Curs 1

Structuri algebrice în informatică

Mulțimi

Def Mulțime = colecție de obiecte bine definite

Putem descrie o mulțime → enumerăm elementele sale

sau ↳ precizăm o proprietate pe care doar acele elemente o au

$\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 / x\}$

Fie A, B mulțimi: - $A \subseteq B$, dacă orice $x \in A$ este și în B

- $A \subset B$, mulțimea A este strict inclusă în mulțimea B

- $A \subsetneq B$ (adică $A \subseteq B$ și $A \neq B$)

• Pentru a arăta că $A = B$ este necesar și suficient să verificăm dubla incluziune ($A \subseteq B$ și $B \subseteq A$)

Dată mulțimea A notăm $\mathcal{P}(A) = \{U \mid U \subseteq A\}$ mulțimea formată din submulțimile mulțimii A

• $\emptyset$ = mulțimea vidă (singura mulțime c
nu are niciun elem

↳ $(\forall) A$, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C} \subsetneq \mathbb{H}$$

Ex: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$

succesor

Operații cu mulțimi

(1) Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

(2) Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

(3) Diferența: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

(4) Diferența simetrică: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Proprietăți: 1) $A \subseteq A \cup B$, $(\forall)$ A, B mulțimi

2) $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
$A \setminus B \neq B \setminus A$
$A \Delta B = B \Delta A$

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$ (în general)
$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ (pentru $A = B = C = \emptyset$)

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (temă)

↳ 4) Distributivitate

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

⑤ Complementara unei mulțimi

Fie E o mulțime și $A \subseteq E$

Complementara mulțimii A față de E

$$C_E A = E \setminus A$$

Legile lui de Morgan

$$C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

$$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Dem. Fie $x \in C_E (A \cup B) \Leftrightarrow x \in E$ și $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in E \text{ și} \\ x \notin A \text{ și} \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow x \in C_E A$ și $x \in C_E B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in C_E A \cap C_E B$

Deci $C_E (A \cup B) \subseteq C_E A \cap C_E B$

Arătăm și cealaltă incluziune

↳ ! Se observă inversarea sensului implicațiilor

⑥ Produs cartezian A, B mulțimi

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ și $b \in B\}$

↳ perechi ordonate

Definim perechea ordonată $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$

Exercițiu: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ și $b = d$

$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ ori}} = A^n$

Temă Arătați că $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$

$\Leftrightarrow a = c$ și $b = d$

Funcții

Def 1 Fie A și B mulțimi nevide.

O funcție de la A la B înseamnă să asociem fiecărui element din A un element din B (unic)

$A \ni x \longrightarrow f(x) \in B$

A - domeniul funcției

B - codomeniul funcției (mulțimea în care f-ț. ia valori)

Def 2 Fie A și B mulțimi nevide.

O funcție f de la A la B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$ cu proprietatea că $(\forall)\ x \in A$ $\exists!$ un $b_x \in B$ a.î. $(x, b) \in f$

Scriem pe scurt că $f(x) = b_x$

Graficul funcției $f: A \to B$

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

Def Funcțiile $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt egale dacă $A = C$ și $B = D$ și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$

Compunerea funcțiilor

Fie $f: A \to B$ și $g: B \to C$

Numim $g \circ f: A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Obs! Dacă $h: C \to D$, avem $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

↳ compunerea funcțiilor este asociativă