1 Secvenţe de grade

Fie $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ o secvenţă de numere naturale.

Problemă. Să se construiască, dacă se poate, un (multi)graf neorientat G cu $s(G) = s_0$.

Observaţie 1.1. *Deoarece suma gradelor vârfurilor într-un (multi)graf este egală cu dublul numărului de muchii, o condiţie necesară pentru existenţa unui (multi)graf G cu $s(G) = s_0$ este ca suma*

$$d_1 + \ldots + d_n$$

să fie număr par.

? Este condiţia din Observaţia 1.1 şi suficientă?

1.1 Construcţia unui multigraf neorientat cu secvenţa gradelor dată

Teorema 1.2. *O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ este secvenţa gradelor unui multigraf neorientat dacă şi numai dacă suma $d_1 + \ldots + d_n$ este număr par.*

1.2 Construcţia unui graf neorientat cu secvenţa gradelor dată

Dat un graf neorientat G, pentru a obţine grafuri neorientate cu aceeaşi secvenţă de grade ca şi G se poate folosi următoarea transformare t (pe care o vom numi de interschimbare pe pătrat). Fie x, y, u, v patru vârfuri distincte ale lui G astfel încât $xy, uv \in E(G)$, dar $xu, yv \notin E(G)$. Considerăm graful notat $t(G, xy, uv)$ definit astfel:

$$t(G, xy, uv) = G - \{xy, uv\} \cup \{xu, yv\}$$

Spunem că $t(G, xy, uv)$ este graful obţinut din G prin aplicarea transformării t de interschimbare pe pătratul $xyvu$ - figura 1.

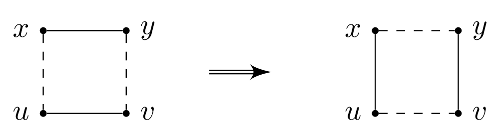

Figure 1: Transformarea t de interschimbare pe pătrat

Observaţie 1.3. *Graful $t(G, xy, uv)$ are aceeaşi secvenţă de grade ca şi G.*

Teorema 1.4. *(Havel-Hakimi) O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale $s_0 = \{d_1 \geq \ldots \geq d_n\}$ cu $d_1 \leq n - 1$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat (cu n vârfuri) dacă şi numai dacă secvenţa $s_0' = \{d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n\}$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat (cu $n - 1$ vârfuri).*

Din Teorema Havel-Hakimi se obţine următorul algoritm de determinare a unui graf neorientat cu secvenţa gradelor dată.

Algoritmul Havel-Hakimi

Intrare: o secvenţă de n numere naturale $d_1, \dots, d_n$
Ieşire: un graf G cu $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ cu $s(G) = s_0$ dacă s_0 este secvenţa gradelor unui graf, sau mesajul NU altfel.
Idee: La un pas unim un vârf de grad maxim d din secvenţa s_0 cu vârfurile corespunzătoare următoarelor cele mai mari d elemente din s_0 diferite de d şi actualizăm secvenţa s_0 (s_0=s_0'). Se repetă pasul până când secvenţa conţine numai 0 sau conţine elemente negative.
Pseudocod:
Pasul 1. Dacă $d_1 + \dots + d_n$ este număr impar sau există în s_0 un număr $d_i > n-1$, atunci scrie NU, STOP.
Pasul 2.
cât timp s_0 conţine valori nenule execută
    alege d_k cel mai mare număr din secvenţa s_0
    elimină d_k din s_0
    fie $d_{i_1}, \dots, d_{i_{d_k}}$ cele mai mari d_k numere din s_0
    pentru $j \in \{i_1, \dots, i_{d_k}\}$:
        adaugă la G muchia $x_k x_j$
        înlocuieşte d_j în secvenţa s_0 cu $d_j - 1$
        dacă $d_j - 1 < 0$, atunci scrie NU, STOP.

Observaţie. Pentru a determina uşor care este cel mai mare număr din secvenţă şi care sunt cele mai mari valori care îi urmează, este util ca pe parcursul algoritmului secvenţa s_0 să fie ordonată descrescător.
Exemplu. - vezi curs + laborator

Teorema 1.5. *(Extindere a teoremei Havel-Hakimi) Fie $s_0 = \{d_1 \geq \dots \geq d_n\}$, o secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale cu $d_1 \leq n-1$ şi fie $i \in \{1, \dots, n\}$ fixat. Fie $s_0^{(i)}$ secvenţa obţinută din s_0 prin următoarele operaţii:*
- eliminăm elementul d_i
- scădem o unitate din primele d_i componente în ordine descrescătoare ale secvenţei rămase.
Are loc echivalenţa:
s_0 este secvenţa gradelor unui graf neorientat $\Longleftrightarrow$
$s_0^{(i)}$ este secvenţa gradelor unui graf neorientat

Exerciţiu Fie G_1 şi G_2 două grafuri neorientate cu mulţimea vârfurilor $V = \{1, \dots, n\}$. Atunci $s(G_1) = s(G_2)$ dacă şi numai dacă există un şir de transformări t de interschimbare pe pătrat prin care se poate obţine graful G_2 din G_1.

Teorema Erdős–Gallai. O secvență de numere naturale $s = \{d_1 \geq \ldots \geq d_n\}$ este secvenţa gradelor unui graf dacă și numai dacă suma $d_1 + \ldots + d_n$ este pară şi

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min(d_i, k)$$

2 Construcţia unui arbore cu secvenţa gradelor dată

Teorema 2.1. *O secvenţă de $n \geq 2$ numere naturale* **strict pozitive** $s_0 = \{d_1, \ldots, d_n\}$ *este secvenţa gradelor unui arbore dacă şi numai dacă $d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$.*

Din demonstraţia Teoremei 2.1 se desprind următorii algoritmi de determinare a unui arbore cu secvenţa gradelor dată.

Algoritm de construţie a unui arbore cu secvenţa de grade dată

Intrare: o secvenţă de n numere naturale pozitive $d_1, \ldots, d_n$
Ieşire: un arbore T cu $V(T) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ cu $s(T) = s_0$ dacă s_0 este secvenţa gradelor unui arbore, sau mesajul NU altfel.
Idee: La un pas unim un vârf de grad 1 cu un vârf de grad mai mare decât 1 şi actualizăm secvenţa s_0. Se repetă de $n-2$ ori, în final rămânând în secvenţă două vârfuri de grad 1, care se unesc printr-o muchie.
Pseudocod:
Varianta 1.
Pasul 1. Dacă $d_1 + \ldots + d_n \neq 2(n-1)$, atunci scrie NU, STOP.
Pasul 2.
Cât timp s_0 conţine valori mai mari decât 1 execută *//sau pentru* $i = 1, n-2$
  alege un număr $d_k > 1$ şi un număr $d_t = 1$ din secvenţă s_0 şi adaugă la T muchia $x_k x_t$.
  elimină d_t din s_0
  înlocuieşte d_k în secvenţa s_0 cu $d_k - 1$
Pasul 3.
  fie d_k, d_t unicele elemente nenule (egale cu 1) din s_0; adaugă la T muchia $x_k x_t$.
Varianta 2. Corespunde variantei a doua de demonstrare a teoremei anterioare - construim un arbore de tip omidă.