FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 6

(S6.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că pentru orice $\mathcal{L}$-formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

(i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \wedge \forall x\psi$;

(ii) $\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\varphi$;

(iii) $\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\psi \to \varphi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(i) Avem, pe de-o parte, $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\mapsto a}]$ $\iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}]$ (**).

Vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**). Pentru aceasta, este suficient să arătăm că, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ dacă şi numai dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.

Fie $a \in A$. Din Propoziţia 3.29, este suficient să arătăm că pentru orice $v \in FV(\varphi)$, $e_{x\mapsto a}(v) = e(v)$. Fie $v \in FV(\varphi)$. Cum $x \notin FV(\varphi)$, avem $v \neq x$. Dar, atunci, din definiţia lui $e_{x\mapsto a}$, rezultă că $e_{x\mapsto a}(v) = e(v)$, ceea ce trebuia arătat.

Scriem raţionamentul de mai sus în felul următor, pe scurt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\mapsto a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}] \text{ (Prop. 3.29)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\mapsto a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e].
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ (Prop. 3.29)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e].
\end{aligned}$$

(iii) Avem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x(\psi \to \varphi))[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\mapsto a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\mapsto a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\mapsto a}]\big)\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\mapsto a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e]\big) \text{ (Prop. 3.29)}\\
&\iff (\text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\mapsto a}]) \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e]\\
&\iff \mathcal{A} \not\vDash \forall x\psi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \to \varphi)[e].
\end{aligned}$$

$\square$

(S6.2) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2, notat cu $\sim$. Să se scrie un $\mathcal{L}$-enunţ φ ce spune că relaţia asociată simbolului este o relaţie de echivalenţă cu proprietatea că fiecare clasă a sa are exact două elemente. Să se determine mulţimea acelor $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că există o $\mathcal{L}$-structură cu n elemente care satisface φ.

Demonstraţie:

Enunţul φ va fi conjuncţia celor trei proprietăţi ale relaţiilor de echivalenţă, anume:

- $\forall v_0(v_0 \sim v_0)$,
- $\forall v_0 \forall v_1(v_0 \sim v_1 \to v_1 \sim v_0)$,
- $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2(((v_0 \sim v_1) \wedge (v_1 \sim v_2)) \to (v_0 \sim v_2))$,

împreună cu:

$$\forall v_0 \exists v_1(v_0 \sim v_1 \wedge \neg(v_0 = v_1) \wedge \forall v_2(v_2 \sim v_0 \to (v_2 = v_0 \vee v_2 = v_1))).$$

Este imediat faptul că o mulţime finită poate fi înzestrată cu o asemenea relaţie dacă şi numai dacă are un număr par de elemente. Aşadar, mulţimea cerută este mulţimea numerelor naturale nenule pare. $\square$

(S6.3) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_r$ ce conţine doar două simboluri, anume două simboluri de operaţie de aritate 2, notate cu $\dot{+}$ şi $\dot{\times}$, şi $\mathcal{L}_r$-structura $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se dea exemplu de $\mathcal{L}_r$-formulă ψ astfel încât pentru orice $e : V \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R} \vDash \psi[e] \Leftrightarrow e(v_0) \leq e(v_1).$$

Demonstraţie: Luăm

$$\psi := \exists v_2 (v_1 \mathbin{\dot{=}} v_0 \dot{+} (v_2 \dot{\times} v_2)).$$

□

(S6.4) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de relaţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Q}, <) \vDash \varphi$, dar $(\mathbb{Z}, <) \nvDash \varphi$.

Demonstraţie: Luăm

$$\varphi := \forall v_0 \forall v_1 (v_0 < v_1 \rightarrow \exists v_2 (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)).$$

□

(S6.5) (Exerciţiu suplimentar) Considerăm limbajul $\mathcal{L}$ ce conţine un singur simbol, anume un simbol de funcţie de aritate 2. Să se găsească un enunţ φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \vDash \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \nvDash \varphi$ (în ultima sa apariţie, simbolul $+$ denotă operaţia de adunare pe componente pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

Demonstraţie:

Prima soluţie: se ia φ ca fiind

$$\forall v_0 \forall v_1 ((\neg \exists v_2 (v_0 = v_2 + v_2) \wedge \neg \exists v_2 (v_1 = v_2 + v_2)) \rightarrow \exists v_2 (v_0 + v_1 = v_2 + v_2)),$$

ce exprimă faptul că suma a două elemente "nepare" este pară – în $\mathbb{Z}$, avem într-adevăr regula "impar + impar = par", dar în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem contraexemplul $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.
A doua soluţie: se ia φ ca fiind

$$\exists v_2 \forall v_0 (\exists v_1 (v_0 = v_1 + v_1) \vee \exists v_1 (v_0 = v_1 + v_1 + v_2)),$$

ce este adevărată în $\mathbb{Z}$, unde orice element este ori de forma $2z$, ori de forma $2z + 1$, dar nu este adevărat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde relaţia de congruenţă indusă de elementele pare are patru clase, şi nu două. □