事前演習問題 A

$\boxed{\text{A1}}$ (基礎)

(1) 10101010101 を 1000 以上の 2 つの自然数の積で表せ。

(2) 実数 x, y が $(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1$ をみたすとき $x+y$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{A2}}$ (標準)

(1) (i) $(pr+qs)^2+(ps-qr)^2=(p^2+q^2)(r^2+s^2)$ を示せ。

(ii) $$\frac{(2^2+2-1)^2+(2\cdot2+1)^2}{(1^2+1-1)^2+(2\cdot1+1)^2}\cdot\frac{(4^2+4-1)^2+(2\cdot4+1)^2}{(3^2+3-1)^2+(2\cdot3+1)^2}\cdot\frac{(6^2+6-1)^2+(2\cdot6+1)^2}{(5^2+5-1)^2+(2\cdot5+1)^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(14^2+14-1)^2+(2\cdot14+1)^2}{(13^2+13-1)^2+(2\cdot13+1)^2}\cdot\frac{(16^2+16-1)^2+(2\cdot16+1)^2}{(15^2+15-1)^2+(2\cdot15+1)^2}$$

の値を求めよ。

(2) 以下の連立方程式を満たす実数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\begin{cases} x^2+9= & 2y+2z \\ y^2+4=x+2y+z \\ z^2+1=x & +3z \end{cases}$$

$\boxed{\text{A3}}$ (応用)

(1) (i) $a(x-2)^2+b(x-2)+c$ を展開せよ。

(ii) 実数の組 (p,q,r) について，(p,q,r) を $(p,-4p+q,4p-2q+r)$ に変える操作を A，(p,q,r) を $(p+q+r,2p+q,p)$ に変える操作を B とする。例えば $(1,2,3)$ に操作 B を行うと $(6,4,1)$ となり，さらに操作 A を行うと $(6,-20,17)$ となる。$(1,1,1)$ に操作 A, B を何度か行うことで $(0,0,2017)$ に変えることができるか。できるならばその方法を示し，できないならばそれを証明せよ。

(2) (i) 実数 x, y, z に対して，

$$(x+y+z)^2 \geq (2x+z)(2y+z)$$

が成り立つことを示せ。

(ii) 正の実数 a, b, c に対して，

$$(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c) \geq (3a+b)(3b+c)(3c+a)$$

が成り立つことを示せ。

事前演習問題 A

$\boxed{\text{A1}}$ (基礎)

(1) 以下の連立方程式を満たす実数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\begin{cases} x^4 + 6y^2 + 1 = 4(z^3 + z) \\ y^4 + 6z^2 + 1 = 4(x^3 + x) \\ z^4 + 6x^2 + 1 = 4(y^3 + y) \end{cases}$$

(2) 実数 x, y が $(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1$ をみたすとき $x + y$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{A2}}$ (標準)

(1) 以下の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x+y} = x + 2018 \\ \dfrac{y}{2x+y+1} = 2x + 2019 \\ \dfrac{y}{3x+y+2} = 3x + 2020 \end{cases}$$

(2) $$\frac{(2^2+2-1)^2+(2\cdot2+1)^2}{(1^2+1-1)^2+(2\cdot1+1)^2}\cdot\frac{(4^2+4-1)^2+(2\cdot4+1)^2}{(3^2+3-1)^2+(2\cdot3+1)^2}\cdot\frac{(6^2+6-1)^2+(2\cdot6+1)^2}{(5^2+5-1)^2+(2\cdot5+1)^2}\cdot \cdots \cdot\frac{(14^2+14-1)^2+(2\cdot14+1)^2}{(13^2+13-1)^2+(2\cdot13+1)^2}\cdot\frac{(16^2+16-1)^2+(2\cdot16+1)^2}{(15^2+15-1)^2+(2\cdot15+1)^2}$$

の値を求めよ。

(3) 実数に対して定義され実数値をとる狭義単調増加関数 $(p < q \Rightarrow f(p) < f(q))$ であって，任意の実数 x に対して，

$$f(f(f(x))) = x$$

が成り立つものをすべて求めよ。

(4) 実数 x, y が $(x + \sqrt{1 + y^2})(y + \sqrt{1 + x^2}) = 1$ をみたすとき $x + y$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{A3}}$ (応用)

(1) (i) 正の実数 a, b, c について，

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

が成り立つことを示せ。

(ii) 正の実数 a, b, c について，

$$\frac{a^4}{b^3} + \frac{b^4}{c^3} + \frac{c^4}{a^3} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって，任意の実数 x, y に対して，

$$f(x + f(y)) = f(f(x) - y) + 2y$$

が成り立つものをすべて求めよ。

JJMO 事前演習問題 A —解答—

A1

(1) 10101010101 を x とすると，

$$99x = 999999999999 = 10^{12} - 1 = (10^6 - 1)(10^6 + 1) = 999999 \times 1000001$$

よって，

$$x = \frac{999999}{99} \times 1000001 = 10101 \times 1000001$$

が答の一例。

(2) $(x - \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2}) = -1$ に注意して，与式の両辺に $x - \sqrt{1+x^2}$ をかけると，

$$-(y + \sqrt{1+y^2}) = x - \sqrt{1+x^2} \iff x + y = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}$$

同様に，与式の両辺に $y - \sqrt{1+y^2}$ をかけると，

$$-(x + \sqrt{1+x^2}) = y - \sqrt{1+y^2} \iff x + y = -\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}$$

ゆえに，

$$x + y = 0$$

A2

(1) (i) 左辺右辺ともに展開すれば $p^2r^2 + q^2s^2 + p^2s^2 + q^2r^2$ になる。

(ii) (i) において，$p = n+1, q = -1, r = n, s = 1$ を代入して，

$$(n^2 + n - 1)^2 + (2n+1)^2 = (n^2+1)\left\{(n+1)^2 + 1\right\}$$

これを用いれば，$f(n) = n^2 + 1$ として，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{f(2)f(3)}{f(1)f(2)} \cdot \frac{f(4)f(5)}{f(3)f(4)} \cdot \frac{f(6)f(7)}{f(5)f(6)} \cdot \ \cdots \ \cdot \frac{f(14)f(15)}{f(13)f(14)} \cdot \frac{f(16)f(17)}{f(15)f(16)} \\ &= \frac{f(17)}{f(1)} = \frac{17^2+1}{1^2+1} = 145\end{aligned}$$

(2) 与えられた三式をすべて足すと，

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 + 4 + 9 = 2x + 4y + 6z \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$$

実数を二乗して得られる値は必ず 0 以上なので，これが成り立つためには，

$$x - 1 = y - 2 = z - 3 = 0 \iff (x, y, z) = (1, 2, 3)$$

が必要。逆に $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ が元の連立方程式を満たすことはすぐに確かめられる。

A3

(1) (i)

$$a(x-2)^2 + b(x-2) + c = ax^2 + (-4a+b)x + 4a - 2b + c$$

(ii) それぞれの操作で q^2-4pr が不変であることに注意する。実際,

$$(-4p+q)^2-4p(4p-2q+r)=q^2-4pr$$
$$(2p+q)^2-4(p+q+r)p=q^2-4pr$$

問題文の具体例 $(1,2,3)\xrightarrow{B}(6,4,1)\xrightarrow{A}(6,-20,17)$ の場合だと，確かに

$$2^2-4\cdot1\cdot3=4^2-4\cdot6\cdot1=(-20)^2-4\cdot6\cdot17\quad(=-8)$$

となっている。ここで,

$$1^2-4\cdot1\cdot1\neq0^2-4\cdot0\cdot2017$$

であるので，$(1,1,1)\to\cdots\to(0,0,2017)$ とすることはできない。

(2) (i)

$$(x+y+z)^2-(2x+z)(2y+z)=x^2+2xy+y^2-4xy=(x-y)^2\geq0$$

よりよい。

(ii) (i) において，$(x,y,z)=(a,b,b+c)$ とすれば,

$$(a+2b+c)^2\geq(2a+b+c)(3b+c)$$

同様にして，$(x,y,z)=(b,c,c+a)$，$(c,a,a+b)$ とすれば,

$$(a+b+2c)^2\geq(a+2b+c)(3c+a)$$
$$(2a+b+c)^2\geq(a+b+2c)(3a+b)$$

これら三式を辺々かけて,

$$(2a+b+c)^2(a+2b+c)^2(a+b+2c)^2\geq(3a+b)(3b+c)(3c+a)(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$$

両辺 $(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)>0$ で割れば,

$$(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)\geq(3a+b)(3b+c)(3c+a)$$

を得る。

JMO 事前演習問題 A —解答—

$\boxed{\text{A1}}$

(1) 3式を辺々足して整理すると，

$$(x-1)^4+(y-1)^4+(z-1)^4=0$$

x,y,z が実数のとき左辺の各項は 0 以上であることに注意して，$(x,y,z)=(1,1,1)$ に限られる。逆に $(x,y,z)=(1,1,1)$ は与方程式を満たすのでこれが求めるものである。

(2) $(x-\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})=-1$ に注意して，与式の両辺に $x-\sqrt{1+x^2}$ をかけると，

$$-(y+\sqrt{1+y^2})=x-\sqrt{1+x^2}\ \Leftrightarrow\ x+y=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}$$

同様に，与式の両辺に $y-\sqrt{1+y^2}$ をかけると，

$$-(x+\sqrt{1+x^2})=y-\sqrt{1+y^2}\ \Leftrightarrow\ x+y=-\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}$$

ゆえに，

$$x+y=0$$

$\boxed{\text{A2}}$

(1) 与式を満たす (x,y) について，$\alpha=x,\beta=2x+1,\gamma=3x+2$ とすれば，

$$\begin{cases}\dfrac{y}{\alpha+y}=\alpha+2018\\[2mm]\dfrac{y}{\beta+y}=\beta+2018\\[2mm]\dfrac{y}{\gamma+y}=\gamma+2018\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2+(y+2018)\alpha+2017y=0\\\beta^2+(y+2018)\beta+2017y=0\\\gamma^2+(y+2018)\gamma+2017y=0\end{cases}$$

すなわち，α,β,γ は t についての二次方程式 $t^2+(y+2018)t+2017y=0$ の解である。ここで二次方程式の解は高々 2 つしか存在しないので α,β,γ のうち少なくとも 2 つは等しいことがわかり，$\alpha=\beta,\beta=\gamma,\gamma=\alpha$, いずれの場合も $x=-1$ を得る。$x=-1$ を与式に代入して，

$$\frac{y}{y-1}=2017\Leftrightarrow y=\frac{2017}{2016}$$

ゆえに，$(x,y)=\left(-1,\dfrac{2017}{2016}\right)$ であり，これはたしかに与式を満たす。

(2)

$$(n^2+n-1)^2+(2n+1)^2=(n^2+1)\left\{(n+1)^2+1\right\}$$

であるので，$f(n)=n^2+1$ として，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{f(2)f(3)}{f(1)f(2)}\cdot\frac{f(4)f(5)}{f(3)f(4)}\cdot\frac{f(6)f(7)}{f(5)f(6)}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{f(14)f(15)}{f(13)f(14)}\cdot\frac{f(16)f(17)}{f(15)f(16)}\\&=\frac{f(17)}{f(1)}=\frac{17^2+1}{1^2+1}=145\end{aligned}$$

(3) ある y について，$y < f(y)$ となったと仮定すると，f の単調増加性 $(p < q \Rightarrow f(p) < f(q))$ から，

$$f(y) < f(f(y))$$
$$f(f(y)) < f(f(f(y)))$$

このとき，

$$y < f(y) < f(f(y)) < f(f(f(y))) = y$$

となり，矛盾。同様に $y > f(y)$ となったと仮定すると，$y > f(y) > f(f(y)) > f(f(f(y))) = y$ となり，矛盾。ゆえに任意の x について，$f(x) = x$。逆に $f(x) = x$ が題意を満たすことはすぐに分かる。

(4) 実数 x, y について，$x = \dfrac{s - s^{-1}}{2}$，$y = \dfrac{t - t^{-1}}{2}$ なる正の実数 s, t がただ一つ存在する。(グラフを書けばわかる。) これらの $s, t > 0$ に対して，

$$\sqrt{1 + \left(\frac{s - s^{-1}}{2}\right)^2} = \frac{s + s^{-1}}{2},\quad \sqrt{1 + \left(\frac{t - t^{-1}}{2}\right)^2} = \frac{t + t^{-1}}{2}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{1 + y^2})(y + \sqrt{1 + x^2}) = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{s - s^{-1}}{2} + \frac{t + t^{-1}}{2}\right)\left(\frac{t - t^{-1}}{2} + \frac{s + s^{-1}}{2}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(s + t - \frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right)\left(s + t + \frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right) = 4 \\ &\Leftrightarrow s^2t^2(s + t)^2 - (t - s)^2 = 4s^2t^2 \\ &\Leftrightarrow (st - 1)\left\{(s + t)^2 st + (s - t)^2\right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow st = 1 \qquad (\because (s + t)^2 st + (s - t)^2 > 0)\end{aligned}$$

ゆえに，

$$x + y = \frac{s - s^{-1}}{2} + \frac{t - t^{-1}}{2} = \frac{s - t}{2} + \frac{t - s}{2} = 0$$

A3

(1) (i) コーシー・シュワルツの不等式より，

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(b + c + a) \geq \left(\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} + \sqrt{\frac{b^2}{c} \cdot c} + \sqrt{\frac{c^2}{a} \cdot a}\right)^2 = (a + b + c)^2$$

両辺を $a + b + c > 0$ で割って，

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

を得る。

(別解 1)

Engel 型のコーシー・シュワルツの不等式より，

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{b + c + a} = a + b + c$$

(別解 2)

相加相乗平均の不等式より，

$$\frac{\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}}{7} \geq \sqrt[7]{\frac{a^2}{b}\frac{a^2}{b}\frac{a^2}{b}\frac{a^2}{b}\frac{b^2}{c}\frac{b^2}{c}\frac{c^2}{a}} = a$$

同様にして，

$$\frac{\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}}{7} \geq b$$

$$\frac{\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}}{7} \geq c$$

上３式を足せば，

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$$

を得る。

(別解 3)

相加相乗平均の不等式より，

$$\frac{a^2}{b}+b \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b} = 2a \qquad \therefore\ \frac{a^2}{b} \geq 2a-b$$

同様にして，

$$\frac{b^2}{c} \geq 2b-c$$

$$\frac{c^2}{a} \geq 2c-a$$

上３式を足せば，

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$$

を得る。

(ii) Engel 型のコーシー・シュワルツの不等式より，

$$\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3} = \frac{\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^2}{b}+\frac{\left(\dfrac{b^2}{c}\right)^2}{c}+\frac{\left(\dfrac{c^2}{a}\right)^2}{a} \geq \frac{\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right)^2}{b+c+a}$$

さらにこの右辺について，(1) より，

$$\frac{\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right)^2}{b+c+a} \geq \frac{\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\right)(a+b+c)}{b+c+a} = \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

となるのでよい。

(2) 与式において，x に $-f(y)$ を代入して，

$$f(-f(y)+f(y)) = f\big(f(-f(y))-y\big)+2y \iff f\big(f(-f(y))-y\big) = 2y - f(0)$$

y が実数全体を動くとき，右辺の $2y-f(0)$ も実数全体を動くので f は全射 (任意の実数 s について，$f(t)=s$ なる実数 t が存在する)。ゆえに，ある実数 α が存在して $f(\alpha)=0$。
さらに，与式において y に α を代入して，

$$f(x+f(\alpha)) = f(f(x)-\alpha)+2\alpha \iff f(x)-\alpha-\alpha = f(f(x)-\alpha)$$

ここで f の全射性から x が全実数を動くとき $f(x)-\alpha$ も全実数を動くので，これを z と置き換えて，

$$\text{任意の実数 } z \text{ について，} z-\alpha = f(z)$$

がわかる。すなわち，題意を満たす f は c を定数として，$f(x) = x+c$ の形に限られる。逆に $f(x)=x+c$ が与式を満たすことはすぐにわかるのでこれが求めるものである。

(参考)

重み付き相加相乗平均の不等式

$p_1, p_2, \cdots, p_n > 0$ が $p_1+p_2+\cdots+p_n = 1$ をみたすとき，任意の $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ について，

$$p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n \geq a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}$$

コーシー・シュワルツの不等式

実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n,\ b_1, b_2, \cdots, b_n$ について，

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

有用な不等式 (Engel 型コーシー・シュワルツ)

正の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n,\ x_1, x_2, \cdots, x_n$ について，

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

※ コーシー・シュワルツの不等式と (ほとんど) 同値。実際，コーシー・シュワルツの不等式において，$a_i \to \sqrt{\dfrac{x_i^2}{a_i}}$ ，$b_i \to \sqrt{a_i}$ とすれば，Engel 型が得られる。

(その他)
凸不等式，ヘルダー (Hölder) の不等式，シューア (Schur) の不等式，並び替え不等式，チェビシェフ (Chebyshev) の不等式，べき平均不等式，ミンコフスキー (Minkowski) の不等式