1. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$. Determinați punctele de extrem global ale lui f, atunci când variabilele sale sunt supuse restricției $x^2+y^2+z^2=3$.

Sol.:

Fie $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3$ și $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0\} = Fr(B((0,0,0), \sqrt{3}))$

$A = g^{-1}(\{0\})$

g continuă

$\{0\}$ închisă

Deci A închisă.

$A \subset B((0,0,0),2) \Rightarrow A$ mărginită $\Big| \Rightarrow A$ compactă

Dar f continuă pe $\mathbb{R}^3 \supset A$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow f|_A$ mărginită și își atinge marginile

$\mathbb{R}^3$ deschisă

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 2y \qquad (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 2z$$

Observăm că f, g sunt de clasă C^1.

Fie $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$
$= x+y+z + \lambda(x^2+y^2+z^2-3)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2\lambda x = 0 \\ 1+2\lambda y = 0 \\ 1+2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$x^2+y^2+z^2 = 3 \Leftrightarrow 3\cdot\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = y = z = \pm 1$

Avem $(x,y,z) \in \{(1,1,1); (-1,-1,-1)\}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} =$$
$= \text{rang}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = 1$, $(\forall)(x,y,z) \in A \ni \{(1,1,1);$
$(-1,-1,-1)\}$

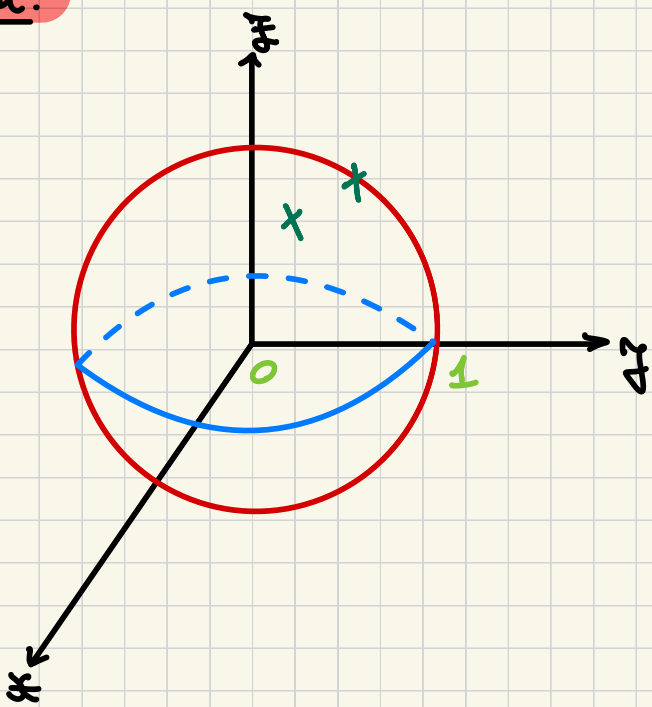
$$\left.\begin{array}{l} f(1,1,1) = 3 \\ f(-1,-1,-1) = -3 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} (1,1,1) \text{ punct de maxim global} \\ (-1,-1,-1) \text{ punct de minim global} \end{cases}$$

Ce lui f $\square$

2. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$. Determinați valorile extreme ale lui $f\big|_{\underbrace{B[(0,0,0),1]}_{\overline{B}((0,0,0),1)}}$, unde

$B[(0,0,0),1] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

Sol.:



$B[(0,0,0),1]$ este compactă (închisă și mărginită)
f continuă pe $\mathbb{R}^3 \supset B[(0,0,0),1]$ $\Big/ \Rightarrow$

$\Rightarrow f\big|_{B[(0,0,0),1]}$ mărginită și își atinge marginile

Căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f\big|_{B[(0,0,0),1]}$ situate în $B((0,0,0),1)$

$B((0,0,0),1)$ deschisă

Fie $f\big|_{B((0,0,0),1)} = h$

f continuă

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \qquad (\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 6z$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \text{ continue pe } B((0,0,0),1) \\ B((0,0,0),1) \text{ deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $B((0,0,0),1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

Singurul punct posibil de extrem global al lui $f|_{B[(0,0,0),1]}$ situat în $B((0,0,0),1)$ este $(0,0,0)$.

Căutăm posibilele puncte de extrem local ale lui $f|_{B[(0,0,0),1]}$ situate în $Fr(B[(0,0,0),1])$

$\mathbb{R}^3$ deschisă

Fie $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ și
$A = \text{Fr}(B[(0,0,0),1]) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y,z)=0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 6z \qquad (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 2z$$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.
Fie $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$
$= 2x^2 + y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 4x + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ 6z + 2\lambda z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x(2+\lambda)=0 \\ 2y(1+\lambda)=0 \\ 2z(3+\lambda)=0 \end{cases}$$

I. $\lambda=-2 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(-1,0,0),(1,0,0)\}$

II. $\lambda=-1 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,-1,0),(0,1,0)\}$

III. $\lambda=-3 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,0,-1),(0,0,1)\}$

Posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{B[(0,0,0),1]}$ situate în $\mathrm{Fr}(B[(0,0,0),1]$ sunt:

$(-1,0,0),(1,0,0),(0,-1,0),(0,1,0),(0,0,-1),$
$(0,0,1)$

$f(0,0,0)=0$

EXAMEN !!

$f(-1,0,0)=2=f(1,0,0)$

$f(0,-1,0)=1=f(0,1,0)$

$f(0,0,-1)=3=f(0,0,1)$

Valoarea minimă a lui $f|_{B[(0,0,1),1]}$ este 0 și valoarea maximă a lui $f|_{B[(0,0,0),1]}$ este 3. $\square$

3 Determinați $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}\,dx$.

Sol.:

Fie $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x\sin(nx)}{n^2+nx^2+x}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Fie $x\in[0,1]$.

$$0\le |f_n(x)| = \frac{|x\sin(nx)|}{n^2+nx^2+x}\le \frac{1}{n^2},\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$$

$n\to+\infty$ $n\to+\infty$ $n\to+\infty$

0

Deci $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x)|=0$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

Așadar, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{s} f$, unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$.

Convergența uniformă:

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}\frac{|x\sin(nx)|}{n^2+nx^2+x}\le\frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f$

f_n continuă pe $[0,1]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow f_n$ integrabilă R pe $[0,1]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Deci f este integrabilă R și $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx =$

$=\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ (Am aplicat Teorema de permutare a limitei cu integrala) $\square$

Propoziție: Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to [0, +\infty)$, f continuă a.î. $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Atunci $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$.

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a.î. $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ și $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $f(x) = 0$, $(\forall)\, x \in [a, b]$, unde f este o funcție continuă.

Sol.:

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b f(x)\,dx = 0 \\ \int_a^b x^n f(x)\,dx = 0, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right| \Rightarrow (\forall)\ P : [a, b] \to \mathbb{R},$$

P funcție polinomială, avem $\int_a^b P(x) f(x)\,dx = 0$

f continuă pe $[a, b]$ $\xRightarrow[\text{Bernstein}]{\text{Teorema}}$ $(\exists)\ (P_n)_n$ șir de funcții polinomiale, $P_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f$.

Arătăm că $P_n f \xrightarrow[n \to +\infty]{u} f^2$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă pe } [a, b] \\ [a, b] \text{ compactă} \end{array}\right| \Rightarrow (\exists)\ M > 0 \text{ a.î. } |f(x)| \le M, (\forall)\, x \in [a, b]$$

$$\sup_{x \in [a, b]} |P_n(x) f(x) - f^2(x)| = \sup_{x \in [a, b]} \Big(\underbrace{|f(x)|}_{\le M} \cdot |P_n(x) - f(x)| \Big) \le$$

$$\leq M \sup_{x\in[a,b]} |P_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} M\cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_n f \xrightarrow[n\to+\infty]{u} f^2$$

P_n, f continue pe $[a,b]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N} \Rightarrow P_n f$ continuă pe $[a,b]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N} \Rightarrow P_n f$ integrabilă R pe $[a,b]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

Conform Teoremei de permutare a limitei cu integrala, avem că f^2 este integrabilă R pe $[a,b]$ şi

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b P_n(x) f(x)\, dx}_{=0} = \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Deci $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\, dx = 0$

f continuă pe $[a,b] \Rightarrow f^2$ continuă pe $[a,b]$

În plus, avem $f^2(x) \geq 0$, $(\forall)\, x\in[a,b]$

Conform propoziţiei precedente, avem că $f^2(x)=0$, $(\forall)\, x\in[a,b]$

Aşadar, $f(x)=0$, $(\forall)\, x\in[a,b]$ $\square$

5. Determinaţi următoarele integrale improprii:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{d\to+\infty} \int_0^d \frac{1}{1+x^2}\, dx =$

$$=\lim_{d\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_0^d\right)=\lim_{d\to+\infty}(\operatorname{arctg}d-\operatorname{arctg}0)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

b) $$\int_{-\infty}^{0}e^{x}\,dx=\lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0}e^{x}\,dx=\lim_{c\to-\infty}\left(e^{x}\Big|_c^0\right)=$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\left(e^{0}-e^{c}\right)=1-0=1$$

c) $$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{\substack{d\to1\\d<1}}\int_0^d\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\lim_{\substack{d\to1\\d<1}}\left(\arcsin x\Big|_0^d\right)=\lim_{\substack{d\to1\\d<1}}(\arcsin d-\arcsin 0)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

d) $$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x\ln^2x}\,dx=\int_{-\infty}^{\ln\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2}\,dt=$$

S.V. $\ln x=t$

$\frac{1}{x}\,dx=dt$

$x\to0\Rightarrow t\to-\infty$

$x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\ln\frac{1}{2}$

$$=\lim_{c\to-\infty}\int_c^{\ln\frac{1}{2}}t^{-2}\,dt=\lim_{c\to-\infty}\left(-\frac{1}{t}\Big|_c^{\ln\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\left(-\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{\ln2}\quad\square$$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} \frac{x}{1+x^4}\,dx =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\int_{c}^{0} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}\,dx\right) = \lim_{c\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 \Big|_{c}^{0}\right) =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} 0^2 - \operatorname{arctg} c^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left(0-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{d\to\infty} \int_{0}^{d} \frac{x}{1+x^4}\,dx =$$

$$= \lim_{d\to\infty} \left(\frac{1}{2}\int_{0}^{d} \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}\,dx\right) = \lim_{d\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 \Big|_{0}^{d}\right) =$$

$$= \lim_{d\to\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} d^2 - \operatorname{arctg} 0^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4}$$

Deci $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx =$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$$

f) $$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^5}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_{c}^{1} x^{-5}\,dx = \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(\frac{x^{-4}}{-4}\Big|_{c}^{1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4c^4}\right) = -\frac{1}{4} + \infty = +\infty \quad \square$$

La examen nu vom avea integrale triple.