Lista 3

1. Studiați uniform continuitatea funcțiilor următoare:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

b) $f:(0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

c) $f:(0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

d) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^3}$

e) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos(x^3)$

2. Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^5y^2}{x^8+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

3. Fie $A\subseteq\mathbb{R}$ o mulțime mărginită și $f:A\to\mathbb{R}$ o funcție astfel încât, $\forall (x_n)_n\subseteq A$ șir Cauchy, avem că $(f(x_n))_n$ este șir Cauchy. Arătați că f este funcție uniform continuă.

(Dacă nu aveți idei, am eu o rezolvare mișto la asta)

4. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții uniform continue.

a) Arătați că $f+g$ este uniform continuă.

b) Dați exemplu de două funcții f și g ca în enunț astfel încât $f\cdot g$ nu este uniform continuă. Este $f\cdot g$ continuă în acest caz?

c) Presupunem, în plus, că funcțiile f și g sunt mărginite. Arătați că $f\cdot g$ este uniform continuă.

5. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ funcție continuă. Arătați că $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

6. Determinați funcțiile continue $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ care verifică egalitatea $f(4x)-f(x)=3x,\ \forall x\in[0,\infty)$.