

Esercizio d'esame

Soluzione

E' dato un portafoglio la cui valuta di riferimento è il franco svizzero (CHF). Il vostro universo titoli comprende azioni di UBS in CHF , azioni di $BASF$ in euro (EUR) ed un conto corrente in EUR . Le posizioni attuali in portafoglio comprendono

- una posizione in azioni UBS del valore di 1'000 CHF ;
- una posizione cash in conto corrente di 1'000 EUR (zero interesse).

Il prezzo attuale di UBS è di CHF 100.—, quello di $BASF$ è di EUR 55.— ed infine il cambio euro franco è pari a 1.55 CHF/EUR .

1. Quanti sono i fattori di rischio di questo portafoglio e perché?

I fattori di rischio presenti al momento nel portafoglio sono solo 2. In particolare, la posizione cash essendo in euro è soggetta al rischio di cambio.

2. Calcolate il valore del portafoglio in CHF e le posizioni percentuali investite nei due strumenti.

$$V_0 = 1000 + 1000 * 1.55 = 2550 \text{ CHF}.$$

$$w = \begin{bmatrix} UBS & 1000/2550 \\ BASF & 0 \\ EUR & 1550/2550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UBS & 39\% \\ BASF & 0 \\ EUR & 61\% \end{bmatrix}$$

3. Avete a disposizione la seguente matrice di covarianza, stimata utilizzando i rendimenti logaritmici giornalieri e poi *annualizzata*:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} & UBS & BASF & EUR \\ UBS & 0.02643 & 0.00966 & 0.00057 \\ BASF & & 0.02486 & 0.00018 \\ EUR & & & 0.00081 \end{bmatrix}$$

Allo stesso modo il vettore dei rendimenti logaritmici attesi è dato da

$$\mu = \begin{bmatrix} UBS & 5\% \\ BASF & 8\% \\ EUR & 1\% \end{bmatrix}.$$

Si noti che per quanto riguarda $BASF$ si tratta del rendimento atteso in valuta locale, cioè in EUR .

- (a) Calcolate il vettore dei rendimenti logaritmici attesi in moneta di riferimento.

Dalla relazione

$$P_{BASF}^{chf} = P_{BASF}^{eur} * e$$

si ricava semplicemente applicando la definizione di rendimento logaritmico e la proprietà della funzione \ln che

$$r_{BASF}^{chf} = r_{BASF}^{eur} + r_e. \quad (1)$$

Avremo quindi che

$$\mu^{chf} = \begin{bmatrix} UBS & 5\% \\ BASF & 8\% + 1\% \\ EUR & 1\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UBS & 5\% \\ BASF & 9\% \\ EUR & 1\% \end{bmatrix}.$$

- (b) Calcolate la matrice delle covarianze dei rendimenti logaritmici in moneta di riferimento.

Dalla (1) abbiamo:

$$\begin{aligned} V(r_{BASF}^{chf}) &= V(r_{BASF}^{eur}) + V(r_e) + 2Cov(r_{BASF}^{eur}, r_e) \\ &= 0.02486 + 0.00081 + 0.00018 \\ &= 0.02585 \\ Cov(r_{BASF}^{chf}, r_e) &= Cov(r_{BASF}^{eur}, r_e) + Cov(r_e, r_e) \\ &= Cov(r_{BASF}^{eur}, r_e) + V(r_e) \\ &= 0.00018 + 0.00081 \\ &= 0.00099 \\ Cov(r_{BASF}^{chf}, r_{UBS}) &= Cov(r_{BASF}^{eur}, r_{UBS}) + Cov(r_e, r_{UBS}) \\ &= 0.00966 + 0.00057 \\ &= 0.01023 \end{aligned}$$

La matrice di covarianza in chf è pertanto uguale a

$$\Sigma^{chf} = \begin{bmatrix} & UBS & BASF & EUR \\ UBS & 0.02643 & 0.01023 & 0.00057 \\ BASF & & 0.02585 & 0.00099 \\ EUR & & & 0.00081 \end{bmatrix}$$

- (c) Calcolate il vettore delle volatilità annue in moneta di riferimento.

$$\sigma^{chf} = \sqrt{diag(\Sigma^{chf})} = \begin{bmatrix} UBS & 16.25\% \\ BASF & 16.07\% \\ EUR & 2.84\% \end{bmatrix}$$

Supponiamo ora un random walk geometrico con drift quale modello generatore dei rendimenti ed un orizzonte temporale per il calcolo de VaR pari ad 1 mese.

4. Calcolate il rendimento atteso e la varianza a un mese del portafoglio attuale.

Vedete calcolo foglio excel allegato per il calcolo del rendimento atteso e la varianza.

5. Calcolate il VaR a 1 mese del portafoglio attuale ad un livello di confidenza del 5%.

Il $VaR(5\%, 1m)$ sarà dato da meno il 5%-quantile di una variabile aleatoria $N(\mu_{1m}, \sigma_{1m}^2)$ cioè

$$\begin{aligned} VaR(5\%, 1Mese) &= -(\mu_{1mese} + \sigma_{1mese} * q_{5\%}) \\ &= 2.49\% \end{aligned}$$

(per il calcolo si veda foglio excel)

Quindi con una probabilità del 5% sull'arco del prossimo mese il portafoglio potrà perdere 2.49% (63.50 CHF) o più.

6. Avete a disposizione i seguenti rendimenti logaritmici storici *giornalieri* (in moneta locale) e desiderate calcolare il VaR:

	UBS	BASF	EUR
$t = 1$	0.009	0.022	0.001
$t = 2$	0.011	-0.012	0.002
$t = 3$	-0.002	-0.003	0.015

- (a) Eseguite un solo campionamento utilizzando la tecnica di simulazione storica scegliendo una qualsiasi delle tre date. Spiegate come procedereste.

Abbiamo a disposizione dati giornalieri dai quali abbiamo stimato il rendimento atteso e la varianza (le covarianze non ci interessano in questo caso) utilizzando il modello random walk con drift che nella sua generalità è scritto come

$$r_{t+\Delta t} = \Delta t \mu + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t+\Delta t}, \text{ con } \varepsilon_{t+\Delta t} \sim N(0, 1) \quad (2)$$

Scegliendo quindi $t = \text{giorni}$ e $\Delta t = 1$ otteniamo

$$r_{t+1} = \mu_{1g} + \sigma_{1g} \varepsilon_{t+1} \quad (3)$$

e risolvendo rispetto a ε_{t+1} si ottiene

$$\varepsilon_{t+1} = \frac{r_{t+1} - \mu_{1g}}{\sigma_{1g}}.$$

Avendo a disposizione una stima di μ e σ , diciamo $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$, possiamo calcolare l'errore stimato $\hat{\varepsilon}_{t+1}$:

$$\hat{\varepsilon}_{t+1} = \frac{r_{t+1} - \hat{\mu}_{1g}}{\hat{\sigma}_{1g}}.$$

Possiamo in questo modo, utilizzando i rendimenti giornalieri ed i parametri stimati $\hat{\mu}_{1g}$ e $\hat{\sigma}_{1g}$, ottenere una serie di innovazioni stimate $\hat{\varepsilon}_t$, $t = 1, \dots, N$ estratte da una $N(0, 1)$. Queste realizzazioni verranno utilizzate nel medesimo modello con $t = mesi$. Infatti, sappiamo che se scegliamo $t = mesi$ e $\Delta t = 1$, avremo l'analogo dell'equazione (3), e cioè

$$r_{t+1} = \mu_{1m} + \sigma_{1m}\varepsilon_{t+1}, \quad \varepsilon_{t+1} \sim N(0, 1) \quad (4)$$

Ora, scalando propriamente il rendimento atteso e la varianza stimati possiamo simulare rendimenti mensili utilizzando l'equazione (4) e le innovazioni $\hat{\varepsilon}_t$ stimate su dati giornalieri. La procedura è la seguente:

- i. Campioniamo casualmente un numero compreso fra 1 ed N , nel nostro caso $N = 3$. Supponiamo d'aver ottenuto 2.
- ii. Calcoliamo una simulazione mensile di r_{1m} , notata \tilde{r}_{1m} utilizzando la (4), cioè

$$\tilde{r}_{1m} = \hat{\mu}_{1m} + \hat{\sigma}_{1m}\hat{\varepsilon}_2$$

- iii. Conoscendo il valore attuale dello strumento P_0 e sapendo che $r_{1m} = \ln(P_{1m}/P_0)$ otteniamo che

$$\tilde{P}_{1m} = P_0 \exp(\tilde{r}_{1m}) \quad (5)$$

Questa tuttavia non è la formula finale. Partendo dalla (5) possiamo scrivere \tilde{P}_{1m} in funzione di $\hat{\mu}_{1m}$, $\hat{\sigma}_{1m}$, μ_{1g} , σ_{1g} ed il rendimento giornaliero r_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{1m} &= P_0 \exp(\hat{\mu}_{1m} + \hat{\sigma}_{1m}\hat{\varepsilon}_2) = P_0 \exp\left(\hat{\mu}_{1m} + \hat{\sigma}_{1m} \frac{r_2 - \hat{\mu}_{1g}}{\hat{\sigma}_{1g}}\right) \\ &= P_0 \exp\left(\hat{\mu}_{1m} + \frac{\hat{\sigma}_{1m}}{\hat{\sigma}_{1g}}(r_2 - \hat{\mu}_{1g})\right) \\ &= P_0 \exp\left(\hat{\mu}_{1m} + \sqrt{21}(r_2 - \hat{\mu}_{1g})\right) \\ &= P_0 \exp\left(\hat{\mu}_{1m} - \sqrt{21}\hat{\mu}_{1g} + \sqrt{21}r_2\right) \\ &= P_0 \exp\left(\sqrt{21}\hat{\mu}_{1g}(\sqrt{21} - 1) + \sqrt{21}r_2\right) \end{aligned} \quad (6)$$

L'ultima equazione, equazione (6) è la formula finale. Da questa formula si nota che al lato pratico non è necessario calcolare $\hat{\varepsilon}_2$ per eseguire la simulazione storica. Noi l'abbiamo calcolato a fini didattici, cioè per meglio comprendere l'idea sottostante e, in ultima analisi, perché e come si giunge all'equazione (6). Come vedete, non è necessario calcolare le covarianze fra rendimenti di strumenti diversi. Tuttavia sarà obbligatorio campionare per tutti gli strumenti rendimenti dello stesso istante, nel nostro esempio cioè con $t = 2$. Un'ultima

osservazione: su orizzonti brevi, cioè 1 giorno, 1 o 2 settimane è possibile porre $\hat{\mu}_{1g} = 0$ così da ottenere la semplice espressione

$$\tilde{P}_{1m} = P_0 \exp \left(\sqrt{2I} r_t \right).$$

- iv. Avendo ricalcolato tutti i prezzi dei fattori di rischio rivalutate il portafoglio così da ottenere un valore simulato \tilde{V}_{1m} .
 - v. Ripetete il tutto 1000 volte ed utilizzate la distribuzione empirica delle simulazioni per calcolare il quantile.
- (b) Secondo quale distribuzione discreta devono essere campionate le date?

Le date devono essere estratte casualmente campionando in maniera uniforme tramite la tecnica di selezione con reinserimento.