LABORATOR #7

EX#1 (Timpul până la primul eveniment – distribuția Exponențială)
În medie, primesc $\lambda = 20$ de mesaje pe WhatsApp într-o oră. Care este probabilitatea să primesc cel puțin un mesaj în următorul minut? Dar probabilitatea să nu primesc niciun mesaj în următoarele 5 minute?

#1 Răspundeți la întrebare prin simulări numerice, urmând următorul raționament aproximativ:

- Dacă, în medie, primesc $\lambda = 20$ de mesaje pe oră, atunci, în fiecare secundă (i.e. $\frac{1}{n}$ dintr-o oră cu $n = 3600$), probabilitatea de a primi un mesaj este aproximativ $p = \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{180}$.
- Timpul până la primul mesaj (în secunde) este deci distribuit aproximativ Geom $\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

#2 Realizați histograma timpului în ore până la primul mesaj.

#3 Calculați empiric timpul mediu (în minute) până la primul mesaj, folosind simulările utilizate pentru crearea histogramei.

#4 Simulați distribuția timpului până la primul mesaj folosind *funcția cumulativă* a distribuției Exponențiale: pentru $t \geq 0$ reprezentând timpul în ore până la următorul mesaj,

$$\begin{aligned} F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq tn), \quad X_n \text{ distribuită Geom} \left(\tfrac{\lambda}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor tn \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor tn \rfloor} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1} \frac{\lambda}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor tn \rfloor}\right] = 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Afișați histograma datelor obținute.

Pont: Dacă $U =$`np.random.random()`, atunci $\mathbb{P}(U \leq r) = r$, pentru orice $r \in [0, 1]$. Atunci, dacă notăm

$$X \coloneqq F^{-1}(U) = \frac{-\ln(1-U)}{\lambda},$$

atunci, pentru orice $t \in [0, \infty)$,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t)) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

#5 Din raționamentul de la subpunctul anterior, deducem că, pentru $a, b \in [0, \infty)$, cu $a < b$, are loc:

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

unde $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ este *funcția de densitate* a distribuției exponențiale. Afișați graficul funcției f deasupra histogramelor obținute la punctele #2 și #4.

#6 Nu am mai primit niciun mesaj în ultimele 5 minute. Care e probabilitatea de a primi cel puțin un mesaj în următorul minut? Răspundeți prin simulări numerice.

EX#2 (Mersul bețivului – distribuția Normală) Un bețiv iese dintr-o cârciumă aflată în mijlocul unei străzi lungi și drepte. În fiecare secundă, face la întâmplare fie un pas la stânga, fie unul la dreapta (fiecare pas are lungimea de 1 metru). Care e probabilitatea ca, după o oră, să găsim bețivul la o distanță mai mică de 25 de metri de cârciumă?

#1 Calculați probabilitatea cerută prin simulări numerice repetate.

#2 Realizați histograma poziției bețivului după o oră de la ieșirea din cârciumă. Suprapuneți peste acest grafic funcția de densitate a distribuției normale:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3600\pi}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 3600}}.$$

#3 Folosind funcția Python `np.random.normal(loc=`μ`,scale=`σ`,size=`N`)`, realizați histograma a $N = 100000$ numere distribuite normal de medie μ și deviație standard σ.

#4 Deasupra histogramei, afișați graficul funcției de densitate a distribuției normale:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

#5 Fie X și Y două variabile aleatoare independente distribuite $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ și $\mathcal{N}(\nu, \tau^2)$. Realizați histograma corespunzătoare a $N = 10000$ simulări ale variabilei $X + Y$. Suprapuneți peste histogramă graficul funcției de densitate a distribuției

$$\mathcal{N}\left(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2\right).$$

#6 (Metoda de simulare Box-Muller) Realizați histograma unei variabile aleatoare X definită ca:

$$X \coloneqq \mu + \sqrt{-2\sigma^2 U_1} \cos(2\pi U_2),$$

unde U_1 și U_2 sunt independente și distribuite uniform în $[0, 1]$. Suprapuneți peste histograma obținută graficul funcției de densitate definite în (1).