SPAŢII METRICE, SPAŢII TOPOLOGICE

Definiţia 1. a) Se numeşte distanţă pe mulţimea nevidă X o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care are următoarele proprietăţi:
i) $d(x,y) = d(y,x)\ \ \forall x, y \in X$
ii) $d(x,y) \geq 0\ \forall x, y \in X$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\ \ \forall x, y, z \in X$.
b) Se numeşte spaţiu metric o mulţime nevidă X pe care se defineşte o distanţă d.
Notaţie. (X, d)

Definiţia 2. Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ si $r > 0$.
a) Mulţimea $B(x_0, r) = \{x \in X |\ d(x, x_0) < r\}$ se numeşte bila deschisă de centru x_0 şi rază r.
b) Mulţimea $B[x_0, r] = \{x \in X |\ d(x, x_0) \leq r\}$ se numeşte bila închisă de centru x_0 şi rază r.

Teorema 1. Orice spaţiu metric (X, d) este spaţiu topologic.
Distanţei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ i se asociază topologia $\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X |\ \forall x \in G \exists r > 0\ astfel\ încât\ B(x_0, r) \subseteq G$
$\wp(X)$.
Topologia τ_d se numeşte topologia asociată distanţei d.

Definiţia 3. Fie (X, d) un spaţiu metric.
a) Spunem că mulţimea $G \subseteq X$ este deschisă dacă $G \in \tau_d$.
b) Spunem că mulţimea $F \subseteq X$ este închisă dacă $C_X F = X \diagdown F \in \tau_d$.

Remarcă. Oricărei mulţimi $A \subseteq (X, d)$ i se asociază mulţimile:

$$\begin{cases} \overset{0}{A} = \text{mulţimea punctelor interioare sau interiorul mulţimii } A \\ \overline{A} = \text{mulţimea punctelor de aderenţă sau închiderea mulţimii } A \\ A' = \text{mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii } A \\ \delta A = \overline{A} \diagdown \overset{0}{A} \text{ frontiera topologică a mulţimii } A \end{cases}$$

Teorema 2. Fie (X, d) un spaţiu metric. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:
a) $B(x_0, r)$ este mulţime deschisă $\forall x_0 \in X$ si $\forall r > 0$.
b) $B[x_0, r]$ este mulţime închisă $\forall x_0 \in X$ si $\forall r > 0$.
c) $V \in V_{\tau_d}(x_0)$ dacă şi numai dacă $\exists r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subseteq V$.
d) $x_0 \in \overset{0}{A}$ dacă şi numai dacă $\exists r > 0$ astfel încât $B(x_0, r) \subseteq A$.
e) $x_0 \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset\ \forall r > 0$
f) $x_0 \in A'$ dacă şi numai dacă $B(x_0, r) \cap (A \diagdown \{x_0\}) \neq \emptyset\ \forall r > 0$.

TOPOLOGIA LUI $\mathbb{R}$

Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte distanţa uzuală $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d(x,y) = |x-y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Acesteia i se asociază topologia $\tau_d \overset{not}{=} \tau_{\mathbb{R}}$ numită topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$.

$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) \ \forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall r > 0$

$B[x_0, r] = [x_0 - r, x_0 + r] \ \forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall r > 0$

$\tau_{\mathbb{R}} = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq \mathbb{R} | \ \forall x \in G \exists r > 0 \ astfel \ \hat{i}nc\hat{a}t \ (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq G\}$

$\underline{TOPOLOGIA \ LUI \ \mathbb{R}^n, n \geq 2}$

Pe spaţiul $\mathbb{R}^n$ se defineşte distanţa uzuală $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$.

Acesteia i se asociază topologia $\tau_d \overset{not}{=} \tau_{\mathbb{R}^n}$ numită topologia uzuală a lui $\mathbb{R}^n$.

$B((x_1, x_2, ..., x_n), r) = \left\{(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n | \ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2 < r^2\right\}$

$B[(x_1, x_2, ..., x_n), r] = \left\{(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n | \ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2 \leq r^2\right\}$