FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 4

1 Breviar

Pentru orice e şi orice Γ, notăm cu $e \vDash \Gamma$ (şi spunem că e **satisface** Γ sau e este **model** pentru Γ) dacă, pentru orice $\varphi \in \Gamma$, $e \vDash \varphi$. Pentru orice Γ, notăm cu $Mod(\Gamma)$ mulţimea modelelor lui Γ.
Spunem că Γ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \Gamma$ şi **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \Gamma$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ avem că $e \nvDash \Gamma$.
Pentru orice mulţime Γ de formule şi orice formulă φ, notăm $\Gamma \vDash \varphi$ (şi spunem că **din** Γ **se deduce semantic** φ sau că φ **este consecinţă semantică a lui** Γ) dacă pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ cu $e \vDash \Gamma$ avem $e \vDash \varphi$.
Pentru orice $v \in V$ şi $e : V \to \{0,1\}$, vom defini

$$v^e := \begin{cases} v, & \text{dacă } e(v) = 1, \\ \neg v, & \text{dacă } e(v) = 0, \end{cases}$$

şi, clar, $e^+(v^e) = 1$.

2 Exerciţii

(S4.1) Să se găsească toate modelele fiecăreia dintre mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \le n \le 7\}$.

Demonstraţie:

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \to e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \to e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \le e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ e \vDash v_n \to v_{n+1} \\ & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ e(v_n) \le e(v_{n+1}) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) \le e(v_1) \le \ldots \le e(v_n) \le e(v_{n+1}) \le \ldots \\ & \text{dacă şi numai dacă} & (\text{pentru orice } v \in V,\ e(v) = 0) \\ & & \text{sau (există } k \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } i < k,\ e(v_i) = 0 \text{ şi,} \\ & & \text{pentru orice } i \ge k,\ e(v_i) = 1). \end{array}$$

Definim $e^\infty : V \to \{0,1\}$ astfel încât, pentru orice $v \in V$, $e^\infty(v) = 0$ şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $e_k : V \to \{0,1\}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \ge k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{e^\infty\}.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$. Atunci

$$\begin{array}{lll} e \vDash \Gamma & \text{dacă şi numai dacă} & e \vDash v_0 \text{ şi, pentru orice } 0 \le n \le 7,\ e \vDash v_n \to v_{n+1} \\ & \text{dacă şi numai dacă} & e(v_0) = 1 \text{ şi } e(v_0) \le e(v_1) \le \ldots \le e(v_7) \le e(v_8) \\ & \text{dacă şi numai dacă} & \text{pentru orice } n \in \{0, 1, \ldots, 8\},\ e(v_n) = 1\ . \end{array}$$

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1 \ \text{ pentru orice } 0 \le n \le 8\}.$$

□

(S4.2) Fie $f : V \to \{0,1\}$. Găsiţi Γ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{f\}$.
Demonstraţie: Luăm $\Gamma := V^f = \{v^f \mid v \in V\}$.

Fie $e : V \to \{0,1\}$. Avem $e \in Mod(\Gamma)$ dacă şi numai dacă pentru orice $v \in V$, $e \vDash v^f$ dacă şi numai dacă pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Vom arăta că ultima afirmaţie este echivalentă cu $e = f$.
Presupunem că pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in V$. Vrem $e(v) = f(v)$. Dacă $f(v) = 1$, atunci $v^f = v$ şi deci $e(v) = e^+(v) = e^+(v^f) = 1 = f(v)$. Dacă $f(v) = 0$, atunci $v^f = \neg v$ şi deci

$$e(v) = e^+(v) = \neg\neg e^+(v) = \neg e^+(\neg v) = \neg e^+(v^f) = \neg 1 = 0 = f(v).$$

Invers, presupunem că $e = f$ şi vrem să arătăm că pentru orice $v \in V$, $e^+(v^f) = 1$. Fie $v \in V$. Atunci $e^+(v^f) = f^+(v^f) = 1$. □

(S4.3)

(i) Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

(ii) Găsiţi o mulţime (infinită) de formule cu proprietatea că nu există o mulţime finită de formule care să aibă exact aceleaşi modele.

Demonstraţie:

(i) Fie Γ o mulţime de formule ca în enunţ. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model şi fie acesta e. Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi\in\Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcţie $e_k : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \ldots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime numărabilă, deci infinită. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziţia 1.12 pentru φ, e şi e_k, avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \vDash \varphi$.

Am obţinut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Mod(\Gamma)$. Aşadar, $Mod(\Gamma)$ este infinită.

(ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulţime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulţime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al lui Γ dacă şi numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă e este funcţia constant egală cu 1, funcţie pe care o notăm cu $\mathbf{1}$. Prin urmare, $Mod(\Gamma) = \{\mathbf{1}\}$.

Fie acum Δ o mulţime finită de formule. Avem două cazuri:

(a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $Mod(\Delta) = \emptyset$.

(b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $Mod(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obţinem că $Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ.

□