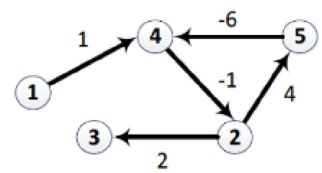
1. (0.75p)

Fie G = (V, E, w) un graf orientat ponderat, cu ponderi numere întregi și s un vârf în G. Considerăm algoritmul lui Bellman Ford descris în următorul pseudocod:

```
pentru fiecare u∈V executa
     d[u] = infinit;
d[s] = 0
pentru i = 1, |V|-1 executa
     pentru fiecare uv ∈ E executa
          daca d[u]+w(u,v)<d[v] atunci
               d[v] = d[u]+w(u,v)
```

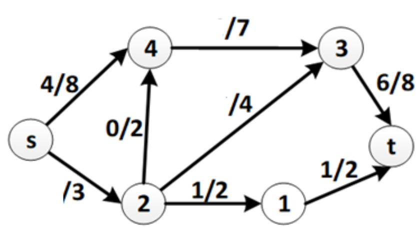


Considerăm graful din figura din dreapta pseudocodului. La finalul execuției pseudocodului de mai sus pentru acest graf, s=1 și arcele considerate în ordinea E={(1,4), (2,3), (4,2), (2,5), (5,4)} vectorul d are elementele [0, -9, -4, -11, -5]. Adăugați în pseudocod instrucțiunile necesare (cu explicații) pentru ca algoritmul să testeze existența unui circuit cu cost negativ în graf accesibil din s (=pentru care există un drum de la s la un vârf al său) și ilustrați-le pe graful dat ca exemplu (cu explicații).

2. a) (0.5p) Arătați că prin operația de revizuire a unui flux de-a lungul unui s-t lanț f-nesaturat (drum de creștere) se obține tot un flux.

   b) (0.5p) Este adevărat că dacă într-o rețea toate capacitățile arcelor sunt numere pare, există un flux maxim cu proprietatea că pentru orice arc e $f(e)$ este par? Justificați.

   c) (1p) Adăugați valori pentru flux pe arcele pe care acesta lipsește și ilustrați algoritmul Edmonds-Karp penrtu rețeaua obținută (pornind de la fluxul de pe arce).

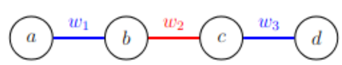


   d) (0.5p) Descrieți un algoritm care, dat un flux maxim într-o rețea, determină o s-t tăietură minimă și ilustrați-l pentru fluxul maxim de la b). Care sunt arcele directe ale tăieturii obținute?

3. (2p) Se dau un DAG cu ponderi pe arce (graf orientat aciclic ponderat) și un vârf s. Descrieți un algoritm pentru a determina numărul de drumuri minime din DAG care se termină cu vârful s (descriere, discuție complexitate, pseudocod, ilustrare pe un exemplu).

4. (1.5p) Se dă un graf orientat $G = (V, E)$ cu $n = |V|$ noduri și $m = |E|$ muchii. Se dau și 2 vârfuri x și y. Asupra orcarui arc din G putem efectua operatia rev, unde $rev(a, b)$ transformă arcul (a, b) in (b, a). Să se determine numărul minim de operatii de tip rev pentru a obtine un drum de la x la y. Propuneti un algoritm care rezolva aceasta problema în $O(m \log n)$ sau $O(m + n)$ (descriere, discuție complexitate, ilustrare pe un exemplu).
5. (1.5p) Fie $G = (V, E)$ un graf planar conex bipartit cu $n = |V| > 2$ și $m = |E|$. Arătați că:
   a) $m \leq 2n - 4$
   b) există $x \in V$ cu gradul $d(x) \leq 3$.
   c) Dați exemplu de graf cu $n = 8$ noduri care verifică proprietățile din enunț si pentru care are loc egalitatea $m = 2n - 4$.
6. (1p) Dați exemplu de o rețea pe care algoritmul Edmonds-Karp de determinare a fluxului maxim are numărul de etape $k|E|$, unde k este o constantă (construiește cel puțin $k|E|$ lanțuri f-nesaturate, deci are complexitate timp ce se incadreaza in $\Omega(E^2)$ pe cazul nefavorabil).
7. (2p) Se consideră un graf neorientat ponderat și o etichetare cu 3 culori a grafului, care asociază fiecărei muchii una dintre culorile *roșu*, *verde* sau *albastru*. Costul de culoare al unui lanț din graf se definește ca fiind egal cu ponderea totală a lanțului (costul total al lanțului) plus un întreg pozitiv w_c care se adună de fiecare dată când lanțul își schimbă culoarea.

   De exemplu, în graful de mai jos (cu cele patru vârfuri $\{a, b, c, d\}$), o muchie albastră (a, b) cu pondere (cost) w_1, o muchie roșie (b, c) cu pondere w_2 și încă o muchie albastră (c, d) cu pondere w_3), lanțul (a, b, c, d) are costul de culoare $w_1 + w_2 + w_3 + 2w_c$, deoarece lanțul își schimbă culoarea de două ori.

   Fiind dată o etichetare cu 3 culori $c : E \to \{\text{roșu}, \text{verde}, \text{albastru}\}$ a unui graf neorientat, conex și ponderat $G = (V, E, w)$ care conține doar ponderi pozitive pe muchii, și fiind date două vârfuri $s, t \in V$, descrieți un algoritm eficient care returnează un lan de la s la t cu cost de culoare minim.

Se acordă un punct din oficiu (punctajul total este 11, nota la temă va fi minim(10,punctaj))