

Matrici

- $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$
- $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
- $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\det(A^*) = \det(A)^{n-1}$
- $V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$
- $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$
- $A = A^T \Leftrightarrow A \text{ simetrică}$
- $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ - matrice simetrice
- $A = -A^T \Leftrightarrow A \text{ antisimetrică} \Rightarrow a_{ii} = 0, i = \overline{1, n}$
- $\mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$ - matrice antisimetrice

Polinom Caracteristic

- $p_A(X) = \det(A - XI_n)$
- $p_A(X) = \det(A - XI_n) = (-1)^n (X^n - \sigma_1 X^{n-1} - \dots + (-1)^n \sigma_n)$
- $\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Tr}(A)$
- σ_k minor diagonal de ordin k
- $\sigma_n = \det(A)$
- Aplicatii: calcul A^{-1} , ecuatii binome in $M_2(\mathbb{C})$, calcul A^n :
- $A^n = x_n A + y_n I_2$, $A \in M_2(\mathbb{C})$
- Avem recurenta de ord 2: $x_n = \sigma_1 x_{n-1} - \sigma_2 x_{n-2}$, $y_n = -\sigma_2 x_{n-1}$
- Se rezolva cu ec. caracteristica $t^2 - \sigma_1 t + \sigma_2 = 0$, minor diagonal de ordin k Se află t_1, t_2 din rezolvarea ecuației
- Avem $x_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n$,
- c_1, c_2 se află înlocuind x_1, x_2

Sisteme liniare

- inv. Gauss-Jordan: $(A | I_n) \sim (I_n | A^{-1})$
- Met. eliminării Gauss-Jordan: $(A | B) \sim (I_n | X)$

Spații vectoriale

- $(V, +, \cdot)_K$ este spațiu vectorial peste corpul \mathbb{K} dacă:

- $(V, +)$ este grup abelian
- $a(bx) = (ab)x$
- $a(x+y) = ax+ay$
- $(a+b)x = ax+bx$
- $1_K \cdot x = x$

- $V' \subseteq V$ subspațiu $\Leftrightarrow ax+by \in V'$, $\forall x, y \in V'$, $\forall a, b \in K$

Spatiali generat de S:

- $x \in \langle S \rangle \Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in S$, $\exists a_1, \dots, a_n \in K$ astfel încât $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \in S$
- S este SLI $\Leftrightarrow \forall a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, $x_i \in S \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$
- S este SLD $\Leftrightarrow \exists a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, $x_i \in S$, $(a_i \neq 0)$
- S este SG $\Leftrightarrow \langle S \rangle = V$
- S este Baza $\Leftrightarrow S$ este SLI și S este SG
- $\dim V = n \Leftrightarrow$ orice bază a lui V are n vectori
- Orice submultime a unui SLI e SLI
- Orice supramultime a unui SLD e SLD
- Orice supramultime a unui SG e SG
- Teorema schimbului:** Dacă $\{x_1, \dots, x_n\}$ este SG și $\{y_1, \dots, y_n\}$ este SLI, atunci $\{y_1, \dots, y_n\}$ este SG

Repere

- Reper = bază ordonată $\{e_1, \dots, e_n\}$
- Trecere între baze:
- $\mathcal{R} \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$, $e'_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$
- Trecere coordinate:** $[x]_{\mathcal{R}} = A[x]_{\mathcal{R}'}$
 - Dacă $\dim_K V = n$ și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, atunci sunt echivalente:
 - * B este bază
 - * B este SLI
 - * B este SG

- Orientare:** dacă A este matricea de trecere de la B la B' , atunci:
 - * $\det A > 0 \Rightarrow$ la fel orientate
 - * $\det A < 0 \Rightarrow$ opus orientate
- Criteriu de independentă:** $\{v_1, \dots, v_k\}$ este SLI $\Leftrightarrow \text{rg}(v_1, \dots, v_k) = \text{maxim}$
- $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$ cel mai mic subspațiu care conține pe V_1 și V_2
- Teorema Grassmann:** $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$
- $V_1 \oplus V_2$ (suma directă) $\Leftrightarrow V_1 + V_2$ și $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
- $S(A) = \{X \in V \mid AX = 0\}$ este subspațiu vectorial
- $\dim S(A) = \dim V - \text{rg}(A)$
- Dacă $V' \subseteq V$ subspațiu, atunci coordonatele se pot scrie ca SLO
- Dacă $V' \subseteq V$ și $\dim V' = \dim V$, atunci $V' = V$

Aplicații liniare

- $f : V_1 \rightarrow V_2$ este aplicație liniară $\Leftrightarrow f(ax+by) = af(x)+bf(y)$
- Dacă $V' \subseteq V_1$ subspațiu, atunci $f(V')$ este subspațiu din V_2
- $\ker f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}$
- $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in V_1\}$
- $\ker f$ și $\text{Im } f$ sunt subspații vectoriale
- f injectivă $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$
- f surjectivă $\Leftrightarrow \dim(\text{Im } f) = \dim V_2$
- Teorema dimensiunii:** $\dim V_1 = \dim \ker f + \dim \text{Im } f$
- f injectivă $\Rightarrow \dim V_1 = \dim \text{Im } f$
- f surjectivă $\Rightarrow \dim V_1 = \dim \ker f + \dim V_2$
- f bijectivă $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Matricea asociată aplicației liniare

- Dacă $f : V_1 \rightarrow V_2$, baze R_1, R_2 , atunci $[f]_{R_1, R_2} = A$ este matricea asociată lui f
- Caracterizare:** f este liniară $\Leftrightarrow \exists A \in M_{m \times n}(K)$ astfel încât $[f(x)]_{R_2} = A[x]_{R_1}$
- Dacă C, D sunt matrice de trecere pentru baze noi, atunci $A' = D^{-1}AC$
- $A_{f \circ g} = A_f \cdot A_g$
- f este injectivă $\Leftrightarrow \text{rg } A = \dim V_1$
- f este surjectivă $\Leftrightarrow \text{rg } A = \dim V_2$
- f este bijectivă $\Leftrightarrow A \in \text{GL}(n, K)$
- $V^* = \{\varphi : V \rightarrow K \mid \varphi \text{ liniar}\}$ este spațiul dual
- $V \cong V^*$

Proiecții și Simetrii

- Spațiu vectorial: $V = V_1 \oplus V_2$
- Proiecție** $p : V \rightarrow V_1$, $p \in \text{End}(V)$, cu proprietatea: $p \circ p = p$.
- Pentru orice $x = x_1 + x_2$, $p(x) = x_1$
- Simetrie** $s : V \rightarrow V$, $s \in \text{End}(V)$, involutivă: $s \circ s = \text{id}_V$.
- Relația dintre simetrie și proiecție: $s = 2p - \text{id}_V$.
- Pentru orice $x = x_1 + x_2$, $s(x) = x_1 - x_2$

Vectori proprii

- Vectorul $x \in V$ este vector propriu pentru $f \in \text{End}(V)$ dacă există $\lambda \in \mathbb{K}$ astfel încât:

$$f(x) = \lambda x.$$
- Subspațiu propriu corespunzător lui λ :

$$V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\},$$
 care este invariant: $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.
- Polinom caracteristic pentru matricea $A = [f]_{\mathcal{R}}$: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$
- λ este valoare proprie dacă și numai dacă:

$$P_A(\lambda) = 0.$$
- Polinomul caracteristic este invariant la schimbarea de bază.

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^m (\lambda - \lambda_i)^{m_i}, \sum_i m_i = n,$$

unde m_i sunt multiplicitățile valorilor proprii.

- Spectrul lui f :

$$\sigma_f = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}.$$
- Vectorii proprii corespunzător valorilor proprii distincte formează un SLI.
- Pentru o valoare proprie λ cu multiplicitate m_λ :

$$\dim V_\lambda \leq m_\lambda.$$
- Teorema diagonalizării:** f este diagonalizabil dacă și numai dacă există bază \mathcal{R} astfel încât:

$$[f]_{\mathcal{R}} \text{ este diagonală} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \in \mathbb{K}, \\ \dim V_{\lambda_i} = m_i \end{array} \right.$$

Forme biliniare și pătratice

- Formă biliniară** $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ este biliniară dacă:
 - $g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha g(x, z) + \beta g(y, z)$
 - $g(x, \alpha y + \beta z) = \alpha g(x, y) + \beta g(x, z)$, $\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- Spațiile:
 - $L(V, V; \mathbb{K}) = \{g \text{ biliniar}\}$, L^s sim L^a anti
- g simetrică $\Leftrightarrow g(x, y) = g(y, x)$, antisimetrică $\Leftrightarrow g(x, y) = -g(y, x)$.
- Matricea asociată lui g în baza $\mathcal{R} = \{e_i\}$:

$$G = (g_{ij})_{i,j=1}^n, \quad g_{ij} = g(e_i, e_j).$$
- Formula pentru $g(x, y)$ în coordonate:

$$g(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{ij}.$$

- Schimbare de bază $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ cu matricea de trecere C :

$$G' = C^\top G C, \quad \text{rg } G' = \text{rg } G.$$

- Formă pătratică** $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ este:

$$Q(x) = g(x, x), \quad g \in L^s(V, V; \mathbb{K}).$$

Bijectivitate între forme pătratice și forme biliniare simetrice.

- Forma polară a lui g din Q :

$$g(x, y) = \frac{1}{2} [Q(x+y) - Q(x) - Q(y)].$$

- Nucleul lui g :

$$\ker g = \{x \in V \mid g(x, y) = 0, \forall y \in V\}.$$

g este nedegenerat dacă $\ker g = \{0\} \Leftrightarrow \det G \neq 0$.

- Formă pozitiv definită** (pe \mathbb{R}):

$$Q(x) > 0, \forall x \neq 0, \quad Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- Formă canonica** a lui Q :

$$\exists \mathcal{R} \text{ bază}, \quad Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2, r = \text{rg } Q.$$

- Formă normală** (reală):

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2,$$

unde $r = \text{rg } Q$.

- Signatura:**

(i, j) unde i = pozitivi, j = negativi.

Q pozitiv definită \Leftrightarrow signatura $(n, 0)$.

- Metoda Gauss:** Se grupează toti termenii care conțin x_1 , se face pătrat, schimbare de reper. Se continuă pt restul

- Metoda Jacobi:** Pentru matricea G a lui Q , dacă Δ_k minorii principali sunt nenuli, atunci:

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2.$$

Dacă $\Delta_i > 0$ pentru toate i , atunci Q este pozitiv definită.

Spații vectoriale euclidiene

Produs scalar

- Produs scalar $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ pe spațiu vectorial real $(V, +, \cdot)$ este o formă biliniară simetrică, pozitiv definită

- Norma vectorului definită prin: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Repere ortogonale și ortonormate

- Un reper $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ este:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ortogonal} \Leftrightarrow g(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j \\ \text{ortonormal} \Leftrightarrow g(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{array} \right.$$

- Schimbarea de reper ortonormal $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ este dată de o matrice ortogonală: $C \in O(n) \Leftrightarrow CC^\top = I_n$, iar dacă $\det C > 0$, atunci $C \in SO(n)$.

- **Propoziție:** a da un produs scalar este echivalent cu a preciza un reper ortonormal.

Produs vectorial în \mathbb{R}^3

- Pentru $x, y \in \mathbb{R}^3$,

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - g_0^2(x, y).$$
- $x \times y$ este perpendicular pe x și y :

$$g_0(x \times y, x) = g_0(x \times y, y) = 0.$$
- Formula determinantului formal:

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3).$$

- Proprietăți:

$$x \times y = -y \times x,$$

$$(x \times y) \times z = g_0(x, z)y - g_0(y, z)x,$$

identitate Jacobi: $\sum_{cyc} (x \times y) \times z = 0.$

Produsul mixt

$$z \wedge x \wedge y := g_0(z, x \times y) = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Ortonormarea: Gram-Schmidt

Pentru $\mathcal{R} = \{f_1, \dots, f_n\}$, construim orto.

$$\mathcal{R}' = \{e_1, \dots, e_n\} :$$

$$\begin{cases} e_1 = f_1, \\ e_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle f_k, e_j \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle} e_j, \quad k = 2, \dots, n. \end{cases}$$

$$\text{Baza ortonormată: } \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}.$$

Complement ortogonal

$$x^\perp = \{y \in V \mid g(x, y) = 0\},$$

$$U^\perp = \{y \in V \mid g(x, y) = 0, \forall x \in U\}.$$

Pentru $U \subseteq V$,

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Transformări Ortogonale

- Definiție:** Fie $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ s.v.e.r. O aplicație liniară $f : E \rightarrow E$ este **transformare ortogonală** dacă:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

$$\|f(x)\| = \|x\|, \quad f \text{ este injectivă.}$$

$$O(E) = \{f \in \text{End}(E) \mid f \text{ trans. orto.}\}.$$

- Matricea asociată:** Dacă \mathcal{R} este reper ortonormat în E , atunci matricea $A = [f]_{\mathcal{R}}$ este ortogonală:

$$A \in O(n), \quad AA^\top = I_n.$$

- Valorile proprii ale lui $f \in O(E)$ sunt ± 1 .

- Dacă $U \subseteq E$ este subspațiu invariant:

$$f(U) = U, \quad U^\perp \text{ este invariant și } f|_{U^\perp} \text{ este tot ortogonală.}$$

Clasificarea transformărilor ortogonale:

- $n = 1$:

$$O(E) = \{\text{id}, -\text{id}\}, \quad \lambda = \pm 1.$$

- $n = 2$: Pentru $f \in O(2)$, două cazuri: $\det A = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Rotație de unghi φ în plan.

$\det A = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

(există un reper astfel încât f este o simetrie ortogonală).

- $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

- $n \geq 4$: Orice transformare ortogonală poate fi scrisă ca compozitie de cel mult n simetrii ortogonale față de hiperplane.

- Endomorfisme simetrice:** $f \in \text{End}(E)$ este simetric dacă:

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

Notăm $\text{Sim}(E)$ mulțimea endomorfismelor simetrice.

- Proprietăți:

- Matricea asociată $A = [f]_{\mathcal{R}}$ este simetrică.
- Vectorii proprii corespunzător valorilor proprii distinse sunt ortogonali.
- Polinomul caracteristic are toate rădăcinile reale.
- Există bază ortonormată formată din vectori proprii în care A este diagonală.
- $Q(x) = \langle f(x), x \rangle$
- metoda diagonalizării - se diagonalizează matricea asociată lui f cu schimbare de reper ortogonal cu vectori proprii, $Q(x)$ va avea forma canonică

Spații affine euclidiene

- Tripletul $(A, V/\mathbb{K}, \varphi)$ este spațiu afin dacă:
 - $A \neq \emptyset$ este mulțime de puncte,
 - V/\mathbb{K} este spațiu vectorial director,
 - $\varphi : A \times A \rightarrow V$ astfel încât:
$$\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C),$$

$$\exists O \in A : \varphi_O : A \rightarrow V, \quad \varphi_O(A) = \varphi(O, A) \text{ bij.}$$
- Spațiu afin euclidian: spațiu afin cu spațiul director un spațiu vectorial euclidian.
- $A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\}$ ssp. afin
- are spațiul director $V = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = O_{n,1}\}$
- Puncte affine independente \iff vectorii direcți asociați sunt liniari independenți.
- Repere affine: puncte P_0, P_1, \dots, P_n cu vectori $\overrightarrow{P_0 P_i}$ care formează o bază în spațiu director.
- Ecuția dreptei affine cu punct A și vector directie v :
$$\forall M \in D, \quad \exists t \in \mathbb{R} : \quad \overrightarrow{AM} = tv.$$

Ecuării parametrice:

$$x_i - a_i = tv_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ecuatia unei drepte prin 2 puncte A, B:

$$x_i - a_i = t(b_i - a_i)$$

- Ecuția planului afin cu punct A și direcții u, v :

$$\forall M \in \pi, \exists t, s \in \mathbb{R} : \quad \overrightarrow{AM} = tu + sv.$$

Ecuării parametrice:

$$x_i - a_i = tu_i + sv_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Excuatația prin punct A și cu normală $N(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\alpha(x - a_1) + \beta(x - a_2) + \gamma(x - a_3) = 0$$

Ecuatia planului prin tăieturi.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Arii, volume

- Arie paralelogram $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \varphi$
- Arie triunghi $\frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \|$
- Distanță de la punct la dreapta $\text{dist}(A, \mathcal{D}) = \frac{\| \vec{AB} \times \vec{AC} \|}{\| \vec{BC} \|} B, C$ puncte oarecare pe dreapta
- Volum paralelipiped $\{u, v, w\}$ SLI. $V = |u \wedge v \wedge w|$ (prod. mixt)
- Volum tetraedru $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |u \wedge v \wedge w|$, sau:

$$|\Delta| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Distanță de la punct la plan $\text{dist}(A, (BCD)) = \frac{|A|}{\| \vec{BC} \times \vec{BD} \|}$

- Sau $d = \frac{|\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$, unde ecuația planului $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$

Conice

- O conică este locul geometric care respectă ecuația

$$\Gamma : f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A^\top$$

$$\bullet B = (b_1 \quad b_2), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$$

- invariante metrici

$$\delta = \det A, \quad \Delta = \det \tilde{A}, \quad \frac{\Delta}{\delta}, \quad r = \text{rang } A, \quad r' = \text{name } \tilde{A}$$

- $\Delta = 0$ natura $\delta =$ genul

- $\Delta \neq 0$ Conică nedegenerată
 - $\delta = 0$ parabolă
 - $\delta < 0$ hiperbolă
 - $\delta > 0$ \emptyset , elipsă

- $\Delta = 0$ conică degenerată

- $\delta = 0$ punct dublu
- $\delta < 0$ drepte concurente
- $\delta > 0$ \emptyset , drepte paralele

- elipsă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = b^2 + c^2$$

- hiperbolă

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2, \quad y = \pm \frac{b}{a}x \text{ asimp.}$$

- parabola

$$x^2 = 2px_1$$

- $\frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, d)} = e$

Aducerea la o formă canonica

- $\delta \neq 0 \implies$ are centru unic

- Pentru aflarea coordonatelor centrului se rezolvă:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\bullet f(x_1^0, x_2^0) = \frac{\Delta}{\delta}$$

- 1. Se află centrul

- 2. Se face o translatăie $X = X' + X_0$ (notăm θ)

$$\bullet 3. \theta(\Gamma) = f(x_1, x_2) = a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

- 4. Aducem $Q(x) = a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2$ la o formă canonică prin metoda valorilor proprii

- 5. \mathcal{R} va fi matricea de trecere la reperul **ortonormal**

- 6. $X' = R \cdot X''$ o rotație τ

- 7. $\tau(\theta(\Gamma)) : \lambda_1x_1''^2 + \lambda_2x_2''^2 + \frac{\Delta}{\delta}$ formă canonică