Exerciții

1. Fie $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$. Determinați $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și precizați dacă $(\exists) \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Sol.:

$$x_{2k} = \frac{1+(-1)^{2k}}{2} + (-1)^{2k} \frac{2k}{2\cdot 2k+1}$$

$$= \frac{1+1}{2} + 1\cdot \frac{2k}{4k+1}$$

$$= 1 + \frac{2k}{4k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2k+1} = \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2} + (-1)^{2k+1} \frac{2k+1}{2(2k+1)+1}$$

$$= \frac{1-1}{2} + (-1) \frac{2k+1}{4k+3}$$

$$= -\frac{2k+1}{4k+3} \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$$

$\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$

Deci $\mathcal{L}((x_n)_n) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

Așadar, $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$ și $\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$

$\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow (\nexists) \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ $\square$

Serii de numere reale

Def.: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n$, $(\forall) n \geq p$.

Perechea $\left((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p} \right)$ s.n. serie de numere reale.

Notație: În contextul definiției precedente, perechea

$\left((x_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p} \right)$ se notează $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ sau

$\sum_{n \geq p} x_n$ sau $\sum_{n} x_n$.

Observație! În general, $p=0$ sau $p=1$, cazuri pe care le vom considera în continuare.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale

$(s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n, (\forall) n \in \mathbb{N})$.

Def.: 1) Elementele șirului $(x_n)_n$ s.n. termenii seriei.

2) Elementele șirului $(s_n)_n$ s.n. sumele parțiale ale seriei.

3) Dacă există $\lim_{n \to +\infty} s_n \overset{\text{not.}}{=\!=} \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, acest α s.n. suma seriei și vom scrie

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$ sau $\sum_{n\geq 0} x_n = \alpha$ sau $\sum_n x_n = \alpha$.

4) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este **convergentă** dacă șirul $(s_n)_n$ este convergent.

5) Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este **divergentă** dacă nu este convergentă (i.e. șirul $(s_n)_n$ este divergent).

Propoziție: Dacă seria $\sum_n x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Corolar: (<u>Criteriul suficient de divergență</u>)

Dacă $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum_n x_n$ este divergentă.

Observație! Folosind doar afirmația „$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$" nu putem decide dacă seria $\sum_n x_n$ este convergentă sau divergentă.

ex.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

div. conv.

Exerciții:

2. Determinați sumele seriilor de mai jos și precizați dacă sunt convergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$ ($0^0 = 1$, prin convenție)

Sol.:

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Deci, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 \in \mathbb{R}$.

Prin urmare, $\sum_{n=1}^{\infty}$ este convergentă.

b) $x_n = q^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

$$s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n, (\forall) n \in \mathbb{N}$$

$$s_n = \begin{cases} n+1; & q = 1 \\ 1 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, & q \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} n+1; & q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1}; & q \neq 1 \end{cases}, (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $q=1$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \begin{cases} \nexists; & \text{dacă } q\leq -1 \\ 0; & \text{dacă } q\in(-1,1) \\ +\infty; & \text{dacă } q>1 \end{cases}$$

Dacă $q\leq -1$, atunci nu există $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ nu are sumă și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Dacă $q\in(-1,1)$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\dfrac{1}{q-1} = \dfrac{1}{1-q}$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \dfrac{1}{1-q}$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ este convergentă.

Dacă $q>1$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. $\square$

Observație!

În aplicații, putem folosi fără justificare convergențele următoarelor serii de numere reale:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ — conv., dacă $q\in(-1,1)$; div., dacă $q\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$

(seria geometrică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ → conv., dacă $\alpha > 1$; → div., dacă $\alpha \leq 1$

(seria armonică generalizată)

Observație! q și α din observația precedentă sunt numere reale care nu depind de n.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

Propoziție: Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii de numere reale și $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

1) Dacă $\sum_n x_n$ este convergentă, atunci $\sum_n \alpha x_n$ este convergentă. În plus, $\sum_n \alpha x_n = \alpha \sum_n x_n$.

2) Dacă $\sum_n x_n$ este divergentă, atunci $\sum_n \alpha x_n$ este divergentă.

3) Dacă $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ sunt convergente, atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ este convergentă. În plus, $\sum_n (x_n + y_n) = \sum_n x_n + \sum_n y_n$.

4) Dacă $\sum_n x_n$ este convergentă și $\sum_n y_n$ este divergentă (sau $\sum_n x_n$ este divergentă și $\sum_n y_n$ este convergentă), atunci

$\sum_n' (x_n + y_n)$ este divergentă.

5) Dacă $\sum_n' x_n$ și $\sum_n' y_n$ sunt divergente, atunci $\sum_n' (x_n + y_n)$ poate fi sau convergentă sau divergentă.

(trebuie verificată convergența folosind altă metodă)

Teoremă (Criteriul lui Cauchy pentru serii):

Sunt echivalente:

1) $\sum_n' x_n$ este convergentă

2) $(\forall)\, \varepsilon > 0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon, (\forall)\, m \in \mathbb{N}^*$,

avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}| < \varepsilon$

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi:

1. **Criteriul raportului**

Fie seria $\sum_n' x_n$, $x_n > 0$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists)$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=} l$

a) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_n' x_n$ este convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_n' x_n$ este divergentă.

c) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

2. Criteriul radicalului

Fie seria $\sum_n x_n$, $x_n \geq 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists)$ $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} l$.

a) Dacă $l<1$, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă.

b) Dacă $l>1$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.

c) Dacă $l=1$, atunci acest criteriu nu decide.

3. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $\sum_n x_n$, $x_n > 0$ a.î. $(\exists)$ $\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{not.}{=} l$.

a) Dacă $l<1$, atunci $\sum_n x_n$ este divergentă.

b) Dacă $l>1$, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l=1$, atunci acest criteriu nu decide.

4. Criteriul condensării

Fie $(x_n)_n \subset [0,+\infty)$ un șir descrescător. Atunci seriile de numere reale $\sum_n x_n$ și $\sum_n 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași convergență (i.e. sau sunt ambele convergente sau sunt ambele divergente: $\sum_n x_n \sim \sum_n 2^n \cdot x_{2^n}$).

5. Criteriul de comparație cu inegalități

Fie seriile $\sum_n' x_n$ și $\sum_n' y_n$ a.î. $x_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și $(\exists) n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall) n \geq n_0$ avem $x_n \leq y_n$.

a) Dacă $\sum_n' y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n' x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sum_n' x_n$ este divergentă, atunci $\sum_n' y_n$ este divergentă.

6. Criteriul de comparație cu limită

Fie seriile $\sum_n' x_n$ și $\sum_n' y_n$ a.î. $x_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și $(\exists) \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{\text{not.}}{=} l$.

a) Dacă $l \in (0, +\infty)$, atunci $\sum_n' x_n \sim \sum_n' y_n$ (i.e. $\sum_n' x_n$ și $\sum_n' y_n$ au aceeași convergență)

b) Dacă $l = 0$ și $\sum_n' y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n' x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = +\infty$ și $\sum_n' y_n$ este divergentă, atunci $\sum_n' x_n$ este divergentă.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Fie $\sum_n x_n$ o serie de numere reale.

Def: Spunem că $\sum_n x_n$ este absolut convergentă dacă $\sum_n |x_n|$ este convergentă.

Propoziție: Dacă $\sum_n x_n$ este absolut convergentă, atunci $\sum_n x_n$ este convergentă.

Observație! Reciproca propoziției precedente nu este adevărată.

1. Criteriile Abel - Dirichlet

I. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ a.î.:

a) $(x_n)_n$ este descrescător și $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

b) $(\exists)$ $M>0$ a.î. $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}$, avem $|y_0+y_1+\ldots+y_n| \leq M$

$$|y_0+y_1+\ldots+y_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} y_k\right|$$

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

II. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î.:

a) $(x_n)_n$ este monoton și mărginit

b) $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

2. **Criteriul lui Leibniz**

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir descrescător a.î. $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

Exerciții:

3. Fie $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă

Sol.:

a) Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Avem că $(x_n)_n$ este descrescător și $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

$$a_n = (-1)^n \cdot x_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

Conform Criteriului lui Leibniz rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) $\sum_n |a_n| = \sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_n \frac{1}{n}$ divergentă $\square$

(este seria armonică generalizată $\alpha = 1$)

4. Studiați convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}$$

Sol.: $x_n = \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \dfrac{1}{2^n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{\cancel{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots (3n-2)}(3(n+1)-2)}{\cancel{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots (3n)}\cdot 3(n+1)} \cdot \dfrac{1}{2^{\cancel{n+1}}}}{\dfrac{\cancel{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}}{\cancel{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots (3n)}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2^n}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

Conform Criteriului raportului avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă. $\square$