数学オリンピックワークショップ 当日問題 A —解答—

$\boxed{\text{A6}}$ 略解

(帰納法を回す部分などは各自で確認してください．白板で説明予定ですが, 必要に応じ窪田に聞いてください)

まず, (2) より帰納法で, 任意の整数 n について $f(na) = nf(a)$ を得る．$a = 1$ を代入し, 任意の整数 n について $f(n) = n$ である．また, $n \neq 0$ の時, $a = \frac{m}{n}$ を代入し, $m = nf(\frac{m}{n})$．よって任意の整数 n,$m(n \neq 0)$ について $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$ を得る．

ここで, (2) に $a = x$,$b = \frac{1}{x}$ を代入し, (3) より $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ を得る．$|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ であること, $|c| \geq 2$ を満たす任意の実数 c に対して $c = x + \frac{1}{x}$ を満たす x が存在することから, この式より,

$|x| \geq 2$ なる任意の x について $|f(x)| \geq 2$ とわかる．

ここで, 実数 k で, $k < f(k)$ となるようなものの存在を仮定する．このとき, ある有理数 q であって $k, f(k) - 4 < q < f(k)$ を満たすようなものが存在する．(有理数の稠密性といいます→参考) ここで,$|k - q - 2| > 2$ より, $|f(k - q - 2)| > 2$ である．一方, $f(k - q - 2) = f(k) + f(-q - 2) = f(k) - q - 2$ で, $q < f(k) < q + 4$ より $|f(k) - q - 2| < 2$．よって矛盾．よって任意の x について $x \geq f(x)$ である．$k > f(k)$ なる実数 k の存在を仮定したときも, 同様にして矛盾を導くことができる．したがって任意の x について $f(x) = x$ である．

参考　有理数の稠密性

任意の実数 $a < b$ に対し, $a < q < b$ を見たす有理数 q が存在する．

証明 $\frac{1}{b-a}$ よりも大きな自然数 N をとってくる．ここで, $\frac{s-1}{N} \leq a < \frac{s}{N}, \frac{t}{N} < b \leq \frac{t+1}{N}$ なる s, t をとってくると, $\frac{1}{N} < b - a$ より $s \leq t$ である. よって $\frac{s}{N}$ は条件を満たす.

数学オリンピックワークショップ 当日問題 C —解答—

$\boxed{\text{C6}}$ キーワード：一色ずつ処理, 数字から解法を予測する

次の補題を示す.

補題:　$2n$ 個の箱があり, それぞれにいくつかの赤玉と白玉が入っている. 赤玉の個数の最大を R, 白玉の個数の最大を W としたとき, これらの箱を n 個ずつに分け, 赤玉の個数の差が R 以下, 白玉の個数の差が W 以下であるようにすることができる.

補題証明: 帰納法を用いる. $n=1$ の時は明らか. 以下 $n=k-1$ で成立するならば $n=k$ でも成立することを示す. $2k$ 個の箱の内, 赤玉の個数が多い順に箱を $b_1, b_2, \cdots, b_{2k}$ とする. $b_3, b_4, \cdots, b_{2k}$ に帰納法の仮定を用いて $k-1$ 個ずつに分ける. そこで, b_1, b_2 のうち白玉が多い方を, $k-1$ 個組のうち白玉が少ない方に加え, 残りをもう一方に加える, とする. このとき白玉について条件を満たすのは明らか. 赤玉について, b_i の赤玉の個数を r_i とすると, 赤玉の個数の差は最大で $r_1 - r_2 + r_3$($k-1$ 個の箱の組同士の赤玉の個数の差は最大で r_3 なことに注意) より R 以下. よって赤玉についても条件をみたす. (補題証明終わり)

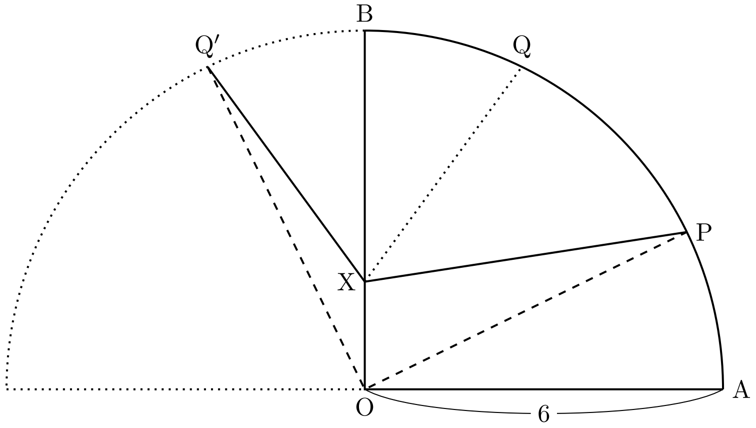
よって, 最も赤玉が多い箱を選び, 次に選ばれていない中で最も白玉が多い箱を選び, 残った 98 箱を補題にしたがって 49 箱ずつに分け, 緑玉が多い方を選べば条件を満たす.

数学オリンピックワークショップ 当日問題 G —解答—

$\boxed{\text{G6}}$

OB に関する Q の対称点を Q′ とすると，$\angle\mathrm{AOP} = \angle\mathrm{BOQ} = \angle\mathrm{BOQ'}$ より，$\angle\mathrm{POQ'} = 90^\circ$ となるので，$\triangle\mathrm{OPQ'}$ は直角二等辺三角形。

ゆえに，$\mathrm{PX} + \mathrm{QX} = \mathrm{PX} + \mathrm{Q'X}$ は P, X, Q′ が同一直線上にあるとき，最小値 $6\sqrt{2}$ をとる。

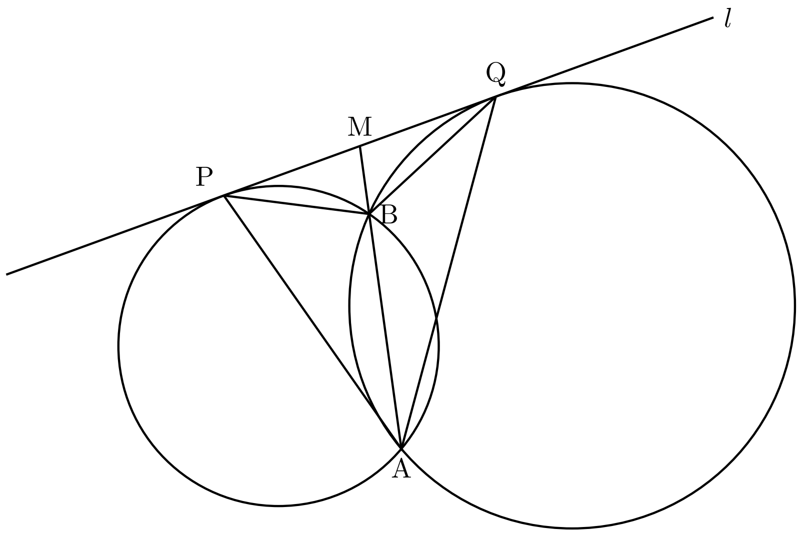


$\boxed{\text{G7}}$

AB と l の交点を M とすると方べきの定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{MP}^2 &= \mathrm{MB}\cdot\mathrm{MA}\\ &= \mathrm{MQ}^2\end{aligned}$$

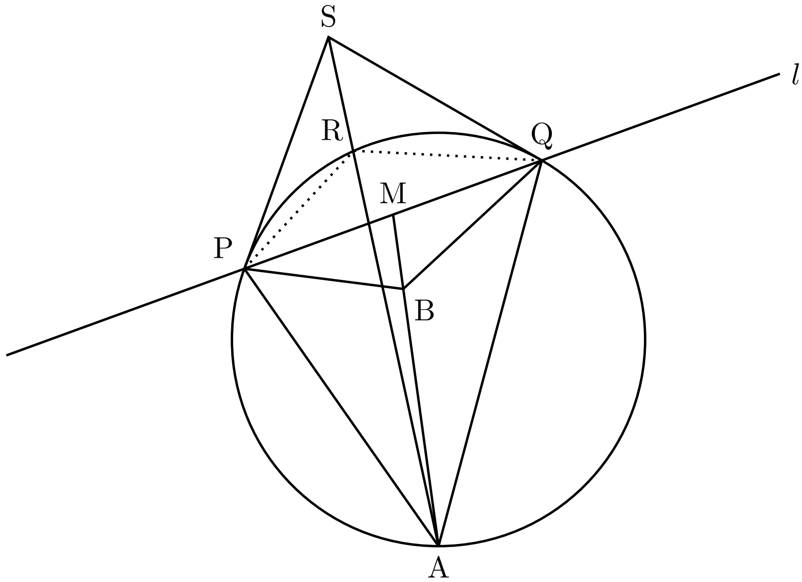
よって $\mathrm{MP} = \mathrm{MQ}$，つまり M は PQ の中点。



ゆえに，AS と $\triangle$PAQ の外接円の交点を R とすれば，

$$\begin{aligned} \angle \mathrm{PQB} &= \angle \mathrm{QAM} && (\because\ \text{接弦定理}) \\ &= \angle \mathrm{PAS} && (\because\ \boxed{\text{G5}}(1)) \\ &= \angle \mathrm{PQR} && (\because\ \text{円周角の定理}) \end{aligned}$$

同様に，$\angle \mathrm{QPB} = \angle \mathrm{QPR}$ もわかるので，$\triangle \mathrm{BPQ} \equiv \triangle \mathrm{RPQ}$。つまり，$\mathrm{B'}$ は R に他ならないので，$\mathrm{A}, \mathrm{B'} = \mathrm{R}, \mathrm{S}$ は同一直線上にある。



数学オリンピックワークショップ 当日問題 N —解答—

$\boxed{\text{N10}}$

正整数 $s>t$ が $(s-t)|t$ を満たすとき、問題文の条件より $a_s \neq a_t$ である。正整数の集合であって、どの 2 要素 $s>t$ も $(s-t)|t$ を満たすようないくらでも大きいものを構成すればよい。$\{1\}$ は条件を満たす。S が条件を満たすとき、M を S の要素の最小公倍数として、$\{s+M|s\in S\}\cup\{M\}$ は条件を満たす。よって示された。