1. Determinați punctele de extrem local pentru funcțiile de mai sus și precizați natura lor:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4$

Sol.:

$\mathbb{R}^2$ deschisă

Determinăm punctele critice ale lui f.

f continuă (operații cu funcții elementare)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3$$

$(\forall)\ x,y \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue pe $\mathbb{R}^2$ (operații cu funcții elementare)

$\mathbb{R}^2$ deschisă

$\Rightarrow$ f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

Rezolvăm sistemul.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Singurul punct critic al lui f este $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}, (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ Criteriul nu decide.

$$f(x,y) \geq f(0,0), (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$x^4 + y^4 \geq 0^4 + 0^4 = 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ punct de minim global al lui $f \Rightarrow (0,0)$ punct de minim local al lui f

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^4 - y^4$

Sol.:

$\mathbb{R}^2$ deschisă

Aflăm punctele critice ale lui f.

f continuă (operații cu funcții elementare)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3$$

$$(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4y^3$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue (operații cu funcții elementare)

$\mathbb{R}^2$ deschisă

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^3=0\\ -4y^3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

Singurul punct critic al lui f este $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x^2$$

$$(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Lema lui Schwarz

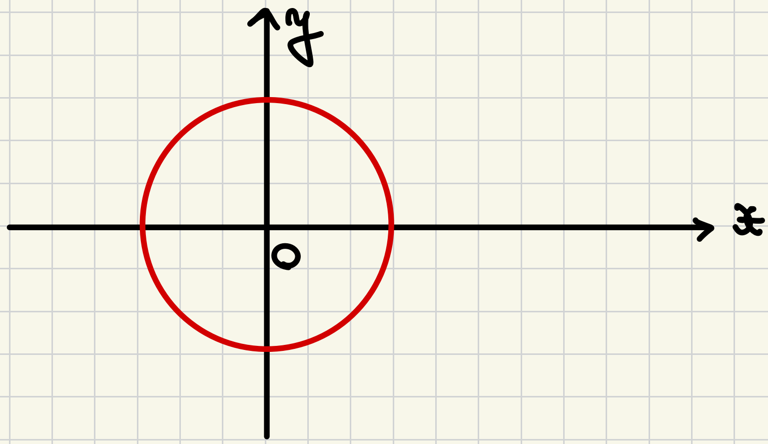
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}, \ (\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ Criteriul nu decide.

$$f(x,y) = x^4 - y^4 \qquad f(0,0) = 0^4 - 0^4 = 0$$



$$\left.\begin{array}{l} f(x,0) = x^4 - 0^4 = x^4 > 0 = f(0,0),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}^* \\ f(0,y) = 0^4 - y^4 = -y^4 < 0 = f(0,0),\ (\forall)\ y \in \mathbb{R}^* \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow (0,0)$ nu este punct de extrem local al lui f $\square$

2. Arătați că ecuația $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$ definește într-o vecinătate a lui $(1,0,0)$ unica funcție implicită $z = z(x,y)$ și determinați $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ și $dz(1,0)$.

Sol.:

Fie $D = \mathbb{R}^3$

D deschisă

Fie $F : D \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1$

1) $F(1,0,0) = 1\cdot\cos 0 + 0\cdot\cos 0 + 0\cdot\cos 1 - 1$
$= 1-1$
$= 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \cos y - z\sin x$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -x\sin y + \cos z$

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \cos x - y\sin z$

$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ continue pe D (operații cu funcții elementare) $\Rightarrow$

$\Rightarrow F$ este de clasă C^1 pe D

3) $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,0) = \cos 1 - 0 \cdot \sin 0 = 1 \neq 0$

Conform T.F.i., $(\exists)\ U = \mathring{U} \in \mathcal{V}_{(1,0)}$,

$(\exists)\ V = \mathring{V} \in \mathcal{V}_0$, $(\exists!)\ z : U \to V$ a.î.:

a) $z(1,0) = 0$

b) $F(x,y,z(x,y)) = 0$, $(\forall)\ (x,y) \in U$

c) z este de clasă C^1 și

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$$

$(\forall)\ (x,y) \in U$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$$

Pentru a determina $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$ și $\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)$ avem

două variante:

Varianta 1 (Folosim a) și c)):

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} =$$

$$= -\frac{\cos y - z(x,y)\sin x}{-y\sin(z(x,y)) + \cos x}, (\forall)\ (x,y) \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{\cos 0 - z(1,0)\sin 0}{-0\sin(z(1,0))+\cos 1} \underset{z(1,0)=0}{=} -\frac{1-0\cdot 0}{-0\sin 1+\cos 1} =$$

$$= -\frac{1}{\cos 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} =$$

$$= \frac{-x\sin y+\cos(z(x,y))}{-y\sin(z(x,y))+\cos x}, \ (\forall)(x,y)\in U$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = \frac{-1\cdot\sin 0+\cos(z(1,0))}{-0\sin(z(1,0))+\cos 1} \underset{z(1,0)=0}{=} -\frac{0+\cos 0}{-0\sin 0+\cos 1} =$$

$$= -\frac{1}{\cos 1}$$

z este de clasă C^1 pe $U \Rightarrow z$ def. pe $U \Rightarrow z$ def. în $(1,0)$ și $dz(1,0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $dz(1,0)(u,v)=$

$$= {}^t\left[\begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)}_{=-\frac{1}{\cos 1}} & \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)}_{=-\frac{1}{\cos 1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\cos 1}\cdot u - \frac{1}{\cos 1}\cdot v, \text{ i.e. } dz(1,0) = -\frac{1}{\cos 1}dx - \frac{1}{\cos 1}dy \ \square$$

Varianta 2 (Folosim a) și b))

Conform b), avem $F(x, y, z(x,y))=0$, $(\forall)(x,y)\in U$, deci $x\cos y + y\cos z(x,y) + z(x,y)\cos x - 1 = 0$, $(\forall)$ $(x,y)\in U$

Derivăm parțial relația de mai sus în raport cu x și obținem:

$$\cos y - y(\sin z(x,y))\cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\cos x +$$

$$+ z(x,y)(-\sin x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(-y\sin z(x,y) + \cos x\right)$$

$$= -\cos y + z(x,y)\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{-\cos y + z(x,y)\sin x}{-y\sin z(x,y) + \cos x}, \ (\forall)(x,y)\in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = \frac{-\cos 0 + z(1,0)\sin 1}{-0\sin z(1,0) + \cos 1} \underset{z(1,0)=0}{=} \frac{-1+0\cdot\sin 1}{-0\cdot\sin 0 + \cos 1} =$$

$$= -\frac{1}{\cos 1}$$

Conform b), avem $F(x, y, z(x,y))=0$, $(\forall)(x,y)\in U$, deci $x\cos y + y\cos z(x,y) + z(x,y)\cos x - 1 = 0$, $(\forall)$ $(x,y)\in U$

Derivăm parțial relația de mai sus în raport cu y și obținem:

$$-x\sin y + \cos z(x,y) - y(\sin z(x,y))\cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) +$$

$+ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\cos x = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\left(-y\sin z(x,y) + \cos x\right) = x\sin y - \cos z(x,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{x\sin y - \cos z(x;y)}{-y\sin z(x,y) + \cos x}, \ (\forall)(x,y) \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1:0) = \frac{1\cdot\sin 0 - \cos z(1:0)}{-0\cdot\sin z(1:0) + \cos 1} = \frac{0 - \cos 0}{-0\cdot\sin 0 + \cos 1} = -\frac{1}{\cos 1}$$

$z(1:0) = 0$

Pentru a calcula $dz(1;0)$, procedăm ca la VI. $\square$

3. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Determinați punctele de extrem local ale lui f cu legăturile $-x+y+z=1$ și $x-z=0$.

Sol.:

Fie $E = \mathbb{R}^3$, deschisă

Fie $g_1, g_2 : E \to \mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = -x+y+z-1$
$g_2(x,y,z) = x - z$

Fie $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}$

Determinăm punctele staționare condiționate de A ale lui F.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = y+z$; $\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 1$; $\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x+z$; $\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z)=1$; $\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z)=0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=y+x$; $\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z)=1$; $\frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z)=-1$

$(\forall)\ (x,y,z)\in E$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe E.

Fie $L:E\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+$
$+\mu g_2(x,y,z)$

$=xy+yz+xz+\lambda(-x+y+z-1)+\mu(x-z)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0\\ g_1(x,y,z)=0\\ g_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y+z-\lambda+\mu=0\\ x+z+\lambda=0 \Rightarrow 2x=-\lambda \Rightarrow \lambda=-2x\\ y+x+\lambda-\mu=0\\ -x+y+z=1\\ x-z=0 \Rightarrow x=z\end{cases} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$x=z$

$$\begin{array}{l} y+z-\lambda+\mu=0 \\ y+x+\lambda-\mu=0 \\ \hline \end{array} \ (+)$$

$x=z$

$$2y+2x=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \boxed{x=-1=z}$$

$y=1$

$$\left.\begin{array}{l} x+z+\lambda=0 \\ x=z=-1 \end{array}\right| \Rightarrow -2+\lambda=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y+z-\lambda+\mu=0 \\ y=1 \\ z=-1 \\ \lambda=2 \end{array}\right| \Rightarrow -2+\mu=0 \Rightarrow \boxed{\mu=2}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2, \ (\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \supset A \Rightarrow$$

$(-1,1,-1)$

Singurul punct staționar (critic) al lui F condiționat de A este $(-1,1,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=0 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)=1=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=0 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)=1=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=0 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)=1=\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)$$

$(\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y}(x,y,z)=0=\frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial z}(x,y,z)=0=\frac{\partial^2 g_1}{\partial z \partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial z}(x,y,z)=0=\frac{\partial^2 g_1}{\partial z \partial y}(x,y,z)$$

$(\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial y^2}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial z^2}(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial y}(x,y,z)=0=\frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial z}(x,y,z)=0=\frac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial y \partial z}(x,y,z)=0=\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x,y,z), (\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$$

Observăm că f, g, g_2 sunt de clasă C^2 (pe E).

Avem $L:E\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)$
$+\lambda g_2(x,y,z)$ $(\lambda=2, \mu=2)$

$d^2L(-1,1,-1):\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$d^2L(-1,1,-1)(u,v,w)^2=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(-1,1,-1)u^2+$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(-1,1,-1)v^2+\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(-1,1,-1)w^2+$$

$$+2\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(-1,1,-1)uv+\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(-1,1,-1)uw+$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(-1,1,-1)vw\Big)=$$

$= 2(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3)$

Fie $F(-1,1,-1): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(-1,1,-1) = 2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz)$

Diferențiem legăturile în (x,y,z) $\begin{cases} -x+y+z-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

Obținem:

$$\begin{cases} -dx+dy+dz=0 \\ dx-dz=0 \end{cases}$$

În punctul $(-1,1,-1)$, sistemul precedent devine:

$$\begin{cases} -dx+dy+dz=0 \\ dx-dz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy=0 \\ dz=dx \end{cases}$$

Fie $F(-1,1,-1)_{leg}: \underset{\mathbb{R}}{\overset{\parallel}{\mathbb{R}^{3-2}}}$, $F(-1,1,-1)_{leg} =$

$= 2(dx\cdot 0 + dx\cdot dx + 0\cdot dz) = 2(dx)^2$

Deci $F(-1,1,-1)_{leg}(u) = 2u^2$

Avem $F(-1,1,-1)_{leg}(u) \geq 0$, $(\forall)\, u\in\mathbb{R}$ și

$F(-1,1,-1)_{leg}(u) = 0 \Leftrightarrow 2u^2=0 \Leftrightarrow u=0$

Deci $(-1,1,-1)$ este punct de minim local al lui F condiționat de A $\square$