# Derivate parțiale și funcții diferențiabile
## (cazul unidimensional)

Notație: $\mathbb{R}^r = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) / x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,r}\}$

Fie $x = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ și $y = (y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{R}^r$. Atunci
$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r)$ și $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_r)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

**Def** Pentru orice $x \in \mathbb{R}^r$, notăm cu $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_r^2}$ norma lui $x$.

**Obs.** Fie $r, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^r$ și $f : A \to \mathbb{R}^q$. Pentru orice $a \in A$ avem
$f(a) = (f_1(a), \dots, f_q(a))$, $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,q}$

Fie $r, q \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^r$, $f : A \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q)$, $a \in \mathring{A}$.

**Def.**

1) Spunem că $f$ e derivabilă parțial în raport cu variabila $x_i$ în punctul $a$ dacă există în $\mathbb{R}^q$ limita următoare:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}, \text{ unde } e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^r$$

În acest caz notăm $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$.

Deci, ca să derivăm parțial o funcție de mai multe variabile, fixăm variabila după care derivăm și pe celelalte le tratăm ca pe constante. Vom vedea un exemplu mai târziu.

2) Spunem că $f$ este diferențiabilă în punctul $a$ dacă există o aplicație liniară $T : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^q$ astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0_{\mathbb{R}^q} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q.$$

Dacă $\exists$ aplicația liniară, se notează cu $df(a)$ și se numește diferențiala lui $f$ în $a$. ($df(a) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^q$)

Ce este o aplicație liniară? O funcție cu următoarele 2 prop:

$T(x+y) = T(x) + T(y)$

$T(\lambda x) = \lambda T(x)$. Mai multe detalii în sem II la algebră liniară.

Dacă $f$ este diferențiabilă în punctul $a$, atunci $f$ este derivabilă parțial în raport cu $x_i$, $i=\overline{1,p}$, în punctul $a$ și

$$df(a): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q,\ df(a)(\underset{(u_1,\dots,u_p)}{\overset{\parallel}{u}}) = \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots\dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \right)^t$$

(t-ul ăla e „transpus").

Obs. Pentru $q=1$, $df(a): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$df(a)(u) = \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dots\dots & \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \right)^t =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \cdot u_p .$$

<u>Criteriul de diferențiabilitate:</u>

Presupunem că $\exists V \in \mathcal{V}_a$, $V \subseteq A$ a.î. $f$ admite toate deriv. parț. pe $V$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}: V \to \mathbb{R}^q$ sunt funcții continue $\forall i=\overline{1,p}$.

Atunci $f$ e diferențiabilă în $a$.

Exemplu:

Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-x+2z$.

Studiați diferențiabilitatea funcției $f$ în punctul $(1,2,3)$ și determinați $df(1,2,3)$ (dacă există).

Soluție:

Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x-y-1$ (am derivat în funcție de $x$, iar $y$ și $z$ sunt constante).

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y-x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z+2$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ cont pe $\mathbb{R}^3$ deschisă (deci este vecinătate pt toate punctele sale)

Conform crit de dif avem că $f$ e dif în $(1,2,3)$ (chiar pe $\mathbb{R}^3$)

și $df(1,2,3):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $df(1,2,3)(u,v,w)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\right)\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)\cdot u+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)\cdot v+\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\cdot w=-u+3v+8w$$

Deci $df(1,2,3)=-dx+3dy+8dz$.

Obs. În general, vom fi fizicieni și vom scrie direct $\frac{\partial f}{\partial x}=\dots$; nu vom mai scrie $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dots$

Cum derivăm parțial funcții compuse?

Teoremă (Chain rule / Regula lanțului)

Fie $p, q, r \in \mathbb{N}^*$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$, $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^q$, $g: A \to B$, $g = (g_1, \dots, g_q)$, $h: B \to \mathbb{R}^r$, $h = (h_1, \dots, h_r)$, $f = h \circ g : A \to \mathbb{R}^r$, $f = (f_1, \dots, f_r)$ și $a \in \mathring{A}$ ai $g(a) \in \mathring{B}$.

Dacă $g$ e diferențiabilă în $a$ și $h$ e diferențiabilă în $g(a)$, atunci: 1) $f = h \circ g$ diferențiabilă în $a$ și $df(a) = dh(g(a)) \circ dg(a)$

2) $$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial h_i}{\partial y_l}(g(a)) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_k}(a) \quad \forall\, i = \overline{1,r},\ k = \overline{1,p}$$

De exemplu, dacă avem $f(x,y,z) = h(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f = h(u,v,w)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$ (v-am spus că nu mai pun argumentele funcțiilor)

Exemplu:

Fie $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcție diferențiabilă și $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \varphi(x e^y \sin z, xyz)$. Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Soluție: Notăm $u = x e^y \sin z$ și $v = xyz$.

Avem $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot (e^y \sin z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot (yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot (x e^y \sin z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot (xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot (x e^y \cos z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot (xy)$$

Obs. Dacă aveam, de exemplu, $\varphi(u,v) = u^2+v$. Atunci avem că

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 2u \text{ şi } \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 1.$$ Vom avea, de exemplu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(e^y \sin z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot(yz) = 2u\cdot e^y \sin z + 1\cdot yz.$$

Dar $u = xe^y \sin z$ şi $v = xyz$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xe^y \sin z \cdot e^y \sin z + yz.$$

La fel se procedează şi pentru $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi $\frac{\partial f}{\partial z}$.

① $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^8}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Studiați continuitatea funcției $f$

$f$ cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

Studiem continuitatea lui $f$ în $(0,0)$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{y x^2}{\sqrt{x^4+y^8}} \right| \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \quad f \text{ cont în } (0,0)$$

$$x^4 + y^8 \geq x^4 \iff \sqrt{x^4+y^8} \geq x^2$$

$$\iff 1 \geq \frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^8}}$$

b) Determinați $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy\sqrt{x^4+y^8} - x^2 y \cdot \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+y^8}}}{x^4+y^8}$$

$= \cancel{2xy\sqrt{x^4+y^8}}$ .... (Simplificați voi :) )

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2\sqrt{x^4+y^8} - x^2 y \frac{8y^7}{2\sqrt{x^4+y^8}}}{x^4+y^8} = \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(t,0))-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(0,t)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ - cont pe $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$
$\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ deschisă $\Big| \Rightarrow f$ dif pe $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

Studiem dif lui $f$ în $(0,0)$

Dacă $f$ a fi dif în $(0,0)$ atunci $df(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$df(0,0)(u,v) = {}^T\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = 0u + 0v = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^8}\sqrt{x^2+y^2}}$$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^8}+\frac{1}{n^8}}\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{\sqrt{2}}{n^4} \cdot \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow f \text{ nu e dif în } (0,0)$$

② a) Studiați cont lui $f$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ unde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

c) Stud dif lui $f$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $f$ cont pe $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

Studiem cont lui $f$ în $\{0,0\}$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{y^3}{x^4+y^2} \right| \leq |y| \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0 \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1$$

$f$ cont în $(0,0)$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{4x^3y^3}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^4+y^2) - y^3 \cdot 2y}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) - te_1) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) - te_2) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^4 - \cancel{f(0,0)}\, 2t^4}{t^4} = 1$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue în $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă $\Big| \Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Studiem diferențiabilitatea lui $f$ în $(0,0)$

Dacă $f$ ar fi diferențiabilă în $(0,0)$ atunci

$$df(0,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ df(0,0)(u,v) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right]^T = 0 \cdot u \cdot v \cdot 1 = v$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{y^3}{x^4+y^2} - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 - x^4 y - y^3}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left| \frac{-x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| =$$

$$= \frac{x^2 |y|}{x^4+y^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = $$

$\Rightarrow$ inegmediilor

$$\frac{x^4+y^2}{2} \ge \sqrt{x^4 y^2} \ldots$$

$$= \frac{1}{2}|x| \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1} \le |x| \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^4 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow f$ dif în $(0,0)$

2)

a) Studiați cont lui $f$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ unde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

c) Studiați dif lui $f$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $f$ cont pe $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

Studiem cont lui $f$ în $\{(0,0)\}$

Alegem $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ (∀) $n \in \mathbb{N}^*$

Avem $\lim (x_n, y_n) = (0,0)$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow f$ nu e cont în $(0,0)$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y + y - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t} = 0$

c) $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont pe } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \mathbb{R}^2 \text{ deschisă}\end{array}\right| \Rightarrow f$ dif pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Studiem dif lui $f$ în $(0,0)$

$f$ nu e cont în $(0,0) \Rightarrow f$ nu e dif în $(0,0)$

LOL LENNY FACE