Examen - Sesiunea Ianuarie-Februarie 2025

23 Ianuarie 2025

⚠ Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Sunt autorizate doar calculatoare electronice de mână. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Se va ține cont de modul de redactare a soluției. Mult succes !

Exercițiul 1

Se consideră variabilele aleatoare X și Y având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ și } Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Presupunem că $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 2\lambda$ și $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{3}$.

a) Calculați $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[3Y+2]$, $Var(X)$, $Var(7Y-5)$.

b) Determinați repartiția comună a cuplului (X, Y) în funcție de parametrul λ.

c) Calculați coeficientul de corelație $\rho(X, Y)$.

d) Determinați valorile lui λ pentru care X și Y sunt independente.

Exercițiul 2

O anchetă *Adevărul* a arătat că, în Brăila, cancerul pulmonar afectează o femeie din 10.000 și 4 bărbați din 10.000. Aceeași anchetă a demonstrat că 70% dintre cazurile de cancer pulmonar la femei apar la femei fumătoare, în timp ce doar 30% apar la femei nefumătoare. La bărbați, aceste proporții sunt, respectiv, 90% și 10%. Un jurnalist de la ziarul *Adevărul* și-a încheiat comentariul despre anchetă afirmând că o femeie fumătoare are un risc mai mic de a contracta acest tip de cancer față de un bărbat fumător.

a) Pe ce bază și-a fundamentat probabil jurnalistul concluzia?

b) Știind că proporția fumătorilor din localitate este de șase ori mai mare la bărbați decât la femei, putem argumenta serios concluzia jurnalistului?

Exercițiul 3

Se consideră cuplul de variabile aleatoare (X, Y) a cărui repartiție este definită în triunghiul care are ca vârfuri originea, punctul $A(0,1)$ și punctul $B(1,1)$ prin densitatea de repartiție

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{a}{\sqrt{xy}}.$$

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine densitatea marginală a lui X și a lui Y și să se calculeze $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$ și $\mathrm{Var}[Y]$.

c) Să se găsească densitățile condiționate ale variabilelor aleatoare $X|Y = y$ și respectiv $Y|X = x$.

d) Scrieți o funcție în `R` care să permită trasarea grafică a densității marginale a lui Y și respectiv a densității condiționate $Y|X = x$.

e) Să se calculeze $\mathbb{E}[X|Y = y]$ și $\mathbb{E}[Y|X = x]$.

f) Să se determine coeficientul de corelație dintre X și Y.

Exercițiul 4

Un administrator de reprezentanță de mașini comandă uzinei Dacia N mașini, numărul aleator X de mașini pe care îl poate vinde reprezentanța sa într-un an fiind un număr întreg între 0 și $n \geq N$, toate având aceeași probabilitate. Mașinile vândute de administrator îi aduc acestuia un beneficiu de a unități monetare pe mașină iar mașinile nevândute îi aduc o pierdere de b unități. Calculați valoarea medie a câștigului G reprezentanței de mașini și deduceți care este comanda optimă.

Exercițiul 5

Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.

Corectarea examenului
(23 Ianuarie 2025)

1. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\qquad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

X \ Y	0	1	2	marginala X
0	2λ	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}-2\lambda$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}-2\lambda$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}+2\lambda$	$\frac{2}{3}$
marginala Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

căci $0^2=0$, $1^2=1$

a) $\mathbb{E}(X) = 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}} = \mathbb{E}(X^2)$

$\mathbb{E}(3Y+2) = 3\cdot\boxed{\mathbb{E}(Y)}+2 = 3\cdot\left(0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}\right)+2 =$

$= 3\cdot\boxed{\frac{7}{6}}+2 = \frac{7}{2}+\frac{4}{2} = \boxed{\frac{11}{2}} = \boxed{5,5}$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$

$Var(7Y-5) = 7^2\cdot Var(Y) = 49\cdot\left[\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2\right] =$

$= 49\cdot\left(\frac{11}{6} - \frac{7^2}{6^2}\right) = 49\cdot\frac{17}{36} = \boxed{\frac{833}{36}} = \boxed{23,13(8)}$

\# $\mathbb{E}[7Y-5] = 7\cdot\frac{7}{6} - 5 = \frac{19}{6}$

Am: $\mathbb{E}(Y^2) = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

b) $P(Y=0) = P(Y=0, X=0) + P(Y=0, X=1)$

$\frac{1}{6} = 2\lambda + P(Y=0, X=1)$

$P(Y=0, X=1) = \boxed{\frac{1}{6} - 2\lambda}$

Analog, $P(X=0, Y=1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$

$P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2)$

$\frac{1}{3} = 2\alpha + \frac{1}{6} + P(X=0, Y=2)$

$P(X=0, Y=2) = \frac{1}{3} - 2\alpha - \frac{1}{6}$

$P(X=0, Y=2) = \boxed{\frac{1}{6} - 2\alpha}$

Analog, $P(X=1, Y=2) = \boxed{\frac{1}{6} + 2\alpha}$

Verificare: Σ probab. tabel 2D $= 1$ ✓

c) $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} =$

$= \frac{{}^{3)}\frac{2}{3} + 4\alpha - \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6}}{\sqrt{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{17}{36}}} = \frac{\frac{6}{9} + 4\alpha - \frac{7}{9}}{\frac{\sqrt{34}}{18}} = \frac{4\alpha - \frac{1}{9}}{\frac{\sqrt{34}}{18}} = \boxed{\frac{72\alpha - 2}{\sqrt{34}}}$

unde am calculat separat:

dacă $X=0$ sau $Y=0$, termenul dispare

$E(X \cdot Y) = \sum x \cdot y \cdot P(X=x, Y=y) =$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + 2\alpha\right)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 4\alpha = \boxed{\frac{2}{3} + 4\alpha}$

d) Știm clar pentru început că probabilitățile din tabel trebuie să fie valide, deci se impune ca:

$$\begin{cases} 0 \le \frac{1}{6} - 2\alpha \le 1 \\ 0 \le \frac{1}{6} + 2\alpha \le 1 \end{cases},$$

ceea ce conduce la $\boxed{\alpha \in \left[-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right]}$.

Mai departe, știm că $\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} P(X=x, Y=y) = P(X=x, Y=y) \quad \forall x, y}$

și

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{36} \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \checkmark \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{36} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{36} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \checkmark \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{36} \end{cases}$$

După cum se poate observa, nu există nicio contradicție, iar unica soluție obținută este $\boxed{\lambda = \frac{1}{36}}$ (și $\frac{1}{36} \in \left[-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right]$). În concluzie:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{36}.$$

2. $\mathbb{P}(C|F) = \frac{1}{10^4}$

Am notat cu:
C = persoana are cancer
F = persoana e femeie
B = persoana e bărbat
S = persoana fumează (smoker)

$\mathbb{P}(C|B) = \frac{4}{10^4}$

$\mathbb{P}(S|C,F) = 0.7 = \frac{7}{10}$

$\mathbb{P}(S^c|C,F) = 0.3 = \frac{3}{10}$

$\mathbb{P}(S|C,B) = 0.9 = \frac{9}{10}$

$\mathbb{P}(S^c|C,B) = 0.1 = \frac{1}{10}$

a) Jurnalistul a afirmat, de fapt, că:

$$\mathbb{P}(C|F,S) \boxed{<} \mathbb{P}(C|B,S)$$

Să analizăm, așadar, metoda de calcul a acestor probabilități:

mă ocup de numărător mai întâi

$$\mathbb{P}(C|F,S) = \frac{\mathbb{P}(C,F,S)}{\mathbb{P}(F,S)} = \frac{\mathbb{P}(S|C,F)\cdot\mathbb{P}(C,F)}{\mathbb{P}(F,S)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(S|C,F)\cdot\mathbb{P}(C|F)\cdot\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F,S)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(S|C,F)\cdot\mathbb{P}(C|F)}{\frac{\mathbb{P}(F,S)}{\mathbb{P}(F)}} = \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10^4}}{\alpha} = \boxed{\frac{7}{10^5\cdot\alpha}}$$

unde am notat cu $\alpha = \frac{\mathbb{P}(F,S)}{\mathbb{P}(F)}$ proporția femeilor fumătoare
$= \mathbb{P}(S|F)$

Similar se obține că:

$$\mathbb{P}(C|B,S) = \frac{\mathbb{P}(S|C,B)\cdot\mathbb{P}(C|B)}{\frac{\mathbb{P}(B,S)}{\mathbb{P}(B)}} = \frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{4}{10^4}}{\mathbb{P}(S|B)} = \frac{\frac{36}{10^5}}{\beta} = \boxed{\frac{36}{10^5\cdot\beta}},$$

unde am notat cu $\beta = \mathbb{P}(S|B)$ = proporția bărbaților fumători.

Scanat cu CamScanner

Cum $\frac{7}{10^5} \boxed{<} \frac{36}{10^5}$, jurnalistul a concluzionat (eronat) că $\frac{7}{10^5 \alpha} \boxed{<} \frac{36}{10^5 \beta}$, adică $P(C|F,S) < P(C|B,S)$.

Este posibil ca acesta să fi presupus tacit că $\alpha = \beta$, caz în care inegalitatea e într-adevăr validă.

b) Dacă introducem în plus ipoteza că $\boxed{\beta = 6\alpha}$, atunci avem că:

$$P(C|F,S) = \frac{7}{10^5 \cdot \alpha}$$

$$P(C|B,S) = \frac{36}{10^5 \cdot \beta} = \frac{\cancel{36}^{\,6}}{10^5 \cdot 6\alpha} = \frac{6}{10^5 \cdot \alpha}$$

deci:

$$P(C|F,S) > P(C|B,S)$$

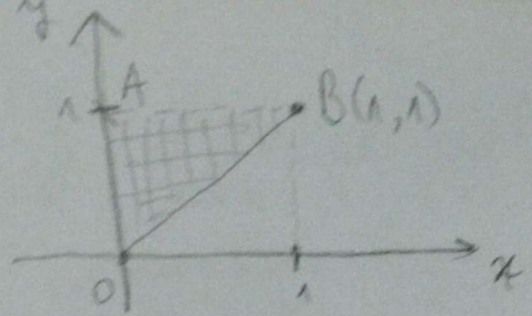
adică afirmația jurnalistului e $\underbrace{\text{astfel}}_{\text{în aceste condiții}}$ invalidată. ∎

a) Altă variantă acceptată de justificare:

$70\,\% \boxed{<} 90\,\%$

$\Rightarrow$ jurnalistul a interpretat și formulat neriguros probabilitățile condiționate din enunț/știre.

3.



a) Metoda 1 de parametrizare a domeniului:

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$.

Impunem ca:

$$1 = \iint_{D_1} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{a}{\sqrt{xy}}\,dx\right)dy = a \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \left(\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right)dy$$

$$= a \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \left(2\sqrt{x}\Big|_{x=0}^{x=y}\right)dy = a \cdot \int_0^1 \frac{1}{\cancel{\sqrt{y}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{y}}\,dy = \boxed{2a}$$

deci $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

Metoda 2 de parametrizare a domeniului:

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$

Impunem ca:

$$1 = \iint_{D_2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{a}{\sqrt{xy}}\,dy\right)dx =$$

$$= a \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\right)dx = a \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(2\sqrt{y}\Big|_{y=x}^{y=1}\right)dx =$$

$$= a \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (2 - 2\sqrt{x})\,dx = 2a \cdot \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2a \cdot \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)dx\right) = 2a \cdot (2\sqrt{x} - x)\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$= \boxed{2a}$

de unde $\boxed{a = \frac{1}{2}}$

b) Fie $x \in [0,1]$. Atunci:

$$f_X(x) = \int_x^1 f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(2\sqrt{y}\Big|_{y=x}^{y=1}\right) = \frac{2-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}$$

deci: $f_X(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Avem, că:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{15}}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{6^2} = \boxed{\frac{7}{180}} = 0.03(8)$$

Similar procedăm și pt. Y. Fixăm $y \in [0,1]$. Rezultă că:

$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{xy}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left(2\sqrt{x}\Big|_{x=0}^{x=y}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\sqrt{y}}} \cdot \cancel{2\sqrt{y}} = \boxed{1}$$

deci $Y \sim \mathrm{Unif}([0,1])$.

Așadar: $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$ și $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{3}$

$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12}$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)_{=1}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot 1\!\!1_{[0,y]}(x)$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{xy}}}{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} \cdot 1\!\!1_{\Delta AOB}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}\cdot(1-\sqrt{x})} \cdot 1\!\!1_{[x,1]}(y)$$

d) PAS 1: definesc funcția
PAS 2: plotez cu plot sau curve

e) $$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx = \int_0^y \frac{x}{2\sqrt{xy}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \int_0^y \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{2x\sqrt{x}}{3} \Big|_0^y \right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{y}}} \cdot \frac{\cancel{2}y\cancel{\sqrt{y}}}{3} = \boxed{\frac{y}{3}}$$

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X=x}(y)\, dy = \int_x^1 y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}\cdot(1-\sqrt{x})}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} \cdot \int_x^1 \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} \cdot \left(\frac{2y\sqrt{y}}{3} \right) \Big|_x^1 =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}(1-\sqrt{x})} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot (1 - x\sqrt{x}) = \boxed{\frac{1-x\sqrt{x}}{3(1-\sqrt{x})}}$$

f) $$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{180}\cdot\frac{1}{12}}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}\cdot\sqrt{\frac{7}{15}}} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{7}}} = \boxed{0.4879}$$

unde $$\mathbb{E}(X\cdot Y) = \iint_{D_1} x\cdot y \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \cdot \iint_{D_1} \sqrt{xy}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \left(\int_0^y \sqrt{x}\, dx \right) dy = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_{x=0}^{x=y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \frac{2}{3} \cdot y\sqrt{y}\, dy = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

1. $N \in \mathbb{N}^*$ fixat

X = nr. mașini ce pot fi vândute într-un an

$\boxed{0 \leq X \leq m \\ X \text{ v.a}}$, unde $\underline{m \geq N}$ (pt. că reprezentanța nu va vinde doar mașini Dacia)

Notăm cu G = câștigul administratorului din vânzarea mașinilor Dacia.
Din enunț reiese că:

$$G = \begin{cases} a \cdot N & \text{pentru } X \geq N \\ a \cdot X - b \cdot (N - X), & \text{pentru } X < N \end{cases}$$

adică:

$$G = a \cdot N \cdot \mathbb{1}_{[X \geq N]} + \left(a \cdot X - b \cdot (N - X)\right) \cdot \mathbb{1}_{[X < N]}$$

de unde:

$$\mathbb{E}(G) = a \cdot N \cdot \mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1} (a \cdot x - b \cdot (N - x)) \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Deoarece toate mașinile (inclusiv cele Dacia) au aceeași probabilitate de a fi vândute (cf. enunțului) și iar $0 \leq X \leq m$, reiese că $X \sim \text{Unif}(\{0, 1, 2, \dots, m\})$, deci:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{m+1}, \quad \forall x \in \{0, 1, \dots, m\}$$

ceea ce conduce, în particular, și la:

$$\mathbb{P}(X < N) = \frac{N}{m+1} \text{ și } \mathbb{P}(X \geq N) = 1 - \frac{N}{m+1} = \frac{m+1-N}{m+1}$$

Revenind la calcul, obținem:

$$\mathbb{E}(G) = a \cdot N \cdot \frac{m+1-N}{m+1} + \sum_{x=0}^{N-1} \frac{ax - b(N-x)}{m+1}$$

$$= \frac{aN(m+1-N)}{m+1} + \sum_{x=0}^{N-1} \frac{(a+b)x - bN}{m+1}$$

$$= \frac{aN(m+1-N)}{m+1} + \frac{a+b}{m+1} \cdot \frac{(N-1) \cdot N}{2} - \frac{bN}{m+1} \cdot N$$

$$E(G) = \frac{2aN(m+1-N) + (a+b)\cdot N\cdot(N-1) - 2bN^2}{2(m+1)}$$

încerc să rescriu cât mai convenabil

$$= \frac{N}{2\cdot(m+1)}\cdot\left[2a\cdot(m+1-N) + (a+b)\cdot(N-1) - 2bN\right]$$

$$= \frac{N}{2\cdot(m+1)}\cdot\left[2(m+1)\cdot a - 2aN + (a+b)N - a - b - 2bN\right]$$

$$= \boxed{\frac{N}{2(m+1)}\cdot\left[(2m+1)a - b - (a+b)\cdot N\right]} \overset{not}{=} h(N)$$

Pentru a găsi comanda optimă, vrem de fapt să aflăm N pentru care E(G) este maximă. Deci privesc E(G) ca o funcție de N și mă uit pentru moment la punctele de extrem, analizând unde se anulează derivata, adică:

$$h'(N) = \frac{1}{2(m+1)}\cdot\left[(2m+1)a - b - (a+b)N\right] + \frac{N}{2(m+1)}\cdot\left[-(a+b)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2m+1)a - b - 2(a+b)\cdot N}{2(m+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)a - b - 2(a+b)\cdot N = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N = \frac{(2m+1)\cdot a - b}{2(a+b)}}$$

Cum $h''(N) = -\frac{a+b}{m+1} \boxed{<} 0$, e clar că valoarea găsită pt N corespunde maximului. DONE!

5. Notăm cu X și Y cele două măsurători. Știm din enunț că $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ și $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Notăm, de asemenea, cu:

$$\begin{cases} M = \max(X,Y) = \dfrac{X+Y+|X-Y|}{2} \\ N = \min(X,Y) = \dfrac{X+Y-|X-Y|}{2} \end{cases}$$

sau, altfel scris, știm că

$$\begin{cases} M+N = X+Y \\ M-N = |X-Y| \end{cases}$$

de unde reiese că:

$$① \begin{cases} E(M)+E(N) = E(X+Y) = 0 \\ E(M)-E(N) = E(|X-Y|) \end{cases}$$

Cum $X \perp\!\!\!\perp Y$ și $X,Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, rezultă că $X-Y \sim \mathcal{N}(0,2)$. Prin urmare, $\boxed{X-Y = Z\sqrt{2}}$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Obținem:

$$E(|X-Y|) = E(|Z\sqrt{2}|) = \int_{-\infty}^{\infty} |z\sqrt{2}| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |z| \cdot e^{-z^2/2}\, dz$$

funcție pară de integrat

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} z \cdot e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \left(-e^{-z^2/2}\right)'\, dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 = \boxed{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}$$

Revenim la sistemul ①:

$$\begin{cases} E(M)+E(N) = 0 \\ E(M)-E(N) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases} \iff \begin{cases} E(M) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \\ E(N) = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

Mai departe,

$$Cov(M,N) = \mathbb{E}(M\cdot N) - \mathbb{E}(M)\cdot \mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(M)\cdot \mathbb{E}(N) \overset{\substack{X \perp\!\!\!\perp Y \\ \mathbb{E}(X)=0 \\ \mathbb{E}(Y)=0}}{=}$$

$$= 0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \boxed{\frac{1}{\pi}}$$

$$Corr(M,N) = \frac{Cov(M,N)}{\sqrt{Var(M)\cdot Var(N)}} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\sqrt{Var(M)\cdot Var(N)}}$$

Mai rămân de calculat $Var(M)$ și $Var(N)$.

Cum $M+N = X+Y$ și $X \perp\!\!\!\perp Y$, avem că:

$$\underline{Var(M+N)} = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \boxed{2}$$

$$\Leftrightarrow Var(M) + Var(N) + 2\,Cov(M,N) = 2$$

$$\Leftrightarrow Var(M) + Var(N) + \frac{2}{\pi} = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Var(M) + Var(N) = 2\left(1-\frac{1}{\pi}\right)} \quad (2)$$

Cum $M=\max(X,Y) = -\min(-X,-Y)$, folosind simetria repartiției normale standard (i.e. $(X,Y) \sim (-X,-Y)$) deducem:

$$\underline{Var(M)} = Var(\max(X,Y)) = Var(-\min(-X,-Y)) =$$

$$= Var(\min(-X,-Y)) = Var(\min(X,Y)) =$$

$$= \underline{Var(N)}$$

$$\Rightarrow \boxed{Var(M) = Var(N)} \quad (3).$$

Din (2) și (3) $\Rightarrow Var(M) = Var(N) = 1 - \frac{1}{\pi}$.

În concluzie,

$$Corr(M,N) = \frac{\frac{1}{\pi}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{\pi}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}} = \boxed{\frac{1}{\pi - 1}}$$

$\in [-1, 1]$