LABORATOR #6

EX#1 (Număr de încercări până reușim – distribuția Geometrică)

Probabilitatea de a mă întâlni în metrou cu o persoană cunoscută când vin spre facultate este $p = 9\%$.

#1 Care este probabilitatea să văd prima persoană cunoscută peste $k = 7$ zile? (încep numărătoarea de mâine)

#2 Realizați histograma corespunzătoare primei zile în care văd o persoană.

#3 Simulați distribuția primei zile în care întâlnesc un cunoscut folosind funcția de probabilitate a distribuției Geometrice:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

Afișați histograma datelor obținute.

Pont: Împărțiți intervalul $[0, 1)$ într-o infinitate de intervale $[x_{k-1}, x_k)$ cu lungimea $\mathbb{P}(X = k)$, pentru orice $k = \overline{1, \infty}$. Din formula de mai sus, obținem: $x_k = 1-(1-p)^k$. Un număr aleator $s =$`np.random.random()` aparține intervalului $[x_{k-1}, x_k)$ dacă și numai dacă:

$$k = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(1 - s)}{\ln(1 - p)} \right\rfloor.$$

EX#2 (Numărul de evenimente într-o unitate fixă de timp – distribuția Poisson)

În medie, primesc $\lambda = 20$ de mesaje pe WhatsApp într-o oră. Care este probabilitatea ca ora viitoare să primesc $k = 30$ de mesaje?

#1 Răspundeți la întrebare prin simulări numerice, urmând următorul raționament aproximativ:

- Dacă, în medie, primesc $\lambda = 20$ de mesaje pe oră, atunci, în fiecare secundă (i.e. $\frac{1}{n}$ dintr-o oră cu $n = 3600$), probabilitatea de a primi un mesaj este aproximativ $p = \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{180}$.
- Numărul de mesaje primite într-o oră este deci distribuit aproximativ Bin $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

#2 Realizați histograma corespunzătoare numărului de mesaje primite într-o oră.

#3 Calculați empiric media numărului de mesaje primit într-o oră, folosind simulările utilizate pentru crearea histogramei.

#4 Simulați distribuția mesajelor folosind funcția de probabilitate a distribuției Poisson:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k), \quad X_n \text{ distribuită Bin} \left(n, \tfrac{\lambda}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left[1 - \left(\frac{\lambda}{n}\right)\right]^{n-k}\\ &= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Afișați histograma datelor obținute.

Pont: Procedați ca în exercițiul anterior, împărțind intervalul $[0, 1)$ în intervale $[x_{k-1}, x_k)$ cu lungimea $\mathbb{P}(X = k)$. Pentru un număr aleator $s =$`np.random.random()`, găsiți prin verificări succesive numărul k astfel încât $s \in [x_{k-1}, x_k)$.