

Lista tutoriatu

1. Studiați convergența simplă și uniformă pentru următoarele șiruri de funcții:

a) $f_n: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$

b) $f_n: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$

c) $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-nx^2} \sin(nx)$

d) $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x+n}{x+n+1}$

e) $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$

f) $f_n: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{e^x+x^n}$

g) $f_n: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{e^x \cdot x^n}{1+x^n}$

h) $f_n: [3,5] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(x+y)^3}{n^4}$

i) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x^n)$

j) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x)^n$

k) $f_n: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^3}{n^2+x^3}$

l) $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$

m) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x(1-x)^n$

n) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^2(1-x)^n$

o) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n+x+1}{nx+n+1}$

p) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$

q) $f_n: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \cos \frac{x}{n}$

r) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n^2x}{n^2+x}$

s) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

t) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = (1-x)^n \sin(nx)$

u) $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n + x + 1$

v) $f_n: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n \sin(\frac{x}{n}) + x + 1}{4 \sin(\frac{x^2}{n}) + n + 1}$

w) $f_n: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx^{n+1}}{x^{2n}+n}$

x) $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x+1}{nx^2+1}$

y) $f_n: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n}{n+x}$

z) $f_n: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n}{n+x}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

2. Studiați convergența uniformă pentru următoarele serii de funcții:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + n^4}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{x^2}$

5. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n e^x + x e^{-x}}{n+x} dx.$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri al lui x următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

b) $f: (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x)$

c) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x^2)$

4. Să se determine mulțimea de convergență și suma seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \cdot (3x+5)^n.$$

(nu degeaba o pun în lista acestui tutoriat și nu în lista tutoriatului despre serii)