Considerăm $n \in \mathbb{N}^*$ şi spaţiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$, unde $d_2 \overset{\text{not.}}{=} d$

$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

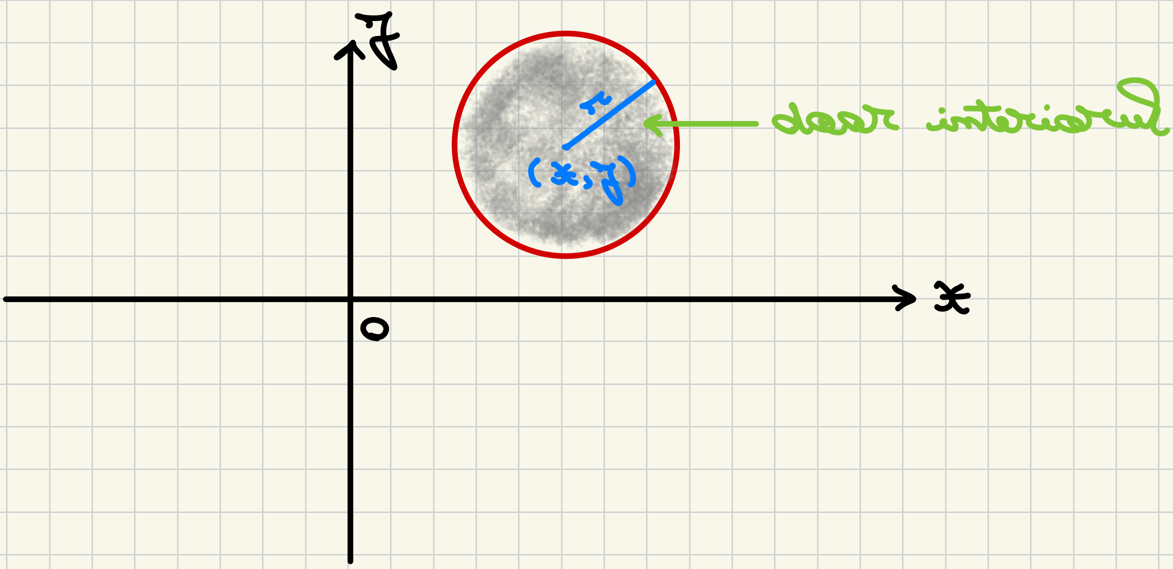
Fie $n = 2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ şi $r > 0$.

1) $B((x,y), r) = \{ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(z,t)) < r \} =$

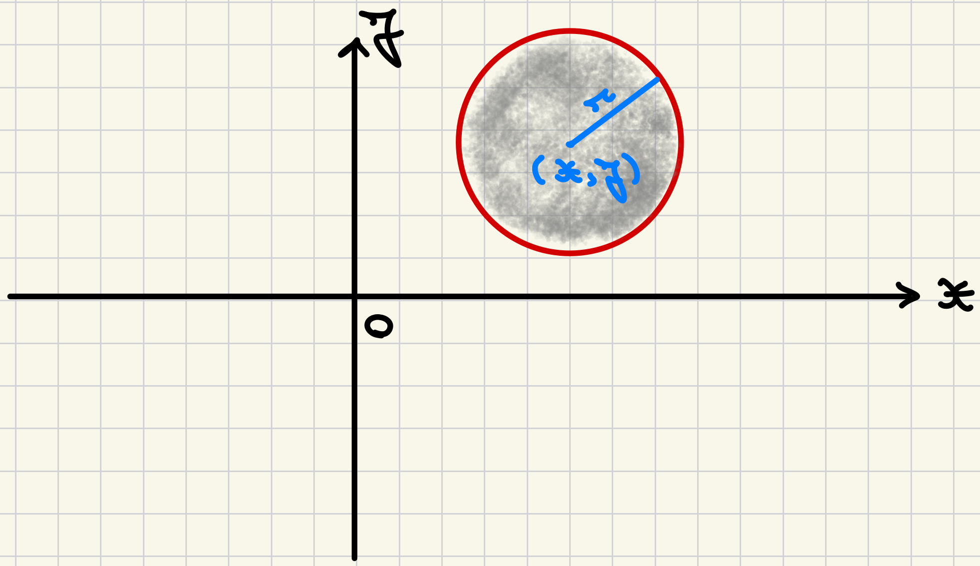
$= \{ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} < r \} =$

$= \{ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-z)^2 + (y-t)^2 < r^2 \} =$

$= \{ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2 + (t-y)^2 < r^2 \} =$ discul deschis de centru (x,y) şi rază r

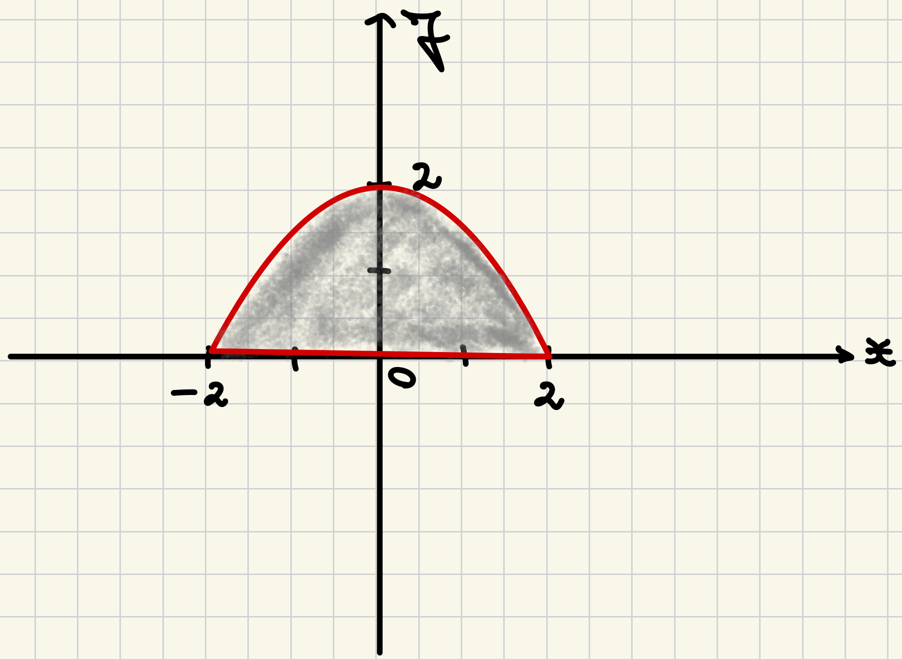


2) $B[(x,y), r] = \overline{B}((x,y), r) = \{ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(z,t)) \le r \} = \ldots = \{ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (z-x)^2 + (t-y)^2 \le r^2 \}$ = discul închis de centru (x,y) şi rază r



1 Faceți analiza topologică a mulțimii $A \subset \mathbb{R}^2$, unde $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4,\ y \geq 0 \}$.

Sol.:



1) $\mathring{A} = ?$

$(x,y) \in \mathring{A} \Leftrightarrow (\exists)\ r>0$ a.î. $B((x,y),r) \subset A$

$\mathring{A} \subset A$

$$\left.\begin{array}{l} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4,\ y>0 \} \subset A \\ \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4,\ y>0 \} \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

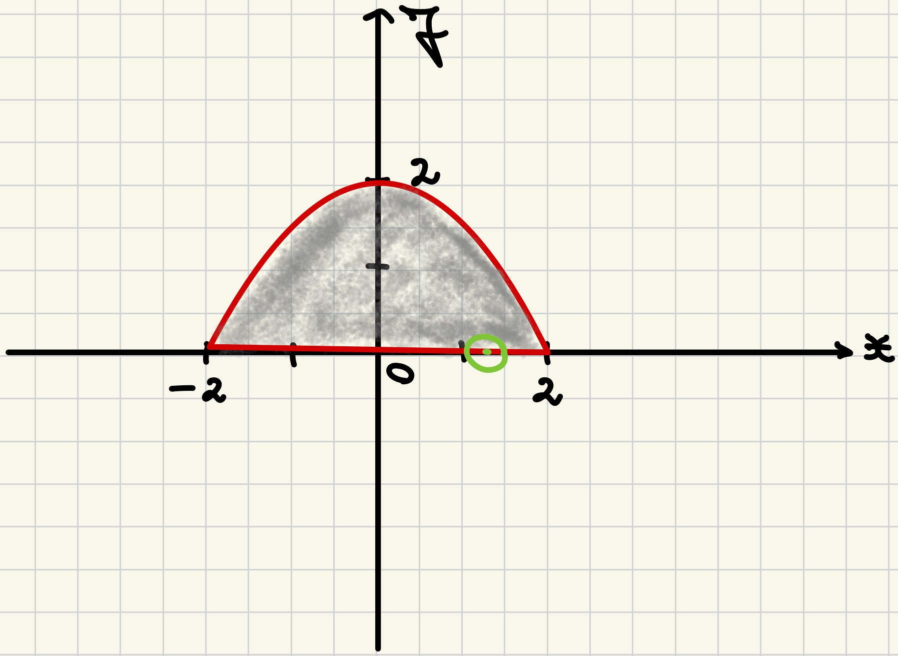
$\Rightarrow \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4,\ y>0 \} \subset \mathring{A}$

Evident, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y>0\} \subset \mathring{A} \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y\geq 0\}$

Studiem dacă $\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y=0\}}_{=\,(-2,2)\times\{0\}} \subset \mathring{A}$

Fie $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y=0\}$

$(x,y)\in\mathring{A} \iff (\exists)\, r>0$ a.î. $B((x,y),r)\subset A$



Deci $(x,y)\notin\mathring{A}$

Evident, $\mathring{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4, y>0\}$

2) $\overline{A} = ?$

$(x,y) \in \overline{A} \iff (\forall)\ r > 0$, avem $B((x,y), r) \cap A \neq \emptyset$

$A \subset \overline{A}$

$\left.\begin{array}{l} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\} \supset A \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\} \text{ închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow$

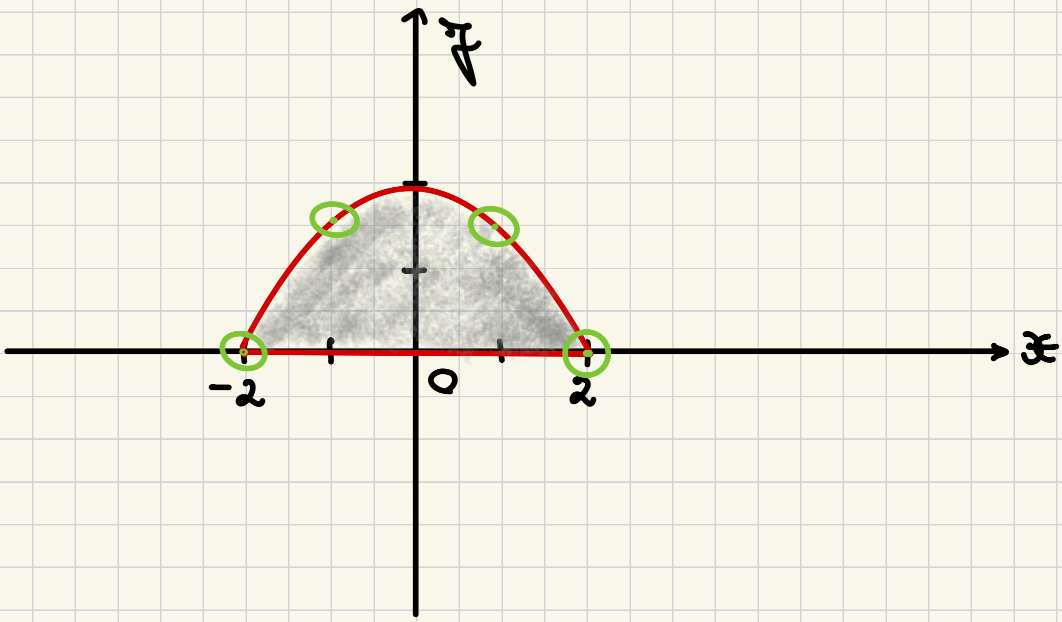
$\Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\} \supset \overline{A}$

Deci, avem $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4, y \geq 0\} \subset \overline{A} \subset$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

Studiem dacă $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 4, y \geq 0\} \subset \overline{A}$

Fie $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 4, y \geq 0\}$

$(x,y) \in \overline{A} \iff (\forall)\ r > 0$, avem $B((x,y), r) \cap A \neq \emptyset$



Deci $(x,y) \in \overline{A}$.

Așadar, $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

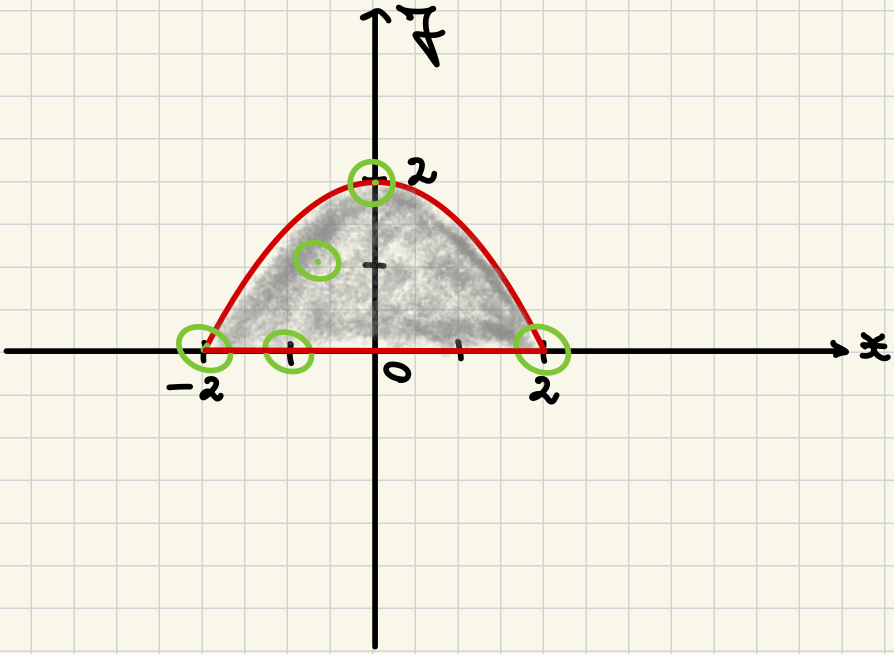
3) $A' = ?$

$(x,y) \in A' \iff (\forall)\ r>0$, avem $B((x,y),r) \cap (A \setminus \{(x,y)\}) \neq \emptyset$

$A' \subset \bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$

Fie $(x,y) \in \bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$

$(x,y) \in A' \iff (\forall)\ r>0$, avem $B((x,y),r) \cap (A \setminus \{(x,y)\}) \neq \emptyset$



Deci $(x,y) \in A'$

Așadar, $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$

4) $Fr(A) = \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\} \setminus$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4,\ y > 0\} =$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 4,\ y \ge 0\} \cup$
$\cup \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4,\ y = 0\}}_{(-2,2)\times\{0\}}$

5) $Izo(A) = Iz\,A = \bar{A} \setminus A' = \emptyset$ $\square$

1. Faceți analiza topologică a mulțimii $A \subset \mathbb{R}^2$, unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4, y \geq 0\} \cup \{(3,4)\}$.

2. Studiați continuitatea funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol.:

f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare)

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$|x| \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$$

≤ 1 (Explicație:

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| \Rightarrow \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1)$$

$$\leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f \text{ continuă în } (0,0) \ \square$$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Sol.:

f continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare)

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Alegem $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

Avem $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)\overset{d_2}{=}(0,0)$ și $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n)=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\cancel{n^2}}}{\frac{2}{\cancel{n^2}}}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$

Deci f nu este continuă în $(0,0)$ $\square$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$.

Studiați continuitatea și uniform continuitatea lui f.

Sol.:

f continuă pe $\mathbb{R}^*$ (operații cu funcții elementare)

Studiem continuitatea lui f în 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ („0 · mărginit = 0")

Deci f este continuă în 0.

$f'(x)=\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'=\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cancel{x}\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\right)=$

$=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}^*$

$$|f'(x)| = \left|\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right| \leq \underbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} + \left|-\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\right| \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{|x|}\underbrace{\left|\cos\frac{1}{x}\right|}_{\leq 1} \leq 1 + \frac{1}{|x|} \leq 1+1 = 2, \ (\forall)\ x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$$

Deci $f|_{(-\infty,-1]}$ uniform continuă și $f|_{[1,+\infty)}$ uniform continuă

$$\left.\begin{array}{l} f|_{[-1,1]} \text{ continuă} \\ [-1,1] \text{ mulțime compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f|_{[-1,1]} \text{ uniform continuă}$$

$$\left.\begin{array}{l} f|_{(-\infty,-1]} \text{ uniform continuă} \\ f|_{[-1,1]} \text{ uniform continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow f|_{(-\infty,1]} \text{ uniform continuă}$$

$$\left.\begin{array}{l} f|_{(-\infty,1]} \text{ uniform continuă} \\ f|_{[1,+\infty)} \text{ uniform continuă} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ uniform continuă } \square$$

4. Fie $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$ și $B = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$ și $f : A \cup B \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 2, & x \in B \end{cases}$$

Arătați că $f|_A$ este uniform continuă (i.e. f uniform continuă pe A), $f|_B$ este uniform continuă (i.e. f uniform continuă pe B) și f nu este uniform continuă.

Sol.:

Fie $(x_k)_k \subset A$ și $(y_k)_k \subset A$ a.î. $\lim\limits_{k\to+\infty}(x_k - y_k) = 0$

$$\lim_{k\to+\infty}(f(x_k) - f(y_k)) = \lim_{k\to+\infty}(1-1) = 0$$

Deci $f|_A$ uniform continuă

Analog $f|_B$ uniform continuă

Alegem $(x_k)_k \subset A \cup B$, $x_k = k$, $(\forall)\, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ și $(y_k)_k \subset A \cup B$, $y_k = k + \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Avem $\lim\limits_{k\to+\infty}(x_k - y_k) = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(k - \left(k + \frac{1}{k}\right)\right) =$

$= \lim\limits_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{k}\right) = 0$ și $\lim\limits_{k\to+\infty}(f(x_k) - f(y_k)) =$

$= \lim\limits_{k\to+\infty}(1-2) = -1 \neq 0$

Deci f nu este uniform continuă (pe $A \cup B$) $\square$