JJMO 演習問題 A

$\boxed{\text{A1}}$ すべてが等しいわけではない 3 つの実数 x, y, z が

$$x + \frac{1}{yz} = y + \frac{1}{zx} = z + \frac{1}{xy}$$

をみたすとき，$x + \dfrac{1}{yz}$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{A2}}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (x+3)^2 + (y+4)^2 = (z+5)^2 \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y, z について，$\dfrac{x^2}{yz}$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{A3}}$ 正の実数 a, b, c に対し，

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (a+b)(b+c)(c+a)$$

が成立することを示せ。

JMO 演習問題 A

$\boxed{\text{A1}}$ 正の実数 a, b, c に対して，

$$\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq 3$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{\text{A2}}$ 正の実数 x, y, z に対して，

$$\frac{x}{(2x+y+z)^2}+\frac{y}{(2x+2y+z)^2}+\frac{z}{(2x+2y+2z)^2}<\frac{1}{2x+2y+2z}$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{\text{A3}}$ 実数に対して定義され実数値をとる関数であって，任意の実数 x, y について，

$$f(x^4+f(y))=f(x)^4+y$$

をみたすものをすべて求めよ。

JJMO 演習問題 A —解答—

$\boxed{\text{A1}}$

$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ のもとで,

$$x + \frac{1}{yz} = y + \frac{1}{zx} \Leftrightarrow x - y = \frac{y-x}{xyz} \Leftrightarrow (xyz+1)(x-y) = 0$$

同様に,

$$(xyz+1)(y-z) = 0,\ (xyz+1)(z-x) = 0$$

ここで，$xyz \neq -1$ とすると，$x = y = z$ となり矛盾。よって，$xyz = -1$。ゆえに,

$$x + \frac{1}{yz} = x + (-x) = 0$$

$\boxed{\text{A2}}$

第二式を展開すると，第一式より,

$$\begin{aligned}(x+3)^2 + (y+4)^2 = (z+5)^2 &\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = z^2 + 10z + 25 \\ &\Leftrightarrow 3x + 4y = 5z\end{aligned}$$

再び第一式を用いて,

$$(3x+4y)^2 = 25z^2 = 25(x^2+y^2)$$

ここで,

$$\begin{aligned}(3x+4y)^2 = 25(x^2+y^2) &\Leftrightarrow 16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (4x-3y)^2 = 0\end{aligned}$$

より，$y = \dfrac{4}{3}x$。これを第一式に代入して，$z = \dfrac{5}{3}x$ もわかる。ゆえに,

$$\frac{x^2}{yz} = \frac{x^2}{\frac{4}{3}x \cdot \frac{5}{3}x} = \frac{9}{20}$$

($\rightarrow$ 図形的に考えてもできます。)

$\boxed{\text{A3}}$

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a+b)^2 = a^2b^2 - 2ab + 1 = (ab-1)^2 \geq 0$$

などから,

$$\begin{aligned}(a^2+1)(b^2+1) &\geq (a+b)^2 \\ (b^2+1)(c^2+1) &\geq (b+c)^2 \\ (c^2+1)(a^2+1) &\geq (c+a)^2\end{aligned}$$

この三式を辺々かけあわせて，($a, b, c > 0$ に注意して) ルートをとれば,

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (a+b)(b+c)(c+a)$$

を得る。

JMO 演習問題 A —解答—

$\boxed{\text{A1}}$

相加相乗平均の不等式より，$a^2+1 \geq 2\sqrt{a^2} = 2a$ などが成り立つので,

$$\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b} \geq \frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}$$

さらにこの右辺について，Engel 型のコーシー・シュワルツの不等式より,

$$\begin{aligned}\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} &= \frac{a^2}{\frac{ab+ac}{2}}+\frac{b^2}{\frac{bc+ba}{2}}+\frac{c^2}{\frac{ca+cb}{2}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{ab+ac}{2}+\frac{bc+ba}{2}+\frac{ca+cb}{2}} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3$$

を示せば十分であるが，これは

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$$

から直ちに示される。

$\boxed{\text{A2}}$

$$\begin{aligned}&\frac{x}{(2x+y+z)^2}+\frac{y}{(2x+2y+z)^2}+\frac{z}{(2x+2y+2z)^2} \\ &< \frac{x}{(x+y+z)(2x+y+z)}+\frac{y}{(2x+y+z)(2x+2y+z)}+\frac{z}{(2z+2y+z)(2x+2y+2z)} \\ &= \frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{2x+y+z}-\frac{1}{2x+2y+z}+\frac{1}{2x+2y+z}-\frac{1}{2x+2y+2z} \\ &= \frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{2x+2y+2z} = \frac{1}{2x+2y+2z}\end{aligned}$$

よりよい。

$\boxed{\text{A3}}$

与式において x に 0 を代入して,

$$f(f(y)) = f(0)^4+y \tag{1}$$

この右辺は全実数値をとりうるので f は全射。ゆえにある α が存在して，$f(\alpha)=0$。

また，$f(a)=f(b)$ になったと仮定すると，(1) 式において y に a,b をそれぞれ代入して,

$$\begin{aligned}f(f(a)) &= f(0)^4+a \\ f(f(b)) &= f(0)^4+b\end{aligned}$$

つまり

$$f(a)=f(b)\Rightarrow a=b \ \ (f \text{ は単射})$$

与式において，$(x,y)\to(\alpha,\alpha)$ として，

$$f(\alpha^4+f(\alpha))=f(\alpha)^4+\alpha \Leftrightarrow f(\alpha^4)=\alpha \tag{2}$$

与式において，$(x,y)\to(-\alpha,\alpha)$ として，

$$f((-\alpha)^4+f(\alpha))=f(-\alpha)^4+\alpha \Leftrightarrow f(\alpha^4)=f(-\alpha)^4+\alpha \tag{3}$$

(2)(3) より，$f(-\alpha)^4=0\Leftrightarrow f(-\alpha)=0$。$f(\alpha)=0$ でもあるので，f の単射性から，$-\alpha=\alpha\Leftrightarrow\alpha=0$。つまり，$f(0)=0$ であるので，(1) より，

$$f(f(y))=y \tag{4}$$

与式において，y を $f(y)$ として，(4) より，

$$f(x^4+f(f(y)))=f(x)^4+f(y)\Leftrightarrow f(x^4+y)=f(x)^4+f(y)$$

ゆえに f は狭義単調増加関数である。実際,

$$z>y\Rightarrow f(z)=f((z-y)+y)=f(\sqrt[4]{z-y}\,)^4+f(y)>f(y)$$

(4) 式と合わせて (予習用問題と同じ議論をして)，求める f は $f(x)=x$。