数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 A —解答—

$\boxed{\text{A1}}$ キーワード: 対称性

まず, 1 以上の正の実数 x,y について, $|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}| \leq |x-y|, |\frac{1}{x}-y|, |x-\frac{1}{y}|$ を示す. 対称性より $x \leq y$ とする. このとき, $|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}| = |\frac{x-y}{xy}| = \frac{1}{xy}|x-y| \leq |x-y|$ である. また, $0 \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \leq x \leq y$ より, $|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}| \leq |\frac{1}{y}-x|, |x-y| \leq |y-\frac{1}{x}|$ である. よって示された.

したがって, $\frac{a_i}{a_j}, \frac{a_k}{a_l}$ はそれぞれ 1 以下の実数であるとして良い. (もし仮に 1 より大きいのであれば, 上に示したことから逆数にした方がより小さくできるため) よって, $|\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_3}{a_4}|, |\frac{a_1}{a_3}-\frac{a_2}{a_4}|, |\frac{a_1}{a_4}-\frac{a_2}{a_3}|$ の大小を考えればよい.

ここで, $|\frac{a_1}{a_3}-\frac{a_2}{a_4}| = \frac{a_2}{a_3}|\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_3}{a_4}| \leq |\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_3}{a_4}|$ である. また, $|\frac{a_1}{a_3}-\frac{a_2}{a_4}| = \frac{1}{a_3a_4}|a_1a_4-a_2a_3|$, $|\frac{a_1}{a_4}-\frac{a_2}{a_3}| = \frac{1}{a_3a_4}|a_1a_3-a_2a_4|$. ここで $a_1a_3 < a_1a_4, a_2a_3 < a_2a_4$ より $|a_1a_4-a_2a_3| < |a_1a_3-a_2a_4|$. よって $|\frac{a_1}{a_3}-\frac{a_2}{a_4}| < |\frac{a_1}{a_4}-\frac{a_2}{a_3}|$.

以上より, $|\frac{a_1}{a_4}-\frac{a_2}{a_3}|$ が最小である.

$\boxed{\text{A2}}$ キーワード: 多項式の扱い

※一般的に通用するテクニックを説明するため, 遠回りの解法をしています.

$f(x), g(x)$ の次数を F, G とおく. このとき $f(x^3), g(x), f(x), x^5g(x)$ の次数はそれぞれ $3F, G, F, G+5$ である. F, G の値で場合分けをする.

(1) $3F = G$ のとき, 右辺の次数は $F < G+5$ より $G+5$, 右辺は G 以下より不適

(2) $F = G+5$ のとき, 左辺の次数は $3F > G$ より $3F$, 右辺は F 以下より不適

(3) $3F \neq G$ かつ $F \neq G+5$ のとき, $max(3F, G) = max(F, G+5)$ である. 各組み合わせを調べると, $F = G$ で不適なことが明らかなので, これが成立するのは $3F = G+5$ の時のみとわかる.

- (i) $F = 2$ のとき, $G = 1$. 右辺の x^2 の係数は 0 ではないが左辺の x^2 の係数は 0. よって不適
- (ii) $F = 3$ のとき, $G = 4$. 右辺の x^4 の係数は 0 だが左辺の x^4 の係数は 0 でない. よって不適
- (iii) $F = 4$ のとき, $G = 7$. ここで, 式を変形すると $f(x^3) - f(x) = (x^5-1)g(x)$ を得る. $f(x)$ を $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおいて代入し割り算を計算すると, $f(x^3)-f(x)$ が x^5-1 で割りきれることと, $a = b = c = d$ が必要十分.

したがって解は $f(x) = ax^4+ax^3+ax^2+ax+e$(ただし $a \neq 0$) と表される. 例えば $x^4+x^3+x^2+x$ は条件を満たすような例である.

$\boxed{\text{A3}}$キーワード: 同じものを作って消す

$a = 0, b = x$ を与式に代入し, $f(0) + 2f(x) = f(f(x))$ を得る. また, $a = 1, b = x-1$ を代入し, $f(2) + 2f(x-1) = f(f(x))$ を得る.

これらの式を比較し, 任意の x について, $f(x) = f(x-1) + \frac{f(2)-f(0)}{2}$ を得る. したがって, $\frac{f(2)-f(0)}{2} = c, f(0) = d$ と置けば, 任意の x について $f(x) = cx+d$ と表すことができる. 元の式に代入し, $2ca+2cb+3d = c(ca+cb+d)+d = c^2a+c^2b+cd+d$. a, b の係数と定数項に注目し,$2c = c^2$, $3d = (c+1)d$ を得る. これを満たす組みは, $c = 2$(d は任意) または $c = d = 0$.

よって (任意の x について)$f(x) = 0$ または, (任意の x について)$f(x) = 2x+c$(ただし c は任意の整数定数) が求める関数である.

(IMO の問題にしては異常なまでに簡単な問題です... 何があったんでしょう...？)

$\boxed{\text{A4}}$キーワード: Ravi 変換, 重み付き相加相乗平均 コーシーシュワルツの不等式

まず, Ravi 変換を説明する.

Ravi 変換: a, b, c が三角形の三辺をなすことは, $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ を満たすような正の実数 x, y, z が存在することと同値

証明は三角不等式が三角形の成立条件であることから導かれる.

これを用いて不等式を書き直し, 整理する. 巡回式であることに注意して計算すると,

$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$

を示せばよいとわかる.

(1) 重み付き相加相乗平均より, $\frac{2}{7}xy^3 + \frac{4}{7}yz^3 + \frac{1}{7}zx^3 \geq x^2yz$. これと x, y, z について入れ替えたものを足し合わせることで示したい式を得る.

(2) コーシーシュワルツの不等式より, $(z + x + y)(\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y}) \geq (y + z + x)^2$. 両辺に $\frac{xyz}{x+y+z}$ をかけると示したい式を得る.

補足

- 重み付き相加相乗平均も, この形のコーシーシュワルツの不等式も時々出てくるので覚えておくとよいことがあるかもです.
- 不等式の問題では, 等号成立条件がヒントになる場合が多いです. 例えば, 全ての変数が等しいときに等号が成立したいときにむやみに同次式の相加相乗平均などにこだわりすぎないようにしましょう. (同次式の相加相乗平均では全ての変数が等しいときに等号が成立します)

$\boxed{\text{A5}}$キーワード: 数列の書き換え　鳩ノ巣原理を用いた周期性の議論　周期の最大値に注目

$\{b_n\}$ を $b_n = a_n + d$ で定める. このとき $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ が成り立つ. k を正の整数とする. このとき, 整数の組 (b_i, b_{i+1})(ただし $1 \leq i \leq a_k^2$) に注目することで, 鳩ノ巣原理より $b_i \equiv b_j, b_{i+1} \equiv b_{j+1} (\mathrm{mod}\ a_k)$ なる $k \leq i < j$ の組が存在することがわかる. このことと $b_n \equiv b_{n+2} - b_{n+1}$ より、$b_{j-i+k} \equiv b_k (\mathrm{mod}\ a_k)$. したがって $a_{j-i+k} \equiv a_k (\mathrm{mod}\ a_k)$ だが a_{j-i+k} は素数なので $a_{j-i+k} = a_k$. $j - i$ を l とおくと, これまでと同様にしてに任意の整数 m に対し $a_{ml+k} = a_k$ がわかる. よって $b_{ml+k} = b_k$ である. $l = 1$ のときに $\{a_n\}$ が定数列であることは容易にわかる. 以下 $l \neq 1$ とする.

ここで数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = 1, c_2 = 1, c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ で定めると, 正の整数 $s \geq 2$, t にたいし $b_{s+t} = c_{s-1}b_t + c_s b_{t+1}$ であることが帰納法により示せる. ここで $c_{l-1}b_k + c_l b_{k+1} = b_{l+k} = b_{(m+1)l+k} = c_{l-1}b_{ml+k} + c_l b_{ml+k+1}$ で, $b_k = b_{ml+k}$ より $b_{k+1} = b_{ml+k+1}$. 同様に繰り返すことで $\{b_n\}$ が周期 l で同じ値をとることがわかる. ここで, $\{b_n\}$ がとる値は高々 l 種類なのでこの中で最大の値をとってくることができる. これを b_t とおく. 周期性より $t > 2$ としてよい. $b_{t-1} + b_t = b_{t+1}, b_{t-2} + b_{t-1} = b_t$ より $b_{t-2} + b_{t+1} = 2b_t$ だが, b_t が最大の値であるという仮定より $b_{t-2} = b_t = b_{t+1}$. これを繰り返し用いることで任意の n に対し $b_n = b_1$ であるとわかる. よって $\{a_n\}$ は定数列. また, a_1 が素数であるとき, 題意の条件を満たす. よって, $\{a_n\}$ はすべての項が p(p は素数) であるような定数列.

補足：c_i はフィボナッチ数列です.

(個人的に、数列の問題によく出てくる典型テクニックが詰まった良問だと思います、ぜひ自分で解答をおってみてください)

数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 C —解答—

解法のキーワードも書いておきます.

$\boxed{\text{C1}}$キーワード： グラフ理論 実験答えが 13 通であることを示す。まず、最初に手紙を出したひとと最後に手紙を受け取った人を除くと、手紙を受け取った回数と手紙を出した回数は等しい。このことと、手紙を送ってきた人に手紙を送り返せない条件から、(手紙を受け取った回数)+(手紙を出した回数) が 4 であるような人が少なくとも 4 人存在する。また、一人の人は高々 5 通にしか関与できないので、手紙の数は高々 $\frac{4\times4+5\times2}{2}=13$ 通。実際、班員に 1 から 6 の番号をつけ、$1\to2\to3\to1\to5\to6\to1\to4\to2\to6\to4\to3\to5\to4$ のようにやりとりをすれば確かに 13 通となる。

$\boxed{\text{C2}}$ キーワード: 不等式評価 ダブルカウント各生徒が半数の問題を正解していることから y は偶数。また、どの問題についても正解者数は等しいから、全体での正解数を考えると各問題が $\frac{x}{2}$ 人に解かれていることになり、x は偶数。以下、$x=2m, y=2n$ とおく。ここで、生徒を S_i とし、生徒 S_1 が解いた問題を P_{j} と置区ことにする。$f(i,j)$ を、生徒 S_i が問題 P_i を解いている時 1, 荘でない時 0 であるように定める。$f(i,j)$(ただし $i\neq1$) の総和を二通りで数える。まず、各生徒 S_i について、S_1と S_i がともに解いた問題は 3 問であることから、この総和は $3(2m-1)$ である。また、各問題 P_i について S_1 以外に解いた生徒が $m-1$ 人であることから、この総和は $n(m-1)$ である。従って $3(2m-1)=n(m-1)$ が成立する必要がある。変形し、$(m-1)(n-6)=3$ を得る。従って $(m,n)=(2,9),(4,7)$ である。従って $(x,y)=(4,18),(8,14)$ が必要。実際、下の表のように各生徒が正解すれば題意をみたす。よって答えは $(x,y)=(4,18),(8,14)$。

$(x,y)=(4,18)$ の時

S_1 OOOOOOOOOXXXXXXXXX

S_2 OOOXXXXXXOOOOOOXXX

S_3 XXXOOOXXXOOOXXXOOO

S_4 XXXXXXOOOXXXOOOOOO

$(x,y)=(8,14)$ の時

S_1 OOOOOOO XXXXXXX

S_2 OOXOXXX XXOXOOO

S_3 XOOXOXX OXXOXOO

S_4 XXOOXOX OOXXOXO

S_5 XXXOOXO OOOXXOX

S_6 OXXXOOX XOOOXXO

S_7 XOXXXOO OXOOOXX

S_8 OXOXXXO XOXOOOX

$\boxed{\text{C3}}$ キーワード： ペアを作る

赤玉が多い順に箱に $b_1, b_2\cdots b_9 9$ と名付ける. (同数の時はどの順でも良い) まず, b_1 を選び, 以降は b_{2i} と b_{2i+1} のうち白玉が多い方を選ぶことにする. (同数の時はどちらからでも良い) このとき, 白玉について半分以上であることは明らか. 赤玉について, b_i に入った赤玉の個数を r_i とすると $r_1+r_3+r_5+\cdots+r_9 9$ 以上の赤玉を選んでおり, これは半数以上である.

$\boxed{\text{C4}}$ キーワード: N っぽい C, 不等式評価で解を絞る, 逆から考える

良い数列が次の性質を満たす数列 (**連続数列**とおこう) と同値であることを示す.

(1) $\{a_n\}$ には 1 以上 n 以下の整数がちょうど一度ずつ表れる.
(2) $3 \leq k \leq n$ を満たす全ての整数 k について, $a_1, a_2 \cdots, a_k$ は (適切に並び替えると) 連続した k 個の整数である.

まず, 連続数列ならば良い数列であることをしめす. 連続数列であるとき, $k \geq 3$ について, $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の最小値を m と置くと, $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = 2mk + 2(0 + 1 + 2 + \cdots + k - 1) = 2mk + k(k-1)$ より, a_1 から a_k までの和は k の倍数である. $k \leq 2$ については明らか.
次に, 良い数列ならば連続数列であることを示す. n を固定し, k を減らしていく帰納法を考える.
$k = n$ の時に, 良い数列が上の 2 つの性質を満たしていることは明らか.
$k = s(s \geq 4)$ の時に良い数列が上の 2 つの性質を満たしていると仮定する. この時, $a_1, a_2, \cdots, a_s$ の最小値を m とおく. すると, $a_1, a_2, \cdots, a_s$ は $m, m+1, \cdots, m+s-1$ の並び替えであることがわかる. したがって, $2(a_1+a_2+\cdots+a_t)$ を $Sum(t)$ と表すこととすると, $(2m+s-2)(s-1) \leq Sum(s-1) \leq (2m+s)(s-1)$ である. $k = s-1$ の時に良い数列が上の 2 つの性質を満たしていないことを仮定する. この時 $a_s \neq m$ かつ $a_s \neq m+s-1$. したがって $Sum(s-1)$ としてありえるのは $(2m+s-1)(s-1)$ のみ. よって s は奇数であることが必要で, $a_s = \frac{2m+s-1}{2}$. ここで $m \leq a_{s-1} \leq m+s-1$ より $(2m+s-2)(s-2)-1 \leq Sum(s-2) \leq (2m+s)(s-2)+1$. ここで,$s-2 \geq 2$ より, この範囲の $s-2$ の倍数は $(2m+s-2)(s-2), (2m+s-1)(s-2), (2m+s)(s-2)$ のみである. s が奇数なので $(2m+s-1)(s-1)$ は偶数だが $(2m+s-2)(s-2)$ と $(2m+s)(s-2)$ は奇数のため, Sum_{s-2} として不適. また, $(2m+s-1)(s-1)-(2m+s-1) = 2m+s-1$ だが, $a_{s-1} \neq a_s = \frac{2m+s-1}{2}$ よりこれも $Sum(s-2)$ として不適. 以上より矛盾. したがって $k = s(s \geq 4)$ で成立するならば $k = s-1$ でも成立. よって帰納法より示された.
以上より, 良い数列と連続数列は同値だとわかった.
よって,

- $n \leq 3$ の時　どのような順番で数を並べてもよい数列なので $n!$ 通り
- $n \geq 4$ の時　n 番目の項から順番に定めるとして良い. $a_t(t \geq 4)$ については, それまでに使われていない数の内の最大または最小の数が入る. また a_1, a_2, a_3 はどのような順番でも良い. したがって $6 \times 2^{n-3}$ 通り

である.

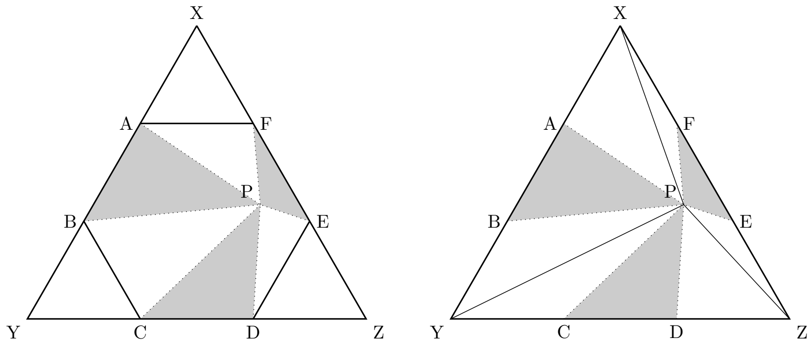
$\boxed{\text{C5}}$ キーワード: カウント, 総和一定の扱い
1 回目の総当たり戦の方が勝ち点が高い人の集合を A, 2 回目の方が勝ち点が高い人の集合を B とおく. 1 回目と 2 回目の A 内の対戦結果に注目すると, A 内での対戦によってえられる勝ち点の総和は等しいので, A に属する人 X であって, 2 回目の総当たりの時に 1 回目の総当たりの時以上に A 内での対戦で勝ち点を稼いだ人がいる. この人が 1 回目の総当たりで 2 回目よりも n 点以上多く勝ち点を稼いだことから, B に属する人は n 人以上いる必要がある. 同様に, A に属する人も n 人以上である. したがって A も B も n 人が属することになる. よって, A に属する人の勝ち点の総和は $\frac{n(n-1)}{2}$ 以上 $\frac{n(n-1)}{2} + n^2$ 以下. このことと A, B の人数から, 1 回目の総和が $\frac{n(n-1)}{2} + n^2$ 点, 2 回目の総和が $\frac{n(n-1)}{2}$ 点で, A に属する n 人全員が, 1 回目で 2 回目よりもちょうど n 点多く稼いでいるとわかる. B についても同様である.

数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 G —解答—

$\boxed{\text{G1}}$

(1) 下図のように正三角形 XYZ を作ると $\triangle\mathrm{XYZ}=27$ になるので,

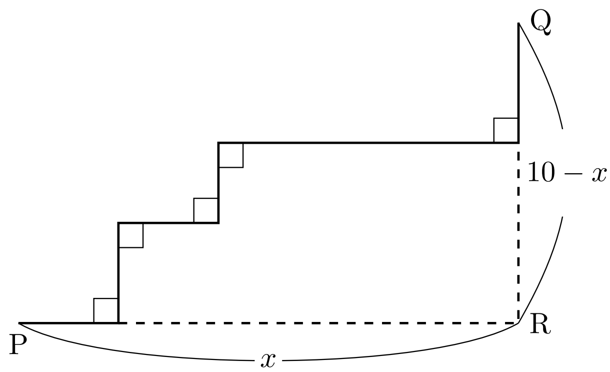
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB}+\triangle\mathrm{PCD}+\triangle\mathrm{PEF}&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PXY}+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PYZ}+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PZX}\\&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{XYZ}\\&=9\end{aligned}$$



(2) 下の図のように R をとると，$\mathrm{PR}=x, \mathrm{QR}=10-x$ とおける。三平方の定理を用いて,

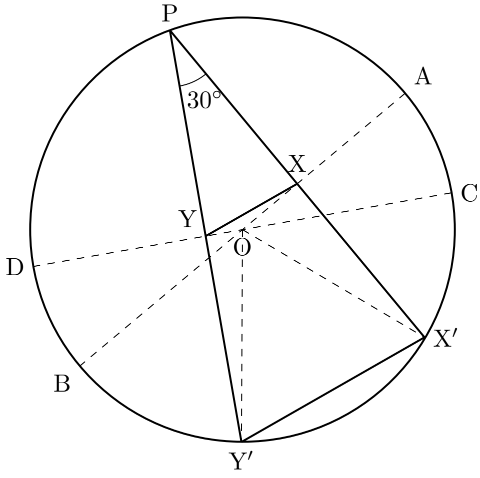
$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\mathrm{PR}^2+\mathrm{QR}^2\\&=x^2+(10-x)^2\\&=2(x-5)^2+50\\&\geq 50 \quad (\text{等号成立は } x=5 \text{ のとき})\end{aligned}$$

ゆえに，PQ の最小値は $5\sqrt{2}$ である。



$\boxed{\text{G2}}$

(1) PX と円 O，PY と円 O の P 以外の交点をそれぞれ X', Y' とおくと，直径に関する対称性から $\mathrm{PX}=\mathrm{XX}', \mathrm{PY}=\mathrm{YY}'$。よって，中点連結定理から $\mathrm{XY}=\dfrac{\mathrm{X}'\mathrm{Y}'}{2}$。
また簡単な計算から $\angle\mathrm{Y}'\mathrm{PX}'=30^\circ$ であることがわかる。円周角の定理と合わせて $\triangle\mathrm{OY}'\mathrm{X}'$ は正三角形。



ゆえに，$\mathrm{XY} = \dfrac{\mathrm{X'Y'}}{2} = \dfrac{\mathrm{OX'}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

(2) $\triangle\mathrm{ABP} \sim \triangle\mathrm{EDP}, \triangle\mathrm{PCD} \sim \triangle\mathrm{PAF}, \triangle\mathrm{BCP} \sim \triangle\mathrm{FEP}$ より，

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PB}}, \quad \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PD}}, \quad \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PF}}$$

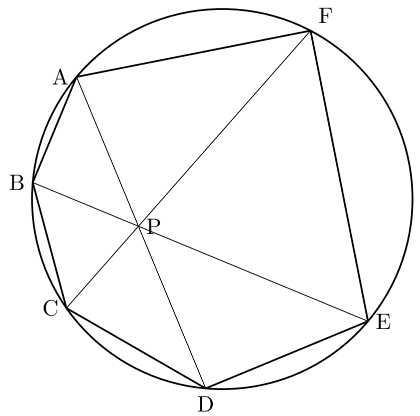
よって，

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PB}} \cdot \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PD}} \cdot \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PF}} = 1$$

つまり，

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{EF} = \mathrm{BC} \cdot \mathrm{DE} \cdot \mathrm{FA}$$

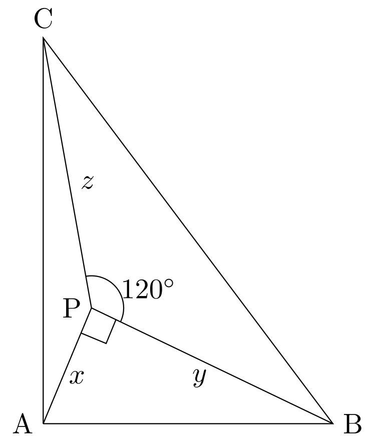
$\mathrm{AB} = 3, \mathrm{BC} = 4, \mathrm{CD} = 5, \mathrm{DE} = 6, \mathrm{EF} = 9$ を代入して，$\mathrm{FA} = \dfrac{45}{8}$



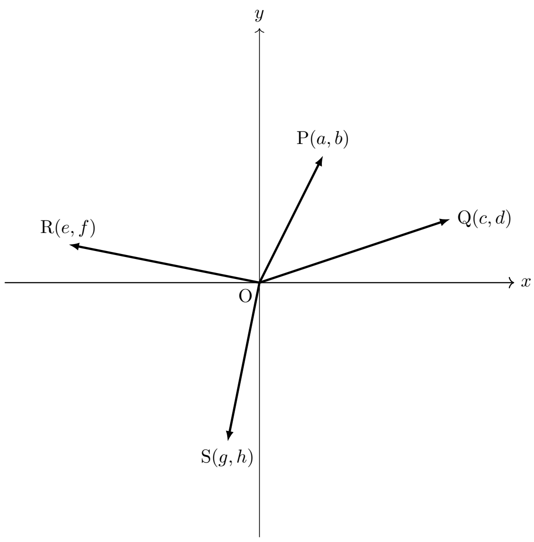
G3

(1) $\mathrm{PA} = x, \mathrm{PB} = y, \mathrm{PC} = z$, $\angle\mathrm{APB} = 90^\circ, \angle\mathrm{BPC} = 120^\circ$ になるように $\mathrm{P, A, B, C}$ を定めると，余弦定理および与えられた条件式から $\mathrm{AB} = 3, \mathrm{BC} = 5, \mathrm{CA} = 4$。よって，

$$\begin{aligned} xy + \frac{\sqrt{3}}{2}yz + \frac{1}{2}zx &= 2(\triangle\mathrm{PAB} + \triangle\mathrm{PBC} + \triangle\mathrm{PCA}) \\ &= 2\triangle\mathrm{ABC} \\ &= 3 \times 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$



(2) $\overrightarrow{p}=(a,b)$, $\overrightarrow{q}=(c,d)$, $\overrightarrow{r}=(e,f)$, $\overrightarrow{s}=(g,h)$ とおくと，$ac+bd, ce+df, eg+fh, ga+hb, ae+bf, bg+ch$ はそれぞれ $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{s}$ の 6 つの内積と対応する。$\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{s}$ のどれかが $\overrightarrow{0}$ であれば題意は明らか。そうでない場合，$\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{s}$ の中からそのなす角が $90°$ 以下である 2 つのベクトルがとれる。その 2 つのベクトルの内積は 0 以上。



$\boxed{\text{G4}}$

(1) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=a$, $\mathrm{OP}=p, \mathrm{OQ}=q, \mathrm{OR}=r, \mathrm{OS}=s$, $(\mathrm{O-ABCD}\ \text{の体積})=V$ とおくと，$\mathrm{O-PQRS}$ の体積を 2 通りで表して，

$$\begin{aligned}(\mathrm{O-PQRS}\ \text{の体積}) &= (\text{三角錐}\ \mathrm{O-PQR}\ \text{の体積})+(\text{三角錐}\ \mathrm{O-RSP}\ \text{の体積})\\ &= \frac{V}{2}\cdot\frac{p}{a}\cdot\frac{q}{a}\cdot\frac{r}{a}+\frac{V}{2}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{s}{a}\cdot\frac{p}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{O-PQRS}\ \text{の体積}) &= (\text{三角錐}\ \mathrm{O-QRS}\ \text{の体積})+(\text{三角錐}\ \mathrm{O-SPQ}\ \text{の体積})\\ &= \frac{V}{2}\cdot\frac{q}{a}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{s}{a}+\frac{V}{2}\cdot\frac{s}{a}\cdot\frac{p}{a}\cdot\frac{q}{a}\end{aligned}$$

よって，

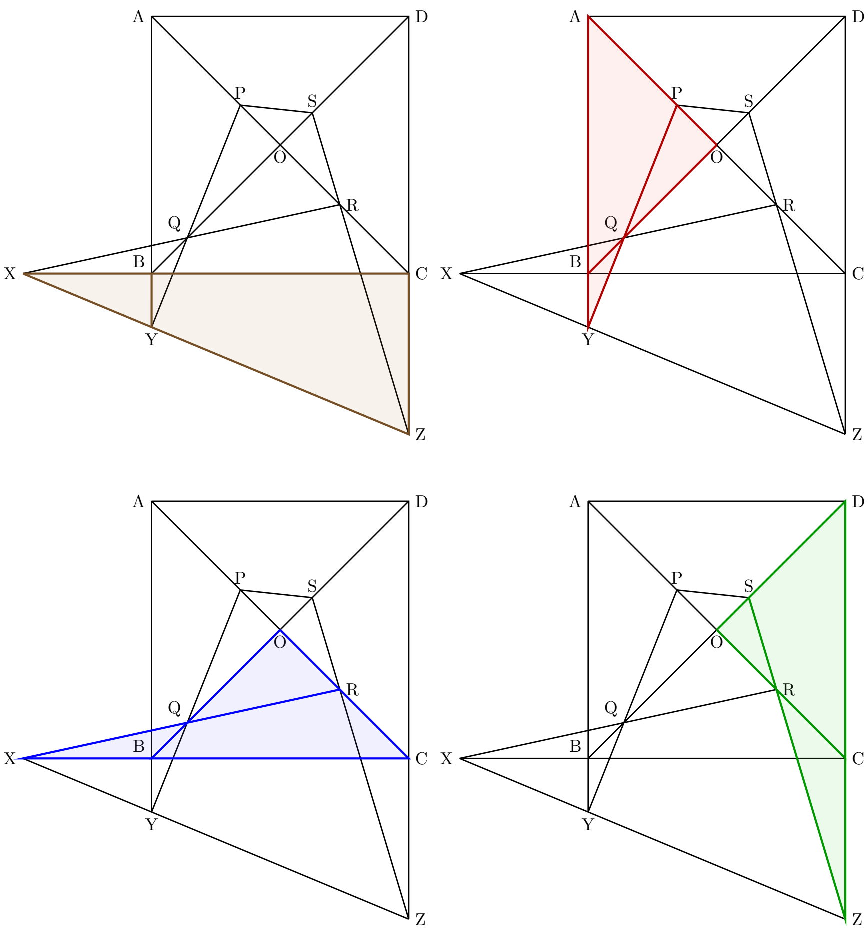
$$pqr+rsp=qrs+spq$$

$$\therefore \frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}$$

今回は $p=2, q=4, r=3$ なので，$s=\dfrac{12}{7}$ とわかる。

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=a$，$\mathrm{OP}=p, \mathrm{OQ}=q, \mathrm{OR}=r, \mathrm{OS}=s$ とおくと，直角三角形の相似およびメネラウスの定理から，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CZ}=\mathrm{BY}\cdot\frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{BX}} && \Leftrightarrow\ \frac{1}{\mathrm{CZ}}=\frac{1}{\mathrm{BY}}\cdot\frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{XC}}\\
&\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{YA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QB}}=1 && \Leftrightarrow\ 1+\frac{\sqrt{2}a}{\mathrm{BY}}=\frac{a-p}{p}\cdot\frac{q}{a-q}\\
&\frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{BX}}\cdot\frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{CR}}\cdot\frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{OQ}}=1 && \Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{XC}}=\frac{r}{a-r}\cdot\frac{a-q}{q}\\
&\frac{\mathrm{ZD}}{\mathrm{CZ}}\cdot\frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{DS}}\cdot\frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{OR}}=1 && \Leftrightarrow\ 1+\frac{\sqrt{2}a}{\mathrm{CZ}}=\frac{a-s}{s}\cdot\frac{r}{a-r}
\end{aligned}$$



これらを用いて，

$$\begin{aligned}
\frac{a-s}{s}\cdot\frac{r}{a-r}&=1+\frac{\sqrt{2}a}{\mathrm{CZ}}\\
&=1+\frac{\sqrt{2}a}{\mathrm{BY}}\cdot\frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{XC}}\\
&=1+\left(\frac{a-p}{p}\cdot\frac{q}{a-q}-1\right)\cdot\frac{r}{a-r}\cdot\frac{a-q}{q}
\end{aligned}$$

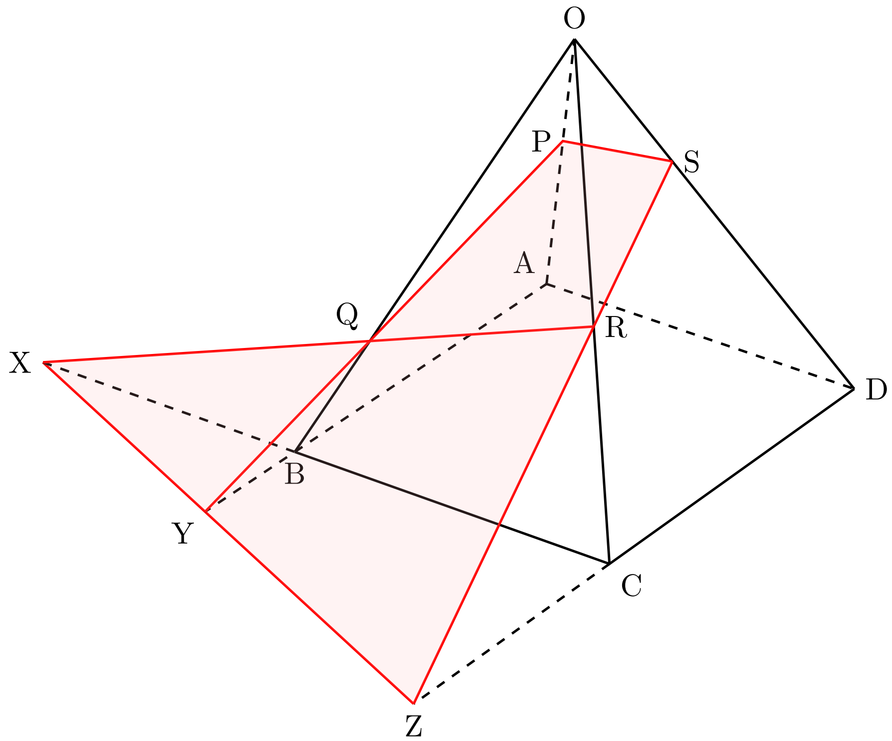
両辺 $\dfrac{r}{a-r}$ で割って，

$$
\begin{aligned}
&\frac{a-s}{s} = \frac{a-r}{r} + \left(\frac{a-p}{p}\cdot\frac{q}{a-q} - 1\right)\cdot\frac{a-q}{q}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{a-s}{s} + \frac{a-q}{q} = \frac{a-r}{r} + \frac{a-p}{p}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

今回は $p=2, q=4, r=3$ なので，$s=\dfrac{12}{7}$ とわかる。

(別解)

次の図をよ〜く睨んでいると (1) と (2) が等価であることがわかる。(この図を上から眺めてみよう)

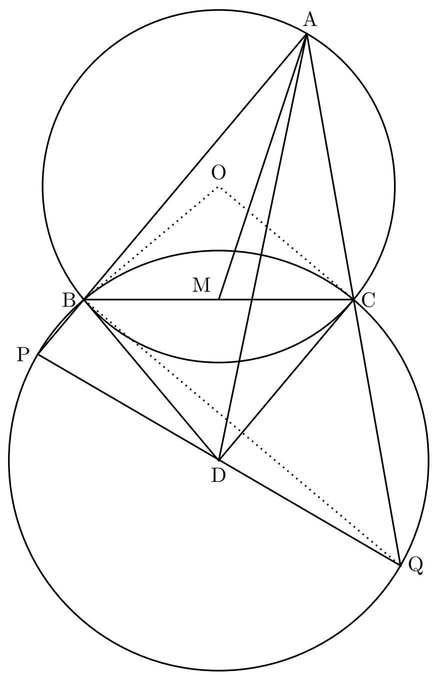


G5

(1) △ABC の外接円の中心を O，D を中心として B を通る円と AB, AC の交点をそれぞれ P, Q とすると，

$$
\begin{aligned}
\angle PBQ &= \angle BAQ + \angle BQA\\
&= \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle BDC) \qquad (\because \text{ 円周角の定理})\\
&= \frac{1}{2}(360^\circ - \angle OBD + \angle OCD)\\
&= \frac{1}{2}(360^\circ - 90^\circ - 90^\circ)\\
&= 90^\circ
\end{aligned}
$$

よって QP は円 D の直径であり，D は QP の中点となる。△ABC ∼ △AQP という相似において，M は BC の中点，D は QP の中点であることから M と D が対応していることがわかる。ゆえに，$\angle BAM = \angle QAD$ 。

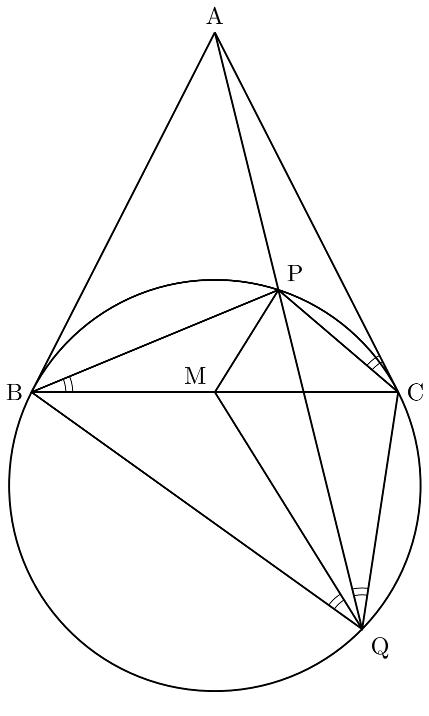


(2) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ より，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$。$\angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{PCB}$ と合わせて $\angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{PCA}$。ゆえに接弦定理の逆から，AB と AC は $\triangle\mathrm{PBC}$ の外接円の接線であることが分かる。AP とその外接円の交点を Q とすると，(1) と同様に $\angle\mathrm{PQC}=\angle\mathrm{BQM}$。また，$\angle\mathrm{BQP}=\angle\mathrm{MQC}$。円周角の定理より $\angle\mathrm{BPQ}=\angle\mathrm{MCQ}$ であることと合わせて，$\triangle\mathrm{QPB}\sim\triangle\mathrm{QCM}$。よって，

$$\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{QB}}=\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{BP}}$$
$$\therefore\frac{\mathrm{QM}}{\mathrm{QB}}=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}$$

$\angle\mathrm{BQM}=\angle\mathrm{PQC}=\angle\mathrm{PBM}$ と合わせて，$\triangle\mathrm{QBM}\sim\triangle\mathrm{BPM}$。ゆえに，

$$\angle\mathrm{APC}+\angle\mathrm{BPM}=\angle\mathrm{APC}+\angle\mathrm{QBM}=\angle\mathrm{APC}+\angle\mathrm{QPC}=180^\circ$$



数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 N —解答—

解説雑ですが取り急ぎ。出典が書いてあるやつは自力で調べてください (投げやり)

N1

$16p+1=k^3$ とすると $16p=k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$ となる。k^2+k+1 は奇数なので $k-1$ は 16 の倍数で、p が素数かつ $k^2+k+1>1$ より $k-1=16$ となる。よって $p=307$ であり、これは条件を満たす。

N2

$N(N-1)\equiv 0 \pmod{10000}$ と等価。$N, N-1$ は互いに素なので、$625|N, 16|(N-1)$ または $16|N, 625|(N-1)$ である。前者の場合 $N\equiv 625 \pmod{10000}$ が、後者の場合 $N\equiv 9376 \pmod{10000}$ が答え。

N3

$a\le b\le c$ として一般性を失わない。このとき $c^2<c^2+a+b<(c+1)^2$ であり、c^2+a+b は平方数にならない。

N4

左辺を 7 で割ったあまりは $3,5,6$ のいずれか、左辺を 7 で割ったあまりは $0,1$ のいずれかであるので矛盾する。

N5

まず、$\phi(n)<n$ は明らか。n が偶数なら $\phi(n)\le n/2$ である。n が奇数なら n の奇数の素因数 p が取れるが、このとき $2|(p-1)|\phi(n)$ となるため $\phi(n)$ は n 以下の偶数になり、$\phi(\phi(n))\le n/2$ となる。

N6

n が偶数のとき、等差数列の偶数項目の積と奇数項目の積はどちらも $a_1a_2\dots a_n$ となるがこれは公差が 0 でないことに矛盾。n が奇数のとき、$a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3/2, a_5=8/3, \dots$ として $(a_ia_{i+1}=i)$、a の奇数項目を $\frac{n}{a_1a_n}$ 倍し、全項に分母の最小公倍数をかければ所望の列が得られる。

N7

https://artofproblemsolving.com/community/c6h476505p2667968

N8

https://artofproblemsolving.com/community/c6h617855p3683110

N9

https://artofproblemsolving.com/community/c6h1279442p6724813