Arhitectura Sistemelor de Calcul Octombrie, 2021

Seminar 0x01

Cristian Rusu

1 Scopul seminarului

În acest seminar vom rezolva niște probleme care implică:

- conceptul de informație și entropia lui Shannon;
- codarea cu dimensiune variabilă a datelor;
- detectarea și corectarea erorilor.

2 Exerciții

1. Avem un pachet de cărți de joc (52 de cărți). Luăm cărțile pentru prima dată afară din pachet. Câtă informație avem în acest moment despre cărți? Amestecăm cărțile aleator (apropo, cum facem asta, algoritmic, eficient?). Câtă informație avem acum în pachetul de cărți? (folosiți și aproximarea lui Stirling pentru calcularea rezultatului)
2. Se dă o urnă în care avem 5 bile roșii și 3 bile albastre. Ni se spune că cineva extrage o bilă din urnă și aceasta este albastră. Cerințe:
   (a) câtă informație primim în urma acestei observații?
   (b) care a fost entropia urnei înainte de extragere? care este entropia urnei după extragere?
   (c) continuați să calculați entropia presupunând că extragem pas cu pas toate bilele albastre;
   (d) similar cu cerința anterioră pentru bilele roșii (începând cu urna inițială presupunem că extrageți rând pe rând fiecare bilă roșie și calculați entropia la fiecare pas);
3. Se dau 12 bile. 11 dintre ele au aceeași greutate, iar una este mai ușoară sau mai grea decât toate celelalte. Aveți la dispoziție o balanță. Folosind un număr minim de cântăriri, găsiți bila diferită.
4. Aveți în Curs 0x01 un slide despre A. Turing. Calculați entropia textului (nivel de caracter/simbol, fără grupări) din slide: prima dată cu și apoi fără diacritice. Comparați cele două valori calculate.
5. Se dă un număr natural x pe N biți. Câtă informație am câștigat dacă:
   (a) ni se spune despre x că are exact două valori "1" în reprezentarea sa binară;
   (b) ni se spune despre x că are exact $N/2$ valori "1" în reprezentarea sa binară;
   (c) ni se spune despre x că are o secvență continuă de $N/4$ biți de "1" în reprezentarea sa binară (restul biților sunt "0");
   (d) ni se spune despre x că are MSB setat la "1";
   (e) ni se spune despre x că este impar;
   (f) ni se spune despre x că este o putere a lui 2;
   (g) ni se spune despre x că are primii $N/2$ biți din reprezentarea sa binară setați la "0";
   (h) ni se spune despre x că este un număr prim (aici doar o estimare aproximativă este posibilă);
   (i) ni se spune despre x că are în reprezentarea sa binară un număr par de biți setați la "1";
   (j) ni se spune că $x = 42$.

6. Se dă o variabilă aleatoare X care este distribuită conform următorului tabel:

evenimentul/simbolul x	A	B	C	D	E
Probabilitatea$(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Cerințe:

(a) verificați dacă probabilitățile date sunt corecte (distribuția este consistentă);

(b) calculați entropia $H(X)$;

(c) construiți codul Huffman pentru X. Verificați eficiența acestui cod, comparați cu entropia;

(d) codați mesajul ABBACED folosind codul Huffman găsit;

(e) asociați câte două evenimente/simboluri (vom numi această variabilă X^2). Cerințe:

i. câte evenimente/simboluri noi există acum? (care e dimensiunea variabilei X^2?);

ii. calculați $H(X^2)$. Care este relația cu $H(X)$?

iii. construiți codul Huffman pentru X^2. Verificați eficiența acestui cod, comparați cu $H(X)$.

7. Considerăm următorul mesaj bloc:

D_{00}	D_{01}	D_{02}	$P_{0\ell}$
D_{10}	D_{11}	D_{12}	$P_{1\ell}$
D_{20}	D_{21}	D_{22}	$P_{2\ell}$
P_{c0}	P_{c1}	P_{c2}	$P_{c\ell}$

Elementele D_{ij} sunt date (deci avem 9 biți) iar elementele P_{ij} sunt biți de paritate (deci avem 7 biți redundanți): pe fiecare linie, pe fiecare coloană și pe mesajul total. Biții de paritate sunt "1" dacă avem un număr par de "1" în linie/coloană/mesaj. Cerințe:

(a) să presupunem că bitul D_{01} se schimbă. Câți biți de paritate se schimbă?

(b) care este distanța Hamming minimă a codului de mai sus?

(c) câte erori putem detecta? Câte erori putem corecta?

(d) sunt următoarele mesaje valide sau corupte (dacă corupte, în ce fel)?

1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

1	0	1	1
1	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1

0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0

0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	1	1	1

1	0	1	1
0	0	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

8. Sistemul de codare ISBN-10 pentru cărți folosește 9 cifre plus o cifră de verificare pentru a identifica unic fiecare carte. Rolul cifrei de verificare este dublu: 1) detectează dacă o cifră din cele 10 este scrisă greșit și 2) detectează dacă două cifre consecutive au fost interschimbate. Aceste două erori sunt cele mai comune când codăm astfel de informații pentru cărți. Codare este următoarea:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, p, \tag{1}$$

unde $x_1, \ldots, x_9 \in \{0, \ldots, 9\}$ sunt dați iar p (acesta ar fi x_{10}) este calculat astfel încât:

$$\sum_{i=1}^{9} (11 - i)x_i + p = 0 \bmod 11. \tag{2}$$

Cerințe:

(a) calculați cifra de verificare p pentru codul ISBN-10: 0-306-40615p;

(b) arătați că orice cod ISBN poate detecta orice eroare de o cifră;

(c) arătați că orice cod ISBN poate detecta orice interschimbare a două cifre consecutive din cod;

(d) care este distanța minimă pentru acest cod?

(e) ce se întâmplă dacă schimbăm regula pentru cifra de verificare astfel încât $\sum_{i=1}^{9} x_i + p = 0 \bmod 11$? Putem detecta/corecta erori la fel de bine?

(f) verificați voi codul ISBN-13[1].

9. Considerăm utilizarea literelor în limba engleză. Conform Wikipedia[2] cele 26 de litere ("a" la "z") apar cu frecvențele: 8.20%, 1.50%, 2.80%, 4.30%, 13%, 2.20%, 2%, 6.10%, 7%, 0.15%, 0.77%, 4%, 2.40%, 6.70%, 7.50%, 1.90%, 0.10%, 6%, 6.30%, 9.10%, 2.80%, 0.98%, 2.40%, 0.15%, 2% și 0.07%.

   Cerințe:

   (a) câți biți am folosi pentru a coda alfabetul dat folosind șiruri binare cu dimensiune fixă?

   (b) calculați entropia acestui alfabet;

   (c) care ar fi entropia dacă toate literele ar avea aceeași frecvență? Care este relația cu entropia calculată pe alfabetul dat?

   (d) aveți posibilitatea de a înlătura din alfabetul de mai sus o literă. Eliminați litera astfel încât să minimizați/maximizați entropia noului alfabet (puteți să scrieți un program care să verifice, dar trebuie să înțelegeți cum actualizați toate probabilitățile atunci când eliminați o literă);

   (e) în Anexa 1 puteți verifica codul Morse. Considerăm că un punct ocupă un bit iar o linie ocupă doi biți de spațiu în memorie. Cerințe:

   - ce legătură observați între probabilitățile literelor și lungimea lor în cod Morse?
   - decodați mesajul: .- ... -.-. . – .. ... - —
   - mesajele codate în codul Morse se pot decoda unic? Puteți să decodați mesajul de mai sus dacă nu aveți spațiile după fiecare literă?
   - calculați lungimea medie pentru codarea alfabetului de mai sus în codul Morse, comparați cu entropia calculată anterior.

10. Avem un alfabet cu două simboluri: simbolul "A" este codat pe un singur bit și are probabilitatea de apariție p și simbolul "B" este codat pe doi biți și are probabilitatea de apariție $1-p$ (bineînțeles).

    Cerințe:

    (a) calculați lungimea medie a mesajelor cu alfabetul de mai sus;

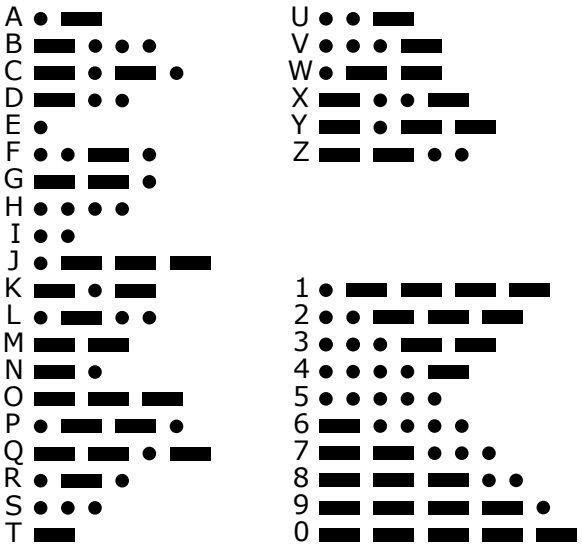
    (b) definim rata entropiei ca fiind entropia supra lungimea medie a mesajelor. Găsiți p pentru care rata entropiei este minimizată/maximizată.

11. Considerăm că avem un alfabet cu N simboluri. Am discutat la curs despre faptul că entropia este maximizată dacă avem "incertitudine maximă" deci avem un alfabet în care simbolurile au aceeași probabilitate de apariție (adică $p_i = 1/N$ pentru $i = 1, \ldots, N$ – aceasta se numește distribuția uniformă). Demonstrați matematic această afirmație.

12. Avem un alfabet cu N simboluri x_i, fiecare cu probabilitatea de apariție p_i. Considerăm că simbolurile sunt sortate în ordinea descrescătoare a probabilităților de apariție: adică $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_N$. Codarea acestor simboluri se realizează în felul următor: simbolul x_i este codat cu șirul binar $00\cdots001$ (de $i-1$ ori bitul 0, apoi bitul 1). Sunt relevante valorile p_i în acest caz? Care este lungimea medie a unui mesaj codat în acest fel? Comparați această valoare cu entropia. Care este avantajul principal al acestei codări?

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Book_Number`
[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Letter_frequency`

Anexa 1



Codul Morse (sursa: wikipedia).