

Seminar 1

(S1.1) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

- (i) $((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0 = 1$;
- (ii) $(x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)) = 1$.

Demonstrație:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \rightarrow x_1$	$(x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0$	$((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

- (ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \rightarrow x_4$	$x_4 \rightarrow x_1$	$x_3 \rightarrow x_1$	$(x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Fie $\varphi, \psi \in \text{Form}$.

Pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, notăm cu $e \models \varphi$ (și spunem că e **satisfacă** φ sau e este **model** pentru φ) dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notăm cu $e \models \varphi$ (și spunem că φ este **tautologie**) dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem $e \models \varphi$. Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \rightarrow \{0, 1\}$

cu $e \models \varphi$ și **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \varphi$, i.e. pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem $e \not\models \varphi$. Notăm $\varphi \models \psi$ (și spunem că **din** φ **se deduce semantic** ψ sau că ψ **este consecință semantică a lui** φ) dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \varphi$ avem $e \models \psi$. Notăm cu $\varphi \sim \psi$ dacă pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem $e \models \varphi$ dacă și numai dacă $e \models \psi$, i.e. pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$.

(S1.2) Să se arate că pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ și pentru orice formule φ, ψ avem:

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$$

Demonstrație:

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\neg\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\neg\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = \neg e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) \stackrel{(*)}{=} e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$

Pentru $(*)$, demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg x \rightarrow y = x \vee y$:

x	y	$\neg x$	$\neg x \rightarrow y$	$x \vee y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

□

(S1.3) Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

- (i) $v_0 \rightarrow v_2$;
- (ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstrație:

- (i) Fie funcția $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \rightarrow v_2) = e^+(v_0) \rightarrow e^+(v_2) = e(v_0) \rightarrow e(v_2) = 0 \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie funcția $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = u_0 \\ 1, & \text{dacă } x = u_3 \\ 0, & \text{dacă } x = u_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(u_0 \wedge u_3 \wedge \neg u_4) &= e^+(u_0) \wedge e^+(u_3) \wedge \neg e^+(u_4) \\ &= e(u_0) \wedge e(u_3) \wedge \neg e(u_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(S1.4) Arătați că pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in Form$, avem:

- (i) $\psi \models (\varphi \rightarrow \psi)$;
- (ii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$;
- (iii) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;
- (iv) $\models \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$.

Demonstrație: Vom folosi în demonstrații următoarele: pentru orice $a, b \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} a \rightarrow b = 1 &\iff a \leq b, \\ 1 \rightarrow a = a, & \quad a \rightarrow 1 = 1 \\ 0 \rightarrow a = 1, & \quad a \rightarrow 0 = \neg a \\ 1 \wedge a = a, & \quad 0 \wedge a = 0, \\ 1 \vee a = 1, & \quad 0 \vee a = a. \end{aligned}$$

(i) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = e^+(\varphi) \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) = 1 \text{ dacă și numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \rightarrow \chi)$	$e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$	$e^+(\varphi \wedge \psi)$	$e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raționăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) &= e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 0 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 1 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că } e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(iv) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare,

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) &= 0 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) &= \neg 0 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0)) \\ &= 1 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

(S1.5) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ , φ este tautologie dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație:

Avem:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \neg e^+(\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\neg\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \text{ nu avem că } e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{nu avem că există } e : V \rightarrow \{0, 1\} \text{ cu } e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\ &\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\ &\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.} \end{aligned}$$

□