Serii

Def.

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ şi $(s_n)_n$, $s_n = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$, $\forall n \geq p$

Perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ se numeşte serie de numere reale.

Obs. În general, vom considera $p=0$ sau $p=1$.

Notăm $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p}) = \sum_n x_n$.

Def. 1) Elementele şirului $(x_n)_n$ se numesc termenii seriei $\sum_n x_n$.

2) Elementele şirului $(s_n)_n$ se numesc sumele parţiale ale seriei.

3) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, α se numeşte suma seriei şi vom nota $\sum_n x_n = \alpha$.

4) Seria $\sum_n x_n$ este convergentă dacă $(s_n)_n$ e convergent.

5) Seria $\sum_n x_n$ este divergentă dacă $(s_n)_n$ e divergent.

Exemple:

1) $\sum_n q^n$ → convergentă dacă $q \in (-1,1)$; divergentă dacă $q \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ (seria geometrică)

2) $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ → convergentă dacă $\alpha > 1$; divergentă dacă $\alpha \leq 1$ (seria armonică generalizată)

(q şi α nu depind de n!!!)

Propoziție: Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii și $a \in \mathbb{R}^*$.

1) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt convergente, atunci $\sum_n (x_n \pm y_n) = \sum_n x_n + \sum_n y_n$ este convergentă.

2) Dacă $\sum_n x_n$ e convergentă (respectiv divergentă), atunci $\sum_n (a x_n) = a \sum_n x_n$ este convergentă (respectiv divergentă).

3) Dacă $\sum_n x_n$ e conv și $\sum_n y_n$ e div $\Rightarrow \sum_n (x_n \pm y_n)$ div.

~~4) Dacă~~

Obs. Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt div, atunci nu se poate trage nicio concluzie despre $\sum_n (x_n \pm y_n)$.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

1) Spunem că $\sum_n x_n$ este absolut convergentă dacă $\sum_n x_n$ e conv.
Orice serie absolut convergentă este convergentă. Reciproca nu e adevărată.

2) Criteriul lui Cauchy

Fie $\sum_n x_n$ o serie. Sunt echivalente:

a) $\sum_n x_n$ e conv.

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall m \in \mathbb{N}^*$ avem că $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}| < \varepsilon$.

3) Criteriul Abel-Dirichlet (I)

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î.

i) $(x_n)_n$ descrescător și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

ii) $\exists M>0$ a.î. $\forall n\in\mathbb{N}$, avem $|y_0+y_1+\dots+y_n| \leq M$.

Atunci $\sum\limits_n x_n y_n$ e convergentă.

4) Criteriul Abel-Dirichlet (II)

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î:

i) $(x_n)_n$ monoton și mărginit

ii) $\sum\limits_n y_n$ convergentă

Atunci $\sum\limits_n x_n y_n$ e convergentă.

5) Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_n \subseteq [0,\infty)$ a.î. $(x_n)_n$ e descrescător și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Atunci $\sum\limits_n (-1)^n x_n$ e conv.

6) Criteriul suficient de divergență

Dacă $\sum\limits_n x_n$ e conv, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci $\sum\limits_n x_n$ div.

Folosind doar că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ nu se poate trage nicio conclu[zie]

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

1) Criteriul raportului

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} l$.

i) Dacă $l < 1 \Rightarrow \sum_n x_n$ conv

ii) Dacă $l > 1 \Rightarrow \sum_n x_n$ div

iii) Dacă $l = 1 \Rightarrow$ criteriul nu decide

2) Criteriul radicalului

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} l$

i) Dacă $l < 1 \Rightarrow \sum_n x_n$ conv

ii) Dacă $l > 1 \Rightarrow \sum_n x_n$ div

iii) Dacă $l = 1 \Rightarrow$ crit nu decide.

3) Criteriul Raabe-Duhamel

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{not}{=} l$

i) $l < 1 \Rightarrow \sum_n x_n$ div

ii) $l > 1 \Rightarrow \sum_n x_n$ conv

iii) $l = 1 \Rightarrow$ crit nu decide

4) Criteriul condensării

Dacă $(x_n)_n \subseteq [0, \infty)$ este un șir descrescător, atunci $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași convergență.

5) Criteriul de comparație cu inegalități

Fie seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu prop. că $\forall n \geq n_0$ avem că $x_n \leq y_n$.

i) Dacă $\sum_n y_n$ conv, atunci și $\sum_n x_n$ conv

ii) Dacă $\sum_n x_n$ div, atunci și $\sum_n y_n$ div.

6) Criteriul de comparație cu limită

Fie seriile $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$, $x_n \geq 0$, $y_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not}{=} l \in [0,\infty]$

i) Dacă $l \in (0,\infty)$, atunci $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ au aceeași convergență.

ii) Dacă $l = 0$ și $\sum_n y_n$ conv $\Rightarrow \sum_n x_n$ conv.

iii) Dacă $l = \infty$ și $\sum_n y_n$ div $\Rightarrow \sum_n x_n$ div.

7) Criteriul logaritmic

Fie $\sum_n x_n$, $x_n > 0$. Dacă $\exists N \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq N$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} \overset{not}{=} l$

atunci:

i) Dacă $l > 1 \Rightarrow \sum_n x_n$ conv

ii) Dacă $l < 1 \Rightarrow \sum_n x_n$ div

iii) Dacă $l = 1 \Rightarrow$ crit nu decide

8) Criteriul integral

Fie $f:[n_0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ o funcție descrescătoare și $x_n=f(n)$.

Atunci:

i) $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ conv $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{n_0}^{n} f(x)dx$ finită.

ii) $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ div $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{n_0}^{n} f(x)dx$ infinită.

Serii de puteri

Fie $(a_n)_n\subseteq\mathbb{R}$ și $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=a_n x^n$.

Def. Seria $\sum_n a_n x^n$ se numește serie de puteri.

$R=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ este raza de convergență a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$.

$A=\{x\in\mathbb{R} \mid \sum_n a_n x^n \text{ conv}\}$ este mulțimea de convergență a seriei.

Propoziție: 1) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\in[0,\infty]$, atunci $R=\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$.

2) Dacă $\exists \lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, atunci $R=\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$.

Teoremă: Pentru $\forall x\in(-R,R)$, seria $\sum_n a_n x^n$ e absolut convergentă.

Pentru $\forall x\in\mathbb{R}\setminus[-R,R]$, $\sum_n a_n x^n$ e divergentă.

Corolar: $(-R,R)\subseteq A\subseteq[-R,R]$.

(deci verificăm manual pentru $x=-R$ și $x=R$).

Aplicații:

(*) $\sum_n \frac{\ln n}{n^3}$.

Fie $x_n = \frac{\ln n}{n^3}$.

Avem că $\ln n < n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. (pentru demonstrație, notați cu $f(x) = \ln x$ și $g(x) = x$ și faceți tabelul cu derivata pentru $f(x) - g(x)$)

Deci $x_n < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \stackrel{not}{=} y_n$. Dar $\sum_n y_n = \sum_n \frac{1}{n^2}$ e conv, deoarece $\sum_n y_n$ e o serie armonică generalizată cu $\alpha > 1$ (apropo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Conform criteriului comparației cu inegalități avem că $\sum_n x_n$ conv

(*) $\sum_n n^{-\ln a}, a > 0$.

Fie $x_n = n^{-\ln a}$

Facem $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln \frac{1}{n^{-\ln a}}}{\ln n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n^{\ln a}}{\ln n} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln a \cdot \ln n}{\ln n} = \ln a$.

Conform criteriului logaritmului avem că:

1) Dacă $a > e \Rightarrow \sum_n x_n$ conv

2) Dacă $a < e \Rightarrow \sum_n x_n$ div

3) Dacă $a = e \Rightarrow$ crit nu decide.

Studiem cazul în care $a = e$. Seria devine $\sum_n \frac{1}{n}$, serie armonică generalizată cu $\alpha = 1$, deci divergentă.

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Fie $x_n = \frac{\ln n}{n^2}$.

Fie $f: [2,\infty) \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Avem că $x_n = f(n)$.

$f(x) > 0$ şi $f(x)$ descrescătoare (faceţi derivata şi aşa vă iese).

Calculăm $\lim_{n\to\infty} \int_2^n f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx =$

$f = \ln x \quad g' = \frac{1}{x^2}$
$f' = \frac{1}{x} \quad g = -\frac{1}{x}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_2^n - \int_2^n -\frac{1}{x^2} dx \right) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln 2}{2} + \int_2^n \frac{1}{x^2} dx \right) =$

$= \frac{\ln 2}{2} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}}_{0} + \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{x} \right)\Big|_2^n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{0} =$

0 (faci limită de funcţie cu L'Hospital)

$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

Conform criteriului integral avem că $\sum_n x_n$ convergentă.

Criteriul radicalului

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n, \ a \in (0,\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(a\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a\frac{n^2+n+1}{n^2} = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\in(0,1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(a\frac{n^2+n+1}{n^2}\right) \text{ conv} \\ a\in(1,\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(a\frac{n^2+n+1}{n^2}\right) \text{ div} \\ a=1, \text{ Criteriul nu decide.} \end{cases}$$

$a=1$: $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n^2}\cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n}{n^2}} = e \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(a\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n \text{ div}, a=1$$

Criteriul lui Raabe-Duhamel + Criteriul Raportului și comparație cu limită

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)}(c-2)^n$$

Aplicăm Criteriul Raportului

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}(c-2)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}\cdot$$

$$\cdot\frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\cdot\frac{(c-2)^{n+1}}{(c-2)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a+n)(c-2)}{(b+n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c\in(2,3) \Rightarrow \sum_{n=1} x_n \text{ conv} \\ c\in(3,\infty) \Rightarrow \sum_{n=1} x_n \text{ div} \\ c=3, \text{ crit nu decide} \end{cases}$$

Pentru $c=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} \cdot (-2)^n =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}, c=3$

Aplicăm Criteriul lui Raabe-Duhamel

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} \cdot \frac{b(b+1)\dots(b+n)}{a(a+1)\dots(a+n)} - 1\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+n}{a+n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(b-a)}{a+n} = b-a$

$\Rightarrow \begin{cases} b-a<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ div} \\ b-a>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ conv} \\ b-a=1 \Rightarrow \text{Criteriul nu decide} \end{cases}$

$b-a=1 \Rightarrow b=a+1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a+n}$

Folosim criteriul de ~~compoziție~~ comparație cu limită cu

$x_n = \frac{a}{a+n}$ și $y_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{a+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{a+n} = a \Big|_{a>0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,\infty)$

$\Rightarrow \sum_{n} \frac{a}{a+n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\left.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div}\right| \Rightarrow \sum_{n}^{\infty} \frac{a}{a+n}$ div

Criteriul Condensării

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, Fie $x_n = \frac{1}{n \ln n}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$(x_n)_n$ desc și poz

Criteriul condensării:

$$\sum_{n=2}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

$$\left.\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln 2} \text{ div} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} x_n \text{ div}$$

Criteriul lui ~~L~~ Leibniz + comparație cu limită

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+3)\sqrt[3]{n}}$$

Fie $y = x+3$. Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+3)\sqrt[3]{n}}$

$$a_n = \frac{1}{(n+3)\sqrt[3]{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+4)\sqrt[3]{n+1}} \cdot \frac{(n+3)\sqrt[3]{n}}{1} \right| = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow R = 1$.

Fie B mulțimea de conv. a seriei de puteri $\sum_n a_n y^n$

$(-1;1) \subset B \subset [-1,1]$

Studiem convergența în ± 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{(n+3)\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt[3]{n}}.$$

Aplicăm Criteriul de comparație cu limită

$x_n = \frac{1}{(n+3)\sqrt[3]{n}}$ $\cancel{y_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$ $y_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)\,n^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{n^{\frac{4}{3}}}{1} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_n x_n \sim \sum_n y_n$$

$$\left.\begin{matrix}\sum_n \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\\ \frac{4}{3}>1\end{matrix}\right| \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \text{ conv} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_n x_n \text{ conv} \Rightarrow 1 \in B$$

$-1: \sum_n \frac{(-1)^n}{(n+3)\sqrt[3]{n}}$, ~~Fie $(x_n)_n = \frac{1}{(n+3)\sqrt[3]{n}}$~~ Fie $x_n = \frac{1}{(n+3)\sqrt[3]{n}}$

Fie $f(x) = \frac{1}{(x+3)\sqrt[3]{x}}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{(x+3)^2\, x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3(x+3)\, x^{\frac{4}{3}}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad (\forall)\ x \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ desc } (\forall)\ x \geq 1 \quad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)\sqrt[3]{n}} = 0 \quad (2)$$

Deci din (1), (2), $(x_n)_n$ desc și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_n (-1)^n x_n \text{ conv} \Leftrightarrow \sum_n \frac{(-1)^n}{(n+3)\sqrt[3]{n}} \text{ conv}$$

Deci $-1 \in B$

Așadar $B = [-1;1]$

Fie A mult de conv a seriei din enunț

$y \in B \Leftrightarrow -1 \leq x+3 \leq 1 \ \big|\ -3$

$y = x+3 \qquad -4 \leq x \leq -2 \Rightarrow A = [-4;-2]$

Criteriul lui Abel - Dirichlet (I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{\alpha}}, \ x \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Folosim crit. Abel-Dirichlet (I)

Fie $x_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$ și $y_n = \cos(nx)$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

x_n desc și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (1)

$(\exists)\, M > 0$ a.î. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ $(y_1 + \dots + y_n) \le M$

M nu poate depinde de n, dar poate depinde de x

Fie $z = \cos x + i\sin x$

$z^2 = \cos(2x) + i\sin(2x)$ (form. lui ~~Moivre~~ MOIVRE)

$\dots$

$z^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

$y_1 + \dots + y_n = \cos x + \dots + \cos nx = \mathrm{Re}(z + z^2 + \dots + z^n)$

P.p că $z \neq 1$, i.e. $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$z + z^2 + \dots + z^n = z\frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1} =$$

$$= \frac{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - \cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x - 1} =$$

$$= \frac{-2\sin\left(\frac{n+2}{2}x\right)\cdot \sin\left(\frac{n}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{n+2}{2}x\right)}{1 - 2\sin\frac{2x}{2} + 1 + i\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\overset{-i}{\sin}\frac{n+2}{x} + i\cos\frac{n+2}{x}}{\sin\frac{x}{2} + i\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{n+2}{2}x + i\sin\frac{n+2}{2}x}{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n+1}{2}x + i\sin\frac{n+1}{2}x\right)$$

$$y_1+\dots+y_n = Re(z+z^2+\dots+z^n) = \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x$$

Deci $|y_1+\dots+y_n| = \frac{|\sin\frac{n}{2}\cdot x|}{|\sin\frac{x}{2}|}\cdot\left|\cos\frac{n+1}{2}x\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

Alegem $M = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$

Avem pt $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ $\quad |y_1+\dots+y_n| \le M \quad (2)$

Din (1) (2) $\Rightarrow$ Cf Criteriului lui Abel Dirichlet (I) că

$$\sum_n x_n y_n \text{ e conv}$$