

1. Știind că pentru un graf cu 8 vârfuri la finalul algoritmului Floyd-Warshall se obțin matricele următoare, ilustrați cum putem detecta un circuit negativ în acest graf.

| | | | | | | | | |
|-------|----------|----------|----|----------|----------|----------|----------|----------|
| $D =$ | 0 | 2 | 3 | 7 | 4 | 8 | -1 | 9 |
| | ∞ | 0 | 1 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| | ∞ | ∞ | 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| | 0 | 2 | 3 | -1 | -4 | 0 | -9 | 1 |
| | 3 | 5 | 6 | 2 | -1 | 3 | -6 | 4 |
| | -1 | 1 | 2 | -2 | -5 | -1 | -10 | 0 |
| | 8 | 10 | 11 | 7 | 4 | 8 | -1 | 9 |
| | -3 | -1 | 0 | -4 | -7 | -3 | -12 | -2 |

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P =$ | 0 | 1 | 2 | 5 | 7 | 4 | 8 | 6 |
| | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 | 1 | 2 | 5 | 7 | 4 | 8 | 6 |
| | 4 | 1 | 2 | 5 | 7 | 4 | 8 | 6 |
| | 4 | 1 | 2 | 5 | 7 | 4 | 8 | 6 |
| | 4 | 1 | 2 | 5 | 7 | 4 | 8 | 6 |
| | 4 | 1 | 2 | 5 | 7 | 4 | 8 | 6 |

2. Definiți noțiunile de flux, tăietură, tăietură minimă și lanț nesaturat/drum de creștere. Ilustrați pașii algoritmului Ford-Fulkerson pentru rețeaua din figura următoare (pe un arc e sunt trecute valorile $f(e)/c(e)$ reprezentând flux/capacitate), pornind de la fluxul indicat și alegând la fiecare pas un s-t lanț f-nesaturat de lungime minimă (algoritmul Edmonds-Karp). Indicați o tăietură (s-t tăietură) minimă în rețea (se vor indica vârfurile din bipartitie, arcele directe, arcele inverse) și determinați capacitatea acestei tăieturi. Mai există și o altă s-t tăietură minimă în această rețea? Justificați.

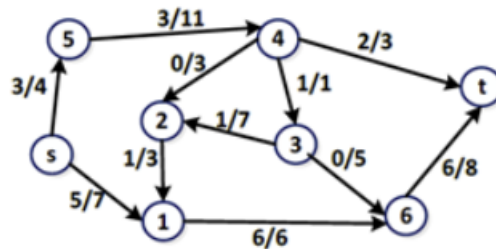


Figure 1

3. Se dau graful G și cuplajul indicat în figura.
- Construiți rețeaua asociată lui G (în alg de determinare cuplaj maxim cu fluxuri) și fluxul corespunzător cuplajului indicat.
 - Pornind de la acest flux construiți un flux maxim în rețea și indicați cuplajul de cardinal maxim corespunzător în graf.
4. Se dau următoarele secvențe: $\{1, 1, 3, 0\}$ – ieșire, $\{1, 2, 1, 1\}$ – intrare. Folosind algoritmul FF verificați dacă există un graf orientat G cu secvența gradelor de intrare și secvența gradelor de ieșire t care nu conține arcul $(1, 2)$.

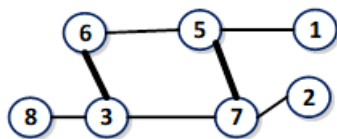


Figure 2

5. Propuneti un algoritm bazat pe FF pentru a rezolva următoarea problemă (sistem de reprezentanti distincti): Fie S_1, \dots, S_m un set de submultimi din $\{1, \dots, m\}$. Sa se determine, daca exista, un system de reprezentati distincti pentru aceste submultimi: a_1, \dots, a_m cu $a_i \in S_i$ distincte 2×2 . Exemplificati algoritmul pentru $N = 5$

a)

$$\{1, 2, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 5\}, \{3, 4, 5\}$$

b)

$$\{1, 2, 4\}, \{1, 4\}, \{3, 5\}, \{2, 5\}$$

6. Data o tabla de sah cu dame pe ea, sa se pastreze pe tabla un număr maxim de dame care nu se ataca— modelat ca probleme de cuplaje.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{array}$$

7. Fie $N=(G,s,t,c)$ o rețea de transport și f un flux în N . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?
- Valoarea lui f este mai mică sau egală cu suma capacităților arcelor care ies din s
 - Dacă f este flux maxim, atunci cel puțin un arc care iese din s are capacitatea egală cu fluxul (are capacitate reziduală/ în graful rezidual 0)
 - Valoarea lui f este mai mare sau egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi (s - t tăieturi) din G
 - Valoarea lui f este mai mică sau egală cu capacitatea maximă a unei tăieturi (s - t tăieturi) din G
8. Dacă într-o hartă $M = (V,E, F)$ conexă, simplă, 3-regulată (cu toate vârfurile de grad 3) orice față are gradul 5 sau 6 atunci sunt exact 12 fețe de grad 5. (Exemple de grafuri planare cu fețe de grad 5,6: mingea de fotbal, dodecaedru – vezi final)
9. a) Fie G un graf planar conex cu $n > 3$ noduri și m muchii care conține cicluri și fie g lungimea minimă a unui ciclu din G . Arătați că $m(g - 2) \leq g(n - 2)$.
- b) Arătați că graful lui Petersen nu este planar.

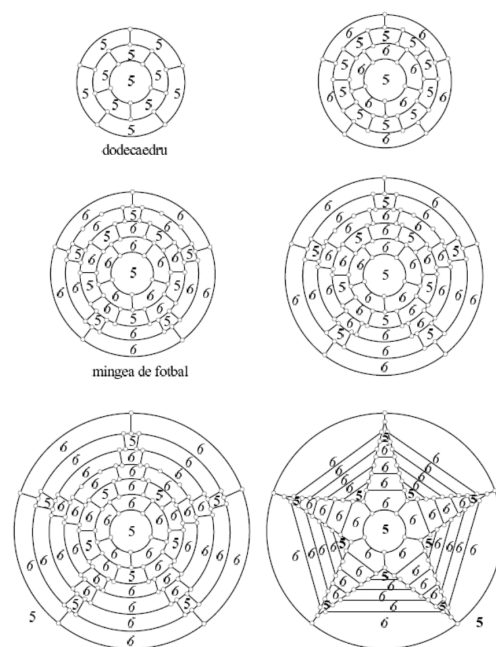


Figure 3