

ARHITECTURA SISTEMELOR DE CALCUL SEMINAR 0x01

NOTIȚE SUPORT SEMINAR

Cristian Rusu

PACHET, EX 1

- care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?

PACHET, EX 1

- **care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?**
- **este 0, cărțile sunt ordonate crescător**
- **amestecăm aleator cărțile, câtă informație avem acum?**
 - **în câte feluri putem combina cele 52 de cărți?**

PACHET, EX 1

- care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?
- este 0, cărțile sunt ordonate crescător
- amestecăm aleator cărțile, câtă informație avem acum?
 - în câte feluri putem combina cele 52 de cărți?
 - 52!
 - deci informația este $\log_2(52!)$
 - cum calculăm valoarea asta?

PACHET, EX 1

- care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?
- este 0, cărțile sunt ordonate crescător
- amestecăm aleator cărțile, câtă informație avem acum?
 - în câte feluri putem combina cele 52 de cărți?
 - 52!
 - deci informația este $\log_2(52!)$
 - cum calculăm valoarea asta?
 - $\log_2(a \times b) = \log_2(a) + \log_2(b)$
 - $\log_2(52!) = 225.6$ biți
 - cu aproximarea lui Stirling:

PACHET, EX 1

- care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?
- este 0, cărțile sunt ordonate crescător
- amestecăm aleator cărțile, câtă informație avem acum?
 - în câte feluri putem combina cele 52 de cărți?
 - 52!
 - deci informația este $\log_2(52!)$
 - cum calculăm valoarea asta?
 - $\log_2(a \times b) = \log_2(a) + \log_2(b)$
 - $\log_2(52!) = 225.6$ biți
 - cu aproximarea lui Stirling: $\log_2(52!) \approx 52\log_2(52) - 52\log_2 e = 221.4$ biți
 - algoritmic, cum amestecăm cărțile (eficient)?
 - aveți la dispoziție o funcție care returnează o valoare aleatoare în intervalul $[0,1]$

PACHET, EX 1

- care este cantitatea de informație din pachet când scoatem cărțile pentru prima dată?
- este 0, cărțile sunt ordonate crescător
- amestecăm aleator cărțile, câtă informație avem acum?
 - algoritmic, cum amestecăm cărțile (eficient)?
 - aveți la dispoziție o funcție care returnează o valoare aleatoare în intervalul $[0,1]$
 - considerăm cărțile sortate crescător
 - calculăm $i = \text{round}(52 * \text{rand}())$
 - selectăm din pachet cartea i
 - swap cartea i cu cartea 52
 - calculăm $i = \text{round}(51 * \text{rand}())$
 - selectăm din pachet cartea i
 - swap cartea i cu cartea 51
 - ...
 - verificați algoritmul “Fisher–Yates shuffle”

URNA, EX 2

$$H(X) = E(I(X)) = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^N -p_i \log_2 p_i$$

- **în urnă: 5 bile roșii, 3 bile albastre**
- **observăm la extragere o bilă albastră, câtă informație am primit?**

URNA, EX 2

$$H(X) = E(I(X)) = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^N -p_i \log_2 p_i$$

- **în urnă: 5 bile roșii, 3 bile albastre**
- **observăm la extragere o bilă albastră, câtă informație am primit?**

$$I(\text{bila albastra}) = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{3}{8}} \right) = \log_2 \left(\frac{8}{3} \right) = 1.42 \text{ biti}$$

- **cât era entropia urnei înainte de extragere?**

URNA, EX 2

$$H(X) = E(I(X)) = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^N -p_i \log_2 p_i$$

- **în urnă: 5 bile roșii, 3 bile albastre**
- **observăm la extragere o bilă albastră, câtă informație am primit?**

$$I(\text{bila albastra}) = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{3}{8}} \right) = \log_2 \left(\frac{8}{3} \right) = 1.42 \text{ biti}$$

- **cât era entropia urnei înainte de extragere?**

$$H(\text{urna}) = \frac{5}{8} \log_2 \left(\frac{8}{5} \right) + \frac{3}{8} \log_2 \left(\frac{8}{3} \right) = 0.95 \text{ biti}$$

- **cât este entropia urnei după extragere?**

URNA, EX 2

$$H(X) = E(I(X)) = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^N -p_i \log_2 p_i$$

- în urnă: 5 bile roșii, 3 bile albastre
- observăm la extragere o bilă albastră, câtă informație am primit?

$$I(\text{bila albastra}) = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{3}{8}} \right) = \log_2 \left(\frac{8}{3} \right) = 1.42 \text{ biti}$$

- cât era entropia urnei înainte de extragere?

$$H(\text{urna}) = \frac{5}{8} \log_2 \left(\frac{8}{5} \right) + \frac{3}{8} \log_2 \left(\frac{8}{3} \right) = 0.95 \text{ biti}$$

- cât este entropia urnei după extragere?

$$H(\text{urna dupa extragere}) = \frac{5}{7} \log_2 \left(\frac{7}{5} \right) + \frac{2}{7} \log_2 \left(\frac{7}{2} \right) = 0.86 \text{ biti}$$

- **întrebare suplimentară:** continuați calculul entropiei considerând că extragem în continuare (una câte una) toate bilele albastre
- **întrebare suplimentară:** repetați calculul entropiei considerând că extragem (una câte una) toate bilele roșii din urna originală

BALANȚA, EX 3



- 12 bile, una dintre ele are o greutate diferită față de celelalte
- găsiți bila diferită cu un număr minim de cântăriri
- întrebări inițiale:
 - câte cântăriri avem nevoie cu soluția “simplă”?
 - cântărim două câte două bilele (6 experimente): un experiment va reduce opțiunile la două bile, apoi comparăm fiecare bilă cu una din cele care este cu siguranță standard (2 experimente)
 - deci cu 8 cântăriri putem sigur găsi bila
 - câtă informație trebuie să descoperim?

BALANȚA, EX 3



- 12 bile, una dintre ele are o greutate diferită față de celelalte
- găsiți bila diferită cu un număr minim de cântăriri
- întrebări inițiale:
 - câte cântăriri avem nevoie cu soluția “simplă”?
 - cântărim două câte două bilele (6 experimente): un experiment va reduce opțiunile la două bile, apoi comparăm fiecare bilă cu una din cele care este cu siguranță standard (2 experimente)
 - deci cu 8 cântăriri putem sigur găsi bila
 - câtă informație trebuie să descoperim?
 - care e bila diferită? $\log_2(12) = 3.58$
 - dacă este mai ușoară sau mai grea: 1 bit, dacă nu știm care situație este

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **să analizăm sistematic**
 - avem 3 valori ce trebuie specificate când facem o cântarire
 - câte bile putem în stanga balanței
 - câte bile putem în dreapta balanței
 - câte bile rămân pe masă
 - toate posibilitățile care ne interesează:

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **să analizăm sistematic**
 - avem 3 valori ce trebuie specificate când facem o cântarire
 - câte bile putem în stanga balanței
 - câte bile putem în dreapta balanței
 - câte bile rămân pe masă
 - toate posibilitățile care ne interesează:
 - 6 cu 6, 0 pe masă
 - 5 cu 5, 2 pe masă
 - 4 cu 4, 4 pe masă
 - 3 cu 3, 6 pe masă
 - 2 cu 2, 8 pe masă
 - 1 cu 1, 10 pe masă

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **6 cu 6, 0 pe masă**
 - care sunt rezultatele posibile?
 - balanța cade spre stânga
 - balanța cade spre dreapta
 - balanța este echilibrată
 - care sunt probabilitățile pentru fiecare posibilitate?

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **6 cu 6, 0 pe masă**
 - care sunt rezultatele posibile?
 - balanța cade spre stânga (1/2)
 - balanța cade spre dreapta (1/2)
 - balanța este echilibrată (0)
 - care este entropia acestui alfabet?

$$H(6 \text{ cu } 6) = \frac{1}{2} \log_2(2) + \frac{1}{2} \log_2(2) = 1 \text{ bit}$$

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **5 cu 5, 2 pe masă**
 - care sunt rezultatele posibile?
 - balanța cade spre stânga (5/12)
 - balanța cade spre dreapta (5/12)
 - balanța este echilibrată (2/12 = 1/6)
 - care este entropia acestui alfabet?

$$H(5 \text{ cu } 5) = 2 \times \frac{5}{12} \log_2 \left(\frac{12}{5} \right) + \frac{1}{6} \log_2(6) = 1.48 \text{ biti}$$

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **4 cu 4, 4 pe masă**
 - care sunt rezultatele posibile?
 - balanța cade spre stânga (1/3)
 - balanța cade spre dreapta (1/3)
 - balanța este echilibrată (1/3 = 4/12)
 - care este entropia acestui alfabet?

$$H(4 \text{ cu } 4) = 3 \times \frac{1}{3} \log_2(3) = 1.58 \text{ biti}$$

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **3 cu 3, 6 pe masă**
 - care sunt rezultatele posibile?
 - balanța cade spre stânga (1/4)
 - balanța cade spre dreapta (1/4)
 - balanța este echilibrată (1/2 = 6/12)
 - care este entropia acestui alfabet?

$$H(3 \text{ cu } 3) = 2 \times \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{1}{2} \log_2(2) = 1.5 \text{ biti}$$

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **Rezumat:**
 - 6 cu 6, 0 pe masă $H = 1$ bit
 - 5 cu 5, 2 pe masă $H = 1.48$ biți
 - 4 cu 4, 4 pe masă $H = 1.58$ biți
 - 3 cu 3, 6 pe masă $H = 1.5$ biți
- ce alegem?

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- Rezumat:
 - 6 cu 6, 0 pe masă $H = 1$ bit
 - 5 cu 5, 2 pe masă $H = 1.48$ biți
 - 4 cu 4, 4 pe masă $H = 1.58$ biți
 - 3 cu 3, 6 pe masă $H = 1.5$ biți
- ce alegem?

BALANȚA, EX 3

considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **4 cu 4, 4 pe masă $H = 1.58$ biți**
 - facem experimentul, care sunt posibilitățile?
 - (caz 1) balanța cade la stânga
 - bilele pe partea stângă sunt mai grele
 - bilele pe partea dreaptă sunt mai ușoare
 - bilele de pe masa au aceeași greutate
 - (caz 2) balanța cade la dreapta
 - bilele pe partea dreaptă sunt mai grele
 - bilele pe partea stângă sunt mai ușoare
 - bilele de pe masa au aceeași greutate
 - (caz 3) balanța este echilibrată
 - bilele de pe masă conțin bila diferită
 - dacă este cazul 3, am redus numărul de bile de verificat la 4
 - dacă este cazul 1 sau 2, nu știm dacă bila este pe stânga sau pe dreapta dar știm sigur că nu e pe masa

BALANȚA, EX 3

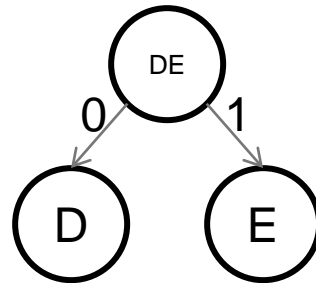
considerăm cazul mai simplu, în care știm că bila diferită e mai grea/ușoară

- **4 cu 4, 4 pe masă $H = 1.58$ biți**
 - (caz 3) balanța este echilibrată
 - bilele de pe masă conțin bila diferită
 - să numerotăm bilele:
 - pe partea dreaptă 1 2 3 4
 - pe partea stângă 5 6 7 8
 - pe masă 9 10 11 12
 - ce măsuratoare urmează?
 - 1 2 3 9 vs 4 5 10 11
 - dacă e echilibru, bila 12 este defectă (mai grea sau mai ușoară)
 - dacă balanța cade pe stânga
 - fie 9 e diferită și e grea
 - fie 10 sau 11 sunt diferite și una dintre ele e mai ușoară
 - măsuram 10 vs 11
 - dacă sunt egale, 9 e diferită și e mai grea sigur
 - dacă nu sunt egale, cea mai ușoară este cea diferită
 - dacă balanța cade pe dreapta ... procedura este similară
 - continuați voi ... cu celelalte cazuri

ÎNTREBĂRI SCURTE, EX 5

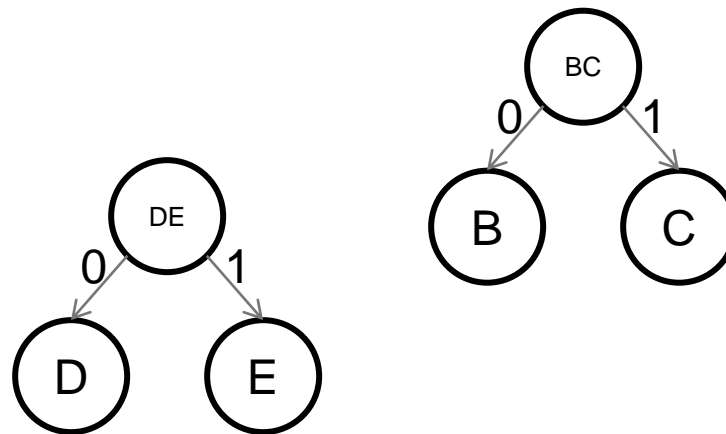
- a) $p = C_2^N / 2^N$
- b) $p = C_{N/2}^N / 2^N$, presupunem N par
- c) $p = (\frac{3}{4}N + 1) / 2^N$, presupunem N divizibil la 4
- d) $p = 2^{N-1} / 2^N = 1 / 2$
- e) $p = 2^{N-1} / 2^N = 1 / 2$
- f) $p = N / 2^N$
- g) $p = 2^{N/2} / 2^N = 1 / 2^{N/2}$, presupunem N par
- h) $p \approx [(2^N - 1) / \ln(2^N - 1)] / 2^N \approx [2^N / \ln(2^N)] / 2^N = 1 / \ln(2^N)$
- i) $p = (1 + \sum_{i=1}^{N/2} C_{2i}^N) / 2^N = 1 / 2$, presupunem N par
- j) $p = 1 / 2^N$

HUFFMAN, EX 6



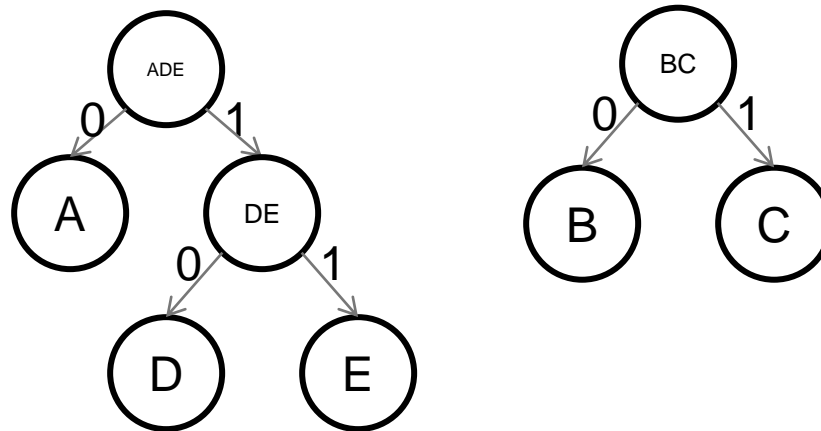
luăm două elemente cele mai improbabile (D și E, era OK C și E)
probabilitatea DE este $1/6 + 1/12 = 3/12 = 1/4$

HUFFMAN, EX 6



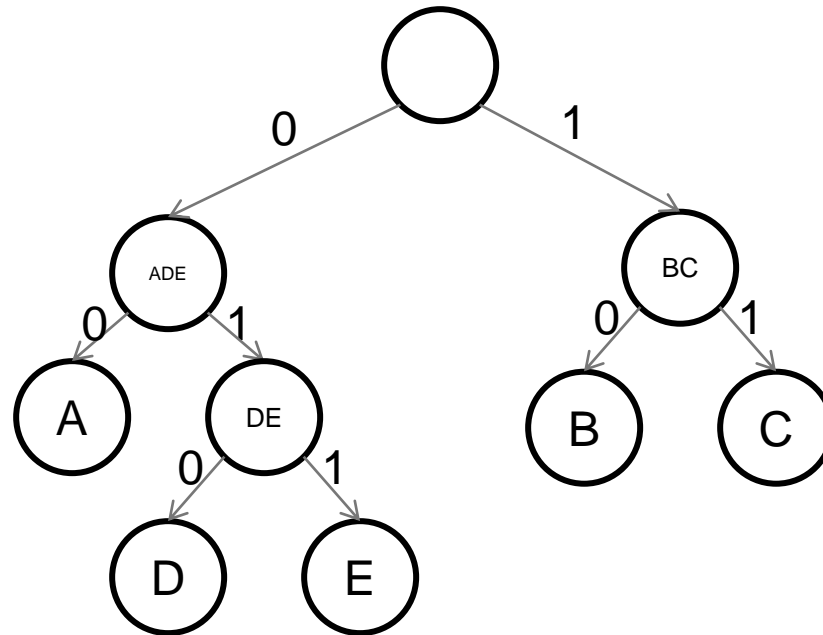
următorul element de adăugat acum este C cu probabilitate $1/6$
dar $1/6$ este mai puțin decât probabilitatea DE, deci C nu va fi singur
probabilitatea BC este $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

HUFFMAN, EX 6



următorul element este A și are probabilitate $1/3$
nu contează pe care arbore îl punem, fie împreună cu DE fie cu BC
(dacă îl puneți lângă BC codul lui A e diferit dar are aceeași dimensiune)

HUFFMAN, EX 6



arborele complet și codurile:

A = 00

B = 10

C = 11

D = 010

E = 011

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- tot ce e D este sunt biți de date
- tot ce e P sunt biți de paritate

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

- să presupun că D_{01} se schimbă (din 0 în 1, sau invers)
- câți biți din mesaj se schimbă?

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- tot ce e D este sunt biți de date
- tot ce e P sunt biți de paritate

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	P_{cl}

- să presupun că D_{01} se schimbă (din 0 în 1, sau invers)
- câți biți din mesaj se schimbă?
 - 3 biți de paritate + bitul de date
- care este distanța Hamming minimă?

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- tot ce e D este sunt biți de date
- tot ce e P sunt biți de paritate

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	P_{cl}

- să presupun că D_{01} se schimbă (din 0 în 1, sau invers)
- câți biți din mesaj se schimbă?
 - 3 biți de paritate + bitul de date
- care este distanța Hamming minimă?
 - 4 biți se schimbă, deci 4

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	P_{cl}

- pare corect, toți biții de paritate se potrivesc cu ce observăm

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

1	0	1	1
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

1	0	1	1
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	P_{cl}

- nu este corect: bitul de paritate P_{c1} semnaleaza o eroare, dar biții de paritate de linie nu semnaleză nimic: deci problema este chiar P_{c1} care a fost corupt

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

- nu este corect: bitul de paritate $P_{0\ell}$ este greșit, bitul de paritate P_{c0} este greșit \Rightarrow bitul de date D_{00} este greșit deci trebuie schimbat din 0 în 1; verificare: bitul total $P_{c\ell}$ este 0 deci ne trebuie în mesaj un număr impar de biți (deci cu schimbare este corect)

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	1	1	1

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	1	1	1

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

- nu este corect: toți biții de paritate de rând și coloane sunt OK, dar bitul de paritate total $P_{c\ell}$ nu e OK => deci bitul în eroare este chiar $P_{c\ell}$

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

CODURI PENTRU ERORI, EX 7

- este acest mesaj corect?
 - dacă nu, de ce?

1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

- nu este corect: toți biții de paritate $P_{1\ell}$, $P_{2\ell}$, P_{c1} și P_{c2} sunt greșiți, iar bitul de paritate $P_{c\ell}$ este corect \Rightarrow eroare este undeva pe linia/coloana 1 și 2: deci putem detecta erori de 2 biți dar nu le putem corecta

RATA ENTROPIEI, EX 10

- **lungimea medie a mesajului**
- **entropia în cazul nostru**
- **rata entropiei**

RATA ENTROPIEI, EX 10

- lungimea medie a mesajului
 - $1 \times p + 2 \times (1-p) = 2 - p$
- entropia în cazul nostru
- rata entropiei

RATA ENTROPIEI, EX 10

- lungimea medie a mesajului

- $1 \times p + 2 \times (1-p) = 2 - p$

- entropia în cazul nostru

$$H = p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1 - p}$$

- rata entropiei

RATA ENTROPIEI, EX 10

- lungimea medie a mesajului

- $1 \times p + 2 \times (1-p) = 2 - p$

- entropia în cazul nostru

$$H = p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1 - p}$$

- rata entropiei

$$R = \frac{p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1-p}}{2 - p}$$

- cum maximizăm?

RATA ENTROPIEI, EX 10

- lungimea medie a mesajului

- $1 \times p + 2 \times (1-p) = 2 - p$

- entropia în cazul nostru

$$H = p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1 - p}$$

- rata entropiei

$$R = \frac{p \log_2 \frac{1}{p} + (1 - p) \log_2 \frac{1}{1-p}}{2 - p}$$

- cum maximizăm?

- derivăm $R' = \frac{2 \log_2 \frac{1}{p} - \log_2 \frac{1}{1-p}}{(2 - p)^2}$ și egalăm cu zero \longrightarrow

RATA ENTROPIEI, EX 10

- lungimea medie a mesajului

- $1 \times p + 2 \times (1-p) = 2 - p$

- entropia în cazul nostru

$$H = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

- rata entropiei

$$R = \frac{p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}}{2-p}$$

- cum maximizăm?

- derivăm $R' = \frac{2 \log_2 \frac{1}{p} - \log_2 \frac{1}{1-p}}{(2-p)^2}$ și egalăm cu zero $\longrightarrow \log_2 \frac{1-p}{p^2} = 0$
 - p este soluția ecuației

RATA ENTROPIEI, EX 10

- lungimea medie a mesajului

- $1 \times p + 2 \times (1-p) = 2 - p$

- entropia în cazul nostru

$$H = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

- rata entropiei

$$R = \frac{p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}}{2-p}$$

- cum maximizăm?

- derivăm $R' = \frac{2 \log_2 \frac{1}{p} - \log_2 \frac{1}{1-p}}{(2-p)^2}$ și egalăm cu zero $\longrightarrow \log_2 \frac{1-p}{p^2} = 0$
 - p este soluția ecuației $p^2 + p - 1 = 0$

RATA ENTROPIEI, EX 10

- lungimea medie a mesajului

- $1 \times p + 2 \times (1-p) = 2 - p$

- entropia în cazul nostru

$$H = p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

- rata entropiei

$$R = \frac{p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}}{2-p}$$

- cum maximizăm?

- derivăm $R' = \frac{2 \log_2 \frac{1}{p} - \log_2 \frac{1}{1-p}}{(2-p)^2}$ și egalăm cu zero $\longrightarrow \log_2 \frac{1-p}{p^2} = 0$
 - p este soluția ecuației $p^2 + p - 1 = 0 \longrightarrow p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

care este legătura cu raportul de aur?

MAXIMIZAREA ENTROPIEI, EX 11

- considerăm că avem probabilități astfel încât $p_1 < p_2$
- avem că $p_1 + \varepsilon < p_2 - \varepsilon$ pentru ε destul de mic
- vrem să arătăm că

$$H(\{p_1 + \varepsilon, p_2 - \varepsilon, p_3, \dots, p_N\}) > H(\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\})$$

MAXIMIZAREA ENTROPIEI, EX 11

- considerăm că avem probabilități astfel încât $p_1 < p_2$
- avem că $p_1 + \epsilon < p_2 - \epsilon$ pentru ϵ destul de mic
- vrem să arătăm că

$$H(\{p_1 + \epsilon, p_2 - \epsilon, p_3, \dots, p_N\}) > H(\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\})$$

- trebuie să arătăm că

$$H(\{p_1 + \epsilon, p_2 - \epsilon, p_3, \dots, p_N\}) - H(\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}) > 0$$

- diferența dintre cele două entropii se scrie ca

MAXIMIZAREA ENTROPIEI, EX 11

- considerăm că avem probabilități astfel încât $p_1 < p_2$
- avem că $p_1 + \epsilon < p_2 - \epsilon$ pentru ϵ destul de mic
- vrem să arătăm că

$$H(\{p_1 + \epsilon, p_2 - \epsilon, p_3, \dots, p_N\}) > H(\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\})$$

- trebuie să arătăm că

$$H(\{p_1 + \epsilon, p_2 - \epsilon, p_3, \dots, p_N\}) - H(\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_N\}) > 0$$

- diferența dintre cele două entropii se scrie ca

$$-p_1 \log_2 \left(\frac{p_1 + \epsilon}{p_1} \right) - \epsilon \log_2(p_1 + \epsilon) - p_2 \log_2 \left(\frac{p_2 - \epsilon}{p_2} \right) + \epsilon \log_2(p_2 - \epsilon) > 0$$

- acum, vrem să folosim $\log_2(1 + x) \approx x + O(x^2)$

MAXIMIZAREA ENTROPIEI, EX 11

- diferența dintre cele două entropii se scrie ca

$$-p_1 \log_2 \left(\frac{p_1 + \epsilon}{p_1} \right) - \epsilon \log_2(p_1 + \epsilon) - p_2 \log_2 \left(\frac{p_2 - \epsilon}{p_2} \right) + \epsilon \log_2(p_2 - \epsilon) > 0$$

- acum, vrem să folosim $\log_2(1 + x) \approx x + O(x^2)$
- pe partea stângă a inegalității rezultă:

MAXIMIZAREA ENTROPIEI, EX 11

- diferența dintre cele două entropii se scrie ca

$$-p_1 \log_2 \left(\frac{p_1 + \epsilon}{p_1} \right) - \epsilon \log_2(p_1 + \epsilon) - p_2 \log_2 \left(\frac{p_2 - \epsilon}{p_2} \right) + \epsilon \log_2(p_2 - \epsilon) > 0$$

- acum, vrem să folosim $\log_2(1 + x) \approx x + O(x^2)$
- pe partea stângă a inegalității rezultă:

$$-\epsilon - \epsilon \log_2 p_1 + \epsilon + \epsilon p_2 + O(\epsilon^2) = \epsilon \log_2 \frac{p_2}{p_1} + O(\epsilon^2)$$

- este această expresie mereu pozitivă?

MAXIMIZAREA ENTROPIEI, EX 11

- diferența dintre cele două entropii se scrie ca

$$-p_1 \log_2 \left(\frac{p_1 + \epsilon}{p_1} \right) - \epsilon \log_2(p_1 + \epsilon) - p_2 \log_2 \left(\frac{p_2 - \epsilon}{p_2} \right) + \epsilon \log_2(p_2 - \epsilon) > 0$$

- acum, vrem să folosim $\log_2(1 + x) \approx x + O(x^2)$
- pe partea stângă a inegalității rezultă:

$$-\epsilon - \epsilon \log_2 p_1 + \epsilon + \epsilon p_2 + O(\epsilon^2) = \epsilon \log_2 \frac{p_2}{p_1} + O(\epsilon^2)$$

- este această expresie mereu pozitivă?
 - da, pentru că am presupus $p_1 < p_2$

CODARE PREFIX, EX 12

- **exemple de coduri:**

CODARE PREFIX, EX 12

- exemple de coduri:
 - 1
 - 01
 - 001
 - 0001
 - ...
- indiferent de p_i , fiecare simbol are un bit în plus față de precedentul, dar simbolurile cele mai frecvente tot primesc coduri mai scurte decât cele mai puțin frecvente
- entropia
- lungimea medie a codării

CODARE PREFIX, EX 12

- exemple de coduri:
 - 1
 - 01
 - 001
 - 0001
 - ...
- indiferent de p_i , fiecare simbol are un bit în plus față de precedentul, dar simbolurile cele mai frecvente tot primesc coduri mai scurte decât cele mai puțin frecvente
- entropia $H = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$
- lungimea medie a codării $L = \sum_{i=1}^N i p_i$
- când avem $H = L$?

CODARE PREFIX, EX 12

- exemple de coduri:
 - 1
 - 01
 - 001
 - 0001
 - ...
- indiferent de p_i , fiecare simbol are un bit în plus față de precedentul, dar simbolurile cele mai frecvente tot primesc coduri mai scurte decât cele mai puțin frecvente
- entropia $H = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$
- lungimea medie a codării $L = \sum_{i=1}^N i p_i$
- când avem $H = L$? $\sum_{i=1}^N p_i (i - \log_2 \frac{1}{p_i}) = 0 \longrightarrow i = \log_2 \frac{1}{p_i}$, deci $p_i = 2^{-i}$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$ pentru $N \rightarrow \infty$

