

Model de examen la Calcul Differential si Integral

1. a) Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+3)!}{(2n+1)! x^n}$ în funcție de valorile parametrului $x \in (0, \infty)$.

Soluție. Fie $x_n = \frac{n! (n+3)!}{(2n+1)! x^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)! (n+4)!}{(2n+3)! x^{n+1}}}{\frac{n! (n+3)!}{(2n+1)! x^n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+4)}{(2n+2)(2n+3)x} = \frac{1}{4x}.$$

Conform Criteriului raportului pentru serii cu termeni strict pozitivi avem:

1) Dacă $\frac{1}{4x} < 1$ (i.e. $x \in (\frac{1}{4}, +\infty)$), seria este

convergentă.

2) Dacă $\frac{1}{4x} > 1$ (i.e. $x \in (0, \frac{1}{4})$), seria este diver-

gentă.

3) Dacă $\frac{1}{4x} = 1$ (i.e. $x = \frac{1}{4}$), Criteriul raportului nu decide.

Dacă $x = \frac{1}{4}$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+3)!}{(2n+1)! \left(\frac{1}{4}\right)^n} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+3)! \cdot 4^n}{(2n+1)!}$$

Fie $x_n = \frac{n! (n+3)! \cdot 4^n}{(2n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{4(n+1)(n+4)} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 10n + 6}{4(n^2 + 5n + 4)} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\cancel{4n^2} + 10n + 6 - \cancel{4n^2} - 20n - 16}{4n^2 + 20n + 16} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10n^2 - 10n}{4n^2 + 20n + 16} = -\frac{10^2}{4} = -\frac{5}{2} < 1.$$

Conform criteriului Raabe-Duhamel, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+3)! \cdot 4^n}{(2n+1)!}$ este divergentă.

Am obținut: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (n+3)!}{(2n+1)!} x^n$ $\begin{cases} \rightarrow \text{convergentă, dacă } x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right) \\ \rightarrow \text{divergentă, dacă } x \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \end{cases} \square$

b) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și neconstantă cu proprietatea că $f(x+1) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că funcția $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, este continuă, dar nu este uniform continuă.

Soluție. Fie $a \in (0, 1)$ și $(x_n)_n \subset (0, 1)$ a.î.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \text{ Atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{f \text{ continuă}}{=} f\left(\frac{1}{a}\right) = g(a) \Rightarrow$$

$\Rightarrow g$ continuă în a .

Ca $a \in (0, 1)$ a fost ales arbitrar rezultă că g este continuă pe $(0, 1)$.

f neconstantă $\Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) \neq f(y)$.

$$\text{Fie } x_n = \frac{1}{x+n} \quad \forall n \geq n_0 \text{ și } y_n = \frac{1}{y+n} \quad \forall n \geq n_0,$$

unde $n_0 \in \mathbb{N}$ este suficient de mare ($n_0 \geq$

$$\geq \max\{|[x]|+2, |[y]|+2\}).$$

$$\begin{aligned} g(x_n) &= f\left(\frac{1}{x_n}\right) = f(x+n) = f(\underbrace{x+n-1}_{+1}) = \\ &= f(x+n-1) = f(\underbrace{x+n-2}_{+1}) = f(x+n-2) = \dots = \\ &= f(x) \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

$$g(y_n) = f(y) \quad \forall n \geq n_0.$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) &= 0 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x_n) - g(y_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - f(y)) = f(x) - f(y) \neq 0. \end{aligned}$$

Deci g nu este uniform continuă. \square

2. Arătați că ecuația $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 9 = 0$ definește într-o vecinătate a punctului $(1, 1, 1)$ funcția implicită $z = z(x, y)$ și determinați $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$, $dz(1, 1)$.

Soluție. Fie $D = \mathbb{R}^3$, $F: D \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 9$.
 $D = \mathbb{R}^3$ deschisă, $(1, 1, 1) \in D$.

$$1) F(1, 1, 1) = 5 + 5 + 5 - 2 - 2 - 2 - 9 = 0.$$

$$2) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 10x - 2y - 2z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 10y - 2x - 2z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 10z - 2x - 2y \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \text{ continue pe } \mathbb{R}^3 \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \Rightarrow F \text{ de clasă } \\ C^1 \text{ pe } \mathbb{R}^3. \end{array}$$

\mathbb{R}^3 deschisă

$$3) \frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = 10 - 2 - 2 = 6 \neq 0.$$

Conform T.F.i. $\exists U$ o vecinătate deschisă a lui $(1, 1)$, $\exists V$ o vecinătate deschisă a lui 1 și $\exists ! z: U \rightarrow V$ (z funcția implicită) a.î.:

$$a) z(1, 1) = 1.$$

$$b) F(x, y, z(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

c) z este de clasă C^1 și

-6-

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} \quad \forall (x, y) \in U,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} \quad \forall (x, y) \in U.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, z(1, 1))}{\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, z(1, 1))} =$$

$$= - \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2z(1, 1)}{10 \cdot z(1, 1) - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1} \stackrel{\substack{\uparrow \\ z(1, 1) = 1}}{=} - \frac{10 - 2 - 2}{10 - 2 - 2} = -1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, z(1, 1))}{\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, z(1, 1))} =$$

$$= - \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2z(1, 1)}{10 \cdot z(1, 1) - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1} \stackrel{\substack{\uparrow \\ z(1, 1) = 1}}{=} - \frac{10 - 2 - 2}{10 - 2 - 2} = -1.$$

$$dz(1, 1) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad dz(1, 1)(u, v) = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)u + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)v = -u - v. \quad \square$$

-7-

3. a) Calculați $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx &= \int_0^{\infty} (\arctg x)' \arctg x dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (\arctg x)' \arctg x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\arctg^2 x}{2} \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\arctg^2 b - \arctg^2 0) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}. \quad \square \end{aligned}$$

b) Folosind eventual funcția Γ determinați $\int_0^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx$.

Soluție. $\int_0^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx =$

\uparrow
S.V. $x^2 = t \Leftrightarrow x = \sqrt{t}$

$2x dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$x=0 \Rightarrow t=0$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty$

$$= \int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^6 e^{-t} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{3-\frac{1}{2}} e^{-t} dt =$$

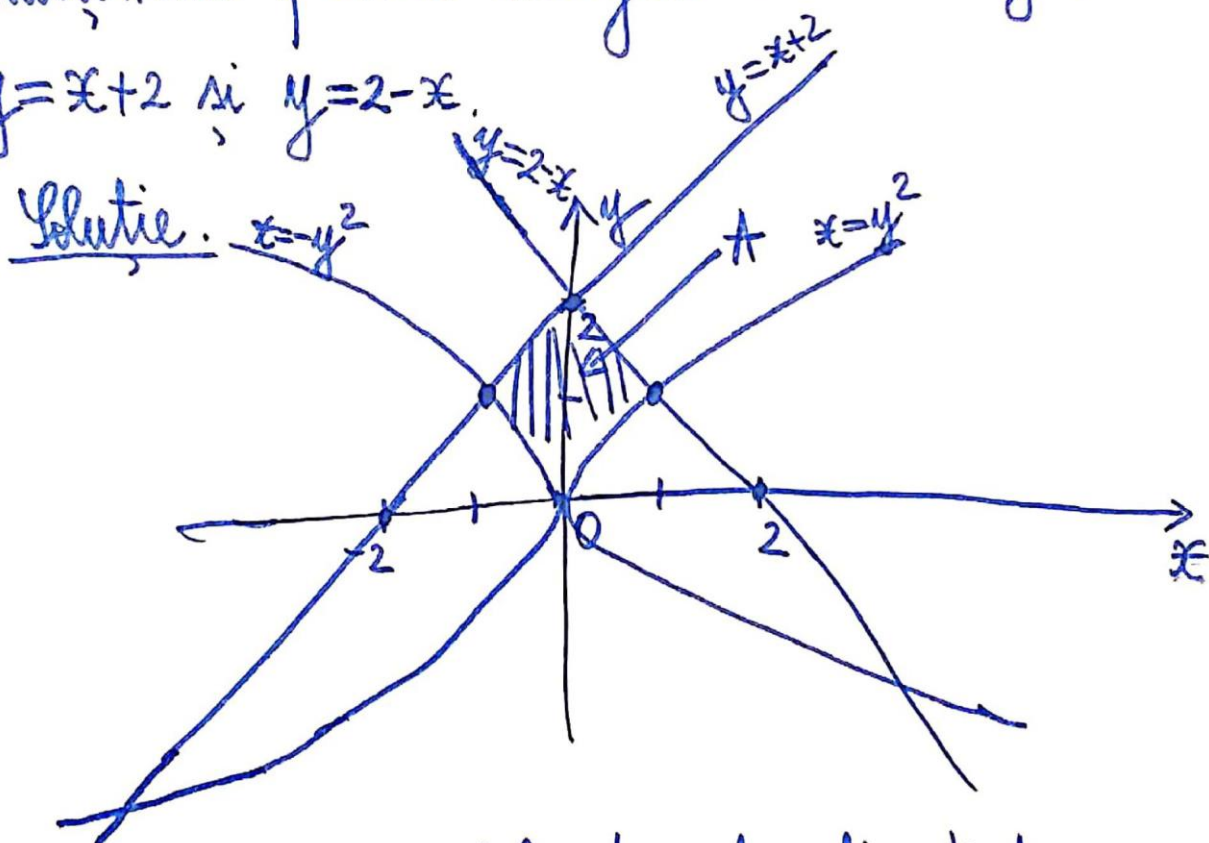
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{5}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{7}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{15}{8} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} \sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{16} \cdot \square$$

4. Calculați $\iint_A (xy + 2y) dx dy$, unde A este mulțimea plană mărginită de $x = y^2$, $x = -y^2$, $y = x + 2$ și $y = 2 - x$.

Soluție.



Determinăm punctele de intersecție dintre parabola $x = -y^2$ și dreapta $y = x + 2$ și punctele de intersecție dintre parabola $x = y^2$ și dreapta $y = 2 - x$.

-9-

$$\begin{cases} x = -y^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ y = -y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ y^2 + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Rezolvăm ecuația $y^2 + y - 2 = 0$

$$\Delta = 1 + 8 = 9.$$

$$\sqrt{\Delta} = 3.$$

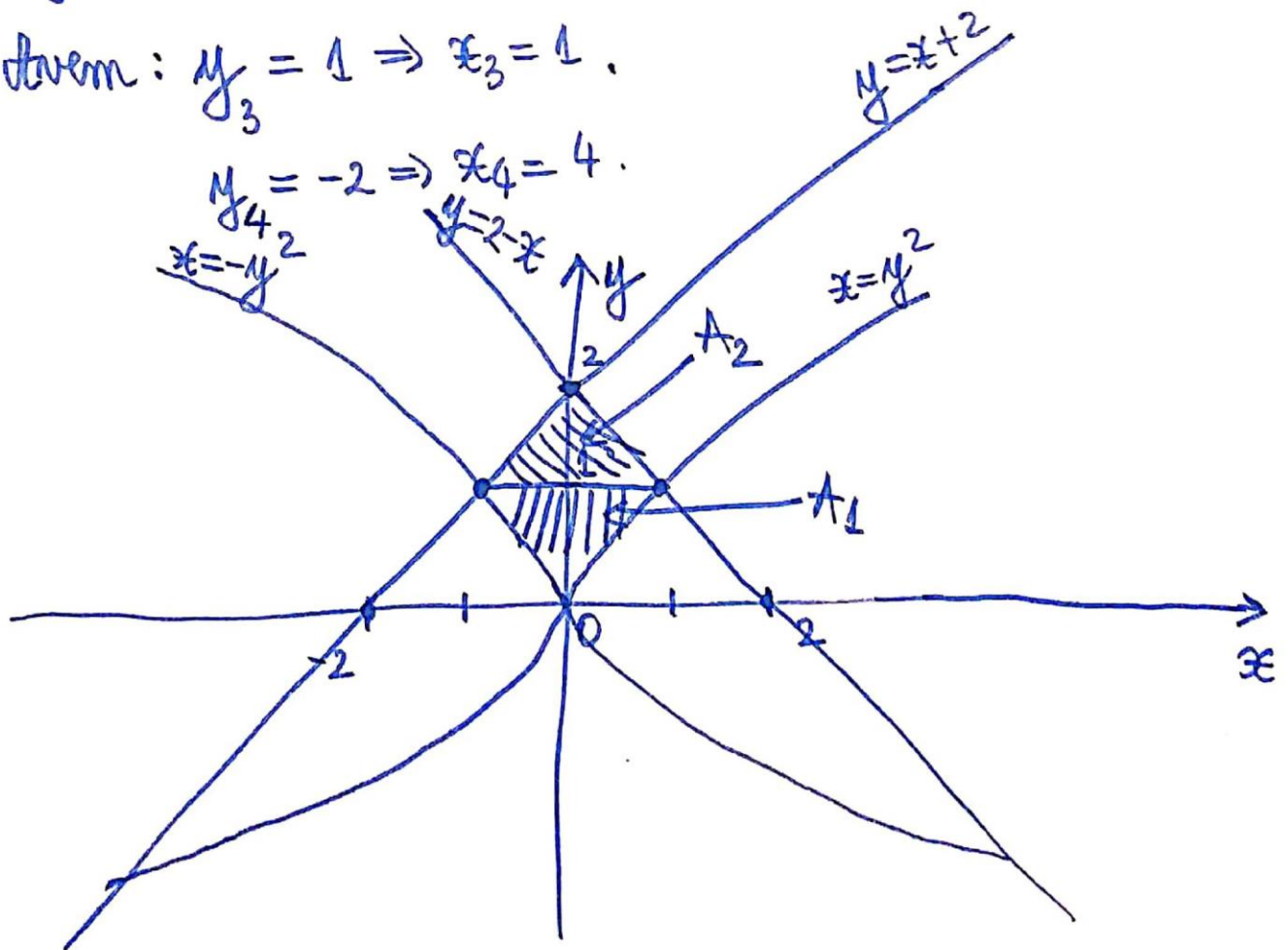
$$y_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = -1.$$

$$y_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \Rightarrow x_2 = -4.$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y = 2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y^2 + y - 2 = 0. \end{cases}$$

avem: $y_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1.$

$y_4 = -2 \Rightarrow x_4 = 4.$



$$\text{Fie } A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], -y^2 \leq x \leq y^2\}.$$

$$\text{Fie } \varphi, \psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(y) = -y^2, \psi(y) = y^2.$$

φ, ψ continue.

A_1 multime măsurabilă Jordan și compactă.

$$\text{Fie } A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [1, 2], y-2 \leq x \leq 2-y\}.$$

$$\text{Fie } \theta, \eta: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \theta(y) = y-2, \eta(y) = 2-y.$$

θ, η continue.

A_2 multime măsurabilă Jordan și compactă.

$$A = A_1 \cup A_2.$$

$$\mu(A_1 \cap A_2) = 0.$$

$$\text{Fie } f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy + 2y.$$

f continuă.

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A (xy + 2y) dx dy =$$

$$= \iint_{A_1} (xy + 2y) dx dy + \iint_{A_2} (xy + 2y) dx dy =$$

-11-

$$= \int_0^1 \left(\int_{-y^2}^{y^2} (xy + 2y) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{y-2}^{2-y} (xy + 2y) dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} y \Big|_{x=-y^2}^{x=y^2} + 2yx \Big|_{x=-y^2}^{x=y^2} \right) dy +$$

$$+ \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} y \Big|_{x=y-2}^{x=2-y} + 2yx \Big|_{x=y-2}^{x=2-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 2y(y^2 + y^2) dy + \int_1^2 2y(2-y-y+2) dy =$$

$$= 4 \int_0^1 y^3 dy + 8 \int_1^2 y dy - 4 \int_1^2 y^2 dy =$$

$$= 4 \frac{y^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=1} + 8 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=2} - 4 \frac{y^3}{3} \Big|_{y=1}^{y=2} =$$

$$= 1 + 12 - \frac{28}{3} = \overset{3}{13} - \frac{28}{3} = \frac{39-28}{3} = \frac{11}{3} . \square$$