2-\epsilon}{p_2}\right) + \epsilon \log_2(p_2-\epsilon) > 0$$

- **acum, vrem să folosim** $\log_2(1+x) \approx x + O(x^2)$

MAXIMIZAREA ENTROPIEI, EX 11

- **diferența dintre cele două entropii se scrie ca**

$$-p_1 \log_2\left(\frac{p_1+\epsilon}{p_1}\right) - \epsilon \log_2(p_1+\epsilon) - p_2 \log_2\left(\frac{p_2-\epsilon}{p_2}\right) + \epsilon \log_2(p_2-\epsilon) > 0$$

- **acum, vrem să folosim** $\log_2(1+x) \approx x + O(x^2)$
- **pe partea stângă a inegalității rezultă:**

$$-\epsilon - \epsilon \log_2 p_1 + \epsilon + \epsilon p_2 + O(\epsilon^2) = \epsilon \log_2 \frac{p_2}{p_1} + O(\epsilon^2)$$

- **este această expresie mereu pozitivă?**
  - da, pentru că am presupus $p_1 < p_2$

.

CODARE PREFIX, EX 12

- **exemple de coduri:**
  - 1
  - 01
  - 001
  - 0001
  - ...

- **indiferent de *p_i*, fiecare simbol are un bit în plus față de precedentul, dar simbolurile cele mai frecvente tot primesc coduri mai scurte decât cele mai puțin frecvente**
- **entropia** $H = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$
- **lungimea medie a codării** $L = \sum_{i=1}^{N} i p_i$

- **când avem *H = L*?** $\sum_{i=1}^{N} p_i (i - \log_2 \frac{1}{p_i}) = 0 \longrightarrow i = \log_2 \frac{1}{p_i}, \text{ deci } p_i = 2^{-i}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 \text{ pentru } N \to \infty$$