Integrala de o singură variabilă reală

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Def. 1) Se numește diviziune a $[a,b]$ un sistem de puncte $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Notăm $\mathcal{D}([a,b])=\{\Delta / \Delta$ diviziune a lui $[a,b]\}$

2) Numărul $\|\Delta\| \overset{def}{=} \max\{x_i-x_{i-1} \mid i=\overline{1,n}\}$ s.n. norma div. Δ

3) Se numește sistem de puncte intermediare asociat div. Δ, un sistem de puncte $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ a.î. $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $\forall i=\overline{1,n}$ (S.p.i)

4) Suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ s.n. suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare ξ și se notează cu $\sigma(\Delta f,\xi_i)$ (ξ se citește „csi") (simbol de sumă Σ și puncte codiță ξ)

5) Spunem că f e integrabilă Riemann dacă $\exists\, I\in\mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ și $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ s.p.i avem

$|I-\sigma(\Delta f,\xi_i)|<\varepsilon$.

Teoremă: f integr. R $\Rightarrow$ f mărg ($\Leftarrow\!\!\!\!/$)
f cont $\Rightarrow$ f integr R ($\Leftarrow\!\!\!\!/$)
f monotonă $\Rightarrow$ f integr R ($\Leftarrow\!\!\!\!/$)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită, $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$

şi $M_i=\sup\{f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\ \forall i=\overline{1,n}$

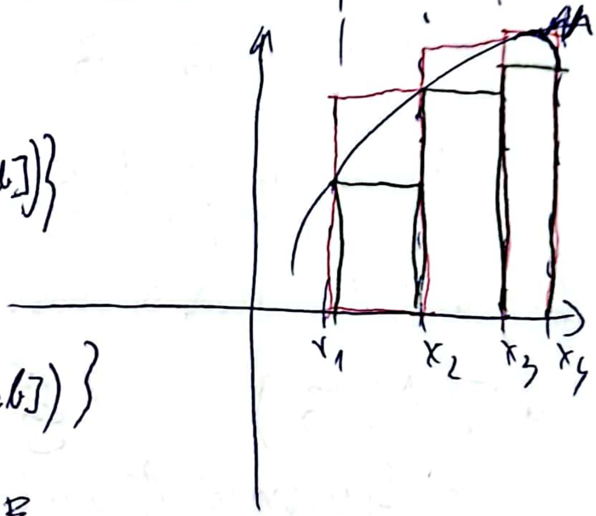
$m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\ \forall i=\overline{1,n}$.

Def. 1) $S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$ s.n. suma Darboux superioară asoc lui f şi Δ.

• -> pe grafic

2) $s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$ s.n. suma Darboux inferioară

• -> pe grafic



3) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf\{S_\Delta(f)\mid \Delta\in\mathcal{D}([a,b])\}$

integrala Darboux superioară $\exists$

4) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup\{s_\Delta(f)\mid \Delta\in\mathcal{D}([a,b])\}$

integrala Darboux inferioară a lui f $\exists$

Obs. $s_\Delta(f)\le S_\Delta(f)$ şi $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\le\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann

Sunt echivalente:

1) f integr R 2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ \exists = \int_a^b f(x)\,dx$

3) $\forall \varepsilon>0, \exists \Delta_\varepsilon\in\mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f)-s_{\Delta_\varepsilon}(f)<\varepsilon$

4) $\forall\varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$.

(a dat asta Mihail la examen la teorie)

Ex:

Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}\\ -1, & x\in[-1,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

Determinați $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ și precizați dacă f e integr. R.

Sol:

$|f(x)|\le 1$ $\forall x\in[-1,1] \Rightarrow f$ mărginită.

Fie $\Delta: -1=x_0<\dots<x_n=1$, $\Delta\in\mathcal{D}([-1,1])$.

$M_i=\sup\{f(x) / x\in[x_{i-1},x_i]\}=1$, deoarece între orice 2 nr reale $\exists$ o infinitate de nr raționale

$m_i=\inf\{f(x) / x\in[x_{i-1},x_i]\}=-1$, din același motiv

$S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}) = x_1-x_0+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1}=x_n-x_0=1-(-1)=2$

$s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) = -2$ (idem e bine)

Cum Δ a fost aleasă arbitrar, avem că $\overline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx=2$ și

$\underline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx=-2$. Deci $\underline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx \ne \overline{\int_{-1}^{1}} f(x)dx$ și f nu e integr R

Integrale improprii

I Fie $-\infty < a < b \leq +\infty$ și $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție int. Riemann pe orice interval $[a, d]$ $a < d < b$

Def: Dacă există $\lim\limits_{\substack{d \to b \\ d < b}} \int_a^d f(x)\,dx \in \overline{\mathbb{R}}$ val. ei se numește integr. improprie a lui f pe $[a, b)$ și s.n. $\int_a^b f(x)\,dx$

Def: 1) Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ e conv dacă ~~lim~~ $\lim\limits_{\substack{d \to b \\ d < b}} \int_a^d f(x)\,dx$ e finită

2) Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ e div dacă nu e conv

II Fie $-\infty \leq a < b < +\infty$ și $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ o funct integr Riemann pe orice interval $[c, b]$, $a < c < b$

Def: Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)\,dx \in \overline{\mathbb{R}}$, val ei s.n integr improprie a lui f pe $(a, b]$ și s.n $\int_a^b f(x)\,dx$

Def: 1) Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ conv dacă $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)\,dx$ e finită

2) Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ div dacă nu este conv

* III Fie $-\infty \le a < b \le +\infty$ și $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, o func integr pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$

Def: Dacă $\exists \lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)dx \in \overline{\mathbb{R}}$ val ei s.n integr impropri a lui f pe (a,b) și s.n $\int_a^b f(x)dx$

Def: 1) Spunem că integr improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)dx$ e finită

2) Spunem că integr improprie $\int_a^e f(x)dx$ e div dacă nu e conv

Prop: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $-\infty\le a<b\le\infty$ o func integr R pe orice interval $[c,d]$, $a<c<d<b$

Dacă $\exists\, \alpha\in(a,b)$ a î $\int_a^\alpha f(x)dx$ conv și $\int_\alpha^b f(x)dx$ conv atunci și integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ e conv și $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx$

Criterii de convergență pentru integrale improprii

1 Crit de comp cu inegalități

Fie $f,g:[a,\infty)\to[0,\infty)$, 2 func integrabile R pe $\forall$ interval $[a,d]$, $a<d<\infty$ a. î. $0\le f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,\infty)$

1) Dacă $\int_a^\infty g(x)dx$ e conv, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ e conv

2) Dacă $\int_a^\infty f(x)dx$ e div, atunci $\int_a^\infty g(x)dx$ e div

2) Crit de comp cu limită

Fie $f, g : [a,\infty) \to [0,\infty)$, 2 func integrabile R pe orice interval $[a,d]$, $a<d<\infty$ a î 1) $g(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in [a,\infty)$

2) $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0,\infty]$

i) Dacă $l \in (0,\infty)$ $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ și $\int_a^\infty f(x)dx$ au aceeași natură

ii) Dacă $l=0$ și $\int_a^\infty g(x)dx$ e conv atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ e conv

iii) Dacă $l=\infty$ și $\int_a^\infty g(x)dx$ e div atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ e div

3) Criteriul lui Cauchy

Fie $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ o func desc dacă este integr R pe orice $[a,d]$ $a<d<\infty$

Atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ și seria de nr reale $\sum\limits_{n=p}^\infty f(n)$ au aceeași natură $(\forall)$ $p \in [a,\infty) \cap \mathbb{N}$

Exec:

1) Calculați: $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int_0^\infty \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx$

$= \lim\limits_{d\to\infty} \int_0^d \operatorname{arctg} x \, (\operatorname{arctg} x)' dx = \lim\limits_{d\to\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2(x) \Big|_0^d$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{d\to\infty} \operatorname{arctg} d - \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - 0\right) = \frac{\pi^2}{8}$

2) Fie funcția $f : [2,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$. Studiați convergența integralei improprii $\int_2^\infty (2^{f(x)} - 1)dx$.

Fie $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} > 0$, $(\forall)\ x \in [2, \infty)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{f(x)}-1}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \boxed{\frac{2^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}-1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} = \ln(2) \in (0, \infty) \Rightarrow$$

$\rightsquigarrow$ limită fundamentală

$\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = 1$

$$\Rightarrow \int_2^\infty 2^{f(x)}-1\, dx \sim \int_2^\infty g(x)\,dx$$ $\rightsquigarrow$ limită fundamentală

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{d\to\infty} \int_2^d x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{d\to\infty} \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} \Big|_2^d$$

$$= \lim_{d\to\infty} \frac{2}{3}\left(d^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\right) = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_2^\infty g(x)\,dx$ div

Deci $\int_2^\infty 2^{f(x)} - 1$, unde $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ este div

3) Studiați convergența următoarelor integrale improprii

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx$.

Fie $f, g: [1, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$

Avem $0 \le f(x) \le g(x)$

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{d\to\infty} \int_1^d x^{-4}\,dx =$$

$$= \lim_{d\to\infty} -\frac{1}{3} x^{-3} \Big|_1^d =$$

$$= \lim_{d\to\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{d^3} - 1\right) = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$$

Deci $\int_1^\infty g(x)$ este conv

Conform crit de comp cu ineg avem că $\int_1^\infty f(x)$ este conv

h) $\int_1^{\infty} \sin \frac{1}{x^{11}} dx$, ~~...~~

$\underbrace{\frac{1}{x^{11}} \in (0,1]}_{\subset (0, \frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow x \in [1,\infty) \Rightarrow \sin \frac{1}{x^{11}} > 0 \ (\forall)\ x \in [1,\infty)$

Fie $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x^{11}}$

$\underset{(0, \frac{\pi}{2})}{x} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\sin x}$ e crescător

$\underset{(1,\infty)}{x} \longmapsto \underset{\mathbb{R}}{\frac{1}{x^{11}}}$ e desc

$\Rightarrow f$ este desc

Conf Criteriului lui Cauchy avem că $\int_1^{\infty} f(x)dx \sim \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^{11}}$

Fie $x_n = \sin \frac{1}{n^{11}}$ și $y_n = \frac{1}{n^{11}}$ $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^{11}}}{\frac{1}{n^{11}}} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow$ Conform crit de comp cu limită $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}}$ conv (serie arm gen cu $\alpha = 11$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ conv $\Rightarrow \int_1^{\infty} \sin \frac{1}{n^{11}}$ conv

Funcțiile Gamma și Beta

Def 1) $\Gamma:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ (gamma)

2) $B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$, $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ (beta)

Prop 1) $\Gamma(1)=1$

2) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

3) $\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$ $\forall x\in(0,\infty)$. În particular, $\Gamma(1+n)=n!$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Deci funcția gamma este generalizarea factorialului.

4) $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$ $\forall x\in(0,1)$

5) $B(x,y)=B(y,x)$ $\forall x,y\in(0,\infty)$

6) $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $\forall x,y\in(0,\infty)$

7) $B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}dt$ $\forall x,y\in(0,\infty)$

Exerciții:

1) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx \underset{\substack{x^2=t\\ x=\sqrt{t}\\ dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt\\ x=0\Rightarrow t=0\\ x\to\infty\Rightarrow t\to\infty}}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2) $\int_0^\infty x^6e^{-2x}dx \underset{\substack{2x=t\\ x=\frac{t}{2}\\ dx=\frac{1}{2}dt\\ x=0\Rightarrow t=0\\ x\to\infty\Rightarrow t\to\infty}}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^6}{2^6}e^{-t}dt=\frac{1}{2^7}\int_0^\infty t^6e^{-t}dt=\frac{\Gamma(7)}{2^7}=\frac{6!}{2^7}$

3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{2-2t}}\,dt = 2\int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{2(1-t)}}\,dt = \frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 t^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt =$

$t = \frac{x}{2}$
$x = 2t$
$dx = 2dt$
$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x \to 2 \Rightarrow t \to 1$

$\displaystyle = \frac{8}{\sqrt{2}} B\left(3, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3+\frac{1}{2})} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2!\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma(3+\frac{1}{2})} = \frac{16\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(3+\frac{1}{2})} =$

$\displaystyle = \frac{16\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2+\frac{1}{2})\Gamma(2+\frac{1}{2})} = \frac{16\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{2})} = \frac{32\sqrt{\pi}}{5\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} =$

$\displaystyle = \frac{64\sqrt{\pi}}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{64}{5\sqrt{2}}$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\frac{5}{2}} (\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2\cdot\frac{7}{4}-1} (\cos t)^{2\cdot\frac{5}{4}-1}\,dt =$

$\displaystyle = \frac{1}{2} B\left(\tfrac{7}{4}, \tfrac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{7}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{7}{4}+\frac{5}{4})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{4}\Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(3)} =$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{2!} = \frac{3}{64} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{64} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\pi}{32\sqrt{2}}$

5) $\displaystyle\int_0^1 x^x\,dx = \int_0^1 e^{\ln(x^x)}\,dx = \int_0^1 e^{x\ln x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!}\,dx =$

$\displaystyle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \int_0^1 x^n (\ln x)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-tn} \cdot (-t)^n \cdot e^{-t}\,dt =$

$-\ln x = t$
$x = e^{-t}$
$dx = -e^{-t}dt$
$x \to 0 \Rightarrow t \to \infty$
$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-tn} \cdot t^n \cdot e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} (e^{-t})^{n+1} \cdot t^n dt =$$

$y = t(n+1) \Leftrightarrow dy = (n+1)dt$

$y = 0 \Rightarrow t = 0$

$y \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot \left(\frac{y}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} y^n \cdot e^{-y} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot n! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Scanned with CamScanner