Curs 3
Structuri Algebrice în Informatică

Familii indexate de mulțimi

Fie $M \neq \emptyset$ mulțime
• Șir de elemente din M $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

↳ o funcție $x : \mathbb{N} \to M$, $x_n = x(n)$, $(\forall)_{n \in \mathbb{N}}$

• O mulțime de elemente din M indexate după I $((x_i)_{i \in I})$
↳ o funcție $x : I \to M$, $x_i = x(i)$, $(\forall)\, i \in I$

• Familie indexată după I de mulțimi
$(A_i)_{i \in I}$

indice i $\longrightarrow$ mulțime A_i

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid \exists\, i \in I \text{ cu } x \in A_i \}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \mid x \in A_i, \forall\, i \in I \}$$

$$\prod_{i \in I} A_i = \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i, \forall\, i \in I \}$$

Axioma alegerii:

Produsul cartezian al unei familii nevide de mulțimi nevide este nevid

Exemplu:

$I = \mathbb{R}$ $\quad i \in \mathbb{R} \Rightarrow A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid x < i\}, \forall i \in \mathbb{R}$

$= (-\infty, i)$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{R}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{R}} (-\infty, i) = \mathbb{R}$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{R}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{R}} (-\infty, i) = \emptyset$$

Relații de echivalență:

Fie M o mulțime nevidă.

Def: O relație pe M care este reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește relație de echivalență pe M.

$\rho \subseteq M \times M$ 1.(R): $\forall x \in M \quad x \rho x$

2.(S): $\forall x, y \in M : x \rho y \Rightarrow y \rho x$

3.(T): $\forall x, y, z \in M : x \rho y$ și $y \rho z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~y~~ $x \rho z$

Def: Fie ρ relație de echivalență pe mulțimea M

- pt $x \in M$ notăm:
$\hat{x} = \{y \in M \mid x \rho y\}$ (clasa de echival. cu elem. lui x)

- Notăm $M/\rho = \{\hat{x} \mid x \in M\}$ (spațiul cât sau mulțimea factor a lui M relativ la ρ)

O mulțime $S \subset M$ s.n. numește sistem de reprezentanți pentru ρ dacă S conține câte exact un element din fiecare clasă de echivalență.

Def: Fie $M \neq \emptyset$ o partiție a mulțimii M este o familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$

(1) $A_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$

(2) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ din I

(3) $\bigcup_{i \in I} A_i = M$ (reuniune disjunctă)

Prop: Fie ρ o rel de echivalență pe $M \neq \emptyset$

Atunci: 1) $\forall\ x, y \in M$ ori $\hat{x} = \hat{y}$ ori $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$

$\hat{x} = \hat{y} \iff x \rho y$

$\hat{x} \cap \hat{y} \iff x \not\rho y$

2) $(\forall)\ x \in M \quad x \in \hat{x}$ (rezultă din (R))

3) $\bigcup\limits_{x \in M} \hat{x} = M$

Deci clasele de echivalență formează o partiție a mulțimii M

Reciprocă: Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o partiție a lui M, atunci relația „$\sim$" pe M

Exemplu important

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pe $\mathbb{Z}$ definim relație $\sim_n$, $x \sim_n y \Leftrightarrow n \mid x-y$

Temă: 1) $\sim_n$ este o relație de echivalență pe $\mathbb{Z}$ (numită relația de congruență modulo n)

2) pt $x \in \mathbb{Z}$, $\hat{x} = \{y \in \mathbb{Z} \mid n \mid y-x\} =$

$= \{x + n \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$

3) Un sistem de reprezentanți pentru $\sim_n$ este $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Mulțimea factor este $= \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ notăm $\mathbb{Z}_n$. (clase de resturi)

Vreau o fct. $u: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}$, $\hat{x} \longrightarrow x^2+1$

$\hat{0} = \hat{5}$

$\hat{0} \longmapsto 0^2+1 = 1$

$\hat{5} \to 26$

$\neq \Rightarrow$ Această asociere nu e o funcție pt că depinde de reprezentantul ales din $\hat{x}$.

Propoziție (Proprietatea de universalitate a mulțimii factor)

Fie M o mulțime și $\sim$ o relație de echivalență pe M.

Dată o funcție $f: M \to B$, există o fct.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow^{\pi} & \\ & & M/\sim \end{array}$$

$\hat{f}: M/\sim \to B$ a.î. $\hat{f} \circ \pi = f$ dacă și numai dacă $\forall x, y \in M$ cu $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$

Def: Fct. $\pi: M \to M/\sim$, $x \mapsto \hat{x}$ se numește proiecția (injecția) canonică asociată lui $\sim$

• Pornind de la $\mathbb{N}$ se pot defini riguros $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ folosind relații de echivalență.

Pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definim relația:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c$$

Temă: 1) $\sim$ este rel. de echivalență pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

2) Fct. $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ este injectivă
$n \mapsto (n,0)$

3) Definiți „adunare" pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ a.î. fct. i este morfism de monoizi

$$i(n+m) = i(n) \oplus i(m)$$

$i(0) = \widehat{(0,0)}$ este elementul neutru la $\oplus$

Notăm $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$

Relații de ordine

Def Fie $M \neq \emptyset$. O relație reflexivă, antisimetrică și tranzitivă pe M se numește relație de ordine pe M.

Notăm (M, ρ) ← mulțime ordonată (parțial) (poset)

$(M, \leq)$

→ $x \leq x$, $\forall x \in M$ (R)

→ $x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y$ (A)

→ $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (T)

Relația $(M, \leq)$ este totală (de ordine) dacă $\forall x \neq y$, $x \leq y$ sau $y \leq x$

Spunem că $\forall$ 2 elemente sunt comparabile (din M)

Exemple: 1) $(\mathbb{R}, \leq)$ ordinea reală este totală

2) ~~Mg~~

~~M (~~

(M, ρ) este ordonată ⇒

⇒ $(M, \rho)'$ este o m. ordonată

3) Dacă $(M, \leq)$ este m. ordonată, definim relația „<" pe M prin:

$x < y$ dacă $x \leq y$ și $x \neq y$

Atunci $(M, <)$ nu e rel. de ordine pe M

dar putem recupera $\leq = < \cup \Delta_M$

4) Fie M o mulțime

$(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ este o mulțime

ordonată.

$A \subseteq A$ ✓

$A \subseteq B$ și $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ✓

$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ ✓

$(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ nu e total ordonată

pt $|M| \geq 2$.

Fie $x \neq y \in M$: $\{x\} \not\subseteq \{y\}$

~~(M) $\{2\} \not\subseteq \{3\}$~~ $\{y\} \not\subseteq \{x\}$

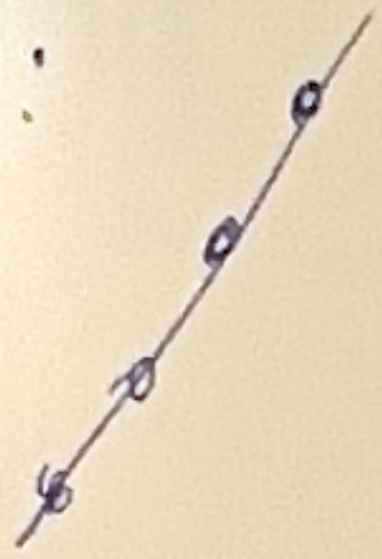
$\mathcal{P}(M)$ $\{2\} \not\subseteq \{3\}$

Reprezentare grafică a mulțimilor ordonate (diagrama Hasse) $(M, \leq)$ m. ordonată.

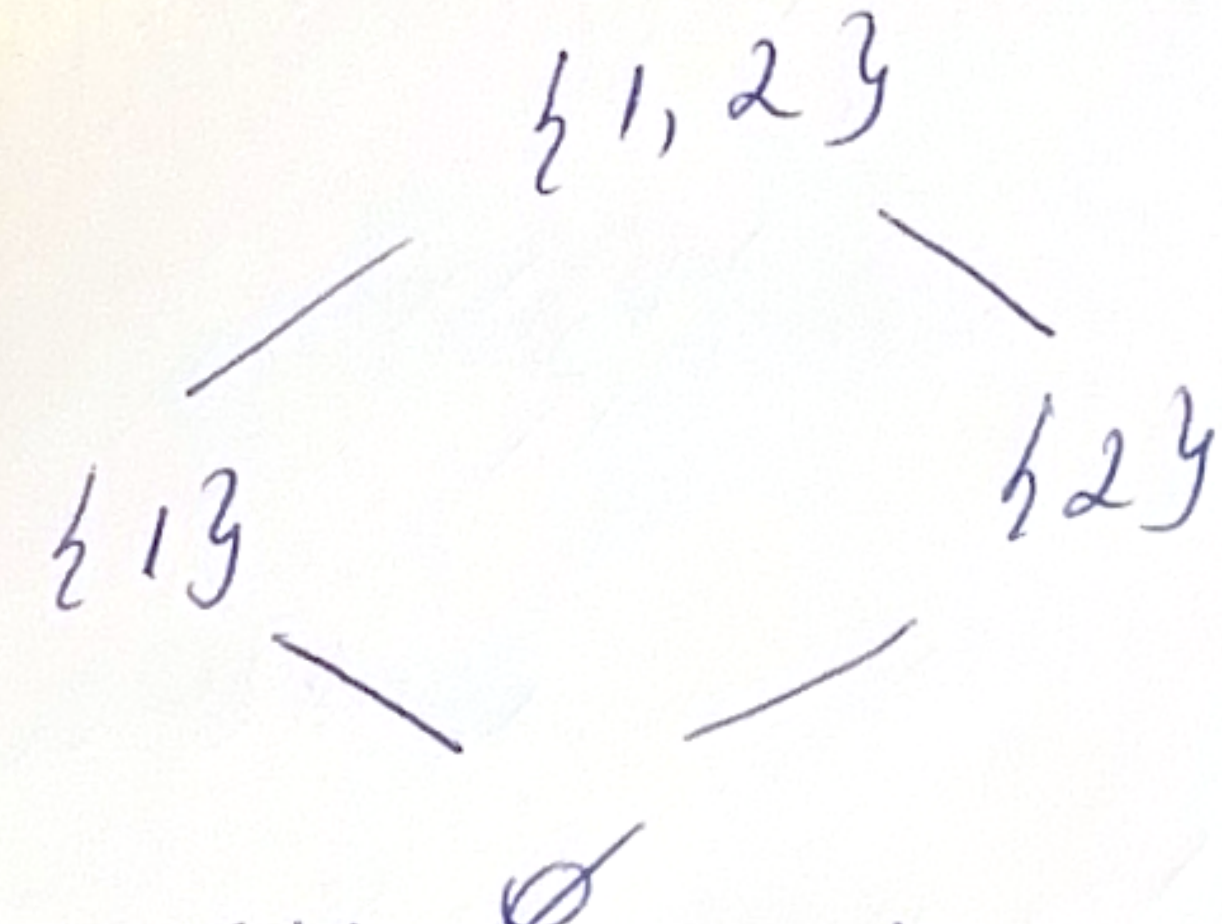
→ asociem un graf orientat

- vârfuri $= M$
- muchii : $x \to y \Leftrightarrow x < y$ și $\nexists z \in M$ cu $x < z < y$

(spunem atunci că "y acoperă pe x")

Obs:  A. o mulțime total ordonată
diagrama Hasse = „lanț"

$(\mathcal{P}(\{1,2\}), \subseteq)$



Def: Fie $(M_1, \le_1)$ și $(M_2, \le_2)$ mulțimi ordonate. Spunem că funcția $f: M_1 \to M_2$ este aplicație monotonă sau morfism de mulțimi ordonate dacă:

1) $\forall\, x, y \in M_1$, $x \le_1 y \Rightarrow f(x) \le_2 f(y)$

2) În plus, dacă f e bijectivă și f^{-1} e monotonă spunem că acest f este izomorfism de mulțimi

obs! f monotonă + f bijectivă

$\not\Rightarrow$ f^{-1} este bijecție