Şiruri de numere reale

Def.: Fie $A \subset \mathbb{N}$ o mulţime numărabilă (i.e. $(\exists)$ $g: A \to \mathbb{N}$, g bijectivă). O funcţie $f: A \to \mathbb{R}$ s.n. şir de numere reale.

Observaţie! Orice mulţime numărabilă este infinită.

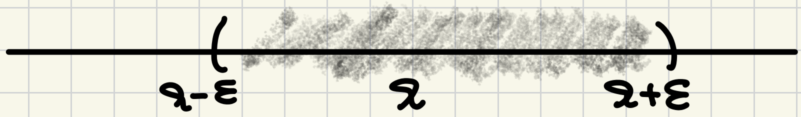
Notaţii: 1) $f(n) = x_n$, $(\forall)$ $n \in A$

2) Ţinând cont de definiţia precedentă şi de notaţia 1), obţinem şirul de numere reale $(x_n)_{n \in A}$.

Observaţie! 1) Atunci când A se subînţelege scriem doar $(x_n)_n$.

2) În general, $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$, cazuri în care vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sau $(x_n)_{n \geq 0}$ sau $(x_n)_n$), respectiv $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (sau $(x_n)_{n \geq 1}$ sau $(x_n)_n$).

Def.: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ şi $l \in \mathbb{R}$. Spunem că şirul $(x_n)_n$ are limita l şi scriem $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$ dacă $(\forall)$ $\varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - l| < \varepsilon$ $\iff -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$.



Def. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$.

1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ dacă $(\forall)\, \varepsilon>0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n > \varepsilon$.

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ dacă $(\forall)\, \varepsilon>0, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n < -\varepsilon$.

Def: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ este:

1) convergent dacă $(\exists)\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.

2) divergent dacă nu este convergent (i.e. $(x_n)_n$ nu are limită sau $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$).

Șiruri de numere reale
- cu limită
  - cu limită finită (convergente)
  - cu limita $\pm\infty$ (divergente)
- fără limită (divergente)

Def: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ este:

1) crescător (respectiv strict crescător) dacă $x_n \leq x_{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ (respectiv $x_n < x_{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$).

2) descrescător (respectiv strict descrescător) dacă $x_n \geq x_{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$).

3) monoton (respectiv strict monoton) dacă $(x_n)_n$ este crescător sau $(x_n)_n$ este descrescător (respectiv $(x_n)_n$ este strict crescător sau $(x_n)_n$ este strict descrescător).

4) mărginit dacă $(\exists)\ a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a \leq x_n \leq b$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ $(\Leftrightarrow)$ $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$).

Teoremă (Criteriul Cleștelui)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $(z_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $(\exists)\ n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $(\forall)\ n \geq n_0$, avem $x_n \leq y_n \leq z_n$.

Presupunem că $(\exists)\ l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} z_n = l$.

Atunci $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = l$.

Teoremă (Teorema lui Weierstrass)

Orice șir de numere reale monoton și mărginit este convergent.

Observație! Reciproca teoremei precedente este falsă.

Exerciții

1. Fie $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $(x_n)_n$ nu este monoton

b) $(x_n)_n$ este convergent

Sol.:

a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$$

$$x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$$

$$x_{2k+2} = \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2} = \frac{1}{2k+2}$$

Avem $x_{2k} > x_{2k+1}$ și $x_{2k+1} < x_{2k+2}$.

Deci $(x_n)_n$ nu este monoton.

b) $$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

$$-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0,\qquad \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0,\qquad \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Conform Criteriului Cleștelui rezultă că

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Deci $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Așadar $(x_n)_n$ este convergent $\square$

Propoziție: Orice șir de numere reale convergent este mărginit.

Propoziție: (Operații cu șiruri de numere reale convergente)

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ și fie $\alpha \in \mathbb{R}$.

Atunci:

1) $\lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=x+y$

2) $\lim_{n\to+\infty}(x_n\cdot y_n)=x\cdot y$

3) $\lim_{n\to+\infty}(\alpha x_n)=\alpha\cdot x$

4) $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{x}{y}$ (cu presupunerea suplimentară că $y\neq 0$).

Propoziție: Fie $(x_n)_n\subset\mathbb{R}$, $(y_n)_n\subset\mathbb{R}$ și $x\in\mathbb{R}$.

1) Avem echivalența: $\left(x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(|x_n|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\right)$

2) Dacă $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$, atunci $\lim_{n\to+\infty}|x_n|=|x|$.

3) Dacă $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$ și $(y_n)_n$ este mărginit, atunci $\lim_{n\to+\infty}x_n\cdot y_n=0$
(„0 · mărginit = 0").

Def.: Fie $(x_n)_n\subset\mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_n$ este **șir Cauchy** dacă $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\,m,n\in\mathbb{N}$, $m\geq n_\varepsilon$, $n\geq n_\varepsilon$, avem $|x_m-x_n|<\varepsilon$.

Teoremă: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) $(x_n)_n$ este șir convergent

2) $(x_n)_n$ este șir Cauchy

Terminologie: Șirurile Cauchy se numesc și **șiruri fundamentale**.

Exerciții

2. Fie $x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că $(x_n)_n$ nu este convergent.

Sol.: Arătăm că $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy.

$(x_n)_n$ șir Cauchy $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $(\forall)\, \varepsilon>0$, $(\exists)\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, m,n\in\mathbb{N}$, $m\geq n_\varepsilon$, $n\geq n_\varepsilon$, avem $|x_m-x_n|<\varepsilon$.

$(x_n)_n$ nu este șir Cauchy $\Leftrightarrow$ $(\exists)\, \varepsilon_0>0$ a.î. $(\forall)\, k\in\mathbb{N}$, $(\exists)\, m_k, n_k\in\mathbb{N}$, $m_k\geq k$, $n_k\geq k$ cu proprietatea că $|x_{m_k}-x_{n_k}|\geq\varepsilon$

Fie $p,q\in\mathbb{N}$, $p>q$.

$$|x_p-x_q| = \left|\left(\cancel{1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}+\ldots+\cancel{\tfrac{1}{q}}+\ldots+\tfrac{1}{p}\right)-\left(\cancel{1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}+\ldots+\cancel{\tfrac{1}{q}}\right)\right| = \frac{1}{q+1}+\ldots+\frac{1}{p} \geq$$

$$\underbrace{\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p}}_{p-q \text{ termeni}} = \frac{p-q}{p}.$$

Dacă $p=2q$, atunci $|x_p-x_q|\geq \dfrac{2q-q}{2q}=\dfrac{\cancel{q}}{2\cancel{q}}=\dfrac{1}{2}$

Alegem $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

Fie $k \in \mathbb{N}$. Alegem $m_k = 2(k+1)$ și $n_k = k+1$.

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2(k+1)} - x_{k+1}| =$$

$$= \left|\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\ldots} + \frac{1}{2(k+1)}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{k+1}}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2(k+1)} \geq \underbrace{\frac{1}{2(k+1)} + \ldots + \frac{1}{2(k+1)}}_{k+1 \text{ termeni}} = \frac{\cancel{k+1}}{2(\cancel{k+1})} = \frac{1}{2}$$

Așadar, $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$.

Prin urmare, $(x_n)_n$ nu este șir Cauchy.

Deci, $(x_n)_n$ nu este șir convergent. $\square$

Lemă (Lema lui Cesaro)

Orice șir de numere reale mărginit are măcar un subșir convergent.

Limitele extreme ale unui șir de numere reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$.

<u>Def.</u>: Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} \overset{def.}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Spunem că x este punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă există un subșir $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Notație: $\mathcal{L}((x_n)_n) \overset{not.}{=\!=} \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ punct limită al lui $(x_n)_n\}$

Propoziție:

Există un cel mai mare element (finit sau infinit) al mulțimii $\mathcal{L}((x_n)_n)$ (i.e. cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_n$) și un cel mai mic element al mulțimii $\mathcal{L}((x_n)_n)$ (finit sau infinit) (i.e. cel mai mic punct limită al șirului $(x_n)_n$).

Def.: 1) Cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_n$ s.n. limita superioară a sa și se notează $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$.

2) Cel mai mic punct limită al șirului $(x_n)_n$ s.n. limita inferioară a sa și se notează $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$.

Propoziție: 1) $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$

2) Șirul $(x_n)_n$ are limită dacă și numai dacă $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, caz în care avem $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$