Seminar 5

(S5.1) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

(i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, şi $t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \to \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$.

(ii) Fie $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \to (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \to (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

Demonstraţie:

(i) Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ şi $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

(ii) Pentru orice interpretare $e : V \to \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\vDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau} \\ &\qquad \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (x = y)[e] \\ &\iff <(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x), e(y)) \\ &\qquad \text{sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \vDash \varphi[e]$ pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\vDash (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \vDash (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

□

(S5.2) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \to \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.
Demonstraţie: Fie $e : V \to \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned} \varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4(v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \mapsto a}(v_3) < e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \mapsto a}(v_3) = e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e_{v_4 \mapsto a}(v_3) \leq e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \\ &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N},\ e(v_3) \leq a \\ &\iff e(v_3) = 0. \end{aligned}$$

□

Notaţia 1. *Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu universul notat cu A, orice $e : V \to A$ şi orice a, $b \in A$, avem că:*

$$(e_{y \mapsto b})_{x \mapsto a} = (e_{x \mapsto a})_{y \mapsto b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x \mapsto a, y \mapsto b}$. Aşadar,

$$e_{x \mapsto a, y \mapsto b} : V \to A, \quad e_{x \mapsto a, y \mapsto b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ şi } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S5.3) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

(i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

(ii) $\exists y\forall x\varphi \vDash \forall x\exists y\varphi$;

(iii) $\forall x\varphi \vDash \exists x\varphi$;

(iv) $\forall x(\varphi \to \psi) \vDash \exists x\varphi \to \exists x\psi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură cu universul notat cu A şi $e : V \to A$.

(i) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\mapsto a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\big(\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}]\big)$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff \big($pentru orice $b \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto b}]\big)$ (**) şi $\big($pentru orice $c \in A$, avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto c}]\big)$ (***).

Mai întâi, presupunem (*) şi arătăm (**) şi (***). Pentru (**), fie $b \in A$, şi avem, luând în (*) $a := b$, că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto b}]$, deci $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto b}]$. Pentru (***), fie $c \in A$, şi avem, luând în (*) $a := c$, că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto c}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto c}]$, deci $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto c}]$.

Presupunem acum (**) şi (***) şi demonstrăm (*). Fie $a \in A$. Luând în (**) $b := a$, avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]$. Luând în (***) $c := a$, avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}]$. Deci, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}]$, ceea ce trebuia demonstrat.

(ii) Avem că $\mathcal{A} \vDash (\exists y\forall x\varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{y\mapsto b})_{x\mapsto a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a, y\mapsto b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[(e_{x\mapsto c})_{y\mapsto d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto c, y\mapsto d}]$ (**).

Ştim (*) şi vrem să arătăm (**).

Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto c, y\mapsto d}]$.

Arătăm că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto c, y\mapsto b}]$, unde b-ul este cel din (*), fiindcă atunci putem lua $d := b$.

Luând în (*) $a := c$, obţinem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto c, y\mapsto b}]$, ceea ce ne trebuia.

(iii) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\to a}]$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e]$, i.e. că există $b \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto b}]$. Cum $A \neq \emptyset$, fie $c \in A$ arbitrar. Atunci, conform (*) (pentru $a := c$), $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto c}]$, deci putem lua $b := c$.

(iv) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$, echivalent cu: pentru orice $a \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]$ avem că $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}]$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi \to \exists x\psi)[e]$, echivalent cu: dacă există $b \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto b}]$, atunci există $c \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto c}]$.

Presupunem, deci, că avem un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto b}]$ (**). Vrem să arătăm că există $c \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto c}]$ (***).

Conform (*) (pentru $a := b$) şi (**), avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto b}]$. Putem lua, deci, în (***), $c := b$ şi am terminat.

□

(S5.4) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, $\mathcal{L}$, şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

(i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\vDash \forall x\varphi \vee \forall x\psi$;

(ii) $\forall x\exists y\varphi \not\vDash \exists y\forall x\varphi$.

Demonstraţie: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem, pentru orice $v \in V$, $e(v) := 7$).

(i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x\dot{<}\dot{2}$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

(a) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\mapsto n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi)[e]$.

(b) $\mathcal{N} \vDash (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \vDash \psi[e_{x\mapsto n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\vDash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\varphi := x\dot{<}y$. Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} \vDash (\forall x\exists y\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}\text{, avem } \mathcal{N} \vDash (\exists y\varphi)[e_{x\mapsto n}]\\
&\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x\mapsto n, y\mapsto m}]\\
&\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m,
\end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Aşadar,

$$\mathcal{N} \vDash (\forall x \exists y \varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \vDash (\exists y \forall x \varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \vDash (\forall x \varphi)[e_{y \mapsto m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\qquad \text{avem } \mathcal{N} \vDash \varphi[e_{x \mapsto n, y \mapsto m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Aşadar,

$$\mathcal{N} \nvDash (\exists y \forall x \varphi)[e].$$

□

(S5.5) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) şi $\mathcal{L}_{ar}$-structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-formule φ_1, φ_2, φ_3 astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{N}$,

(i) $\mathcal{N} \vDash \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par;

(ii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_2[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este prim;

(iii) $\mathcal{N} \vDash \varphi_3[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

Demonstraţie:

(i) Luăm

$$\varphi_1 := \exists v_1 (v_1 \dot{+} v_1 = v_0).$$

(ii) Luăm

$$\varphi_2 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1((v_1 \dot{<} v_0 \wedge \exists v_2(v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \to v_1 = \dot{S}\dot{0}).$$

(iii) Luăm

$$\varphi_3 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1((\dot{S}\dot{0} \dot{<} v_1 \wedge \exists v_2(v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \to \exists v_2(v_1 = v_2 \dot{+} v_2)).$$

□