数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 A

$\boxed{\text{A1}}$ (基礎)

相異なる 1 以上の正の実数 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ と相異なる添え字 i, j, k, l について, $|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}|$ の最小値を a_1, a_2, a_3, a_4 の式で表せ.

$\boxed{\text{A2}}$ (基礎) (JMO2019 予選)

次数が 1 以上の実数係数多項式 $f(x), g(x)$ であって, $f(x^3) + g(x) = f(x) + x^5 g(x)$ を満たすようなもののうち, $f(x)$ の次数が最も小さなものをひとつ求めよ.

$\boxed{\text{A3}}$ (標準)(IMO2019)

整数から整数への関数 $f(x)$ であって, 次の等式を満たすようなものを全て決定せよ.

関数方程式に不慣れな人向けの注意: f は多項式とは限らないし, 連続とも限らない.

$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$

$\boxed{\text{A4}}$ (標準)(IMO1983)

a, b, c が三角形の各辺の長さとなるとき, $a^2 b(a-b) + b^2(b-c) + c^2 a(c-a) \geq 0$ を示せ.

$\boxed{\text{A5}}$（応用）(Philippine TeamSelectionTest 2018)

正の整数からなる数列 $\{a_n\}$ であって, 次の条件をみたすものをすべて求めよ：

- 任意の n に対し a_n は素数である.
- ある整数 d が存在し, 任意の n に対して $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + d$ が成り立つ.

数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 C

$\boxed{\text{C1}}$ (基礎) 6 人からなる班がある。そのうちの一人から初めて、次の条件を満たすように班員間で手紙をやりとりしていくことを考える。

- 手紙を受け取ったひとは、ほかの班員の中に、自身が手紙を送ったことも手紙を送られたこともない人がいる時、そのような人のうちの一人に手紙を出す。

この時, 班員間でやりとりされた手紙は最大で何通か。

$\boxed{\text{C2}}$ (標準)x 人の生徒が y 問からなる試験を受けた。どの生徒もちょうど半数の問題を正解し、各問題について正解者数は等しく、どの 2 人の生徒についても 2 人とも正解した問題はちょうど 3 問であった。この時、x, y の組としてあり得るものを全て求めよ。

$\boxed{\text{C3}}$ (基礎)(有名問題)
99 個の箱があり, それぞれにいくつかの赤玉と白玉が入っている. 50 個の箱をうまく選ぶと, それぞれの色の玉を半分以上得られることを示せ.

※次の二問は人によってどちらの方が解きやすいか評価が分かれるでしょう.
$\boxed{\text{C4}}$ (応用)(IMO shortlist)
n を正の整数をする. n 項の数列 $\{a_n\}$ が**良い数列**であるとは, 以下の二つの性質が満たされていることとする.

(1) $\{a_n\}$ には 1 以上 n 以下の整数がちょうど一度ずつ表れる.
(2) $1 \leq k \leq n$ を満たす全ての整数 k について, $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ が k の倍数である.

この時, 良い数列の個数を求めよ.

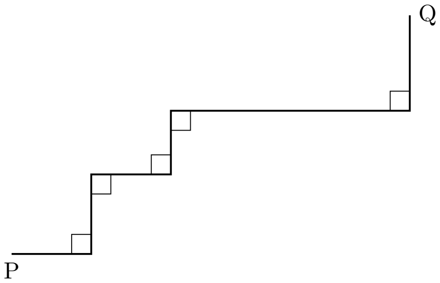
$\boxed{\text{C5}}$ (応用)(1997TOT 春 JA 問 3)
$2n$ 人がオセロの大会に参加し, 総当たり戦を 2 回行った. 各試合で勝つと勝ち点を 1 点, 引き分けると 0.5 点, 負けると 0 点を得るとする. この時, どの選手についても 1 回目の総当たり戦と 2 回目の総当たり戦で得た勝ち点の差は n 点以上だった. この時, どの選手についても勝ち点の差はちょうど n 点であることを示せ.

数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 G

$\boxed{\text{G1}}$ (基礎)

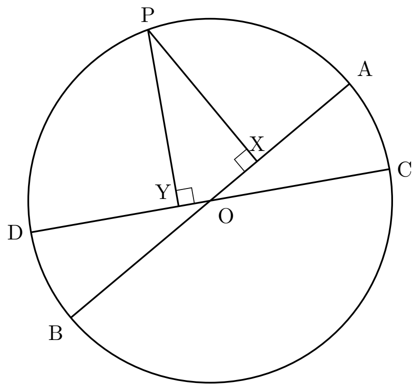
(1) 面積 18 の正六角形 ABCDEF の内部に点 P をとるとき，$\triangle$ABP, $\triangle$CDP, $\triangle$EFP の面積の和を求めよ。

(2) 長さ 10 の針金を直角に 5 回折って下の図のような図形を作るとき線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

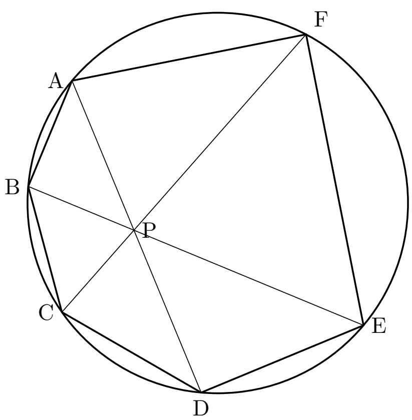


$\boxed{\text{G2}}$ (基礎)

(1) 下図のように半径 4 の円 O の直径 AB, CD をとったところ，$\angle\mathrm{AOC} = 30^\circ$ となった。(劣) 弧 AD 上の点 P から AB, CD に下ろした垂線の足をそれぞれ X, Y とするとき，線分 XY の長さを求めよ。



(2) 六角形 ABCDEF は円に内接しており，また AD, BE, CF は一点 P で交わっている。$\mathrm{AB} = 3, \mathrm{BC} = 4, \mathrm{CD} = 5, \mathrm{DE} = 6, \mathrm{EF} = 9$ のとき，FA の長さを求めよ。



$\boxed{\text{G3}}$ (標準)(高校生向け)

(1) 正の実数 x, y, z が以下の関係式を満たすとき $xy + \frac{\sqrt{3}}{2}yz + \frac{1}{2}zx$ の値を求めよ。

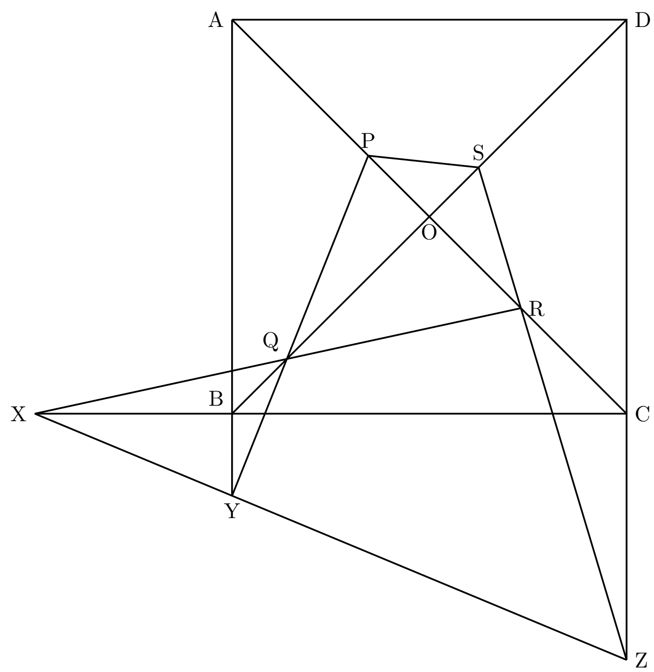
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + yz + z^2 = 25 \\ z^2 + \sqrt{3}zx + x^2 = 16 \end{cases}$$

(2) 実数 a, b, c, d, e, f, g, h に対して，$ac + bd, ce + df, eg + fh, ga + hb, ae + bf, bg + ch$ のうち少なくとも1つは0以上であることを示せ。

$\boxed{\text{G4}}$ (標準)

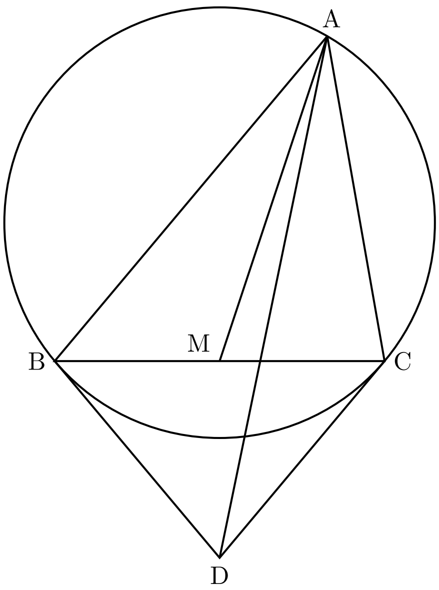
(1) 正四角錐 $\mathrm{O-ABCD}$ に対して平面 α が辺 $\mathrm{OA}, \mathrm{OB}, \mathrm{OC}, \mathrm{OD}$ とそれぞれ点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}$ で交わっている。$\mathrm{OP} = 2, \mathrm{OQ} = 4, \mathrm{OR} = 3$ のとき，OS の長さを求めよ。

(2) 正方形 ABCD について，AC と BD の交点を O とし，線分 OA,OB,OC,OD 上にそれぞれ点 P,Q,R,S をとる。QR と BC, PQ と AB, RS と CD の交点を X,Y,Z としたところ，これらは同一直線上にあった。$\mathrm{OP} = 2, \mathrm{OQ} = 4, \mathrm{OR} = 3$ のとき，OS の長さを求めよ。

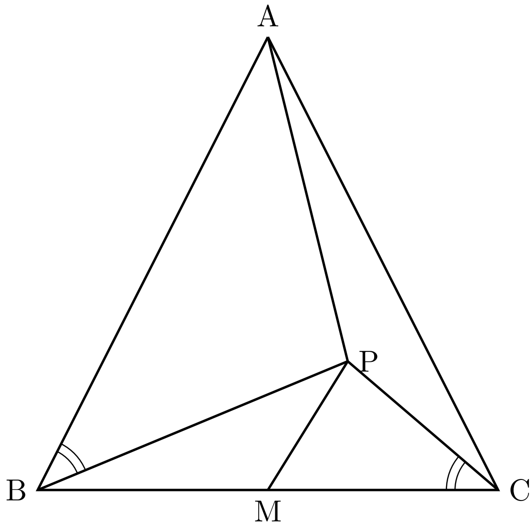


$\boxed{\text{G5}}$ (応用)

(1) $\triangle$ABC の外接円の B, C における接線の交点を D とする。BC の中点を M とするとき，$\angle$BAM $=$ $\angle$CAD であることを示せ。



(2) AB $=$ AC なる $\triangle$ABC の内部に点 P をとったところ，$\angle$PBA $=$ $\angle$PCB となった。BC の中点を M とするとき，$\angle$APC $+$ $\angle$BPM $= 180°$ であることを示せ。



数学オリンピックワークショップ 事前演習問題 N

$\boxed{\text{N1}}$ (基礎)　(AIME1 2015)

$16p+1$ が立方数となるような素数 p をすべて求めよ。

$\boxed{\text{N2}}$ (基礎)　(AIME1 2014)

N と N^2 の 10 進表記での下 4 桁が一致するような N をすべて求めよ。

$\boxed{\text{N3}}$ (基礎)　(APMO 2011)

a,b,c を正の整数とする。$a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ がすべて平方数になることはないことを示せ。

$\boxed{\text{N4}}$ (基礎)

$3\times 2^n+7m=l^6$ を満たす整数 n,m,l は存在しないことを示せ。

$\boxed{\text{N5}}$ (基礎)

$\phi(n)$ で 1 以上 n 以下の整数のうち n と互いに素なものの個数を表す。$n\geq 2$ に対して $2\phi(\phi(n))\leq n$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{\text{N6}}$ (標準) (Iran TST 2011)

以下を満たす整数列 $a_1,\ldots,a_n$ が存在するような 2 以上の正の整数 n をすべて求めよ。

- $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_{n-1}a_n, a_na_1$ が等差数列である

$\boxed{\text{N7}}$ (標準) (Iran TST 2012)

整数 n であって、全ての整数 $0\leq i,j\leq n$ に対して $i+j+_nC_i+_nC_j$ が偶数であるようなものをすべて求めよ。

$\boxed{\text{N8}}$ (応用) (USA TST 2015)

任意の整数 n に対し、以下を満たす正の整数からなる n 元集合 S が存在することを示せ。

- どの $a,b\in S$ に対しても、$a-b$ は a,b をともに割り切り、S の他の元を割り切らない

$\boxed{\text{N9}}$ (応用) (Poland 2015)

任意の正整数 a に対し、ある正整数 $b>a$ が存在し、$1+2^a+3^a$ が $1+2^b+3^b$ を割り切ることを示せ。