curs 2

Structuri Algebrice în Informatică

Legile lui De Morgan

$A, B \subseteq E$

Atunci: 1) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

2) $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

Exemple de funcții:

1) Funcția identitate

Pt. o mulțime A

$$1_A : A \to A$$
$$x \to x$$

(notație pentru $id A$)

2) Funcția caracteristică a unei mulțimi

Fixăm o mulțime E

Pt. orice $A \subseteq E$ definim

funcția $\chi_A : E \to \{0, 1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

se numește funcția caracteristică a m. A

Proprietăți: ① Atunci $A=B \Leftrightarrow \chi_A=\chi_B$

② $\chi_{\emptyset}=0$, $\chi_E=1$

fct. constant nulă

constant 1.

③ $(\chi_A)^2=\chi_A$

$\chi_A \cdot \chi_A$ (modulul funcțiilor

④ $\chi_{A\cap B}=\chi_A \cdot \chi_B$

⑤ $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B$

⑥ $\chi_{C_E A}=1-\chi_A$

⑦ $\chi_{A\setminus B}=\chi_A\cdot(1-\chi_B)$

⑧ $\chi_{A\Delta B}=$ temă

clase de funcții

Fie $f:A\to B$

1. Spunem că f este funcție injectivă dacă: $\forall x_1,x_2\in A$ $(f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2)$
2. Spunem că f este surjectivă dacă $(\forall)\ y\in B$ ~~a.î.~~ $\exists x\in A$ cu $f(x)=y$
3. Spunem că f este bijectivă dacă f este și injectivă și surjectivă.

Adică f-bijecție $\Leftrightarrow$ $(\forall)\, y \in B$ $\exists!\, x \in A$ cu
$f(x) = y$

Obținem astfel o funcție notată $f^{-1}: B \to A$
numită și funcția inversă a lui f. $y \mapsto$ acel $x \in A$ cu $f(x) = y$

Proprietăți:

I) f bijecție, atunci $(f^{-1} \circ f)(\cancel{A}) = 1_A$
și $f \circ f^{-1} = 1_B$

II) Fie $f: A \to B$ o funcție. Atunci
f este bijecție $\Leftrightarrow$ $\exists\, g: B \to A$ a.î.
$g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$

Mai mult, acest g este unic, și anume
fct. inversă f^{-1}.

Obs $\hookrightarrow$ Înseamnă că f este fct. inversabilă

Proprietăți.

Fie $f: A \to B$ și $g: B \to C$ funcție

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ $\quad g \circ f: A \to C$

1) Dacă f și g sunt injective $\Rightarrow g \circ f$ inj.
2) Dacă f și g sunt surjective $\Rightarrow$
$\Rightarrow g \circ f$ surjectivă

3) —11— bijectivă $\Rightarrow g \circ f$ este bijectivă
În plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

4) Dacă $g \circ f$ este injectivă $\Rightarrow f$ este injectivă

5) Dacă $g \circ f$ este surjectivă $\Rightarrow g$ este surjectivă

6) Dacă $g \circ f$ este bijectivă $\Rightarrow f$ injectivă și g injectivă

7) Dacă $g \circ f = g \circ f'$ și g injectivă $\Rightarrow f = f'$

8) Dacă $f \circ g = f \circ g'$ și f surjectivă $\Rightarrow$
$\Rightarrow g = g'$

9) Dacă f este injectivă, atunci $\exists$ o fct. $r : B \to A$ a.î. $r \circ f = 1_A$
r = retractă pt. f

10) Dacă f este surjectivă, atunci $\exists$ o fct. $s : \cancel{B} \to \cancel{A}$ a.î. $f \circ s = 1_B$
s = secțiune pt. f

<u>Demonstrații</u>

1) Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, adică
$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow \cancel{g}\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g \circ f$ injectivă

B

2) Fie $z \in C$. Deoarece c injectie $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, y \in B$ cu $g(y) = z \xrightarrow[\text{surj}]{f} x \in A$ cu $f(x) = y$

$\Rightarrow z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \Rightarrow g \circ f$ surjectie

3) 3.2 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Știm că $\exists$ fct. inversă $(g \circ f)^{-1} : C \to A$

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{1_B} \circ f =$

$= f^{-1} \circ f = 1_A$ (1)

$(g \circ f) \circ (\cancel{f}^{-1} \circ g) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} =$

$= 1_C$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

conform proprietății II

4) Pp $g \circ f$ este injectivă

Fie $x_1, x_2 \in A$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = g \circ f(x_2)$

$\xrightarrow[\text{injectivă}]{g \circ f} x_1 = x_2$, deci f e injectivă

5) Fie $z \in C$
$g \circ f : A \to C$ surjectie $\Big\} \Rightarrow \exists\, x \in A$

cu $(g \circ f)(x) = z$, $g(\underbrace{f(x)}_{\in B}) = z \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in \operatorname{Im} g$, deci g e surjectie

6) Consecință a pct. 4) și 5)

8) $g \circ f = g' \circ f$ și f-surjecție $\Rightarrow g = g'$

Fie $y \in B$
$f: A \to B$ surjecție $\Big\} \Rightarrow \exists\, x \in A$ cu $f(x) = y$

Avem $(g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x) \Rightarrow g(f(x)) =$
$= g'(f(x)) \Rightarrow g(y) = g'(y), \Rightarrow g = g'$
$(\forall)\, y \in B$

<u>Propoziție</u>: Fie A o mulțime nevidă finită și funcția $f: A \to A$

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente (UASE):

(1) f injectivă
(2) f surjectivă
(3) f bijectivă

<u>Dem</u> $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

$(1) \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$ Pp că f este injectivă

$f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)$ sunt distincte în codomeniul ~~A~~ $(= A)$

$\Downarrow$

$Im f = A$ deci f surjecție și chiar bijecție

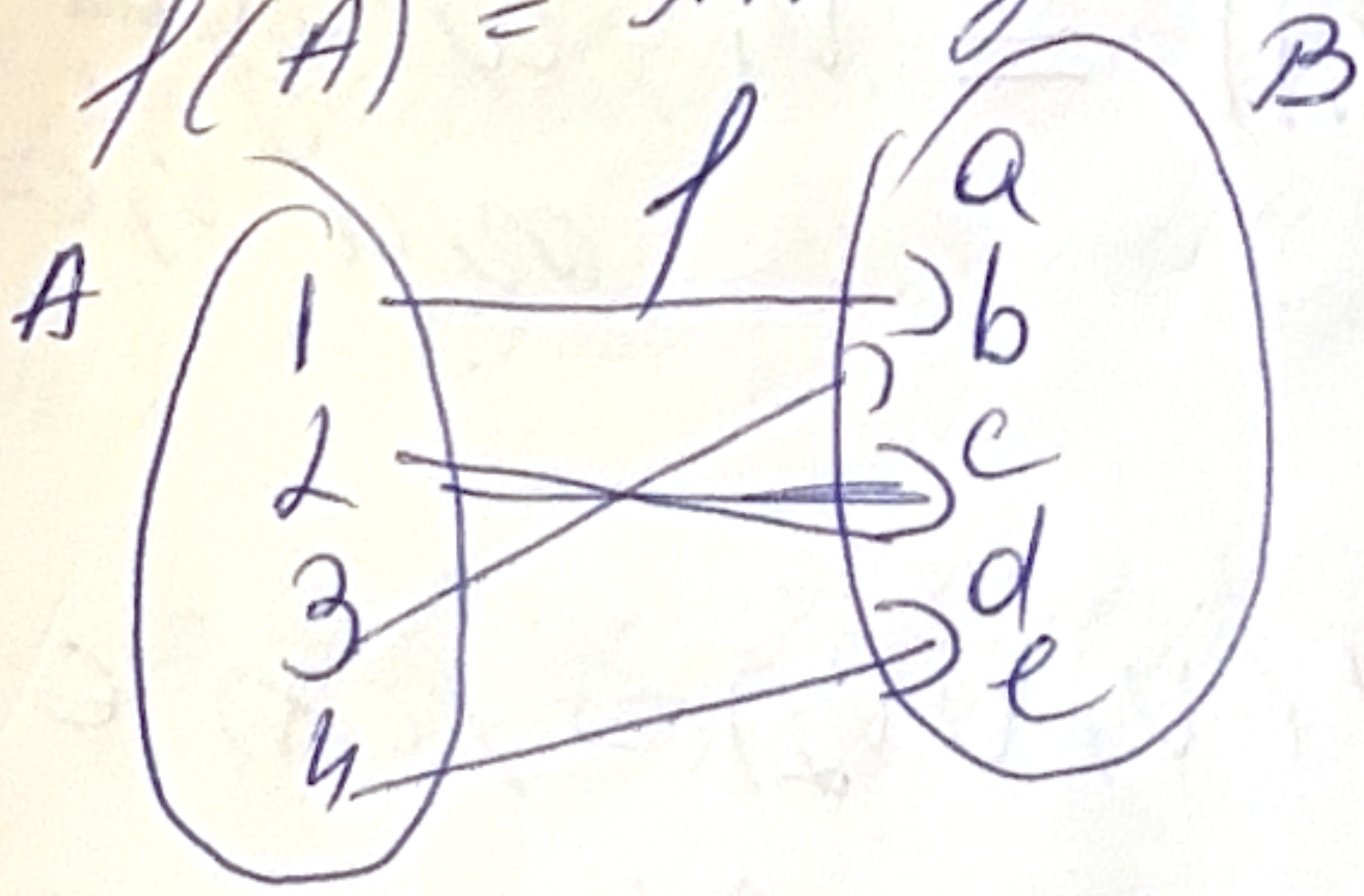
Imagini și preimagini de mulțimi

Fie funcția $f: A \to B$

<u>Def 1</u> Pentru $U \subseteq A$ notăm $f(U) = \{f(x) : x \in U\}$ numită imaginea mulțimii U prin fct. f.

<u>Def 2</u> Pentru $V \subseteq B$ notăm $f^{-1}(V) = \{x \in A : f(x) \in V\}$ numită <u>imaginea inversă</u> (preimaginea) mulțimii V prin fct. f.

<u>Ex:</u> $f(A)$ = Imaginea funcției f ($\underset{=}{not}$ $Im f$)



$f(\{1,3\}) = \{b\}$

$f(A) = Im f = \{b,c,d\}$

$f(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(\{a,c\}) = \{2\}$ (preimagine)

$f^{-1}(\{b\}) = \{1,3\}$

$f^{-1}(\{e\}) = \emptyset$

<u>Proprietăți</u>:

Fie $f: A \to B$ o funcție, $U_1, U_2 \subseteq A$
$V_1, V_2 \subseteq B$

1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

2) (Monotonie) $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow f(U_1) \subseteq f(U_2)$

<u>$f^{-1}(B) = A$</u>!

$V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow f^{-1}(V_1) \subseteq f^{-1}(V_2)$

3) $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$

$(U_1 \cap U_2) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$

4) $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$

$f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$

5) f este injectivă $\Leftrightarrow \forall U_1, U_2 \subseteq A$ avem

$f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$

6) $f^{-1}(f(U_1)) \supseteq U_1$ cu egalitate pt $\forall U_1 \Leftrightarrow$ f injectivă

7) $f(f^{-1}(V_1)) \subseteq V_1$, cu egal pentru orice $V_1 \Leftrightarrow f$ este surjectivă

dem 4

Fie $\in f^{-1}(V_1 \cup V_2) \Rightarrow f(x) \in V_1 \cup V_2 \Leftrightarrow$

$f(x) \in V_1$ sau $f(x) \in V_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(V_1)$ sau $x \in f^{-1}(V_2)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$

deci $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$

Relații pe mulțimi

Def: Fie A, B două mulțimi o relație de la A la B este o submulțime $\rho \subseteq A \times B$

Dacă $\underbrace{A = B}$ $\rho \subseteq \cancel{A \times B}$ $A \times A$ spunem că ρ este o relație pe mulțimea A.

Notăm ρ, R

$x \rho y$ pentru $(x, y) \in \rho$

$x R y$ $(x, y) \in R$

Ex: Pt mulțimea A notăm $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$ = relația diagonală a mulțimii

Def: Pentru $\rho \subseteq A \times B$ notăm

$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\} \subseteq B \times A$

relația inversă a lui ρ

Def Pentru $\rho_1 \subseteq A \times B$ și $\rho_2 \subseteq B \times C$ notăm

$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B$ cu $(x, y) \in \rho_1$ și $(y, z) \in \rho_2\}$

Compunerea relațiilor ρ_1 și ρ_2

Def Fie $\rho \subseteq A \times A$

① ρ este relaţie reflexivă dacă $\forall\, x \in A$
$(x, x) \in \rho$

② ρ este relaţie simetrică dacă $\forall\, x, y \in A$
$(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$

③ ρ este relaţie antisimetrică dacă
$(\forall)\ x, y \in A \quad (x, y) \in \rho$ şi $(y, x) \in \rho \Rightarrow$
$\Rightarrow x = y$

④ ρ este relaţie tranzitivă dacă
$(\forall)\ x, y, z \in A \quad (x, y) \in \rho$ şi $(y, z) \in \rho$,
$\Rightarrow (x, z) \in \rho$