# Șiruri de funcții

Fie $X \neq \emptyset$, ~~$(X, d_1)$~~, $(Y, d_2)$ spații metrice, $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : X \to Y$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $f : X \to Y$ o altă funcție.

**Def.** Spunem că $(f_n)_n$:

1) Converge simplu (punctual) către $f$, dacă, $\forall x \in X$, avem că $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \overset{d}{=} f(x)$

Notație: $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{s} f$

2) Converge uniform către $f$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall x \in X$ avem $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Notație: $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$

**Obs.** Dacă $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{s} f$. Reciproca e falsă.

**Prop.** Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : X \to \mathbb{R}$ a.î. $(f_n)_n$ mărginit, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $f : X \to \mathbb{R}$. Atunci

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f \iff \lim_{n \to \infty} \left( \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

**Teorema lui Dini:**

Fie $(X, \tau)$ sp top, $\emptyset \neq K \subseteq X$ compactă, $(f_n)_n$ șir monoton de fcț cont, $f_n : K \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $f : K \to \mathbb{R}$ cont. Dacă $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$

Caz particular al teoremei precedente: <u>teorema lui Polya</u>:

Fie șirul de funcții monotone $(f_n)_n$, $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ și funcția continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

<u>Teorema de permutare a limitei cu derivata:</u>

Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n: I\to\mathbb{R}$ a.î.

1) $I$ interval nedegenerat și mărginit
2) $\exists x_0\in I$ a.î. $(f_n(x_0))_n$ e convergent
3) $f_n$ derivabilă $\forall n\in\mathbb{N}$
4) $\exists g: I\to\mathbb{R}$ a.î. $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{u} g$

Atunci $\exists f: I\to\mathbb{R}$ derivabilă a.î. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ și $f'=g$.

(i.e. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n)'$).

<u>Teorema de permutare a limitei cu integrala</u>

Fie șirul de funcții $(f_n)_n$, $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î.

1) $f_n$ integrabilă Riemann $\forall n\in\mathbb{N}$
2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$

Atunci $f$ e integrabilă Riemann și $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Cum arătăm că ~~o fun~~ un şir de funcţii converge uniform către o funcţie $f$?

Pasul 1: Facem convergenţa simplă. Să zicem că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$.

Vom studia convergenţa uniformă DOAR în cazul în care ar converge uniform către funcţia $f$. (nu are sens să convearga simplu către ceva şi uniform către altceva).

Pasul 2: Facem una din următoarele 3 lucruri pentru convergenţa uniformă:

a) calculăm supremumul şi facem apoi limita (cu tabelul de variaţie, ca la bac)

b) arătăm că supremumul e mai mic decât ceva ce tinde la 0, iar din criteriul cleştelui vom avea convergenţa uniformă;

c) arătăm că supremumul e mai mare decât ceva ce NU tinde la 0, caz în care şirul de funcţii nu va converge uniform.

Exerciţii:

1) Fie $f_n : [0,1) , f_n(x) = \dfrac{1}{1+x+n\ln(1+x^n)}$ un şir de funcţii.

Studiaţi convergenţa simplă şi cea uniformă a şirului $(f_n)_n$.

Soluţie:

Studiem convergenţa simplă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x+n\ln(1+x^n)} = ?$$

Calculăm, mai bine, $\lim_{n\to\infty}(1+x+n\ln(1+x^n)) =$

$$= 1+x+\lim_{n\to\infty} n\ln(1+x^n) = 1+x+\lim_{n\to\infty} n\cdot \underbrace{\frac{\ln(1+x^n)}{x^n}}_{\to 1}\cdot x^n =$$

$(x\in[0,1) \Rightarrow x^n \to 0)$

$$= 1+x+\lim_{n\to\infty} n\cdot x^n.$$

Pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{n\cdot x^n}_{a_n}$ vom folosi criteriul raportului.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = x < 1 \overset{\text{crit}}{\underset{\text{rap}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0.$

Așadar, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\Delta} f$, unde $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Studiem acum convergența uniformă. Observăm că nu putem aplica teorema lui Polya.

Facem $\sup\limits_{x\in[0,1)} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1)} \left| \frac{1}{1+x+n\ln(1+x^n)} - \frac{1}{1+x} \right| =$

$$= \sup_{x\in[0,1)} \left| \frac{1+x-1-x-n\ln(1+x^n)}{(1+x)(1+x+n\ln(1+x^n))} \right| = \sup_{x\in[0,1)} \frac{n\ln(1+x^n)}{(1+x)(1+x+n\ln(1+x^n))} \underset{x<1}{\geq}$$

$$\geq \sup_{x\in[0,1)} \frac{n\ln(1+x^n)}{2(1+x+n\ln(1+x^n))} \underset{x<1}{\geq} \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,1)} \frac{n\ln(1+x^n)}{2+n\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n\ln 2}{2+n\ln 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0.$$ Așadar $f_n \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\rightarrow}} f$. $\square$

2) Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}\,dx$.

<u>Soluție:</u>

Fie $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Avem că $f_n$ cont (op cu fct. cont) $\Rightarrow f_n$ integrabilă Riemann $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Studiem convergența simplă a lui $(f_n)_n$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}$, $\left.\begin{array}{l} x\in[0,1] \text{ și } \sin(nx)\in[-1,1] \\ n^2\to\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. Așadar $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

Studiem convergența uniformă a lui $(f_n)_n$.

Avem că $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{x\,|\sin(nx)|}{n^2+nx^2+x} \leq \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Deci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

Așadar, putem aplica teorema de permutare a limitei cu integrala și avem că $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$. $\square$

# Serii de funcții

Fie $X \neq \emptyset$, $(f_n)_n$ un șir de fcț, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n : X \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = f_p(x) + \dots + f_n(x)$, $\forall n \geq p$.

**Def.** Perechea $\left[(f_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p}\right)$ se numește serie de funcții și se notează cu $\sum\limits_{n=p}^{\infty} f_n$. În general, $p = 0$ sau $p = 1$.

**Def.** Spunem că seria de funcții $\sum\limits_n f_n$:

1) converge simplu, dacă $(s_n)_n$ converge simplu
2) converge uniform, dacă $(s_n)_n$ converge uniform
3) converge absolut, dacă $\sum\limits_n |f_n(x)|$ e convergentă.

Scanned with CamScanner

**Def.** Dacă $\sum_n f_n$ converge simplu, limita lui $(s_n)_n$ se numește suma seriei $\sum_n f_n$ și se notează tot cu $\sum_n f_n$.

## Teoremă (Weierstrass)

Presupunem că $\exists (\alpha_n)_n \subseteq [0,\infty)$ a.î.

1) $\sum_n \alpha_n$ conv

2) $|f_n(x)| \le \alpha_n$ $\cancel{\forall x \in X}$

Atunci $\sum_n f_n$ converge uniform și absolut.

Exemplu: Arătați că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ converge uniform ($x \in \mathbb{R}$)

Alegem $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$.

Avem $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}\right| \le \frac{1}{n^2+x^2} \le \frac{1}{n^2}$, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ conv.

Conform teoremei lui Weierstrass avem că $\sum_n \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ u.c.

Notație: $C^{\infty}(I) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ este de clasă $C^{\infty} \}$

(! Formula lui Taylor cu rest Lagrange:) $\Leftrightarrow$ $f$ e derivabilă de orice ordin pe $I$

Fie $a \in I$. P.p. că $f$ este derivabilă de $n+1$ ori pe $I$. Atunci $(\forall)\ x \in I$, $x \neq a$, $(\exists)\ c$ între $a$ și $x$ a.î.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{polinomul Taylor de ordin } n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{restul de ordin } n \text{ al form lui Taylor}}$$

Def: Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ s.n seria Taylor a funcției $f$ în punctul $a$.

Teoremă: Seria Taylor asociată funcției $f$ în punctul $a$ este convergentă în punctul $x \in I$, $x \neq a$ și are suma $f(x)$ $\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, unde $R_n(x)$ este restul formulei lui Taylor.

! Seria Taylor asociată lui $f$ în $0$ se mai numește și Seria MacLaurin a lui $f$

Ex: Seria Taylor ~~log(x)~~ pentru $\log(x)$ în $a = 1$:

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \dots$$

Seria MacLaurin pt $\ln(x+1)$

$$\frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Teorema de derivare termen cu termen a seriilor de puteri:

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $R$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} =$

$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_m x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ are acelaşi $R$

$\uparrow$

$m = n-1$

Dacă $R > 0$ şi $S : (-R, R)$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ atunci

$S$ e derivabilă şi $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

Teorema de integrare — // —

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $R$. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n x^n \, dx =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ are acelaşi $R$

$\downarrow$

$t \to x$

Dacă $R > 0$ şi $s$; $S : (-R, R) \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$,

atunci $S$ e primitiva lui $s$

Arătați că $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Soluție: $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $a = 0 \in I$

$f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $f \in C^\infty(I)$,

$f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}$$

Conform Formulei lui Taylor cu rest Lagrange $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ $\exists\, c$ între 0 și $x$ a.î.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{(n)}(x)}$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Arătăm că $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$. Fie $x \in \mathbb{R}^*$

$\left(\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = 0?\right)$ $\quad 0 \leq |R_n(x)| \leq \left|\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}\right| =$

$$= \frac{e^c}{(n+1)!} |x^{n+1}| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

$c$ între 0 și $x \Rightarrow 0 < e^c < e^{|x|}$

Fie $x_n = \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{|x|} |x|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{e^{|x|} |x|^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+2} = 0$$

Cf criteriului raportului cu termeni strict pozitivi $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = 0$. Deci $\lim_{n \to \infty} |R_n| = 0$

Așadar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^*$

Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin x$

$I = \mathbb{R},\ a = 0,\ f \in C^{\infty}(I)$

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(0) = 0$

- - - - - - - - -

Conf Form. lui Taylor cu rest Lagrange $(\forall)\, x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

$(\forall)\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ c$ între 0 și x a.î.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}^* \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

$$|R_n f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x^{n+1}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Fie $x_n = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0 < 1$$

Conf crit rap at șirurile cu term strict poz avem $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Deci ~~Iti~~ $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Așadar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^*$

$f(0) = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot 0^{2n+1} = 0$$