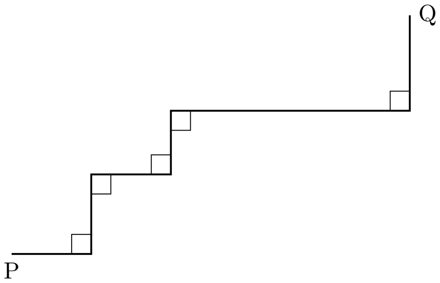
数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 G

$\boxed{\text{G1}}$ (基礎)

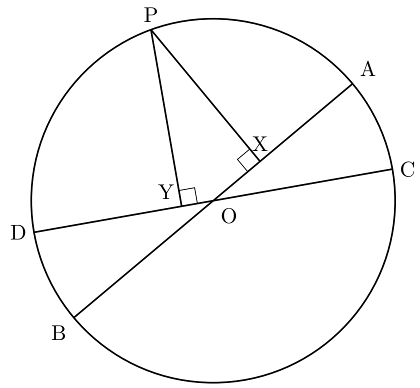
(1) 面積 18 の正六角形 ABCDEF の内部に点 P をとるとき，$\triangle$ABP, $\triangle$CDP, $\triangle$EFP の面積の和を求めよ。

(2) 長さ 10 の針金を直角に 5 回折って下の図のような図形を作るとき線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

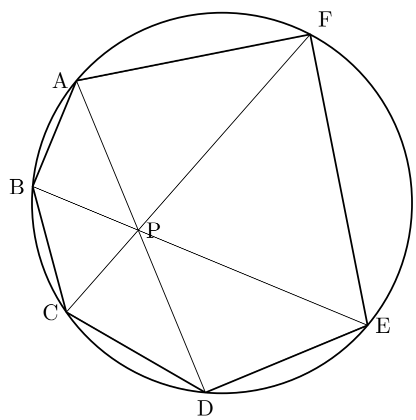


$\boxed{\text{G2}}$ (基礎)

(1) 下図のように半径 4 の円 O の直径 AB, CD をとったところ，$\angle\mathrm{AOC} = 30^\circ$ となった。(劣) 弧 AD 上の点 P から AB, CD に下ろした垂線の足をそれぞれ X, Y とするとき，線分 XY の長さを求めよ。



(2) 六角形 ABCDEF は円に内接しており，また AD, BE, CF は一点 P で交わっている。$\mathrm{AB} = 3, \mathrm{BC} = 4, \mathrm{CD} = 5, \mathrm{DE} = 6, \mathrm{EF} = 9$ のとき，FA の長さを求めよ。



$\boxed{\text{G3}}$ (標準)(高校生向け)

(1) 正の実数 x, y, z が以下の関係式を満たすとき $xy+\frac{\sqrt{3}}{2}yz+\frac{1}{2}zx$ の値を求めよ。

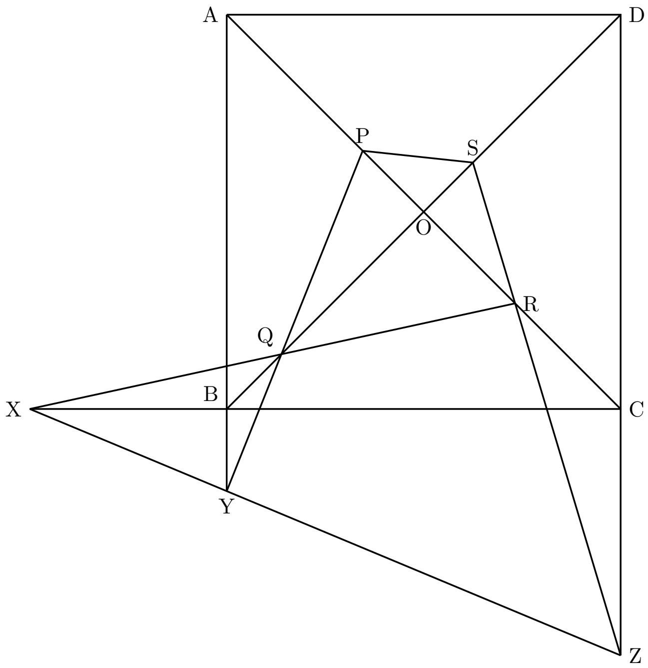
$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y^2+yz+z^2=25 \\ z^2+\sqrt{3}zx+x^2=16 \end{cases}$$

(2) 実数 a, b, c, d, e, f, g, h に対して，$ac+bd, ce+df, eg+fh, ga+hb, ae+bf, cg+dh$ のうち少なくとも 1 つは 0 以上であることを示せ。

$\boxed{\text{G4}}$ (標準)

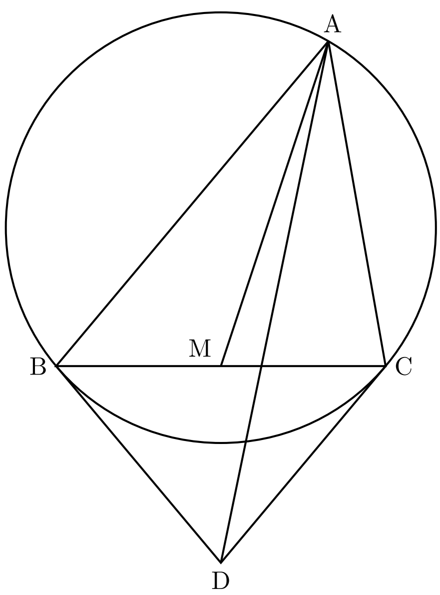
(1) 正四角錐 $\mathrm{O-ABCD}$ に対して平面 α が辺 $\mathrm{OA, OB, OC, OD}$ とそれぞれ点 $\mathrm{P, Q, R, S}$ で交わっている。$\mathrm{OP}=2, \mathrm{OQ}=4, \mathrm{OR}=3$ のとき，OS の長さを求めよ。

(2) 正方形 ABCD について，AC と BD の交点を O とし，線分 OA,OB,OC,OD 上にそれぞれ点 P,Q,R,S をとる。QR と BC, PQ と AB, RS と CD の交点を X,Y,Z としたところ，これらは同一直線上にあった。$\mathrm{OP}=2, \mathrm{OQ}=4, \mathrm{OR}=3$ のとき，OS の長さを求めよ。

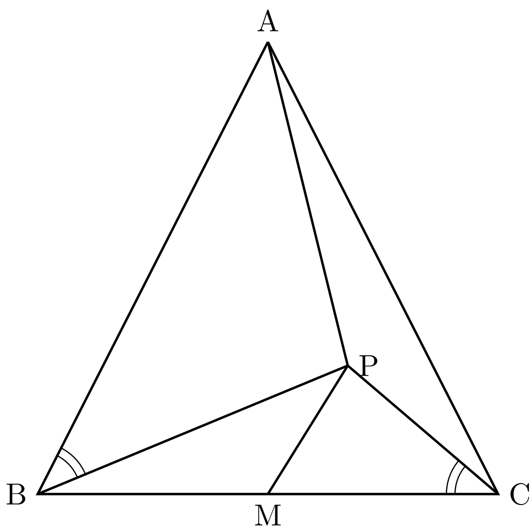


$\boxed{\text{G5}}$ (応用)

(1) $\triangle$ABC の外接円の B, C における接線の交点を D とする。BC の中点を M とするとき，$\angle$BAM $=$ $\angle$CAD であることを示せ。



(2) AB $=$ AC なる $\triangle$ABC の内部に点 P をとったところ，$\angle$PBA $=$ $\angle$PCB となった。BC の中点を M とするとき，$\angle$APC $+$ $\angle$BPM $= 180^\circ$ であることを示せ。

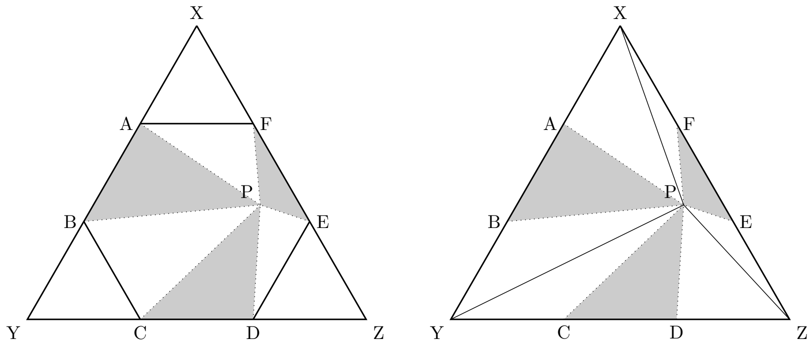


数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 G —解答—

$\boxed{\text{G1}}$

(1) 下図のように正三角形 XYZ を作ると $\triangle\mathrm{XYZ}=27$ になるので,

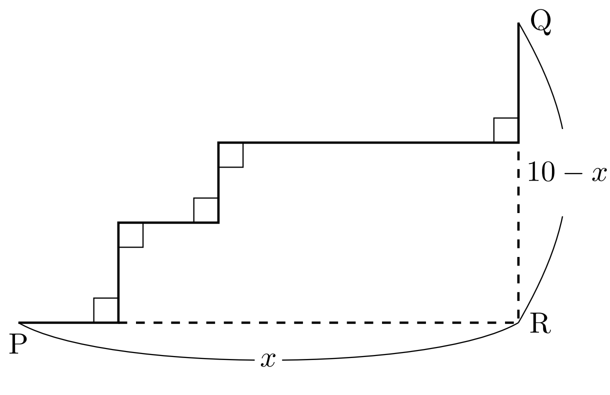
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PCD}+\triangle\mathrm{PEF}&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PXY}+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PYZ}+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PZX}\\&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{XYZ}\\&=9\end{aligned}$$



(2) 下の図のように R をとると，$\mathrm{PR}=x, \mathrm{QR}=10-x$ とおける。三平方の定理を用いて,

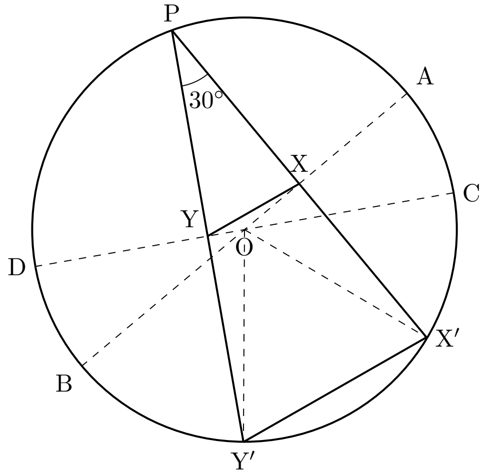
$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\mathrm{PR}^2+\mathrm{QR}^2\\&=x^2+(10-x)^2\\&=2(x-5)^2+50\\&\geq 50 \quad (\text{等号成立は } x=5 \text{ のとき})\end{aligned}$$

ゆえに，PQ の最小値は $5\sqrt{2}$ である。



$\boxed{\text{G2}}$

(1) PX と円 O，PY と円 O の P 以外の交点をそれぞれ X', Y' とおくと，直径に関する対称性から $\mathrm{PX}=\mathrm{XX}', \mathrm{PY}=\mathrm{YY}'$。よって，中点連結定理から $\mathrm{XY}=\dfrac{\mathrm{X}'\mathrm{Y}'}{2}$。
また簡単な計算から $\angle\mathrm{Y}'\mathrm{PX}'=30^\circ$ であることがわかる。円周角の定理と合わせて $\triangle\mathrm{OY}'\mathrm{X}'$ は正三角形。



ゆえに，$\mathrm{XY}=\dfrac{\mathrm{X'Y'}}{2}=\dfrac{\mathrm{OX'}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

(2) $\triangle\mathrm{ABP}\sim\triangle\mathrm{EDP},\triangle\mathrm{PCD}\sim\triangle\mathrm{PAF},\triangle\mathrm{BCP}\sim\triangle\mathrm{FEP}$ より，

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PB}},\quad \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PD}},\quad \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PF}}$$

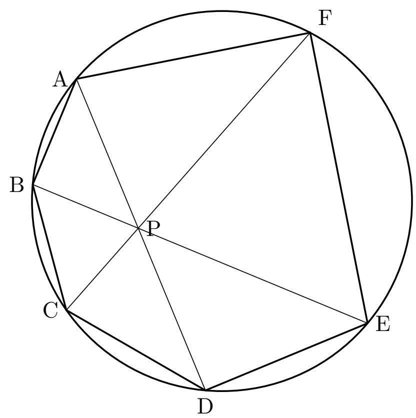
よって，

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CD}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PF}}=1$$

つまり，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{FA}$$

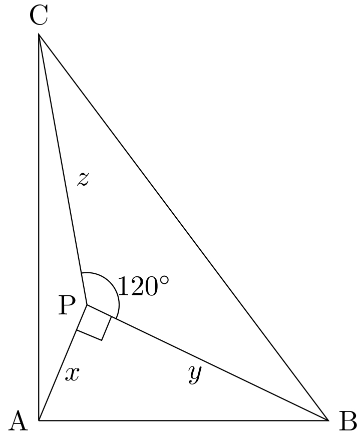
$\mathrm{AB}=3,\mathrm{BC}=4,\mathrm{CD}=5,\mathrm{DE}=6,\mathrm{EF}=9$ を代入して，$\mathrm{FA}=\dfrac{45}{8}$



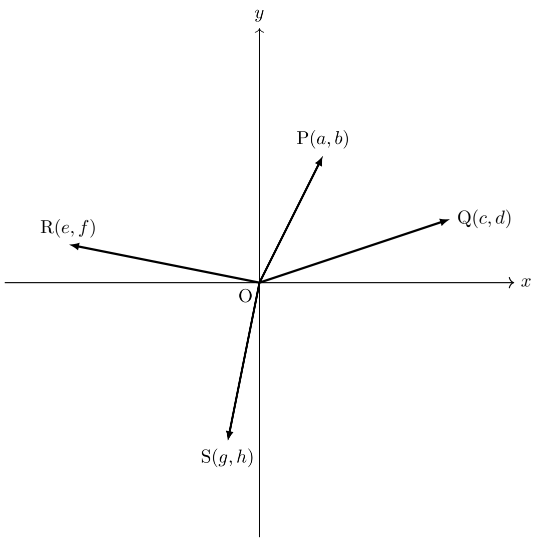
G3

(1) $\mathrm{PA}=x,\mathrm{PB}=y,\mathrm{PC}=z$, $\angle\mathrm{APB}=90^\circ,\angle\mathrm{BPC}=120^\circ$ になるように $\mathrm{P,A,B,C}$ を定めると，余弦定理および与えられた条件式から $\mathrm{AB}=3,\mathrm{BC}=5,\mathrm{CA}=4$。よって，

$$\begin{aligned}xy+\frac{\sqrt{3}}{2}yz+\frac{1}{2}zx&=2(\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PBC}+\triangle\mathrm{PCA})\\&=2\triangle\mathrm{ABC}\\&=3\times4\\&=12\end{aligned}$$



(2) $\overrightarrow{p}=(a,b),\ \overrightarrow{q}=(c,d),\ \overrightarrow{r}=(e,f),\ \overrightarrow{s}=(g,h)$ とおくと，$ac+bd, ce+df, eg+fh, ga+hb, ae+bf, cg+dh$ はそれぞれ $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}, \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{s}, \overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{p}, \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}, \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{s}$ の 6 つの内積と対応する。$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}$ のどれかが $\overrightarrow{0}$ であれば題意は明らか。そうでない場合，$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}$ の中からそのなす角が 90° 以下である 2 つのベクトルがとれる。その 2 つのベクトルの内積は 0 以上。



$\boxed{\text{G4}}$

(1) $\text{OA}=\text{OB}=\text{OC}=\text{OD}=a,\ \text{OP}=p, \text{OQ}=q, \text{OR}=r, \text{OS}=s,$ $(\text{O}-\text{ABCD}\ \text{の体積})=V$ とおくと，$\text{O}-\text{PQRS}$ の体積を 2 通りで表して，

$$\begin{aligned}(\text{O}-\text{PQRS}\ \text{の体積}) &= (\text{三角錐 O}-\text{PQR}\ \text{の体積})+(\text{三角錐 O}-\text{RSP}\ \text{の体積})\\ &= \frac{V}{2}\cdot\frac{p}{a}\cdot\frac{q}{a}\cdot\frac{r}{a}+\frac{V}{2}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{s}{a}\cdot\frac{p}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{O}-\text{PQRS}\ \text{の体積}) &= (\text{三角錐 O}-\text{QRS}\ \text{の体積})+(\text{三角錐 O}-\text{SPQ}\ \text{の体積})\\ &= \frac{V}{2}\cdot\frac{q}{a}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{s}{a}+\frac{V}{2}\cdot\frac{s}{a}\cdot\frac{p}{a}\cdot\frac{q}{a}\end{aligned}$$

よって，

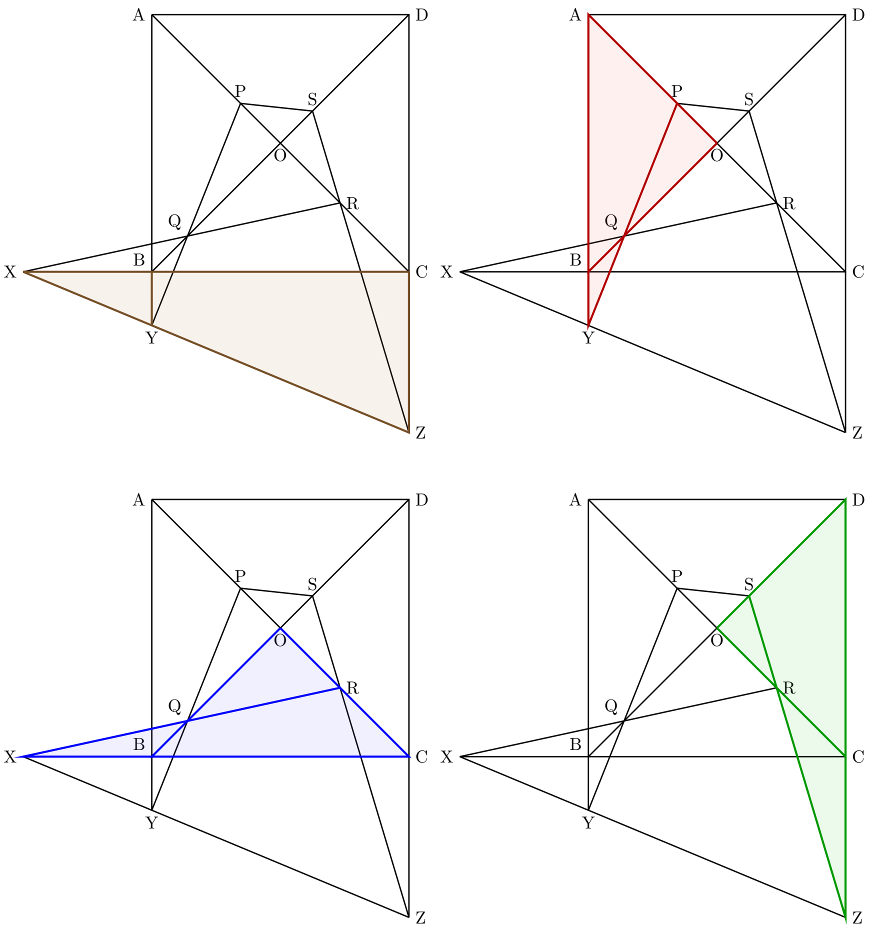
$$pqr+rsp=qrs+spq$$

$$\therefore \frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}$$

今回は $p=2, q=4, r=3$ なので，$s=\dfrac{12}{7}$ とわかる。

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=a$，$\mathrm{OP}=p, \mathrm{OQ}=q, \mathrm{OR}=r, \mathrm{OS}=s$ とおくと，直角三角形の相似およびメネラウスの定理から，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{CZ}=\mathrm{BY}\cdot\frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{BX}} && \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{CZ}}=\frac{1}{\mathrm{BY}}\cdot\frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{XC}}\\
&\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{YA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QB}}=1 && \Leftrightarrow \quad 1+\frac{\sqrt{2}a}{\mathrm{BY}}=\frac{a-p}{p}\cdot\frac{q}{a-q}\\
&\frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{BX}}\cdot\frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{CR}}\cdot\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{OQ}}=1 && \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{XC}}=\frac{r}{a-r}\cdot\frac{a-q}{q}\\
&\frac{\mathrm{ZD}}{\mathrm{CZ}}\cdot\frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{DS}}\cdot\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{OR}}=1 && \Leftrightarrow \quad 1+\frac{\sqrt{2}a}{\mathrm{CZ}}=\frac{a-s}{s}\cdot\frac{r}{a-r}
\end{aligned}
$$



これらを用いて，

$$
\begin{aligned}
\frac{a-s}{s}\cdot\frac{r}{a-r}&=1+\frac{\sqrt{2}a}{\mathrm{CZ}}\\
&=1+\frac{\sqrt{2}a}{\mathrm{BY}}\cdot\frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{XC}}\\
&=1+\left(\frac{a-p}{p}\cdot\frac{q}{a-q}-1\right)\cdot\frac{r}{a-r}\cdot\frac{a-q}{q}
\end{aligned}
$$

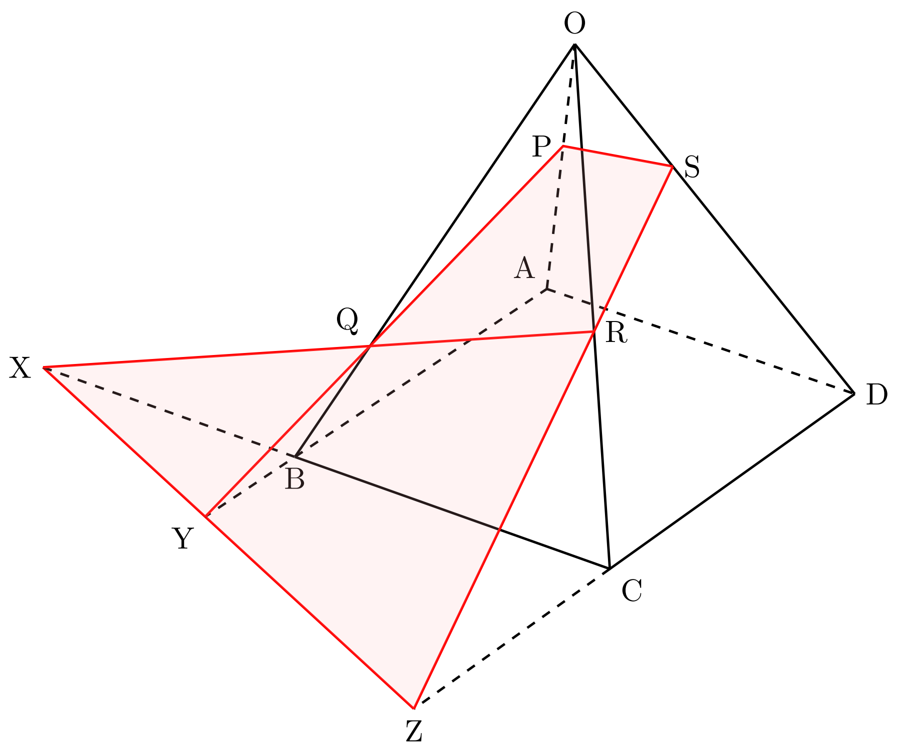
両辺 $\dfrac{r}{a-r}$ で割って,

$$\begin{aligned}
&\frac{a-s}{s}=\frac{a-r}{r}+\left(\frac{a-p}{p}\cdot\frac{q}{a-q}-1\right)\cdot\frac{a-q}{q}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a-s}{s}+\frac{a-q}{q}=\frac{a-r}{r}+\frac{a-p}{p}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}
\end{aligned}$$

今回は $p=2,q=4,r=3$ なので，$s=\dfrac{12}{7}$ とわかる。

(別解)

次の図をよ〜く睨んでいると (1) と (2) が等価であることがわかる。(この図を上から眺めてみよう)

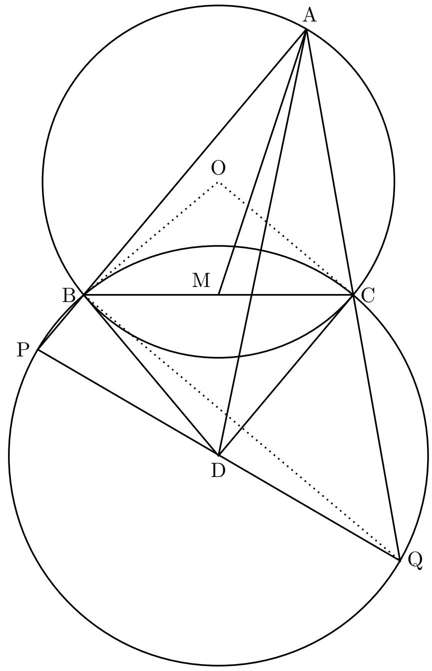


$\boxed{\text{G5}}$

(1) △ABC の外接円の中心を O，D を中心として B を通る円と AB, AC の交点をそれぞれ P, Q とすると,

$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{PBQ}&=\angle\mathrm{BAQ}+\angle\mathrm{BQA}\\
&=\frac{1}{2}(\angle\mathrm{BOC}+\angle\mathrm{BDC})\qquad(\because\ \text{円周角の定理})\\
&=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle\mathrm{OBD}+\angle\mathrm{OCD})\\
&=\frac{1}{2}(360^\circ-90^\circ-90^\circ)\\
&=90^\circ
\end{aligned}$$

よって QP は円 D の直径であり，D は QP の中点となる。△ABC ∼ △AQP という相似において，M は BC の中点，D は QP の中点であることから M と D が対応していることがわかる。ゆえに，$\angle\mathrm{BAM}=\angle\mathrm{QAD}$ 。

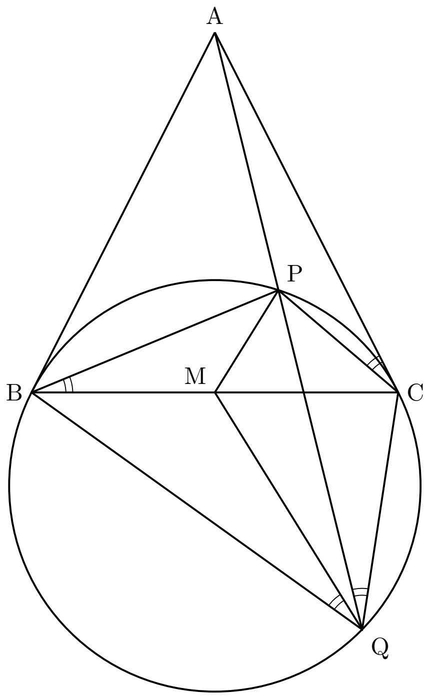


(2) $AB = AC$ より，$\angle ABC = \angle ACB$。$\angle PBA = \angle PCB$ と合わせて $\angle PBC = \angle PCA$。ゆえに接弦定理の逆から，AB と AC は $\triangle PBC$ の外接円の接線であることが分かる。AP とその外接円の交点を Q とすると，(1) と同様に $\angle PQC = \angle BQM$。また，$\angle BQP = \angle MQC$。円周角の定理より $\angle BPQ = \angle MCQ$ であることと合わせて，$\triangle QPB \sim \triangle QCM$。よって，

$$\frac{QM}{QB} = \frac{MC}{BP}$$
$$\therefore \frac{QM}{QB} = \frac{BM}{BP}$$

$\angle BQM = \angle PQC = \angle PBM$ と合わせて，$\triangle QBM \sim \triangle BPM$。ゆえに，

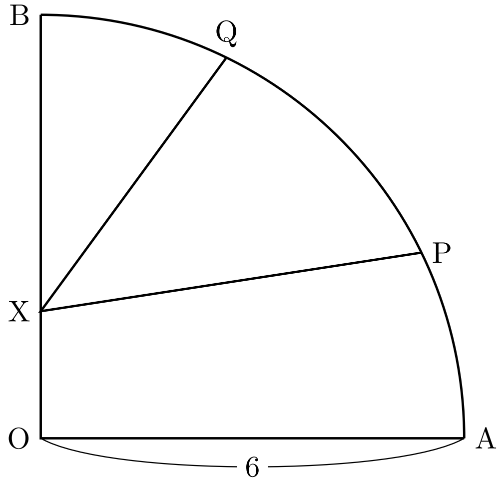
$$\angle APC + \angle BPM = \angle APC + \angle QBM = \angle APC + \angle QPC = 180^\circ$$



数学オリンピックワークショップ 当日問題 G

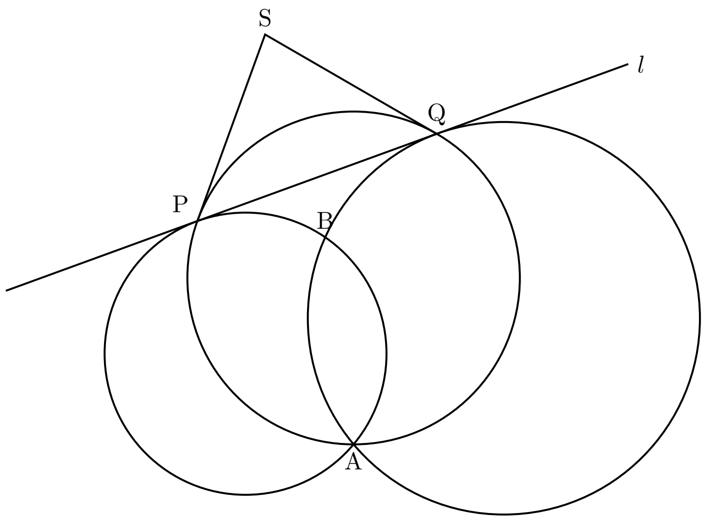
$\boxed{\text{G6}}$ (基礎)

半径 6，中心角 90° の扇形 OAB の弧 AB 上に $\angle\text{AOP} = \angle\text{BOQ}$ となるように点 P, Q をとる。点 X が線分 OB 上を動くとき，$\text{PX} + \text{QX}$ の最小値を求めよ。



$\boxed{\text{G7}}$ (応用)

2 つの円が平面上で 2 点 A, B で交わっている。この 2 円の共通接線を l とし，l と 2 円はそれぞれ点 P, Q で接しているものとする。また $\triangle\text{PAQ}$ の外接円の P, Q における接線の交点を S とする。B' を l に関する B の対称点とするとき，$\text{A}, \text{B}', \text{S}$ は同一直線上にあることを示せ。

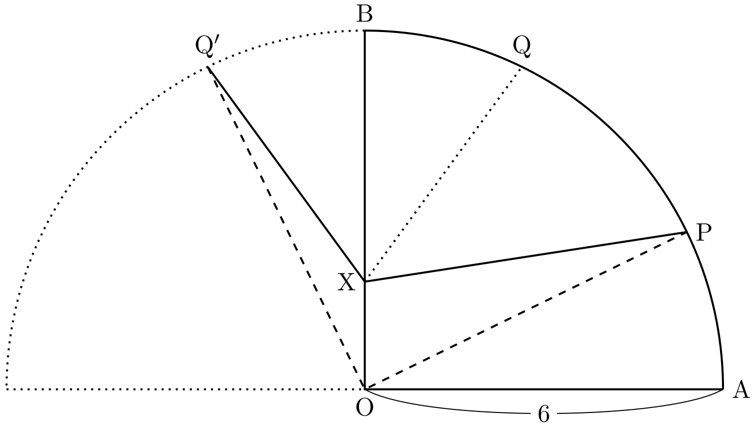


数学オリンピックワークショップ 当日問題 G —解答—

$\boxed{\text{G6}}$

OB に関する Q の対称点を Q' とすると，$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{BOQ} = \angle\mathrm{BOQ}'$ より，$\angle\mathrm{POQ}' = 90^\circ$ となるので，$\triangle\mathrm{OPQ}'$ は直角二等辺三角形。

ゆえに，$\mathrm{PX} + \mathrm{QX} = \mathrm{PX} + \mathrm{Q}'\mathrm{X}$ は P, X, Q' が同一直線上にあるとき，最小値 $6\sqrt{2}$ をとる。

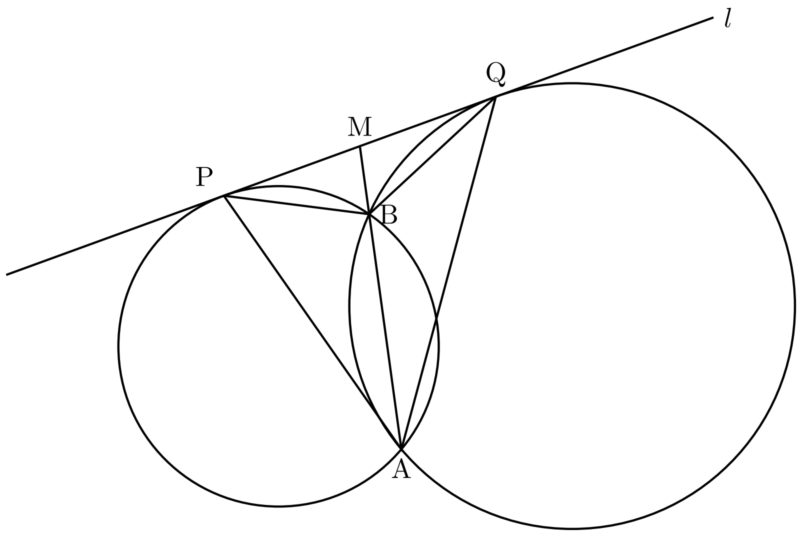


$\boxed{\text{G7}}$

AB と l の交点を M とすると方べきの定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{MP}^2 &= \mathrm{MB}\cdot\mathrm{MA}\\ &= \mathrm{MQ}^2\end{aligned}$$

よって $\mathrm{MP} = \mathrm{MQ}$，つまり M は PQ の中点。



ゆえに，AS と $\triangle$PAQ の外接円の交点を R とすれば，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{PQB} &= \angle \mathrm{QAM} && (\because \ \text{接弦定理})\\ &= \angle \mathrm{PAS} && (\because \ \boxed{\mathrm{G5}}(1))\\ &= \angle \mathrm{PQR} && (\because \ \text{円周角の定理})\end{aligned}$$

同様に，$\angle \mathrm{QPB} = \angle \mathrm{QPR}$ もわかるので，$\triangle \mathrm{BPQ} \equiv \triangle \mathrm{RPQ}$。つまり，$\mathrm{B}'$ は R に他ならないので，$\mathrm{A}, \mathrm{B}' = \mathrm{R}, \mathrm{S}$ は同一直線上にある。