Andrei Ștefan
Grupa 142

Geometrie euclidiană plană
Axiome și proprietăți

Euclid definește punctul ca o entitate indivizibilă, linia ca o lungime fără lărgime, suprafața ca o entitate având lungime și lărgime, iar solidul ca entitate având lungime, lărgime și grosime.

Acesta a completat definițiile precedente printr-un sistem de 5 propoziții pe care le-a admis adevărate și pe care le-a numit **postulate**:

1) Între 2 puncte se poate duce o linie dreaptă.
2) Orice linie dreaptă poate fi prelungită nelimitat.
3) Se poate descrie un cerc de centru dat și de rază dată.
4) Toate unghiurile drepte sunt congruente între ele.
5) Dacă o linie dreaptă, care intersectează alte două, formează de o aceeași parte a sa, două unghiuri interne având suma mai mică decât două unghiuri drepte, cele două linii menționate se vor intersecta, dacă sunt prelungite de partea de partea în care suma unghiurilor este mai mică decât două unghiuri drepte.

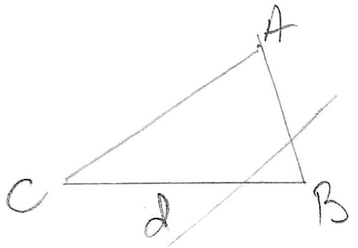
Proprietăți de incidență ale punctelor și dreptelor dintr-un plan

1) Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.
2) Orice dreaptă conține cel puțin două puncte.
3) În orice plan, există trei puncte care nu sunt situate pe o aceeași dreaptă.

Proprietăți de ordonare

1) Dacă punctul B se găsește între punctele A și C, atunci punctele A, B, C sunt coliniare și distincte, și B se găsește între punctele C și A.
2) Dacă A, B sunt două puncte distincte, atunci există cel puțin un punct C astfel încât B să se găsească între A și C.
3) Dacă punctul B se găsește între A și C, atunci A nu se găsește între C și B.

4) Axioma lui Pasch Dacă A, B, C sunt 3 puncte necoliniare și dacă d este o dreaptă situată în același plan cu aceste puncte, astfel încât d trece printr-un punct situat între C și B, dar nu trece prin niciunul din punctele A, B, C și nu trece prin niciun punct situat între A și C, atunci dreapta trece printr-un punct situat între A și B



Proprietăți de congruență

1) Fie s o semidreaptă cu originea O și fie $|AB|$ un segment. Există pe semidreapta s un singur punct M astfel încât segmentul $|OM|$ să fie congruent cu segmentul $|AB|$.

2) Dacă $|AB|$, $|A'B'|$, $|A''B''|$ sunt trei segmente astfel ca $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|A'B'| \equiv |A''B''|$, atunci $|AB| \equiv |A''B''|$.

3) Dacă avem 6 puncte A, B, C, A', B', C' astfel că B' se găsește între A' și C', B se găsește între A și C și $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci $|AC| \equiv |A'C'|$.

4.) Fiind date un unghi $\widehat{hk}$ și o semidreaptă s într-un plan p și notând prin p' unul din semiplanele limitate la suportul lui s în planul p, există o singură semidreaptă t în semiplanul p' astfel ca s și t să formeze un unghi congruent cu $\widehat{hk}$. Orice unghi este congruent cu el însuși.

5) Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ astfel ca $\hat{A} \equiv \hat{A'}$, $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|AC| \equiv |A'C'|$, avem și $\hat{B} \equiv \hat{B'}$

Postulatul lui Euclid

Fiind date un punct A și o dreaptă d, care nu trece prin A, există o singură paralelă la dreapta d, care să treacă prin punctul A.

Andrei Ștefan
Grupa 142

Geometrie euclidiană tridimensională
Axiome și proprietăți

I Axiomele de incidență

Se presupune că punctele formează o mulțime S numită spațiu. Dreptele și planele sunt submulțimi particulare ale mulțimii S cu următoarele proprietăți:

1) Prin orice două puncte trece o dreaptă
2) Prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă.
3) Orice dreaptă conține cel puțin două puncte.
Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare.
Există cel puțin un plan.
4) Prin orice trei puncte necoliniare trece un singur plan.
5) Dacă o dreaptă d are două puncte distincte situate într-un plan ρ, atunci toate punctele dreptei d sunt situate în planul ρ.
6) Dacă două plane au un punct comun, atunci cele două plane au cel puțin un al doilea punct comun.
7) Există patru puncte nesituate într-un același plan.

II Axiomele de ordonare

1) Dacă un punct B se găsește între punctele A și C, atunci punctele A, B, C sunt coliniare și distincte și punctul B se găsește între C și A.

2) Fiind date două puncte distincte A, B există un punct C astfel încât B să se găsească între A și C!

3) Fiind date trei puncte coliniare și distincte A, B, C astfel încât B se află între A și C, A nu se poate afla între B și C, iar C nu se poate afla între A și B.

4) Axioma lui Pasch Fiind date într-un același plan trei puncte necoliniare A, B, C și o dreaptă d, astfel ca d să treacă printr-un punct situat între B și C, dar d să nu treacă prin niciunul din punctele A, B, C, dreapta d va trece fie printr-un punct situat între A și B, fie printr-un punct situat între A și C.

III Axiomele de congruență

1) Axioma purtării congruente a segmentelor

Fiind date un segment $|AB|$ și o semidreaptă s cu originea O, există pe s un punct P și numai unul, astfel ca $|AB| \equiv |OP|$.

2) Orice segment este congruent cu el însuși. Dacă segm $|AB|$ este congruent cu segm $|CD|$, atunci $|CD|$ este congr cu $|AB|$. Dacă $|AB|, |CD|, |EF|$ sunt segmente astfel încât $|AB| \equiv |CD|$ și $|CD| \equiv |EF|$ atunci $|AB| \equiv |EF|$.

3) <u>Axioma de adunare a segmentelor</u>

Fiind date segmentele $|AC|$, $|A'C'|$ și punctele $B \in |AC|$, $B' \in |A'C'|$ astfel încât:

$$|AB| \equiv |A'B'|, \ |BC| \equiv |B'C'|$$

avem că: $|AC| \equiv |A'C'|$

4) <u>Axioma purtării congruente a unghiurilor</u>

Fiind date un unghi propriu $\widehat{hk}$, un semiplan σ limitat de dreapta d și o semidreaptă $s \subset d$, cu originea O, există o semidreaptă r și numai una, astfel ca să avem $r \subset \sigma$, r să aibă originea O și $\widehat{rs} \equiv \widehat{hk}$.

Orice unghi este congruent cu el însuși.

5) Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel încât:

$$\hat{A} \equiv \widehat{A'}; \ |AB| \equiv |A'B'|, \ |AC| \equiv |A'C'|$$

În aceste condiții avem $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$.

<u>Obs.</u> Aplicând axioma triunghiurilor ACB și $A'C'B'$ obținem și $\hat{C} \equiv \widehat{C'}$.

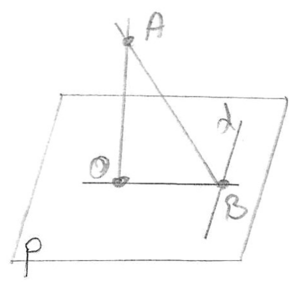
Teorema celor trei perpendiculare

Fie un plan p, d o dreaptă conținută în acest plan și fie punctele $A \notin p$, $O \in p$, $O \notin d$, $B \in d$.
Sunt adevărate implicațiile:

1) $AB \perp d$, $OB \perp d$, $AO \perp OB \Rightarrow AO \perp p$

2) $AO \perp p$; $AB \perp d \Rightarrow OB \perp d$, $AO \perp OB$

3) $AO \perp p$, $OB \perp d \Rightarrow AB \perp d$



Bibliografie:

Matematică manual pentru clasa a X-a. Geometrie și trigonometrie. Autori: K. Teleman, M. Florescu, C. Rădulescu, D. Măraru, E. Stătescu

Andrei Ștefan
Grupa 142

Spații vectoriale. Subspații vectoriale. Subspații afine. Baze

Spații vectoriale

Un spațiu vectorial este o structură algebrică formată dintr-un set de valori și două operații, adunarea vectorilor și înmulțirea lor cu un scalar. Aceste operații respectă asociativitatea, comutativitatea și existența elementului neutru.

Matematic:

Fie K un corp comutativ. Un sp vectorial peste K este o mulțime V cu cele 2 operații:

$+ : V \times V \to V, \ (x, y) \to x+y$

și

$\circ : K \times V \to V, \ (\alpha, x) \to \alpha x$

Proprietăți:

Fie $x, y, z \in V$ și $\alpha, \beta \in K$. Atunci

1) $(x+y)+z = x+(y+z)$
2) $\exists\ 0 \in V$ aî $0+x = x+0 = x$
3) $x+y = y+x$
4) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
5) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
7) $1x = x$

Obs: 1) $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$

2) $\alpha(-x) = (-\alpha)x = -\alpha x$

Subspații vectoriale

Un subspațiu vectorial este un subset al unui spațiu vectorial care îndeplinește toate proprietățile acestuia.

Obs. Un subspațiu vectorial trebuie să conțină elementul neutru și să fie închis la adunare și înmulțire.

Exemplu: $W = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$

W este subsp vect pt $\mathbb{R}^2$

$\forall x \in W$, $x + (0,0) = (0,0) + x = x$, $(0,0) \in W$

și

$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) \in W$, $\forall x, y \in W$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Subspații afine

Un subsp afin este o generalizare a conceptului de subspațiu vectorial, unde se respectă doar închiderea la adunare.

Exemplu: Fie planul P generat de vectorii $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ subsp vect din $\mathbb{R}^3$. Dacă adăugăm un vector de translație v_0 la P, obținem un subsp afin al $\mathbb{R}^3$, format din toate punctele care se obțin prin adunarea unui vector din P la v_0.

Baze

O bază pentru un spațiu vectorial este un set de vectori liniar independenți care pot genera orice vector din acel spațiu printr-o combinație liniară.

Def. Sistemul de vectori $\{v_1, \dots, v_n\}$ este liniar independent dacă:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Obs 1) Un SLI (sistem liniar independent) nu poate conține vectorul nul.

2) Orice 2 baze ale unui spațiu vectorial V conțin același nr de vectori.

Def. Dimensiunea unui sp vect V este egală cu nr de vectori ce formează o bază a sa.

Not: $\dim V = n$

Andrei Stefan
Grupa 142

Aplicatii liniare. Endomorfisme.

Aplicatii liniare

Aplicațiile liniare reprezintă funcții care păstrează operațiile de adunare vectorială și înmulțirea cu scalari.

Proprietăți: Fie $f: V \to W$.

- $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$
- $f(\alpha v)=\alpha f(v)$
- $f(0)=0$, (0 ~~este~~ vectorul nul)

! Obs. $f: V \to W$ este aplicație liniară dacă și numai dacă:

$$f(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)$$

Endomorfisme

Def. Dacă $f: V \to W$ este aplicație liniară și $V=W$ atunci f este endomorfism.

Exemplu:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3, x_1+x_3)$

Fie $x,y \in \mathbb{R}^3$ și $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Avem: $f(\alpha x+\beta y)=$

$=f(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3)=$

$=\alpha(x_1+2x_2-x_3, x_1+x_3)+\beta(y_1+2y_2-y_3, y_1+y_3)=$

$=\alpha f(x)+\beta f(y)$

Def. $\operatorname{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$

Obs. Este subsp al lui V

Def. Fie V un sp vect finit dimensional și $f: V \to W$ o aplicație liniară. Atunci:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Proprietăți: $f: V \to W$ o apl liniară

- f este inj $\iff \operatorname{Ker} f = \{0\}$
- f este surj $\iff \operatorname{Im} f = W$

Teoremă: Două spații vectoriale peste același corp K sunt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.

Reprezentarea endomorfismului în coordonate în raport cu B

Schimbarea reprezentării la schimbarea bazei

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,1)}(K) \; ; \; y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,1)}(K)$$

$$y = Ax$$

$$\tilde{B} = \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n\}, \; f(\tilde{u}_i) = \tilde{a}_i^j \tilde{u}_j \; ; \; \tilde{A} = (\tilde{a}_j^i)_{j,i=\overline{1,n}} = \mathcal{M}_{\tilde{B}}(f)$$

$$\left.\begin{aligned} f(\tilde{u}_i) &= \tilde{a}_i^j \mu_j^n u_n \\ f(\tilde{u}_i) &= f(\mu_i^s u_s) = \mu_i^s \cdot a_s^n u_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{a}_i^j \mu_j^n = \mu_i^s \cdot a_s^n$$

Obs: $M\tilde{A} = AM \iff \tilde{A} = M^{-1}AM$ | $\tilde{B} = M^{t}AM$

$M^{-1} = M^{t}$ (ortonormată)

Andrei Ștefan
Grupa 142

Formule de schimbare de coordonate la schimbarea bazelor

Fie ${}_K V$ cu $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ și $B'=\{v_1',\dots,v_n'\}$ baze în V.

Atunci, dimensiunea spațiului este n: $\dim_K V = n$

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \quad ; \; a_{ij} \in K \; ; \forall i,j = \overline{1,n}$$

Matricea de trecere

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ [v_1']_B & [v_2']_B & & [v_n']_B \end{matrix}$$

Notăm $B \xrightarrow{S} B'$

Obs Matricea S este inversabilă

$$\text{Pt } x \in V \to x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' v_j' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j' \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j' \right) v_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x]_B = S [x]_{B'}, \; \forall x \in V$$

$$\Rightarrow [x]_{B'} = S^{-1} [x]_B, \; \forall x \in V$$

Obs: $B \overset{S}{\rightsquigarrow} B' \Rightarrow B' \overset{S^{-1}}{\rightsquigarrow} B$

Andrei Ștefan
Grupa 142

Conice
Tabel, desene, invarianți

Definiție Conicele sunt figuri (curbe) în plan. Pentru a introduce aceste figuri considerăm un plan raportat la un reper cartezian prin care planul se identifică cu $\mathbb{R}^2$. Modelul $\mathbb{R}^2$ permite descrierea figurilor cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor acestor funcții.

Fie forma pătratică afină (polinom de gradul 2 cu necunoscutele x și y):

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33};$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$$

Mulțimea $\Gamma = \{ M(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 0 \}$ sn conică sau curbă algebrică de ordinul al doilea.

Polinomul are următoarele numere asociate:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$I = a_{11} + a_{22}$$

$$K = \delta + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Valorile Δ, δ, J își păstrează valoarea la schimbarea reperului (translații, rotații, simetrii) și se numesc <u>invarianții metrici</u> ai conicei. K este invariant doar la rotații și sim. <u>Semi-invariant</u>.

<u>Clasificări</u>:

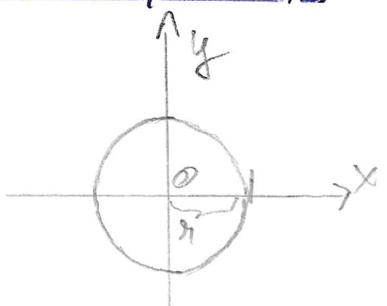
δ	Δ	$J\Delta$	K	Conică	Gen
	$\neq 0$	< 0		elipsă	
> 0	$\neq 0$	> 0		conica vidă	eliptic
	$= 0$			punct (dublu)	
< 0	$\neq 0$			hiperbola	hiperbolic
	$= 0$			pereche de dr concurente	
	$\neq 0$			parabolă	
			< 0	pereche de dr paralele	
$= 0$	$= 0$		$= 0$	pereche de dr confundate	parabolic
			> 0	conica vidă	

Observații 1) Invariantul δ nu dă genul conicei.

2) Δ ne dă degenerarea ($\Delta \neq 0 \to$ conică nedegenerată
$\Delta = 0 \to$ conică degenerată)

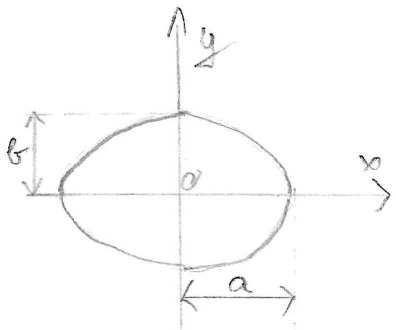
3) $\delta < 0 \Rightarrow I = 0 \to$ hiperbolă echilaterală (asimptotele sunt perpendiculare); iar în cazul degenerat la o pereche de drepte perpendiculare

Desene și ecuații



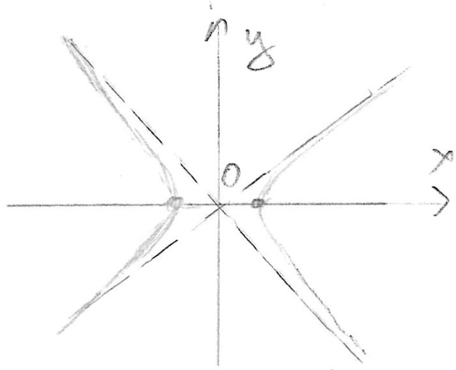
Cerc

$$x^2+y^2=r^2$$



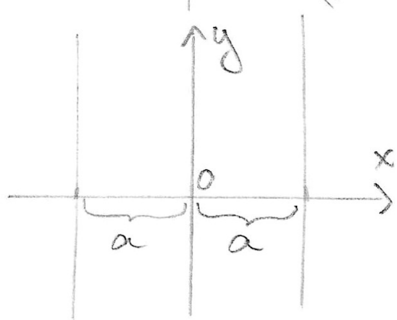
Elipsă

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



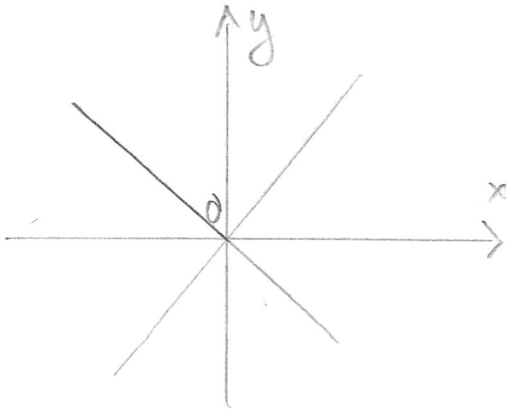
Hiperbolă

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Drepte paralele

$$x^2-a^2=0$$



Drepte concurente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Andrei Stefan
Grupa 142

Cuadrice
Tabel, desene, invarianți

Definiție Cuadricele sunt mulțimea soluțiilor ecuațiilor de forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yx + 2a_{10}x +$$
$$+ 2a_{30}z + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \ ;$$
$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{12} + a_{13} + a_{23} \neq 0$$

La schimbarea reperului ecuația se transformă în una de aceeași formă.

Următoarele valori nu își modifică valoarea și se numesc invarianți:

$$J = a_{11} + a_{22} + a_{23}$$

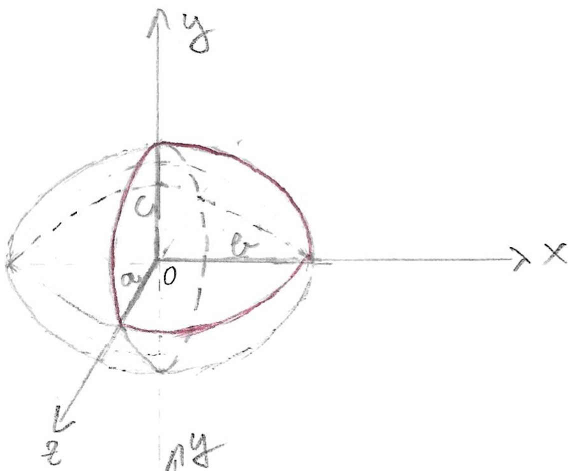
$$\gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{vmatrix}$$

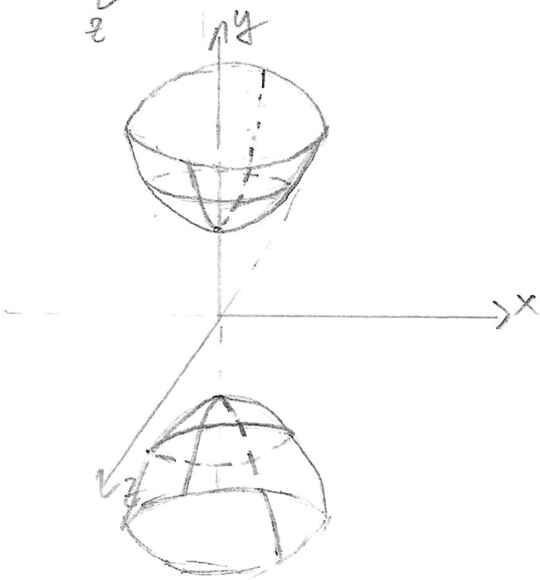
Ecuațiile reduse și desene

Obs. ec reduse => $a, b, c \in (0, \infty)$



Elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



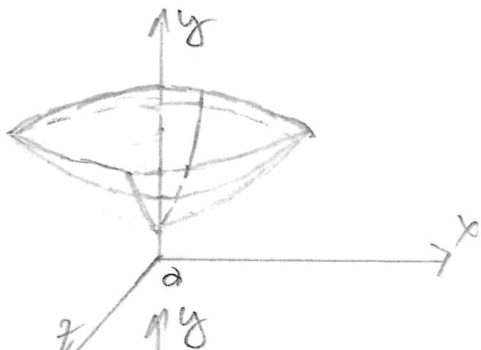
Hiperboloid

- cu o pânză

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

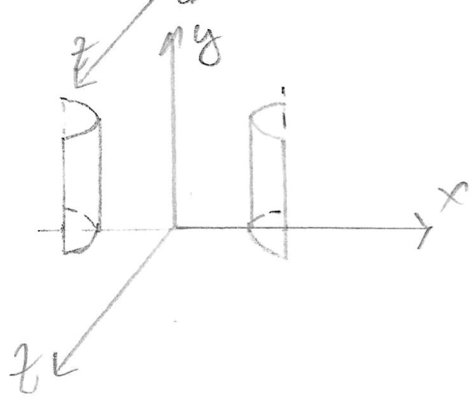
- cu două pânze (desen)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Paraboloid eliptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{y^2} - z = 0$$



Cilindru

- hiperbolic (desen)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- eliptic (urm. pagină)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

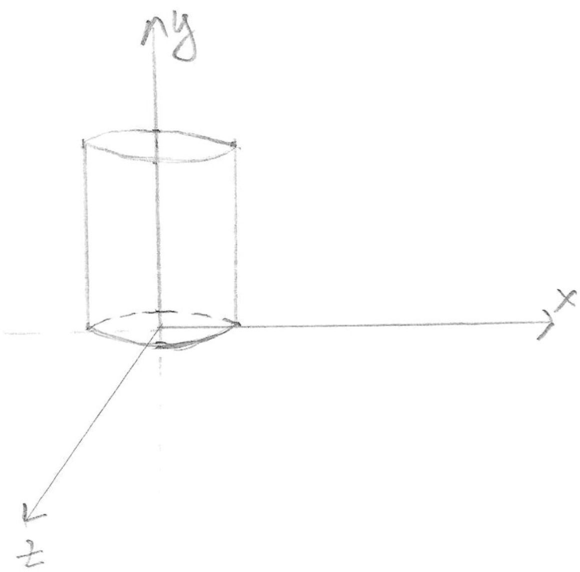
Două plane concurente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Două plane paralele

$x^2 - a^2 = 0$

Cilindru eliptic (desen)



Andrei Ștefan
Grupa 142

Problemă

Date 2 triunghiuri congruente $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ în $\mathbb{R}^2$, există și este unică $f \in Aut(E_0^2)$ a.î.:

$$f(A)=A'$$
$$f(B)=B'$$
$$f(C)=C'$$

1) Demonstrație
2) Demonstrație pt $n=3$ (cu tetraede)
3) Generalizare

1) Fie 2 triunghiuri $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Rightarrow$ există o izometrie f a.î.:

$$f(A)=A' \; ; \; f(B)=B' \; ; \; f(C)=C'$$

Pp că există o izometrie g a.î.:

$$g(A)=A' \; ; \; g(B)=B' \; ; \; g(C)=C'$$

Atunci $h=g^{-1}\circ f$ este o izometrie care fixează punctele A, B, C.

O izometrie ce fixează 3 puncte în $\mathbb{R}$ este identitatea $\Rightarrow$
$\Rightarrow h$ este identitatea $\Rightarrow f=g$.

$\Downarrow$

f există și este unică

$\square$

2) Pentru $n=3$

Fie $T=(A,B,C,D)$ și $T'=(A',B',C',D')$ 2 tetraede congruente în $\mathbb{R}^3$.

$T \equiv T' \Rightarrow$ există o izometrie f a.î.:

$$f(A)=A' \; ; \; f(B)=B' \; ; \; f(C)=C' \; ; \; f(D)=D'$$

Pp că există o izometrie g a.î.:

$$g(A)=A' \; ; \; g(B)=B' \; ; \; g(C)=C' \; ; \; g(D)=D'$$

Atunci $h=g^{-1} \circ f$ este o izometrie care fixează punctele A, B, C, D.

O izometrie ce fixează 4 puncte în $\mathbb{R}^3$ este identitatea $\Rightarrow$

$\Rightarrow h$ este identitatea $\Rightarrow f=g$

$\Downarrow$

f există și este unică $\square$

3) Generalizare

Fie $n+1$ puncte ce nu se află toate într-un subspațiu de dimensiune $n-1$ în $\mathbb{R}^n$ (un n-simplex): $S=(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ și un n-simplex congruent cu acesta: $S'=(a_1', a_2', \dots, a_n', a_{n+1}')$.

Din congruență $\Rightarrow$ există o izometrie f a.î.:

$$f(a_i)=a_i' \quad , \; i=\overline{1,n+1}$$

Obs: Două simplex-uri sunt congruente dacă există o izometrie între ele.

Pp că există o izometrie g aî:

$$g(a_i) = a_i'$$

Atunci $h = g^{-1} \circ f$ este o izometrie care fixează punctele $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$.

Întrucât punctele $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ sunt fixate în poziție generală (alcătuiesc un $n+1$-simplex) în $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ h este identitatea $\Rightarrow$ $f = g$

$\Downarrow$

$\exists!\ f \in Aut(E_0^n)$ aî $f(a_i) = a_i'$, $i = \overline{1, n+1}$,

$a_1, a_2, \dots a_{n+1}$ se află în poziție generală

$\square$

Andrei Stefan
Grupa 142

Probleme

1) Fie $A \in O(2)$

Atunci $\exists\, \theta \in [0, 2\pi)$ a.î. $A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

SAU

$$A = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$A \in O(2) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; iar

$$A \cdot A^t = I_n \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow a=\cos t,\ b=\sin t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c\cdot\cos t + d\cdot \sin t = 0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -c\dfrac{\cos t}{\sin t} \\ c^2\left(1+\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow c^2 = \sin^2 t$$

Caz 1 $c = \sin t$, $d = -\cos t$

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \in O(2)$$

Obs: $A \in SO(2)$

Caz 2 $c=-\sin t,\ d=\cos t$

$$A=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\in SO(2),\quad A\in O(2)$$

$$\Downarrow$$

$$A^t=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\in O(2)$$

$\square$

2) $\begin{cases} R_{\theta_1}\cdot R_{\theta_2} \overset{?}{=} R_{\theta_1+\theta_2}\\ R_{\theta_2}\cdot R_{\theta_1} \overset{?}{=} R_{\theta_2+\theta_1}\end{cases}$

Acest sistem este adevărat două rotații în plan sunt egale cu o rotație de unghiul sumei celor 2

$$R_{\theta_1}\cdot R_{\theta_2}=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_2\sin\theta_1\\ \cos\theta_2\sin\theta_1+\cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}=R_{\theta_1+\theta_2}$$

Analog pentru $R_{\theta_2}\cdot R_{\theta_1}=R_{\theta_2+\theta_1}$

3) $\begin{cases} R_{\theta_1} \cdot S_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} \cdot R_{\theta_1} \end{cases}$

3.1) $R_{\theta_1} \cdot S_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

Obs: Matricea rezultată nu este în general o rotație pură sau o simetrie pură.

3.2) $S_{\theta_2} \cdot R_{\theta_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 - \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_2-\theta_1) \\ \sin(\theta_2-\theta_1) & -\cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_2-\theta_1) \\ \sin(\theta_2-\theta_1) & \cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix}$$

Concluzie: Compunerea dintre o simetrie și o rotație nu comută.

Observația anterioară rămâne valabilă.

4) $\begin{cases} S_{\theta_1} \cdot S_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} \cdot S_{\theta_1} \end{cases}$

4.1) $S_{\theta_1} \cdot S_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1 & \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_2-\theta_1) \\ \sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2) & -\sin(\theta_1-\theta_2) \\ \sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix}$$

Observăm că pt $O(2)$, compunerea a 2 simetrii rezultă într-o rotație

Analog pentru $S_{\theta_2} \cdot S_{\theta_1}$ obținem $\begin{pmatrix} \cos(\theta_2-\theta_1) & -\sin(\theta_2-\theta_1) \\ \sin(\theta_2-\theta_1) & \cos(\theta_2-\theta_1) \end{pmatrix}$

echivalent cu $\begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2) & \sin(\theta_1-\theta_2) \\ -\sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix}$ adică

rotația în sens invers (deci ordinea contează)