FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Model de examen

Nume: ______________________

Prenume: ____________________

Grupa: ______________________

Indicaţii:

- În cazul exerciţiilor cu forma normală prenex şi forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

  Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

  - două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
  - un simbol de operaţie unară f şi un simbol de operaţie binară g;
  - trei simboluri de constante a, b, c.

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1 punct] Pentru orice $\Gamma, \Sigma \subseteq Form$, definim

$$\Gamma \vee \Sigma := \{\varphi \vee \psi \mid \varphi \in \Gamma,\ \psi \in \Sigma\}.$$

Să se arate că, pentru orice $\Gamma, \Sigma \subseteq Form$,

$$Mod(\Gamma \vee \Sigma) = Mod(\Gamma) \cup Mod(\Sigma).$$

Demonstraţie: Fie $\Gamma, \Sigma \subseteq Form$.

Demonstrăm că $Mod(\Gamma \vee \Sigma) \subseteq Mod(\Gamma) \cup Mod(\Sigma)$. Fie $e \vDash \Gamma \vee \Sigma$ cu $e \nvDash \Gamma$. Vrem să arătăm că $e \vDash \Sigma$. Fie $\psi \in \Sigma$. Cum $e \nvDash \Gamma$, există $\varphi \in \Gamma$ cu $e \nvDash \varphi$, deci $e^+(\varphi) = 0$. Cum $e \vDash \Gamma \vee \Sigma$ şi $\varphi \vee \psi \in \Gamma \vee \Sigma$, avem $e \vDash \varphi \vee \psi$, deci $e^+(\varphi \vee \psi) = 1$. Dar $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \mathbin{\mathbf{V}} e^+(\psi) = 0 \mathbin{\mathbf{V}} e^+(\psi) = e^+(\psi)$, deci $e^+(\psi) = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Demonstrăm că $Mod(\Gamma) \cup Mod(\Sigma) \subseteq Mod(\Gamma \vee \Sigma)$. Fie $e \in Mod(\Gamma) \cup Mod(\Sigma)$, Fără a restrânge generalitatea, considerăm $e \in Mod(\Gamma)$. Vrem să arătăm că $e \vDash \Gamma \vee \Sigma$. Fie $\chi \in \Gamma \vee \Sigma$. Din definiţia lui $\Gamma \vee \Sigma$, există $\varphi \in \Gamma$ şi $\psi \in \Sigma$ cu $\chi = \varphi \vee \psi$. Cum $e \in Mod(\Gamma)$, $e^+(\varphi) = 1$, deci şi $e^+(\chi) = e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \mathbin{\mathbf{V}} e^+(\psi) = 1 \mathbin{\mathbf{V}} e^+(\psi) = 1$, ceea ce trebuia demonstrat. □

(P2) [1 punct] Fie $\varphi, \psi \in Form$. Să se demonstreze sintactic, fără a se face apel la Teorema de completitudine tare, că $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$.

Demonstraţie: Reamintim că $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$. De asemenea, oriunde folosim o teoremă formală cunoscută, aplicăm implicit Propoziţia 2.55.(ii).

(1)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(2)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 2.54.(ii)
(3)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 2.54.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S3.4).(iv)
(5)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	(2), (6) şi (S3.4).(iii).

□

(P3) [1 punct] Fie x o variabilă. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi \nvDash \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem, pentru orice $v \in V$, $e(v) := 7$).
Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$.
Avem că $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ cu $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x \mapsto n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ cu $n < 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi)[e]$.
Avem $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ cu $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x \mapsto n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e]$.
Aşadar, $\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e]$.
Pe de altă parte, $\mathcal{N} \vDash (\exists x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ cu $\mathcal{N} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x \mapsto n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ cu $n < 2$ şi $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat. Prin urmare, $\mathcal{N} \nvDash (\exists x(\varphi \wedge \psi))[e]$. □

(P4) [1 punct] Fie $\mathcal{L}_{Graf}$ limbajul de ordinul I al grafurilor, precum şi mulţimea de $\mathcal{L}_{Graf}$-enunţuri $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, definite precum în curs şi seminar. Să se axiomatizeze clasa $\mathcal{K}'$ a grafurilor în care orice două vârfuri sunt legate printr-un drum de lungime cel mult 2.

Demonstraţie: Considerăm enunţul

$$\varphi := \forall v_1 \forall v_2 \left(v_1 = v_2 \vee \dot{E}(v_1, v_2) \vee \exists v_3(\dot{E}(v_1, v_3) \wedge \dot{E}(v_3, v_2)) \right).$$

Atunci $\mathcal{K}' = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_3\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_3)$. □

Partea II. Probleme de tip grilă

(P5) [1 răspuns corect] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_3$, $x_3 := v_2$ obţinem:
☐ A: $\mathcal{S}_4 = \{\{v_2, \neg v_4\}\}$.
☐ B: $\mathcal{S}_4 = \{\square\}$.
☒ C: $\mathcal{T}_3^1 = \emptyset$.
☐ D: $\mathcal{S}_4 = \{\{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.
☐ E: $\mathcal{T}_3^0 = \{\{v_4, \neg v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_4\}\}$.

(P6) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3\}\}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☒ A: $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
☐ B: $\mathcal{S}$ nu este nici nesatisfiabilă, nici satisfiabilă.
☒ C: $\{\neg v_1\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.
☐ D: $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
☐ E: $\{v_4\}$ este rezolvent al două clauze din $\mathcal{S}$.

(P7) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_3) \rightarrow v_1) \rightarrow v_2$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_1 \wedge v_2$ este FNC şi FND a lui φ.
☐ B: $v_0 \vee (v_3 \wedge \neg v_1) \vee v_2$ este FND a lui φ.
☒ C: $(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_1) \vee v_2$ este FND a lui φ.
☐ D: $v_0 \wedge (v_3 \vee v_2) \wedge (\neg v_1 \vee v_3)$ este FNC a lui φ.
☒ E: $(v_0 \vee v_2) \wedge (v_3 \vee v_2) \wedge (\neg v_1 \vee v_2)$ este FNC a lui φ.

(P8) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate pentru orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$?

☐ A: $\forall x(\varphi \vee \psi) \vDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$, pentru orice variabilă x.
☐ B: $\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \rightarrow \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
☒ C: $\forall x(\varphi \vee \psi) \vDash \exists x\varphi \vee \exists x\psi$, pentru orice variabilă x.
☐ D: $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \vee \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.
☒ E: $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash \varphi \vee \forall x\psi$, pentru $x \notin FV(\varphi)$.

(P9) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \forall x S(x) \wedge \neg\exists y S(y)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\forall x\forall y(\neg S(x) \wedge \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ B: $\exists x\forall y(\neg S(x) \wedge \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☒ C: $\forall x\forall y(S(x) \wedge \neg S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ D: $\exists x\exists y\neg(\neg S(x) \vee S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ E: $\exists x\exists y(S(x) \vee S(y))$ este o formă normală prenex pentru φ.

Demonstraţie: Varianta corectă: C.

Avem: $\forall x S(x) \wedge \neg\exists y S(y) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x S(x) \wedge \forall y \neg S(y) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\forall y(S(x) \wedge \neg S(y))$. □

(P10) [1 răspuns corect] Considerăm următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\psi := (v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_3)) \rightarrow (v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată (pentru orice evaluare e)?
☐ A: Dacă $e(v_2) = 1$ şi $e^+(\neg v_3) = 1$, atunci $e^+(v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1) = 0$.
☐ B: Dacă $e^+(v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow v_3)) = 1$, atunci $e(v_1) = e(v_2) = 0$ şi $e(v_3) = 1$.
☐ C: Dacă $e(v_1) = e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$.
☒ D: Dacă $e^+(v_3 \vee \neg v_2 \vee \neg v_1) = 0$, atunci $e(v_2) = 1$ şi $e(v_3) = 0$.
☐ E: $e^+(\psi) = 1$ numai dacă $e(v_1) = e(v_3) = 1$ şi $e(v_2) = 0$.