1. a) (0.75p) Dați exemplu de un graf conex cu minim 4 cicluri pentru care arborele BFs din 1 și arborele DFs din 1 au aceeași înălțime. Ilustrați pas cu pas cum funcționează cele două parcurgeri pe acest graf.

   b) (0,75p) În Figura 1 este ilustrat arborele DFS al unui graf $G = (V; E)$, unde $V = \{1, \ldots, 13\}$ din care lipsesc nodurile 12 și 13. Adăugați aceste două noduri la arbore unde doriți. Care este numărul maxim de muchii pe care îl poate avea graful inițial, pentru a se obține acest arbore cu 13 noduri? (trebuie precizată și ordinea în care au fost procesați vecinii unui vârf) Justificați.

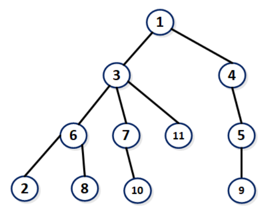

Figure 1

2. (1p) Arătaţi că şirul $s_0(n) = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n, n, n, n, n+2, \ldots, 2n+1\}$ este grafic (este secvența gradelor unui graf neorientat) pentru orice $n \geq 1$. Construiţi o familie de grafuri cu secvenţele gradelor $(s_0(n))_{n\geq 1}$ (o metodă de construcție, poate fi o descriere inductivă).
3. (0,75p) Fie G un graf conex neorientat și P și Q două lanțuri elementare de lungime maximă. Arătați că P și Q au cel puțin un nod comun.
4. a)(0,75p) Dați exemplu de un graf conex ponderat cu minim 9 noduri care are exact 3 arbori parțiali de cost minim și indicați acești arbori.

   b) (0,75p) Ilustrați algoritmii lui Prim și Kruskal pentru graful de la a) (varianta generică, fără a detalia structurile de date folosite)

   c) (0,75p) Există un graf neorientat conex G cu cel putin 2 noduri și cu ponderi pozitive ale muchiilor astfel încât G să aibă un arbore de distanțe (de drumuri minime) în raport cu un vârf s și un arbore partial de cost minim T care nu au nicio muchie în comun? Justificați.
5. (2p) Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat ponderat. Pentru o submulțime $S \subset V$ numim tăietură bipartița $(S, V - S)$ și spunem că o muchie traversează această tăietură dacă are o extremitate în S și cealaltă în $V - S$. O muchie care traversează tăietura $(S, V - S)$ se numește ușoară/light pentru această tăietură dacă ponderea ei este minimă în raport cu celelalte muchii care traversează tăietura. Să se arate că dacă orice taietură $(S, V - S)$ din G are o singură muchie ușoară/light, atunci G admite un unic arbore partial de cost minim. Arătati ca implicația inversă nu este neapărat adevărata oferind un contraexemplu.
6. (2,5p) Descrieți o soluție pentru problema `https://www.infoarena.ro/problema/apm2` Discutați complexitatea pentru diferite variante de implementare și scrieți un pseudocod pentru varianta care are cea mai bună complexitate. Justificați corectitudinea algoritmului propus. Implementați soluția descrisă în pseudocod și furnizați linkul la soluție pe infoarena.

Se acordă un punct din oficiu (punctajul total este 11, nota la temă va fi minim(10,punctaj))