FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 2

(S2.1) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Fie $\varphi, \psi \in Form$. Avem:

$$\begin{aligned}
\vDash \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1\\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi}\\
&\qquad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1\\
&\iff \vDash \varphi \text{ şi} \vDash \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Vom lua $\varphi := v_0$ şi $\psi := \neg v_0$.

Luăm $e_0 : V \to \{0,1\}$ ca fiind funcţia constantă 0. Atunci $e_0^+(\varphi) = e_0^+(v_0) = e_0(v_0) = 0$. Deci $e_0 \not\vDash \varphi$. Prin urmare, $\not\vDash \varphi$.

Luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$ ca fiind funcţia constantă 1. Atunci $e_1^+(\psi) = e_1^+(\neg v_0) = \pmb{\neg} e_1^+(v_0) = \pmb{\neg} e_1(v_0) = \pmb{\neg} 1 = 0$. Deci $e_1 \not\vDash \psi$. Prin urmare, $\not\vDash \psi$.

Fie acum $e : V \to \{0,1\}$ arbitrară. Atunci

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(v_0 \vee \neg v_0) = e^+(v_0) \mathbin{\pmb{\vee}} e^+(\neg v_0) = e^+(v_0) \mathbin{\pmb{\vee}} \pmb{\neg} e^+(v_0) = e(v_0) \mathbin{\pmb{\vee}} \pmb{\neg} e(v_0) = 1,$$

deci $e \vDash \varphi \vee \psi$. Prin urmare, avem că $\vDash \varphi \vee \psi$.

$\square$

(S2.2) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0$;

(ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
((v_0 \to v_1) \wedge v_1) \to v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \vee v_1) \wedge v_1) \vee v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)}\\
&\sim \neg(\neg v_0 \vee v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg\neg v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 &\sim ((v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1)) \vee v_0 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_0) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1 \vee v_0) && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_0), && \text{(idempotenţă)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \vee \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
(v_1 \vee \neg v_4) \to (\neg v_2 \to v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg\neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\
&\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge \neg\neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$(\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 \sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 \qquad \text{(distributivitate)}$$
$$\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3), \qquad \text{(distributivitate)}$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

(S2.3) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \to v_1) \to v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcţia booleană asociată (i.e. metoda tabelului).
Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$, precum şi pe cel al funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \to x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \to x_1) \to x_2$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.30 şi 1.32, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ şi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.31 şi 1.32, obţinem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 1.26.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ, este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

□

(S2.4) Să se testeze dacă următoarele mulţimi de clauze sunt satisfiabile:

(i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;

(ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că am avea un model e al mulţimii de clauze. Atunci $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$. Cum e satisface clauza $\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$, avem că $e(v_1) = 1$. Dar atunci e nu satisface clauza $\{\neg v_2, \neg v_1\}$. Am obţinut o contradicţie. Rămâne că mulţimea de clauze din enunţ este nesatisfiabilă.

(ii) Fie evaluarea $e : V \to \{0,1\}$ astfel încât $e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 0$, şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq 2$. Atunci e satisface fiecare clauză din mulţime, deci este model pentru mulţimea de clauze. Aşadar, mulţimea de clauze din enunţ este satisfiabilă.

□

(S2.5) Să se determine mulţimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare dintre următoarele cazuri:

(i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$;

(ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$;

(iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$; $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$.

Demonstraţie:

(i) Putem alege doar $L := \neg v_4$, deci există un singur rezolvent, anume $\{v_1, v_5, v_6\}$.

(ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după $L := v_3$ şi $L := \neg v_4$, obţinând aşadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

(iii) Nu există L astfel încât $L \in C_1$ şi $L^c \in C_2$, deci $Res(C_1, C_2) = \emptyset$.

□

(S2.6) Derivaţi prin rezoluţie clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulţimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

Demonstraţie: Notăm:

$$\begin{array}{ll}
C_1 := \{v_0, v_4\} & \\
C_2 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\} & \\
C_3 := \{\neg v_4, v_0, v_1\} & \\
C_4 := \{\neg v_0, v_3\} & \\
C_5 := \{v_0, v_1\} & \text{(rezolvent al } C_1,\ C_3\text{)} \\
C_6 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\} & \text{(rezolvent al } C_2,\ C_4\text{)} \\
C_7 := \{v_0, \neg v_2, v_3\} & \text{(rezolvent al } C_5,\ C_6\text{)}
\end{array}$$

Avem, aşadar, că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_6, C_7 = C)$ este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}$. $\square$