1. Studiați convergența (natura) seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \cdot x^n, x>0$

Sol.: Fie $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \cdot x^n$

Aplicăm Criteriul raportului.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\sqrt{n+2}} \cdot \frac{n\sqrt{n+1}}{\cancel{x^n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{x \cdot n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}} = x$$

1) Dacă $x<1$ (i.e. $x\in(0,1)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2) Dacă $x>1$ (i.e. $x\in(1,+\infty)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

3) Dacă $x=1$, atunci criteriul nu decide.

Fie $x=1$.

$$x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \cdot 1^n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Fie $y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} =$$

$$= 1 \in (0,+\infty)$$

Conform Criteriului de comparație cu limită, avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \text{ convergentă}$$

(serie armonică generalizată, $\alpha = \frac{3}{2}$)

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă. $\square$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in (-1, 1)$

Sol.:

Fie $x_n = \frac{x^n}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Studiem convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

$$|x_n| = \left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x^n|}{|n^2|} = \frac{|x|^n}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Fie $y_n = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$|x_n| < |y_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ convergentă (serie armonică generalizată, } \alpha = 2)$$

Conform Criteriului de comparație cu inegalități, avem că $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergentă.

Prin urmare, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă.

Așadar, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă. $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Sol.:

Aplicăm Criteriul Abel-Dirichlet (I).

Fie $x_n = \frac{1}{n^{\lambda}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$(x_n)_n$ descrescător și $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ (1)

Fie $y_n = \cos nx$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

Arătăm că $(\exists)\ M > 0$ a.î. $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ avem $|y_1 + y_2 + \ldots + y_n| \leq M$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

$|y_1 + y_2 + \ldots + y_n| = |\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx|$

M de mai sus nu poate depinde de n, dar poate depinde de x.

Fie $z = \cos x + i \sin x$

$$z^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$$

$$z^3 = \cos 3x + i \sin 3x$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$z^n = \cos nx + i \sin nx$$

Observăm că $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \operatorname{Re}(z + z^2 + \ldots + z^n)$

Presupunem că $z \neq 1$, i.e. $\cos x + i \sin x \neq 1$, i.e.

$\cos x \neq 1$ sau $\sin x \neq 0$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$z + z^2 + \ldots + z^n = z \cdot \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1} =$$

$$= \frac{(\cos x + i \sin x)^{n+1} - (\cos x + i \sin x)}{\cos x + i \sin x - 1} =$$

$$= \frac{\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x - \cos x - i \sin x}{\cos x + i \sin x - 1}$$

$$= \frac{\cos(n+1)x - \cos x + i(\sin(n+1)x - \sin x)}{(\cos x - 1) + i \sin x}$$

$$= \frac{-2 \sin \frac{n+2}{2} x \sin \frac{n}{2} x + i \cdot \left(2 \cos \frac{n+2}{2} x \sin \frac{n}{2} x\right)}{-2 \sin^2 \frac{x}{2} + i \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2} \sin \frac{n}{2} x \left(-\sin \frac{n+2}{2} x + i \cos \frac{n+2}{2} x\right)}{\cancel{2} \sin \frac{x}{2} \left(-\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{n+2}{2} x + i \sin \frac{n+2}{2} x}{\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}\right)^{\cancel{n+2}\ n+1}}{\cancel{\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{n+1}{2} x + i \sin \frac{n+1}{2} x\right)$$

Deci $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \mathrm{Re}(z + z^2 + \ldots + z^n)$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2} x$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{n+1}{2} x$$

$$|y_1 + y_2 + \ldots + y_n| = \left| \frac{\sin \frac{n}{2} x \cdot \cos \frac{n+1}{2} \cdot x}{\sin \frac{x}{2}} \right| =$$

$$= \frac{\left|\sin \frac{n}{2} x\right| \cdot \left|\cos \frac{n+1}{2} \cdot x\right|}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

Alegem $M = \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$ și avem $|y_1 + y_2 + \ldots + y_n| \leq M, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Conform Criteriului Abel-Dirichlet (I), avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

Am lucrat doar cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Fie $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\lambda}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} \begin{cases} \text{convergentă}, & \lambda > 1 \\ \text{divergentă}, & \lambda \leq 1 \end{cases}$$ $\square$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n}$

Sol.:

Fie $x_n = \cos \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{\cos n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$-1 \leq x_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_n$ mărginit

$\left(\frac{1}{n}\right)_n$ strict descrescător

$\underset{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{x} \longmapsto \underset{(0,1)}{\cos x}$ strict descrescătoare

$\frac{1}{n} \in (0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)_n$ este strict crescător

Deci, $(x_n)_n$ este monoton și mărginit (1)

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$, convergentă (conf. punctului c)):

$x = 1$ și $\lambda = 1$ (2)

$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Conform Criteriului Abel-Dirichlet (II)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă. $\square$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}+1}{n}$

Sol.: Fie $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$c_n = a_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, divergentă (serie armonică generalizată, $\alpha = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Fie $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$(x_n)_n$ descrescător și $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$

Conform Criteriului lui Leibniz, avem că $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă

Prin urmare, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este divergentă $\square$

2. Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $d_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $d_1(\underset{(x_1,\dots,x_m)}{x}, \underset{(y_1,\dots,y_m)}{y}) =$

$$= |x_1 - y_1| + \dots + |x_m - y_m| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$$

a) Arătați că d_1 este metrică pe $\mathbb{R}^m$.

Sol.:

Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^m$.

1) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_m - y_m| \geq 0$

2) $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| + \dots + |x_m - y_m| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = \dots = |x_m - y_m| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i = \overline{1,m} \Leftrightarrow x = y$

3) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{m} |-(y_i - x_i)| =$
$= \sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i| = d_1(y, x)$

4) $d_1(x,z) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^{m} |\underbrace{x_i - y_i} + \underbrace{y_i - z_i}| \leq$
$\leq \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{m} |y_i - z_i| = d_1(x,y) + d_1(y,z)$

Deci d_1 este metrică pe $\mathbb{R}^m$. $\square$

b) Fie $x^k = (x_1^k, \dots, x_m^k) \in \mathbb{R}^m$ și $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.
Arătați că $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k \overset{d_1}{=\!=} x$ dacă și numai dacă

$\lim\limits_{k \to +\infty} x_i^k = x_i, \forall i = \overline{1,m}$.

Sol.:

„$\Rightarrow$": Știm că $\lim_{k\to+\infty} x^k \overset{d_1}{=\!=} x$, deci știm că $\lim_{k\to+\infty} d_1(x^k, x) = 0$, deci știm că $(\forall)\, \varepsilon>0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, k \geq k_\varepsilon$, avem $d_1(x^k, x) < \varepsilon$.

Arătăm că $\lim_{k\to+\infty} x_i^k = x_i$, $(\forall)\, i=\overline{1,m}$, deci arătăm că $(\forall)\, \varepsilon>0$, $(\exists)\, k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, k \geq k_\varepsilon$, avem $|x_i^k - x_i| < \varepsilon$, $(\forall)\, i=\overline{1,m}$.

Fie $i \in \{1,\dots,m\}$.

Fie $\varepsilon > 0$.

Alegem $\underline{k_\varepsilon^i = k_\varepsilon \in \mathbb{N}}$.

$\underline{(\forall)\, k \geq \underset{\substack{\| \\ k_\varepsilon}}{k_\varepsilon^i}}$, avem $\underline{|x_i^k - x_i|} \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j^k - x_j| = d_1(x^k, x)$

$< \underline{\varepsilon}$.

Așadar, $\lim_{k\to+\infty} x_i^k = x_i$, $(\forall)\, i=\overline{1,m}$.

„$\Leftarrow$": Știm că $\lim_{k\to+\infty} x_i^k = x_i$, $(\forall)\, i=\overline{1,m}$, deci știm că $(\forall)\, i=\overline{1,m}$, $(\forall)\, \varepsilon>0$, $(\exists)\, k_\varepsilon^i \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, k > k_\varepsilon^i$, avem că $|x_i^k - x_i| < \varepsilon$.

Arătăm că $\lim_{k\to+\infty} x^{k^m} \overset{d_1}{=\!=} x$, deci arătăm că $\lim_{k\to+\infty} d_1(x^k, x) = 0$, deci arătăm că $(\forall)\, \varepsilon>0, (\exists)\, k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, k \geq k_\varepsilon$, avem $\underline{|d_1(x^k, x) - 0|} < \varepsilon$

$d_1(x^k, x) < \varepsilon$

Fie $\varepsilon > 0$.

Alegem $k_\varepsilon = \max\{k_\varepsilon^1, k_\varepsilon^2, \dots, k_\varepsilon^m\}$

Fie $k \geq k_\varepsilon$.

$$d_1(x^k, x) = \underbrace{|x_1^k - x_1|}_{< \frac{\varepsilon}{m}} + \dots + \underbrace{|x_m^k - x_m|}_{< \frac{\varepsilon}{m}} < \frac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon$$

Deci $\lim\limits_{k \to +\infty} d(x^k, x) = 0$ $\left(\text{i.e. } \lim\limits_{k\to+\infty} x^k \overset{d_1}{=} x \right) \square$

Observație! Din punctul ii) al exercițiului anterior, deducem că în spațiul metric $(\mathbb{R}^m, d_1)$, convergența șirurilor este echivalentă cu cea a componentelor, aceasta din urmă fiind a convergență pe $\mathbb{R}$.