LABORATOR #9

EX#1 (Integrare Monte Carlo)

Avem o funcție $g : \Omega \to \mathbb{R}$, cu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dorim să estimăm $\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x$ cu ajutorul simulărilor aleatoare. Ne bazăm pe observația următoare: dacă variabila aleatoare X cu este distribuită cu densitatea f, astfel încât $f > 0$ pe Ω și $f \equiv 0$ pe $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, atunci:

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_\Omega h(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Pe de altă parte, Legea Numerelor Mari ne spune că, dacă $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sunt independente și distribuite cu densitate f, atunci, pentru o funcție $h : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[h(X)] \simeq \frac{h(X_1) + h(x_2) + \cdots + h(X_N)}{N}.$$

Prin urmare, considerăm $h \coloneqq \frac{g}{f}$ și obținem:

$$\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{g(X_i)}{f(X_i)}. \tag{MC}$$

Ca estimare de eroare avem, pentru orice $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{g(X_i)}{f(X_i)}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{g(X)}{f(X)}\right)}{N\varepsilon^2} = \frac{\int_\Omega \frac{|g(x)|^2}{f(x)}\mathrm{d}x - \left(\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x\right)^2}{N\varepsilon^2}.$$

#1 Pentru o funcție $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a cărei integrală poate fi calculată explicit aproximați integrala $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ prin simularea a N valori $X_1, X_2, \ldots, X_N$ distribuite uniform în intervalul $[a,b]$ și calcularea sumei:

$$\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i).$$

Afișați eroarea dintre estimarea numerică și valoarea teoretică a integralei în funcție de numărul de simulări $N \in \{0, 1, \ldots, 10000\}$ într-un sistem de coordonate xOy.

#2 Fie $R = 4$, $\rho(\theta) = 3 + \cos(4\theta)$ și domeniul din plan (vezi Figura 1 de mai jos):

$$\Omega \coloneqq \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) : \theta \in [0, 2\pi],\, r \in [0, \rho(\theta)]\}.$$

Pentru $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 3y^3$ calculați $\int_\Omega g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ prin metoda Monte Carlo.

#3 Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Aproximați integrala $\int_\mathbb{R} g(x)\mathrm{d}x$ prin metoda Monte Carlo, folosind simulări distribuite cu *importanța* dată de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Mai precis, simulați $X_1, X_2, \ldots, X_N$ distribuite normal $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ și folosiți formula (MC) cu:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Calculați teoretic valoarea integralei și afișați graficul erorii asemănător celui de la subpunctul #1. Testați pentru $N = 100000$ și $\sigma \in \{1, 5, 9, 20\}$.

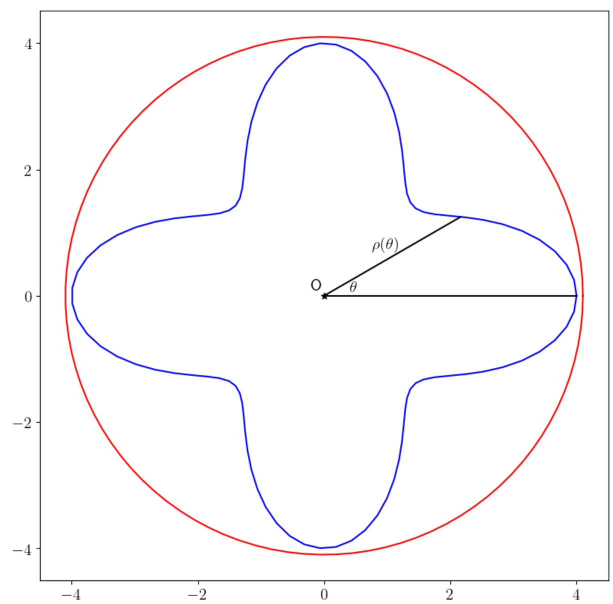

Figura 1: Domeniul Ω de la subpunctul #2