# 1 Secvenţe de grade

Fie $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ o secvenţă de numere naturale.

**Problemă.** Să se construiască, dacă se poate, un (multi)graf neorientat $G$ cu $s(G) = s_0$.

**Observaţie 1.1.** *Deoarece suma gradelor vârfurilor într-un (multi)graf este egală cu dublul numărului de muchii, o condiţie necesară pentru existenţa unui (multi)graf $G$ cu $s(G) = s_0$ este ca suma*

$$d_1 + \ldots + d_n$$

*să fie număr par.*

? **Este condiţia din Observaţia 1.1 şi suficientă?**

## 1.1 Construcţia unui multigraf neorientat cu secvenţa gradelor dată

**Teorema 1.2.** *O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ este secvenţa gradelor unui multigraf neorientat dacă şi numai dacă suma $d_1 + \ldots + d_n$ este număr par.*

*Proof.* " $\Longrightarrow$ " Presupunem că există un multigraf neorientat $G$ cu $s(G) = s_0$. Atunci

$$d_1 + \ldots + d_n = 2|E(G)| \text{ este număr par.}$$

" $\Longleftarrow$ " Presupunem că $d_1 + \ldots + d_n$ este număr par.

Rezultă că există un număr par de numere impare în secvenţa (multisetul) $s_0$

Construim un multigraf $G$ cu $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ având $s(G) = s_0$ (mai exact cu $d_G(x_i) = d_i$) după următorul algoritm:

1. Adăugăm în fiecare vârf $x_i \in V(G)$ $\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor$ bucle.
2. Formăm perechi disjuncte cu vârfurile care trebuie să aibă gradul impar şi unim vârfurile din aceste perechi cu câte o muchie.

Formalizând, dacă renotăm numerele din secvenţa $s_0$ astfel încât primele $2k$ numere din secvenţă: $d_1, \ldots, d_{2k}$ să fie impare şi celelalte pare, definim

$$E(G) = \left\{ x_i x_i^{\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor} | i \in \{1, \ldots, n\}, d_i > 0 \right\} \cup \{x_i x_{i+1} | i \in \{1, \ldots, 2k-1\}\}.$$

Atunci, pentru $i$ cu $1 \leq i \leq 2k$ avem $d_i$ impar şi

$$d_G(x_i) = 2\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor + 1 = 2\frac{d_i - 1}{2} + 1 = d_i,$$

iar pentru $2k + 1 \leq i \leq n$ avem $d_i$ par şi

$$d_G(x_i) = 2\left\lfloor \frac{d_i}{2} \right\rfloor = d_i,$$

deci $s(G) = s_0$. $\square$

## 1.2 Construcţia unui graf neorientat cu secvenţa gradelor dată

Dat un graf neorientat $G$, pentru a obţine grafuri neorientate cu aceeaşi secvenţă de grade ca şi $G$ se poate folosi următoarea transformare $t$ (pe care o vom numi de interschimbare pe pătrat). Fie $x, y, u, v$ patru vârfuri distincte ale lui $G$ astfel încât $xy, uv \in E(G)$, dar $xu, yv \notin E(G)$. Considerăm graful notat $t(G, xy, uv)$ definit astfel:

$$t(G, xy, uv) = G - \{xy, uv\} \cup \{xu, yv\}$$

Spunem că $t(G, xy, uv)$ este graful obţinut din $G$ prin aplicarea transformării $t$ de interschimbare pe pătratul $xyvu$ - figura 1.

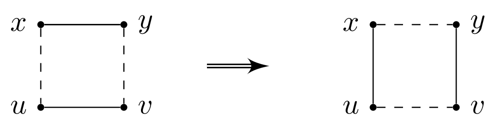


Figure 1: Transformarea $t$ de interschimbare pe pătrat

**Observaţie 1.3.** *Graful $t(G, xy, uv)$ are aceeaşi secvenţă de grade ca şi $G$.*

**Teorema 1.4.** *(Havel-Hakimi) O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale $s_0 = \{d_1 \geq \ldots \geq d_n\}$ cu $d_1 \leq n - 1$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat (cu $n$ vârfuri) dacă şi numai dacă secvenţa $s_0' = \{d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n\}$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat (cu $n - 1$ vârfuri).*

*Proof.* " $\Longleftarrow$ " Presupunem că $s_0'$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat. Fie $G' = (V', E')$ un graf neorientat cu $V' = \{x_2, \ldots, x_n\}$ având secvenţa gradelor $s(G') = s_0'$, mai precis cu

$$d_{G'}(x_i) = \begin{cases} d_i - 1, & \text{dacă } i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\} \\ d_i, & \text{dacă } i \in \{d_1 + 2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Construim pornind de la $G'$ un nou graf $G = (V, E)$ adăugând un vârf nou $x_1$ pe care îl unim cu vârfurile $x_2, \ldots, x_{d_1+1}$:

- $V = V' \cup \{x_1\}$
- $E = E' \cup \{x_1 x_i | i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\}\}$.

Pentru un $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem atunci

$$d_G(x_i) = \begin{cases} d_{G'}(x_i) + 1 = d_i - 1 + 1 = d_i, & \text{dacă } i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\} \\ d_{G'}(x_i) = d_i, & \text{dacă } i \in \{d_1 + 2, \ldots, n\} \\ d_1, & \text{dacă } i = 1. \end{cases}$$

Rezultă că $s(G) = s_0$, deci $s_0$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat.

" $\Longrightarrow$ " Presupunem că $s_0$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat.

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat cu $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ astfel încât $d_G(x_i) = d_i$ pentru orice $i \in \{1 \ldots, n\}$. Vom construi un graf $G'$ cu $s(G') = s'_0$ pornind de la $G$.

Pentru aceasta, construim întâi din $G$ un graf $G^*$ având secvenţa gradelor tot $s_0$, dar în care vârful $x_1$ are mulţimea vecinilor $N_{G^*}(x_1) = \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$.

**Cazul** 1. Dacă $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$, atunci considerăm $G^* = G$.

**Cazul** 2. Există cel puţin un indice $i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\}$ cu $x_1x_i \notin E$ (i.e $x_i \notin N_G(x_1)$). Fie $i$ minim cu această proprietate.

Deoarece $d_G(x_1) = d_1$, rezultă că există $j \in \{d_1 + 2, \ldots, n\}$ cu $x_1x_j \in E$. Mai mult, deoarece $j > d_1 + 1 \geq i$, avem $d_i = d_G(x_i) \geq d_G(x_j) = d_j$. În plus, $x_1$ este adiacent cu $x_j$, dar nu şi cu $x_i$. Rezultă că există un alt vârf $x_k$ cu $k \in \{2, \ldots, n\} - \{i, j\}$ care este adiacent cu $x_i$ ($x_ix_k \in E$), dar care nu este adiacent cu $x_j$ ($x_jx_k \notin E$) - figura 2.

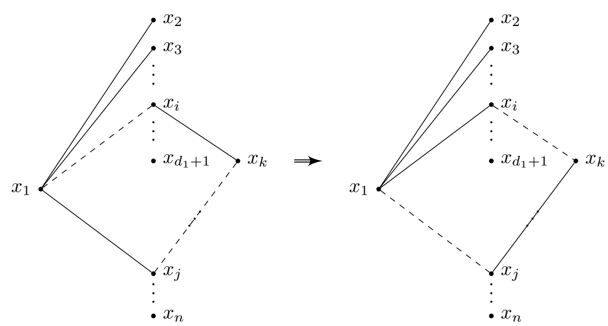


Figure 2: Transformare din demonstraţia teoremei Havel-Hakimi

Considerăm graful $G_i$ obţiunt din $G$ prin aplicarea transformării de interschimbare $t$ pentru pătratul $x_ix_kx_jx_1$:

$$G_i = t(G, x_ix_k, x_1, x_j) = G - \{x_ix_k, x_1x_j\} \cup \{x_1x_i, x_kx_j\}$$

Avem $N_{G_i}(x_1) \cap \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\} = (N_G(x_1) \cap \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}) \cup \{x_i\}$ ($x_1$ are un vecin în plus în $\{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$) şi, conform Observaţiei 1.3, $s(G_i) = s(G) = s_0$.

Aplicând succesiv transformări de tip $t$ pentru fiecare indice $i \in \{2, 3, \ldots, d_1 + 1\}$ pentru care $x_1$ şi $x_i$ nu sunt adiacente obţinem în final un graf $G^*$ cu $s(G^*) = s_0$ şi $N_{G^*}(x_1) = \{x_2, \ldots, x_{d_1+1}\}$.

Fie $G' = G^* - x_1$. Atunci $V(G') = \{x_2, \ldots, x_n\}$ şi pentru orice $i \in \{2, \ldots, n\}$:

$$d_{G'}(x_i) = \begin{cases} d_{G^*}(x_i) - 1 = d_i - 1, & \text{dacă } i \leq d_1 + 1 \\ d_{G^*}(x_i) = d_i, & \text{dacă } i \geq d_1 + 2, \end{cases}$$

deci $s(G') = s'_0$. Rezultă că $s'_0 = \{d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n\}$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat. $\square$

Din Teorema Havel-Hakimi se obţine următorul algoritm de determinare a unui graf neorientat cu secvenţa gradelor dată.

**Algoritmul Havel-Hakimi**

**Intrare**: o secvenţă de $n$ numere naturale $d_1, \ldots, d_n$
**Ieşire**: un graf $G$ cu $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ cu $s(G) = s_0$ dacă $s_0$ este secvenţa gradelor unui graf, sau mesajul NU altfel.
**Idee**: La un pas unim un vârf de grad maxim $d$ din secvenţa $s_0$ cu vârfurile corespunzătoare următoarelor cele mai mari $d$ elemente din $s_0$ diferite de $d$ şi actualizăm secvenţa $s_0$ ($s_0$=$s_0'$). Se repetă pasul până când secvenţa conţine numai 0 sau conţine elemente negative.
**Pseudocod**:
*Pasul* 1. Dacă $d_1 + \ldots + d_n$ este număr impar sau există în $s_0$ un număr $d_i > n - 1$, atunci scrie NU, STOP.
*Pasul* 2.
cât timp $s_0$ conţine valori nenule execută
    alege $d_k$ cel mai mare număr din secvenţa $s_0$
    elimină $d_k$ din $s_0$
    fie $d_{i_1}, \ldots, d_{i_{d_k}}$ cele mai mari $d_k$ numere din $s_0$
    pentru $j \in \{i_1, \ldots, i_{d_k}\}$:
        adaugă la $G$ muchia $x_k x_j$
        înlocuieşte $d_j$ în secvenţa $s_0$ cu $d_j - 1$
        dacă $d_j - 1 < 0$, atunci scrie NU, STOP.

**Observaţie.** Pentru a determina uşor care este cel mai mare număr din secvenţă şi care sunt cele mai mari valori care îi urmează, este util ca pe parcursul algoritmului secvenţa $s_0$ să fie ordonată descrescător.
**Exemplu.** - vezi curs + laborator

**Teorema 1.5.** *(Extindere a teoremei Havel-Hakimi) Fie $s_0 = \{d_1 \geq \ldots \geq d_n\}$, o secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale cu $d_1 \leq n - 1$ şi fie $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixat. Fie $s_0^{(i)}$ secvenţa obţinută din $s_0$ prin următoarele operaţii:*
*- eliminăm elementul $d_i$*
*- scădem o unitate din primele $d_i$ componente în ordine descrescătoare ale secvenţei rămase.*
*Are loc echivalenţa:*
*$s_0$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat $\Longleftrightarrow$*
*$s_0^{(i)}$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat*

*Proof.* Demonstraţia este similară cu cea a Teoremei Havel-Hakimi ([**?**] - exerciţiul 2.11). □

**Exerciţiu** Fie $G_1$ şi $G_2$ două grafuri neorientate cu mulţimea vârfurilor $V = \{1, \ldots, n\}$. Atunci $s(G_1) = s(G_2)$ dacă şi numai dacă există un şir de transformări $t$ de interschimbare pe pătrat prin care se poate obţine graful $G_2$ din $G_1$.

**Teorema Erdős–Gallai.** O secvență de numere naturale $s = \{d_1 \geq \ldots \geq d_n\}$ este secvenţa gradelor unui graf dacă și numai dacă suma $d_1 + \ldots + d_n$ este pară şi

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min(d_i, k)$$

## 2 Construcţia unui arbore cu secvenţa gradelor dată

**Teorema 2.1.** *O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale* **strict pozitive** $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ *este secvenţa gradelor unui arbore dacă şi numai dacă $d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$.*

*Proof.* "$\Longrightarrow$" Presupunem că există un arbore $T$ cu $s(T) = s_0$. Atunci

$$d_1 + \ldots + d_n = 2|E(T)| = 2(n-1) \text{ (conform Propoziţiei **??**)}$$

"$\Longleftarrow$" **Varianta** 1**.** Demonstrăm prin inducţie după $n$ că o secvenţă de $n$ numere naturale (strict) pozitive $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ cu proprietatea că $d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$ este secvenţa gradelor unui arbore.

Pentru $n = 2$ avem $d_1, d_2 > 0$ şi $d_1 + d_2 = 2(2-1) = 2$, deci $d_1 = d_2 = 1$. Există un arbore cu secvenţa gradelor $s_0 = \{1, 1\}$, izomorf cu graful $P_2$ (lanţ cu două vârfuri).

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n-1$. Fie $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ o secvenţă de $n \geq 3$ numere naturale (strict) pozitive cu proprietatea că $d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$. Arătăm că există un arbore cu secvenţa gradelor $s_0$.

Presupunem (fără a restrânge generalitatea) că $d_1 \geq \ldots \geq d_n$. Demonstrăm că $d_1 > 1$ şi $d_n = 1$.

- Presupunem prin absurd că $d_1 = 1$. Atunci $d_1 = \ldots = d_n = 1$. Rezultă $d_1 + \ldots + d_n = n$, de unde $2(n-1) = n$, deci $n = 2$, contradicţie ($n \geq 3$).
- Presupunem prin absurd că $d_n \geq 2$. Atunci $d_1 \geq \ldots \geq d_n \geq 2$. Rezultă $d_1 + \ldots + d_n \geq 2n$, de unde $2(n-1) \geq 2n$, contradicţie.

Considerăm secvenţa $s_0' = \{d_1 - 1, d_2, \ldots, d_{n-1}\}$. Numerele din secvenţă sunt pozitive şi avem

$$d_1 - 1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} = d_1 + \ldots + d_n - (1 + d_n) = 2(n-1) - (1+1) = 2((n-1)-1).$$

Atunci putem aplica ipoteza de inducţie pentru secvenţa $s_0'$. Rezultă că există un arbore $T'$ cu mulţimea vârfurilor $V' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ având secvenţa gradelor $s(T') = s_0'$, mai exact cu:

$$d_{T'}(x_i) = \begin{cases} d_i - 1, & \text{dacă } i = 1 \\ d_i, & \text{dacă } i \in \{2, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

Construim pornind de la $T'$ un nou arbore $T = (V, E)$ adăugând un vârf nou $x_n$ pe care îl unim cu vârful $x_1$: $V = V' \cup \{x_n\}$, $E = E' \cup \{x_1 x_n\}$. Pentru un $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem atunci

$$d_T(x_i) = \begin{cases} d_{T'}(x_i) + 1 = d_i - 1 + 1 = d_i, & \text{dacă } i = 1 \\ d_{T'}(x_i) = d_i, & \text{dacă } i \in \{2, \ldots, n-1\} \\ 1 = d_n, & \text{dacă } i = n. \end{cases}$$

Rezultă că $s(T) = s_0$, deci $s_0$ este secvenţa gradelor unui arbore.

**Varianta** 2. Presupunem (fără a restrânge generalitatea) că $d_1 \geq \ldots \geq d_n$. Avem $d_1 \geq 1$ şi $d_n = 1$ (ca în varianta 1). Fie $k$ astfel încât $d_k > 1$ şi $d_{k+1} = 1$.

Construim un arbore $T$ de tip omidă cu mulţimea vârfurilor $\{x_1, \ldots, x_n\}$ având secvenţa gradelor $s_0$ astfel.

1. Unim printr-un lanţ vârfurile $x_1, \ldots, x_k$ (care trebuie să fie neterminale - formează corpul omizii), în această ordine
2. Considerăm mulţimea de vârfuri $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ (care trebuie să fie terminale) şi unim
   - $x_1$ cu primele $d_1 - 1$ vârfuri din această mulţime
   - $x_2$ cu următoarele $d_2 - 2$ vârfuri
   - ...
   - $x_{k-1}$ cu următoarele $d_{k-1} - 2$ vârfuri
   - $x_k$ cu ultimele $d_k - 1$ vârfuri din această mulţime.

Deoarece $d_1 - 1 + \sum_{i=2}^{k-1}(d_i - 2) + d_k - 1 = \sum_{i=1}^{n} d_i - 2k + 2 - (n-k) = n - k = |\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}|$, construcţia este corectă.

Avem $s(T) = s_0$. $\square$

Din demonstraţia Teoremei 2.1 se desprind următorii algoritmi de determinare a unui arbore cu secvenţa gradelor dată.

**Algoritm de construţie a unui arbore cu secvenţa de grade dată**

**Intrare**: o secvenţă de $n$ numere naturale pozitive $d_1, \ldots, d_n$

**Ieşire**: un arbore $T$ cu $V(T) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ cu $s(T) = s_0$ dacă $s_0$ este secvenţa gradelor unui arbore, sau mesajul NU altfel.

**Idee**: La un pas unim un vârf de grad 1 cu un vârf de grad mai mare decât 1 şi actualizăm secvenţa $s_0$. Se repetă de $n - 2$ ori, în final rămânând în secvenţă două vârfuri de grad 1, care se unesc printr-o muchie.

**Pseudocod**:

**Varianta** 1.

*Pasul* 1. Dacă $d_1 + \ldots + d_n \neq 2(n-1)$, atunci scrie NU, STOP.

*Pasul* 2.

Cât timp $s_0$ conţine valori mai mari decât 1 execută *//sau pentru* $i = 1, n-2$

alege un număr $d_k > 1$ şi un număr $d_t = 1$ din secvenţă $s_0$ şi adaugă la $T$ muchia $x_k x_t$.

elimină $d_t$ din $s_0$

înlocuieşte $d_k$ în secvenţa $s_0$ cu $d_k - 1$

*Pasul* 3.

fie $d_k, d_t$ unicele elemente nenule (egale cu 1) din $s_0$; adaugă la $T$ muchia $x_k x_t$.

**Varianta** 2. Corespunde variantei a doua de demonstrare a teoremei anterioare - construim un arbore de tip omidă.