

Statistica II  
Appunti del corso

Claudio Ortelli

Semestre Autunnale  
2010

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Ricapitolazione . . . . .	4
1.2	Fondamenti di probabilità . . . . .	7
1.2.1	Esperimento Aleatorio . . . . .	8
1.2.2	Funzione di ripartizione e di densità . . . . .	9
1.3	Statistica descrittiva e teoria della probabilità . . . . .	11
1.4	Famiglie parametriche di distribuzioni . . . . .	14
1.5	Contenuto del corso . . . . .	16
1.6	Domande di fine capitolo . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Induzione statistica</b>	<b>21</b>
2.1	Introduzione . . . . .	21
2.2	Modelli parametrici . . . . .	22
2.3	Esperimento statistico . . . . .	26
2.4	Variabili aleatorie . . . . .	30
2.5	Esperimento statistico e variabili aleatorie . . . . .	35
2.6	Campione . . . . .	35
2.7	Distribuzione campionaria, statistica, stimatore corretto . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Campionamento</b>	<b>42</b>
3.1	Campionamento tramite selezione con reinserimento . . . . .	43
3.2	Campionamento tramite selezione senza reinserimento . . . . .	46
3.3	Campionamento tramite selezione sistematica . . . . .	47
3.4	Varianza di - e covarianza fra - somme pesate di variabili aleatorie	48
3.4.1	Definizione della varianza e della covarianza . . . . .	50
3.4.2	Tecnica di calcolo (difficoltà pari alla battaglia navale)	51
3.4.3	Varianza di una somma di variabili aleatorie . . . . .	54
3.5	Il campionamento casuale semplice . . . . .	57
3.5.1	Valore atteso e varianza della media campionaria . . . . .	57
3.5.1.1	Campionamento con reinserimento . . . . .	58
3.5.1.2	Campionamento senza reinserimento . . . . .	59

3.5.1.3	Campionamento sistematico . . . . .	64
3.6	Campionamento stratificato . . . . .	66
3.6.1	La correttezza di $\overline{X}_{str,n}$ . . . . .	70
3.6.2	La varianza di $\overline{X}_{str,n}$ . . . . .	70
3.6.3	Effetto della stratificazione sulla precisione di stima . . . . .	72
3.7	La stima di $\sigma^2$ . . . . .	75
3.8	L'intervallo di confidenza per $\mu$ . . . . .	76
3.8.1	La legge (debole) dei grandi numeri . . . . .	76
3.8.2	Uguaglianza e convergenza in distribuzione . . . . .	78
3.8.3	Il Teorema del Limite Centrale . . . . .	78
3.8.4	L'intervallo di confidenza . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Teoria della stima</b>	<b>84</b>
4.1	Il metodo dei momenti . . . . .	85
4.1.1	Convergenza dei momenti campionari . . . . .	89
4.1.2	Stimatore dei momenti . . . . .	89
4.2	Il metodo di massima verosimiglianza . . . . .	93
4.3	Proprietà degli stimatori puntuali . . . . .	98
4.4	Elementi di teoria asintotica . . . . .	101
4.4.1	Consistenza . . . . .	101
4.4.2	Normalità asintotica . . . . .	102
4.4.3	Disuguaglianza di Cramèr-Rao . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Verifica d'ipotesi</b>	<b>106</b>
5.1	Test per un'ipotesi statistica . . . . .	108
5.2	Regione critica di un Test d'ipotesi . . . . .	111
5.2.1	Test unilaterale destro . . . . .	112
5.2.2	Test bilaterale . . . . .	114
5.3	Scelta della statistica $S$ . . . . .	116
5.3.1	Distribuzione del $\min(X_1, \dots, X_5)$ . . . . .	117
5.3.2	Formulazione del test . . . . .	118
5.4	Errore di prima e seconda specie . . . . .	121
5.4.1	Relazione tra errore di prima e di seconda specie . . . . .	124
5.4.2	Potenza di un test . . . . .	126
5.4.2.1	Potenza quando $S = \overline{X}$ . . . . .	127
5.4.2.2	Potenza quando $S = X_{\min}$ . . . . .	128
5.5	Il Lemma di Neyman e Pearson . . . . .	129
5.6	Esempio . . . . .	137
5.6.1	Calcolo della potenza . . . . .	140

<b>6</b>	<b>TEST</b>	<b>144</b>
6.1	Test sulla media con $X$ non normale . . . . .	144
6.2	Test di Student (t-test) . . . . .	145
6.2.1	La distribuzione $\chi_m^2$ . . . . .	146
6.2.2	La distribuzione di Student (o distribuzione-t) . . . . .	147
6.2.3	Il $t$ -test . . . . .	147
6.3	Altri test . . . . .	149
6.3.1	Test su due campioni: uguaglianza di due medie . . . . .	149
6.3.1.1	Caso 1: homoschedasticità delle due popo- lazioni . . . . .	149
6.3.1.2	Caso 2: eteroschedasticità delle due popolazioni	151
6.3.2	Test per la dispersione su singolo campione . . . . .	152
6.3.3	Test per la dispersione su due campioni (F-Test) . . . . .	153
6.3.4	Test di conformità . . . . .	154
6.3.5	Test d'indipendenza . . . . .	156

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Ricapitolazione

Nel corso introduttivo di Statistica I sono stati trattati i concetti fondamentali dell'analisi statistica e della teoria della probabilità. In particolare avete visto

Capitolo 1: introduzione

1. Popolazione di riferimento di un'analisi statistica.
2. Il campione.

Capitolo 2: elementi di statistica descrittiva

1. Le distribuzioni di frequenze (assolute o relative), istogrammi.

Capitolo 3: misure empiriche di centralità e variabilità

1. Indicatori di centralità (moda, media e mediana) e variabilità (range, intervallo interquartile, deviazione standard). Regole di sommatoria e relativa notazione.

$$\bar{x}, \sum_{i \text{ pari}} x_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Capitolo 4: Elementi di probabilità I

1. Spazio campionario  $\Omega$ : insieme di tutti gli esiti di un esperimento statistico. Evento  $E \subset \Omega$ : un particolare sottoinsieme di  $\Omega$ .  $E^c$ : il complemento dell'evento  $E$ . Prime regole di calcolo:

$$P(A) + P(A^c) = 1.$$

## Capitolo 5: Elementi di probabilità II

1. Intersezione di eventi.  $A \cap B$ : l'insieme degli esiti dell'esperimento che appartengono sia all'evento  $A$  che all'evento  $B$ .
2. Eventi indipendenti:  $A$  e  $B$  sono indipendenti se vale la seguente condizione

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

3. Probabilità condizionata

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

4. Unione di eventi.  $A \cup B$ : l'insieme degli esiti dell'esperimento che appartengono all'evento  $A$  o all'evento  $B$  o ad entrambi.
5. Eventi mutualmente esclusivi.  $A$  e  $B$  sono mutualmente esclusivi se non hanno esiti in comune, ovvero se  $A \cap B = \emptyset$ .
6. Probabilità di unioni di eventi  $A$  e  $B$  mutualmente esclusivi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

7. Probabilità di unioni di eventi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

8. Diagrammi ad albero per la rappresentazione dei possibili esiti di un esperimento e per il calcolo delle probabilità corrispondenti.
9. Teorema di Bayes

## Capitolo 6: Introduzione alle variabili aleatorie

1. Esperimento statistico: procedimento di osservazione di un dato fenomeno. Variabile aleatoria (V.A.)  $X$ . Definizione di variabili aleatorie discrete e continue. Distribuzioni e funzioni di probabilità.
2. Valore atteso e varianza di una variabile V.A discreta  $X$ :

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p(x_i)\end{aligned}$$

dove  $p$  è la funzione di probabilità di  $X$  e  $x_1, \dots, x_n$  sono le possibili osservazioni di  $X$ .

3. Regole di calcolo:

$$\begin{aligned}\mu_{X+bY} &= \mu_X + b\mu_Y \\ \sigma_{a+bX}^2 &= b\sigma_X^2 \\ \sigma_X^2 &= \mu_{X^2} - (\mu_X)^2\end{aligned}$$

4. Distribuzione di Bernoulli e distribuzione uniforme.

Capitolo 7: alcune variabili aleatorie discrete

1. Tecniche combinatorie: fattoriali, permutazioni e combinazioni.
2. Esperimenti binomiali e distribuzioni binomiali. Valore atteso e varianza di distribuzioni binomiali.
3. Esperimenti e distribuzioni di Poisson. Valore atteso e varianza di distribuzioni di Poisson.

Capitolo 8: variabili aleatorie continue I

1. Variabili aleatorie continue e funzione di densità.
2. Distribuzione uniforme e triangolare.

Capitolo 9: variabili aleatorie continue II

1. Densità di una distribuzione normale.
2. Valore atteso e varianza di distribuzioni normali.
3. Aree e probabilità di densità normali.

Capitolo 10: variabili aleatorie continue III

1. Unità standard e distribuzione normale standard.
2. Trasformazioni di variabili distribuite in modo normale.
3. Aree sotto la densità normale standard.
4. Aree sotto qualsiasi densità normale.

Capitoli 11 e 12: tecnica di calcolo integrale

Capitolo 13: variabili aleatorie continue (continuazione)

1. Funzione di ripartizione di una V.A.

2. Funzione di densità di una V.A. continua.
3. Proprietà della funzione di ripartizione.
4. Valore atteso e varianza.
5. Densità di funzioni biiettive e derivabili di V.A. continue.

Capitolo 14: Teorema del Limite Centrale

Capitolo 15: Distribuzioni Multivariate Discrete

1. Variabili aleatorie multivariate discrete.
2. Funzioni di probabilità congiunte, marginali, condizionate, indipendenza stocastica.
3. Valore atteso e varianza condizionata.
4. Valore atteso di funzioni di variabili aleatorie multivariate, covarianza e correlazione.

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

5. Covarianze e indipendenza, varianze di somme di V.A..

Seguono infine i Capitoli 16, 17 e 18: distribuzioni multivariate continue I e II, la distribuzione normale bivariata

## 1.2 Fondamenti di probabilità

Nella prima parte del corso (Statistica I) sono stati trattati quegli elementi di statistica descrittiva che hanno in seguito permesso di affrontare i temi propri della teoria della probabilità quali ad esempio

- Lo spazio campionario
- La funzione di probabilità
- Le variabili aleatorie di cui avete visto
  - la funzione di ripartizione
  - la funzione di densità
  - alcuni momenti teorici (valore atteso, varianza)



In questa sezione desideriamo rivedere alcuni concetti e definizioni ritenuti fondamentali per la comprensione dei prossimi capitoli. Il primo tema che vogliamo affrontare riguarda il concetto di *esperimento aleatorio*<sup>1</sup>.

### 1.2.1 Esperimento Aleatorio

*Definizione 1.* Un esperimento aleatorio consiste nell'osservazione di un processo o procedimento aleatorio i cui esiti sono definiti ma non prevedibili.

*Definizione 2.* L'insieme degli esiti di un esperimento aleatorio è chiamato *spazio campionario* ed è notato  $\Omega$ .

*Definizione 3.* Un qualsiasi sottoinsieme  $E$  di  $\Omega$  è chiamato evento.

*Esempio 1.* Lancio di un dado.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  $E = \{\text{osservo un numero pari}\} = \{2, 4, 6\}$ .

Tipicamente siamo interessati a calcolare la probabilità di eventi tramite una legge o distribuzione o misura<sup>2</sup> di probabilità  $P$ . Ad esempio, quando lo spazio campionario è discreto e finito (cioè  $\Omega$  contiene un numero finito di esiti) e gli esiti sono equiprobabili avete imparato a calcolare la probabilità di un evento  $E$  tramite la formula

$$P(E) = \frac{\# \text{ esiti in } E}{\# \text{ esiti in } \Omega} = \frac{\# \text{ esiti favorevoli}}{\# \text{ esiti totali}}. \quad (1.1)$$

Ci preme sottolineare che la formula (1.1) ha validità limitata. Essa è applicabile solo al caso di uno spazio campionario finito i cui esiti sono equiprobabili. Osserviamo inoltre che la suddetta regola consente di assegnare una probabilità ad uno qualsiasi dei  $2^6 = 64$  diversi eventi<sup>3</sup> di  $\Omega$ . Quando lo spazio campionario  $\Omega$  ha un numero infinito di esiti le cose si complicano: in generale non è più possibile calcolare la probabilità di un qualsiasi sottoinsieme di  $\Omega$ .

---

<sup>1</sup>Rinominiamo il concetto di *esperimento statistico* in *esperimento aleatorio*. Come avremo modo di discutere più avanti, all'espressione "esperimento statistico" verrà assegnato un significato diverso.

<sup>2</sup>Utilizzeremo questi tre termini quali sinonimi.

<sup>3</sup>Il numero di eventi diversi fra loro di uno spazio campionario finito  $\Omega$  è dato dalla formula

$$2^{\# \text{ esiti in } \Omega}.$$

Lasciando i dettagli tecnici ai matematici indicheremo semplicemente con  $\mathcal{E}$  l'insieme degli eventi di cui desideriamo calcolare la probabilità. Senza preoccuparci troppo della struttura dell'insieme di eventi  $\mathcal{E}$  ipotizzeremo che gli eventi in esso contenuti siano sempre misurabili, nel senso che sia possibile assegnare loro una probabilità in maniera “consistente”.

Il terzo ed ultimo oggetto fondamentale che vogliamo discutere è la legge di probabilità  $P$  per la quale utilizziamo la seguente definizione.

*Definizione 4.* La legge di probabilità  $P$  è una funzione il cui dominio è  $\mathcal{E}$ , l'insieme degli eventi, con le seguenti proprietà

1.  $P(E) \geq 0$  per ogni evento  $E \in \mathcal{E}$ .
2.  $P(\Omega) = 1$ .
3. Se  $E_1, E_2, \dots$  è una successione di eventi di  $\mathcal{E}$  a due a due incompatibili (cioè  $E_i \cap E_j = \emptyset$  per  $i \neq j$ ) allora

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

Della Definizione 4 è importante notare una cosa: gli argomenti da inserire in  $P$  non sono esiti (elementi di  $\Omega$ ) ma eventi (elementi di  $\mathcal{E}$ )!

Per concludere: un esperimento aleatorio è caratterizzato da tre oggetti: uno spazio di probabilità  $\Omega$ , l'insieme degli eventi  $\mathcal{E}$  ed una legge di probabilità  $P$ . La tripla  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  è chiamata *spazio di probabilità*.

### 1.2.2 Funzione di ripartizione e di densità

Per qualsiasi esperimento aleatorio è possibile definire lo spazio campionario  $\Omega$  nonché l'insieme degli eventi  $\mathcal{E}$  sul quale è definita una legge di probabilità  $P$ . Consideriamo ora un esperimento aleatorio  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  in cui lo spazio campionario  $\Omega$  è sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . Questo significa che gli esiti dell'esperimento saranno dei numeri. L'esempio del lancio di un dado soddisfa questa condizione. In tal caso è possibile definire la funzione di ripartizione della legge di probabilità  $P$ .

*Definizione 5.* (Funzione di ripartizione di un esperimento aleatorio). La funzione di ripartizione  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  della legge di probabilità  $P$  è definita come

$$F(x) := P((-\infty, x]) \text{ con } x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

La funzione di ripartizione  $F(x)$  è dunque la probabilità dell'evento  $E = (-\infty, x]$  di osservare un esito inferiore o al massimo uguale ad  $x$ .

*Osservazione 1.* Facciamo notare che  $P$  ed  $F$  sono funzioni diverse.  $F$  è una funzione definita su  $\mathbb{R}$  mentre  $P$  è una funzione definita su  $\mathcal{E}$ , l'insieme degli eventi. È possibile dimostrare come  $P$  ed  $F$  siano “le due facce della stessa moneta” nel senso che da  $P$  segue univocamente  $F$  e viceversa.

*Esempio 2.* Distribuzione uniforme discreta con  $\Omega = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ .

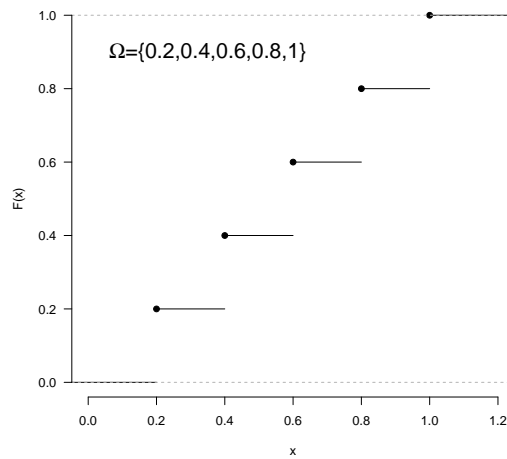


Figura 1.1: Distribuzione uniforme discreta

*Esempio 3.* Distribuzione uniforme continua  $U[0, 1]$ .

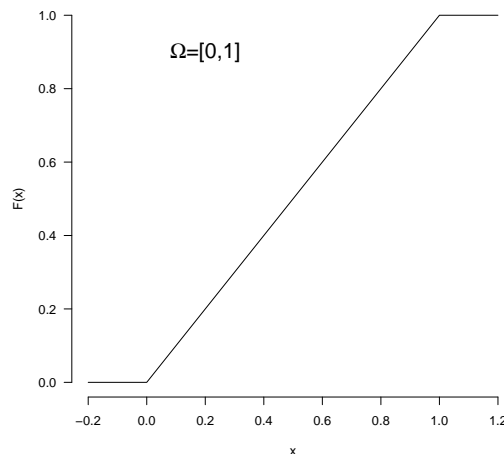


Figura 1.2: Distribuzione uniforme continua

*Definizione 6.* Diciamo che  $F$  è assolutamente continua se esiste una funzione reale  $f$  non negativa tale per cui

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

La funzione  $f$  è chiamata funzione di densità di  $F$ . Vale inoltre la relazione

$$F'(x) = f(x).$$

### 1.3 Statistica descrittiva e teoria della probabilità

Nel corso di Statistica I avete studiato che il punto di partenza di qualunque analisi statistica è la definizione di una popolazione obiettivo (o popolazione di riferimento) nonché della caratteristica della popolazione a cui si è interessati. A titolo di esempio prendiamo quale popolazione di riferimento l'insieme di studenti che lo scorso anno ha seguito il corso di Statistica II. Quali caratteristiche sotto esame scegliamo il sesso e il numero di scarpe di ciascun studente. Riportiamo qui di seguito il grafico delle frequenze relative per le due caratteristiche.

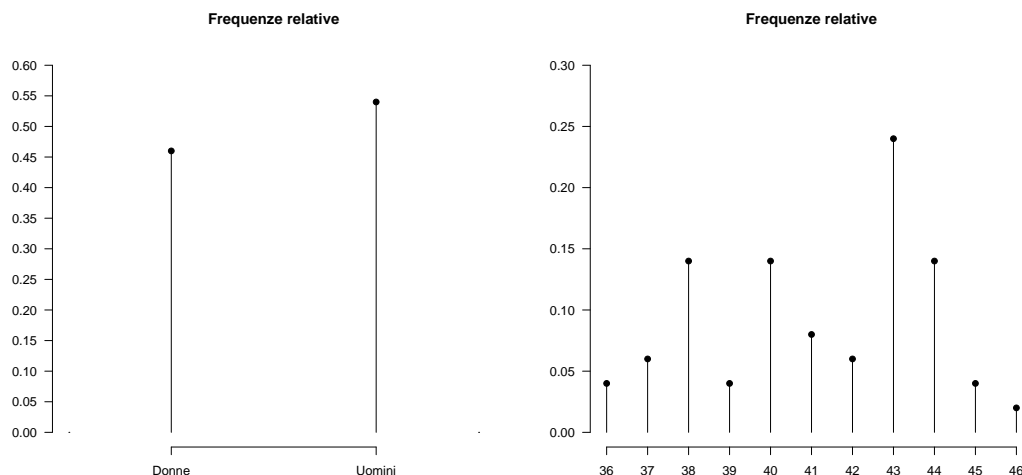


Figura 1.3: Frequenze relative popolazione studenti Statistica II - 2009

Notiamo che la seconda caratteristica è numerica. In questo semplice esempio non abbiamo definito delle classi di valore: tutti i numeri di scarpe osservati figurano nell'istogramma. Tuttavia se avessimo studiato un'altra caratteristica quale ad esempio il peso o la l'altezza ecco che molto probabilmente avremmo costruito delle classi in cui inserire ciascun individuo della popolazione. La costruzione di classi può però costituire un problema. Innanzi tutto è necessario trovare una regola che a partire dalle singole osservazioni indichi quante e quali classi costruire. Secondariamente il passaggio dall'insieme della popolazione al suo istogramma di frequenze relative o assolute genera una perdita di informazione. Ad esempio, anche se sapessimo che 23 individui hanno un peso compreso tra 70 e 75 chilogrammi non saremmo in grado di stabilire quanti di essi hanno un peso superiore a 72 chilogrammi. Per tale motivo quando abbiamo a che fare con caratteristiche numeriche preferiamo studiare la funzione di ripartizione della popolazione obiettivo.

*Definizione 7.* (Funzione di ripartizione della popolazione obiettivo). La funzione di ripartizione, notata  $F$ , di una caratteristica  $x$  della popolazione obiettivo è una funzione di variabile reale definita su tutto  $\mathbb{R}$  e tale che per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{\# \text{ unità con caratteristica } \leq x}{\# \text{ unità della popolazione}}. \quad (1.3)$$

L'interpretazione è semplice ed è molto simile all'interpretazione della funzione di ripartizione di un esperimento aleatorio. Infatti, tornando al nostro esempio iniziale della popolazione di studenti che hanno seguito il corso di

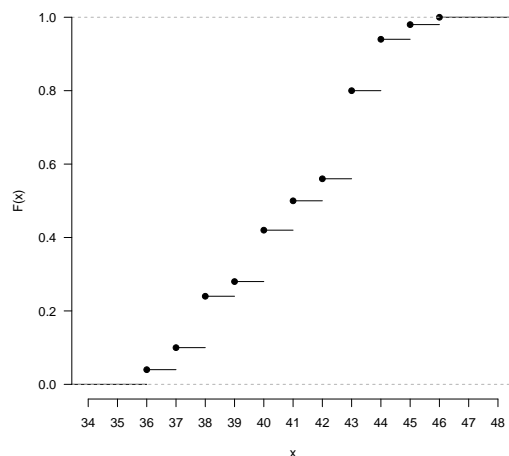


Figura 1.4: Funzione di ripartizione del numero di scarpe della popolazione studenti Statistica II - 2009

Statistica II,  $F(38) = 0.24$  significa che il 24% della popolazione possiede un numero di scarpa inferiore o uguale a 38. Come per un esperimento aleatorio, la funzione di ripartizione racchiude tutta l'informazione disponibile sulla popolazione (confronta la Definizione (1.2)). Nel caso della funzione di ripartizione di una popolazione obiettivo non si parla di probabilità ma di frequenze relative in quanto non c'è nulla di aleatorio nella popolazione. La popolazione esiste e l'attributo è osservabile.  $F$  descrive come l'attributo in esame è distribuito all'interno della popolazione. La conoscenza di  $F$  è equivalente all'osservazione dell'attributo su tutta la popolazione obiettivo.

Lo scopo di molti studi empirici in economia (micro- e macroeconomia, marketing ma anche in altre scienze sociali e non) è quello di determinare la funzione di ripartizione di un determinato attributo o caratteristica di una popolazione obiettivo<sup>4</sup> ed in seguito utilizzare questa informazione per giungere a delle conclusioni di carattere generale. Per tale motivo uno dei temi dei prossimi capitoli sarà proprio quello di studiare come ottenere un'approssimazione della distribuzione dell'intera popolazione partendo da un sottoinsieme di osservazioni della stessa (campione).

Le definizioni (1.2) e (1.3) di funzione di ripartizione caratterizzano rispettivamente l'aspetto probabilistico di un esperimento aleatorio e la struttura

---

<sup>4</sup>Parleremo semplicemente di *distribuzione della popolazione* quando è chiaro quali siano l'attributo e la popolazione obiettivo in esame.

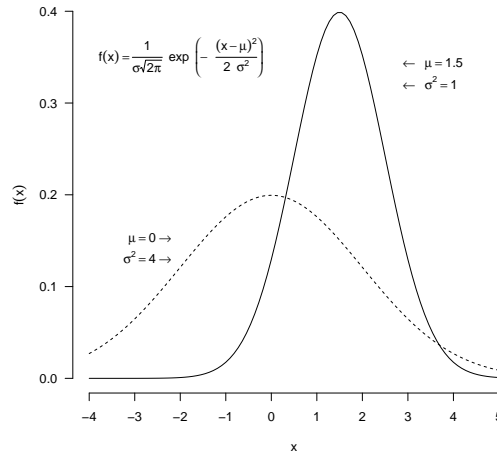


Figura 1.5: Due funzioni di densità della famiglia parametrica Normale

della popolazione obiettivo. Le due definizioni, anche se concettualmente molto simili, non devono essere confuse.

## 1.4 Famiglie parametriche di distribuzioni

Nel corso di Statistica I avete studiato alcune particolari distribuzioni di probabilità con le relative funzioni di ripartizione, di densità o di probabilità. La distribuzione Normale (caso continuo) e la distribuzione di Poisson (caso discreto) sono due esempi a voi noti. Per quanto riguarda la distribuzione Normale, essa è caratterizzata da due *parametri* che come già sapete corrispondono al valore atteso ed alla varianza della distribuzione.

*Osservazione 2.* Attenzione a non generalizzare questa caratteristica della distribuzione Normale. Durante questo corso incontreremo diverse nuove distribuzioni di probabilità. Come nel caso della distribuzione Normale o di Poisson la loro forma dipenderà da uno o più parametri la cui interpretazione varierà da distribuzione a distribuzione.

Il grafico sottostante esplicita quanto affermato mostrando la funzione di densità della distribuzione Normale per due diversi valori di  $(\mu, \sigma^2)$ .

Nella Figura 1.4 la formula della funzione di densità è invariata. Cambiano i valori dei due parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ . Per ogni possibile valore dei parametri si ottiene una diversa distribuzione della famiglia Normale. Si è soliti indicare col termine famiglia parametrica Normale l'insieme di tutte le distribuzioni

che si possono ottenere facendo variare i due parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ . In generale si parlerà di famiglia parametrica di distribuzioni per indicare un preciso insieme di distribuzioni la cui funzione di probabilità, funzione di ripartizione o funzione di densità è identica a meno di un numero finito di parametri. I parametri assumono valori in  $\mathbb{R}$  o in sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ . Nel caso della famiglia parametrica Normale  $\mu \in \mathbb{R}$  mentre  $\sigma^2 > 0$ . L'insieme dei valori che i parametri di una famiglia parametrica di distribuzioni possono assumere è chiamato spazio parametrico ed è indicato con il simbolo  $\Theta$ . Per la famiglia parametrica Normale  $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Riportiamo alcuni esempi di famiglie parametriche di distribuzioni discrete e continue. Nella loro definizione appare la *funzione indicatrice*  $I_A(x)$ , dove  $A$  rappresenta un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ .

Ricordiamo che per qualsiasi sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$  la funzione  $I_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  è definita nel seguente modo

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Prendendo quale esempio la distribuzione discreta uniforme, l'insieme  $A$  corrisponde all'insieme dei numeri interi compresi da 1 a  $n$ , ovvero  $\{1, \dots, n\}$ . Se poniamo  $n = 5$  avremo che  $I_{\{1, \dots, 5\}}(20) = 0$ ,  $I_{\{1, \dots, 5\}}(2.6) = 0$ ,  $I_{\{1, \dots, 5\}}(4) = 1$ .

	Uniforme	Bernoulli
$f(x) =$	$\frac{1}{n} I_{\{1, \dots, n\}}(x)$	$p^x (1-p)^{1-x} I_{\{0, 1\}}(x)$
$F(x) =$	$\min(\frac{\lfloor x \rfloor}{n}, 1) I_{[1, \infty)}(x)$	$(1-p) I_{[0, \infty)}(x) + p I_{[1, \infty)}(x)$
Spazio parametrico $\Theta$	$n = 1, 2, \dots$	$0 \leq p \leq 1$
Valore atteso	$\frac{n+1}{2}$	$p$
Varianza	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$

	Binomiale	Binomiale negativa
$f(x) =$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_{\{0, \dots, n\}}(x)$	$\binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x I_{\{0, 1, \dots\}}(x)$
$F(x) =$	$\sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} f(i)$	$\sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} f(i)$
Spazio parametrico $\Theta$	$0 \leq p \leq 1 ; n = 1, 2, \dots$	$0 < p \leq 1 ; r = 1, 2, \dots$
Valore atteso	$np$	$\frac{r(1-p)}{p}$
Varianza	$np(1-p)$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$



	Geometrica	Ipergeometrica
$f(x) =$	$p(1-p)^x I_{\{0,\dots,n\}}(x)$	$\frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} I_{\{0,1,\dots,n\}}(x)$
$F(x) =$	$(1 - (1-p)^{\lfloor x+1 \rfloor}) I_{[0,\infty)}(x)$	$\sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} f(i)$
Spazio parametrico $\Theta$	$0 < p \leq 1$	$M = 1, 2, \dots ; K = 0, \dots, M ; n = 1, 2, \dots$
Valore atteso	$\frac{1-p}{p}$	$n \frac{K}{M}$
Varianza	$\frac{1-p}{p^2}$	$n \frac{K}{M} \frac{M-K}{M} \frac{M-n}{M-1}$

	Uniforme	Normale
$f(x) =$	$\frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{1}{2} (\frac{x-\mu}{\sigma})^2)$
$F(x) =$	$\min(\frac{x-a}{b-a}, 1) I_{[a,\infty)}(x)$	$\int_{-\infty}^x f(u) du$
Spazio parametrico $\Theta$	$-\infty < a < b < \infty$	$-\infty < \mu < \infty ; \sigma > 0$
Valore atteso	$(a+b)/2$	$\mu$
Varianza	$(b-a)^2/12$	$\sigma^2$

	Logistica	Pareto
$f(x) =$		$f(x) = \frac{\theta k^\theta}{x^{\theta+1}} I_{(k,\infty)}(x)$
$F(x) =$	$[1 + \exp(-(x-\alpha)/\beta)]^{-1}$	
Spazio parametrico $\Theta$	$\beta > 0 ; -\infty < \alpha < \infty$	$k > 0 ; \theta > 0$
Valore atteso	$\alpha + \beta\gamma$ con $\gamma \approx 0.577216$	$\frac{\theta k}{\theta-1}$ quando $\theta > 1$
Varianza	$\frac{\pi^2 \beta^2}{6}$	$\frac{\theta k^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$ quando $\theta > 2$

Le famiglie appena presentate sono solo alcune delle numerose famiglie parametriche di distribuzioni. Come potete verificare voi stessi il numero di parametri e la loro interpretazione varia da famiglia a famiglia.

## 1.5 Contenuto del corso

Nella seconda parte del corso (Statistica II) verranno affrontati i temi propri dell'induzione statistica, ovvero

- La teoria del campionamento

La teoria del campionamento trae la sua ragion d'essere dalla necessità di raccogliere in maniera appropriata le informazioni (dati) necessari allo studio del fenomeno a cui siamo interessati.

- La teoria della stima

La teoria della stima utilizza le informazioni così raccolte (più eventuali altre informazioni) per trarre delle conclusioni o dare delle risposte alle domande relative al fenomeno sotto esame.

- La verifica d'ipotesi

A causa dell'incompleta informazione e alla natura aleatoria di molti fenomeni studiati in economia e nelle scienze sociali tali conclusioni non saranno vere in assoluto. Tuttavia, se lo studio è stato condotto seguendo certi principi, il grado di incertezza potrà essere quantificato. La verifica d'ipotesi tramite dei test statistici e la costruzione di intervalli di confidenza relativi ai parametri stimati permettono di misurare l'attendibilità dei risultati.

*Esempio 4.* Pino, il responsabile del settore marketing di una grossa azienda, desidera conoscere il grado di visibilità sul mercato di un proprio prodotto. Il motivo di questo interesse consiste nel fatto che si vuole capire se lo scarso successo commerciale sia dovuto alla scarsa qualità del prodotto o al fatto che il prodotto non sia sufficientemente conosciuto. La dirigenza dell'azienda decide di quantificare il grado di visibilità tramite la percentuale  $p$  di consumatori che conoscono (ma non necessariamente acquistano o hanno acquistato in passato) il prodotto in questione. Essa valuta il livello attuale di  $p$  secondo la seguente tabella

$p < 30\%$	$30\% \leq p < 60\%$	$60\% \leq p$
insufficiente	discreto	buono

La quantità in esame è dunque  $p$ . Poiché è praticamente impossibile (e troppo oneroso) intervistare tutta la popolazione dei consumatori sarà necessario selezionare ed intervistare un sottoinsieme di tale popolazione che chiameremo campione.

- Come si dovrà costruire il campione da intervistare?
- Sulla base di quali criteri dovranno essere selezionate le persone (o unità) da intervistare: l'età, il reddito, la provenienza geografica, il sesso?
- Quante persone dovranno essere intervistate?

La teoria del campionamento si occupa di trovare una risposta a queste domande.

Una volta effettuato il campionamento si potrà stimare

$$0 \leq p \leq 1.$$

La teoria della stima consente di effettuare due tipi di stime: una stima puntuale di  $p$  ed una stima per intervallo. La stima puntuale di  $p$ , notata semplicemente  $\hat{p}$ , fornisce quella che noi riteniamo essere la migliore approssimazione o alternativa al valore sconosciuto  $p$ . Poiché il calcolo è effettuato sulla base di un campione di consumatori e non sull'intera popolazione (l'informazione è incompleta), il valore di  $\hat{p}$  sarà molto probabilmente diverso da  $p$ . Si è dunque confrontati con un errore di stima.

La stima per intervallo affronta il problema di stima in maniera diversa. Essa infatti fornisce un intervallo di valori nel quale noi confidiamo che  $p$  sia incluso. Tale intervallo è chiamato *intervallo di confidenza*. La forza o intensità con cui noi crediamo nella nostra affermazione è chiamata *livello di confidenza*. Il livello di confidenza corrisponde alla probabilità ex-ante che l'intervallo costruito sulla base delle osservazioni disponibili contenga  $p$ . Un esempio di una realizzazione di intervallo di confidenza potrebbe essere:

$$[0.2, 0.4].$$

La teoria della stima si occupa dunque di come calcolare  $\hat{p}$  o come costruire l'intervallo di confidenza utilizzando le informazioni disponibili (dati).

*Esempio 5.* Continuiamo l'Esempio 4. Supponiamo che, nel caso in cui  $p$  fosse insufficiente, Pino abbia intenzione di condurre una vasta campagna pubblicitaria e che il valore stimato di  $p$  sia  $\hat{p} = 29\%$ . A questo punto dobbiamo chiederci se la campagna pubblicitaria (ed i relativi costi) sia veramente necessaria. Infatti, potrebbe essere che il vero valore di  $p$  sia superiore al 30% ma per semplice "sfortuna" nella scelta del campione la nostra stima risulti inferiore a questa soglia. Il grado di visibilità è realmente insufficiente? Ci troviamo qui confrontati col terzo tema dell'inferenza statistica: la verifica d'ipotesi. Valori di  $\hat{p}$  inferiori al 30% sono evidenza a favore dell'ipotesi di un  $p$  insufficiente e contro l'ipotesi di un  $p$  discreto o buono. Tenendo conto dell'aleatorietà nella stima di  $p$  e del relativo errore, quanto bassa deve essere la stima  $\hat{p}$  per decidere di effettuare la campagna pubblicitaria e quindi rifiutare l'ipotesi che  $p$  sia discreto o buono? Per dare una risposta a questa domanda si costruirà un test statistico. Sarà innanzi tutto necessario una formalizzazione matematica della nostra ipotesi. Per Pino, che non ha seguito nessun corso di statistica ed è uomo d'azione,  $\hat{p} = 29\%$  è un valore più che sufficiente per eseguire la campagna pubblicitaria e spendere un sacco di soldi.

Sappiamo che tanto più la campagna pubblicitaria sarà efficace, tanto più aumenterà il grado di visibilità. Il manager dell'azienda non è soddisfatto del modo come Pino ha condotto la campagna pubblicitaria e desidera verificarne immediatamente l'efficacia. Ordina quindi ad una società indipendente e specializzata in sondaggi di intervistare un nuovo campione da cui stimare il nuovo grado di visibilità del prodotto che indicheremo ora con

$$0 \leq p_{new} \leq 1.$$

$p_{new}$  è il grado di visibilità *dopo* la campagna pubblicitaria. Il manager utilizzerà la seguente regola per decidere la sorte di Pino:

$$\begin{array}{ll} p_{new} = p & p_{new} \geq p \\ \text{licenzio Pino} & \text{non licenzio pino} \end{array}$$

La stima puntuale di  $p_{new}$ , notata  $\hat{p}_{new}$  risulta essere del 34%, un valore di poco superiore al precedente 29% calcolato prima della campagna pubblicitaria. Pino è felice. Il suo capo gli fa però notare che l'esiguo aumento del 5% rispetto alla precedente stima potrebbe essere semplicemente dovuta al caso. Pino vi chiede allora di quantificare sulla base dei dati a disposizione il livello di evidenza per cui l'ipotesi  $p = p_{new}$  (licenzio Pino) possa essere rigettata. È compito della verifica d'ipotesi fornire una risposta a questa domanda.

*Esempio 6.* Un produttore di mele deve fissare anticipatamente la quantità di mele da consegnare al suo acquirente. Sappiamo che la quantità  $q$  prodotta dipende tra le altre cose da fattori climatici, difficilmente prevedibili ed assai variabili. Da ricerche effettuate si sa che la produzione di mele  $q$  è distribuita secondo la distribuzione Normale<sup>5</sup> che sapete essere univocamente identificata dai parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ . Purtroppo i due parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$  in questo caso sono sconosciuti e dovranno essere stimati sulla base dei valori della produzione osservati negli ultimi 20 anni. È questo un problema legato alla teoria della stima. Infine, potremmo chiederci se l'assunzione della distribuzione normale si addice alla variabile aleatoria  $q$  o se tale assunzione è fondamentalmente sbagliata. In questo frangente si tratta quindi di verificare l'ipotesi concernente la distribuzione di una variabile aleatoria per la quale si osservano un certo numero di realizzazioni.

---

<sup>5</sup>Per la precisione la distribuzione Normale assegna probabilità positive all'evento di produrre una quantità negativa di mele. Tuttavia tale probabilità è trascurabile per dati valori di sigma.

## 1.6 Domande di fine capitolo

*Domanda 1.* Cosa rappresenta il simbolo  $\Omega$ ? Esplicitate il suo contenuto facendo un nuovo esempio non visto in classe.

*Domanda 2.* Che relazione sussiste tra  $\Omega$ ,  $\mathcal{E}$  e  $E$ ?

*Domanda 3.* Quali sono i tre elementi fondamentali che costituiscono un esperimento aleatorio?

*Domanda 4.* Costruite un esperimento aleatorio per cui  $\Omega \not\subseteq \mathbb{R}$  ( $\Omega$  non è l'insieme dei numeri reali o un suo qualsiasi sottoinsieme).

*Domanda 5.* Cos'è la funzione di ripartizione? Dato un qualsiasi esperimento aleatorio  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  è sempre possibile definire la funzione di ripartizione della legge di probabilità  $P$ ? Se non fosse sempre possibile costruite un semplice esempio di esperimento aleatorio per cui non è possibile definire la funzione di ripartizione.

*Domanda 6.* Che differenza c'è tra  $P$  ed  $F$ ?

*Domanda 7.* Che differenza c'è tra la funzione di probabilità e la funzione di densità?

*Domanda 8.* Cos'è una famiglia parametrica di distribuzioni? Cosa rappresenta  $\Theta$ ?

*Domanda 9.* Per due famiglie parametriche di distribuzioni discrete e due famiglie parametriche di distribuzioni continue a scelta indicate

1. il numero di parametri
2. la funzione di probabilità o di densità o di ripartizione
3. lo spazio parametrico

che le contraddistingue. Scegliete in seguito dei valori appropriati per i parametri ed eseguite il grafico della funzione di probabilità o di densità o di ripartizione a dipendenza dalla scelta effettuata.

*Domanda 10.* Ripetete lo stesso esercizio della domanda precedente con altre due famiglie parametriche di distribuzioni (una discreta e l'altra continua) che non siano già elencate in questo capitolo.

# Capitolo 2

## Induzione statistica

### 2.1 Introduzione

Il processo di apprendimento e di creazione di nuova conoscenza è possibile grazie a procedimenti di carattere deduttivo e induttivo. L'acquisizione per via deduttiva permette, partendo da delle premesse generali la cui validità è garantita, di giungere a delle conclusioni particolari. Un esempio di ragionamento deduttivo è il seguente:

- Premessa maggiore: Tutti gli uomini sono mortali
- Premessa minore: Socrate è un uomo
- Conclusione: Socrate è mortale

Per contro, l'apprendimento per via induttiva consiste nel trovare delle leggi universalmente valide partendo da osservazioni particolari. Il processo di estensione dal particolare al generale è chiamato inferenza induttiva. Questo tipo di estensione della conoscenza è tuttavia soggetto ad incertezza: l'induzione non dimostra niente, essa è corretta solo nella totalità dei casi in cui è confermata la sua validità.

In statistica ci troviamo tipicamente nella situazione di dover inferire qualcosa circa la

1. *distribuzione* di una o più caratteristiche di una certa popolazione obiettivo, dove per *popolazione obiettivo* si intende la totalità degli elementi (individui, aziende, famiglie, cantoni, regioni, ...) per i quali desideriamo ottenere tali informazioni. In questo caso la popolazione obiettivo è finita ed indicheremo con la lettera  $N$  il numero dei suoi elementi.
2. legge o distribuzione di probabilità di un esperimento aleatorio.

Per quanto riguarda il caso di una popolazione finita, avete visto nel corso di statistica I come è possibile ottenere la distribuzione di un determinato carattere della popolazione in termini assoluti o relativi (percentuali) a partire dall'osservazione di ogni singolo elemento o unità della popolazione stessa. La conoscenza della distribuzione statistica è fondamentale in quanto essa descrive in maniera univoca e completa la caratteristica sotto esame. Purtroppo però solo in rare occasioni l'informazione disponibile è rappresentata dalla distribuzione statistica di *tutta* la popolazione obiettivo. Anzi è interessante osservare come ci siano situazioni dove la numerosità stessa della popolazione obiettivo non è conosciuta. Si pensi ad esempio ad un'analisi sul numero di sigarette che un fumatore consuma giornalmente. Quanto vale  $N$ , il numero di fumatori? Non solo la distribuzione del numero giornaliero di sigarette consumate da un fumatore è sconosciuta ma anche il numero stesso di fumatori che in questo esempio costituiscono la popolazione obiettivo.

Nel caso di un esperimento aleatorio formalizzato tramite uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  l'interesse è posto sulla legge o distribuzione di probabilità  $P$ . Essa racchiude l'informazione disponibile sull'esperimento e le sue caratteristiche aleatorie. Vista la natura casuale dell'esperimento il risultato o esito  $\omega \in \Omega$  dell'esperimento non è conosciuto a priori: quello che possiamo fare è assegnare delle probabilità agli eventi  $E \in \mathcal{E}$ . La conoscenza della legge di probabilità  $P$  permette di quantificare l'incertezza sul risultato dell'esperimento.

Per studiare la legge di probabilità di un dato esperimento aleatorio è necessario ripetere l'esperimento ed osservarne un certo numero di risultati. La teoria della stima si occupa di come utilizzare l'informazione disponibile per risalire alla legge di probabilità  $P$  o equivalentemente<sup>1</sup> alla funzione di ripartizione  $F$ . Se invece l'attenzione è rivolta allo studio di una certa caratteristica di una popolazione obiettivo, allora sarà necessario osservare un certo numero di individui/unità della popolazione ed in seguito stimare la distribuzione dell'intera popolazione obiettivo. È questo dunque il carattere induttivo della statistica inferenziale: da un numero *limitato* di osservazioni ottenere delle conclusioni di carattere *generale*.

## 2.2 Modelli parametrici

La stima di  $F$  risulta particolarmente difficile in quanto occorre stimare un'intera funzione: è necessario conoscere non solo il valore che  $F$  assume in un

---

<sup>1</sup>Nell'arco di questo corso tratteremo unicamente spazi di probabilità ed esperimenti aleatori per i quali l'esistenza di una funzione di ripartizione è assicurata.

determinato punto, ma in tutti i punti dello spazio campione! È questa un'impresa estremamente difficile. Sappiamo che  $F$  ha una caratteristica particolare: è una funzione monotona crescente. Tuttavia esiste un'infinità di funzioni del genere. Per tale motivo lo statistico spesso restringe la sua ricerca ad un sottoinsieme ben preciso di funzioni di ripartizione. Ad esempio, si potrebbe pensare di limitarsi a quelle funzioni di ripartizione  $F$  che sono continue, o a quelle che posseggono una funzione di densità  $f$  (chiamate distribuzioni assolutamente continue, vedi Definizione 6)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{con } f \text{ non negativa.} \quad (2.1)$$

Questo in parte può aiutare a semplificare la scelta (stima) di  $F$  ma non risolve tutti i problemi. La funzione di ripartizione di esperimento aleatorio il cui spazio campione è discreto, ad esempio, non è continua e tanto meno può essere rappresentata tramite un integrale del tipo (2.1). Inoltre, pur restringendo l'insieme dal quale stimare  $F$ , la scelta risulta ancora assai vasta. Una strada diversa e a volte complementare a quella appena esposta consiste nel limitare la ricerca di  $F$  ad un particolare insieme di distribuzioni parametriche. Come trattato nella Sezione 1.4, una famiglia parametrica di distribuzioni è un insieme di distribuzioni. Da ora in poi noteremo con la lettera  $\mathcal{P}$  una qualsiasi famiglia parametrica di distribuzioni. I parametri sconosciuti associati a tale famiglia saranno indicati<sup>2</sup> con  $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_K$ . Utilizzeremo semplicemente la notazione  $\theta$  quando desideriamo indicare l'insieme dei  $K$  parametri posti in una lista ordinata che chiameremo semplicemente vettore  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K)$ . La funzione di ripartizione verrà quindi indicata con  $F(\cdot; \theta)$  e se esiste la funzione di densità (caso continuo) o di probabilità (caso discreto) scriveremo analogamente  $f(\cdot; \theta)$ . In generale si assumerà che a due diversi parametri  $\theta$  e  $\tilde{\theta}$  corrispondano due diverse leggi di probabilità. Infine, l'insieme dei valori ammissibili per  $\theta$  è indicato col simbolo  $\Theta$ . Come osservato in precedenza, nel corso introduttivo di Statistica I avete incontrato diverse famiglie di distribuzioni parametriche sia discrete che continue (si vedano le dispense riguardanti alcune delle distribuzioni di probabilità parametriche più comuni). Utilizzeremo la seguente notazione per definire una famiglia parametrica di distribuzioni

$$\mathcal{P} = \{F(\cdot; \theta) : \theta \in \Theta\}$$

oppure, nel caso in cui la famiglia parametrica venga definita indirettamente tramite la funzione di probabilità (caso discreto) o la funzione di densità

---

<sup>2</sup>In generale e a dipendenza della distribuzione si utilizzano diversi altri simboli, quali ad esempio  $\mu$ ,  $\sigma$  o  $\lambda$ .



(caso continuo)

$$\mathcal{P} = \{f(\cdot; \theta) : \theta \in \Theta\}.$$

*Esempio 7.* La distribuzione continua uniforme è caratterizzata da due parametri che notiamo con  $a$  e  $b$  e che corrispondono rispettivamente all'estremo inferiore e superiore della funzione di densità. Formalmente questa famiglia può essere scritta come

$$\mathcal{P} = \left\{ f(x; \theta) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x); \theta = (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{ con } a < b \right\}.$$

In questo esempio a qualsiasi coppia di numeri reali  $(a, b)$  tali per cui  $a < b$  associamo una funzione di densità definita da

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \quad (2.2)$$

Nel caso della distribuzione uniforme  $A = [a, b]$ . È facile dimostrare applicando la definizione di funzione indicatrice che la funzione di densità (2.2) è riscrivibile più semplicemente come

$$f(x; \theta) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x).$$

L'insieme dei possibili valori di  $\theta$ , notato in precedenza con  $\Theta$ , è dunque uguale al sottoinsieme dei punti del piano la cui prima coordinata è minore della seconda, formalmente

$$\Theta = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\}.$$

*Esercizio 1.* Consideriamo la distribuzione parametrica di Poisson. Rispondete alle seguenti domande.

1. La distribuzione di Poisson è una distribuzione discreta o continua?
2. Qual è o quali sono i parametri che la caratterizzano. Che valori possono assumere i/il parametro/i di una distribuzione di Poisson? Definite il contenuto di  $\theta$  nonché l'insieme  $\Theta$ . Definite  $\mathcal{P}$ .
3. Assegnate dei valori al/ai parametro/i. In Excel o Openoffice eseguite i grafici della funzione di densità e della funzione di ripartizione. Calcolate la probabilità degli eventi  $E_1 = [0, 1]$  ed  $E_2 = (1, 2)$ .
4. Scegliete nuovi valori per il/i parametri e col medesimo programma confrontate i grafici delle due funzioni di densità e delle due funzioni di

ripartizione. Sia  $S$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  definito da quei punti per cui la funzione di densità è maggiore di 0, cioè

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}.$$

Rispetto al valore assegnato al punto precedente cambia l'insieme  $S$  con i nuovi valori? Siete in grado di generalizzare la vostra conclusione?

5. Cosa implica un cambiamento dei valori assegnati al/ai parametro/i rispetto alle probabilità degli eventi  $E_1$  ed  $E_2$  definiti in precedenza? Notate delle differenze? Spiegate?

*Esercizio 2.* Consideriamo la distribuzione parametrica di Pareto. Rispondete alle seguenti domande.

1. La distribuzione di Pareto è una distribuzione discreta o continua?
2. Qual è o quali sono i parametri che la caratterizzano. Che valori possono assumere i/il parametro/i di una distribuzione di Pareto? Definite il contenuto di  $\theta$  nonché l'insieme  $\Theta$ . Definite  $\mathcal{P}$ .
3. Assegnate dei valori al/ai parametro/i ed eseguite i grafici della funzione di densità e della funzione di ripartizione. Calcolate la probabilità degli eventi  $E_1 = [0, 3]$  ed  $E_2 = \{-1, 0, 2, 3\}$ .
4. Trovate l'insieme  $S$  per i valori dei parametri da voi scelti.
5. È possibile trovare dei nuovi valori dei parametri in maniera tale da modificare l'insieme  $S$ ? Trovate un esempio del genere e confrontate i grafici delle due funzioni di densità e delle due funzioni di ripartizione.

## 2.3 Esperimento statistico

È stato detto che la teoria della stima si occupa di giungere a delle conclusioni generali riguardo

- alla legge di probabilità di un esperimento aleatorio, oppure
- alla distribuzione di una variabile aleatoria, oppure
- alla distribuzione statistica di una popolazione obiettivo

partendo da un numero limitato di osservazioni di un certo esperimento aleatorio o di elementi/unità della popolazione. Da un punto di vista formale, ripetere  $n$  volte in maniera indipendente un esperimento aleatorio  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  costituisce un nuovo tipo di esperimento a cui è dato il nome di *esperimento statistico*.

*Definizione 8.* (Esperimento statistico). Un esperimento statistico di ampiezza  $n$  è costituito da un numero  $n$  di ripetizioni indipendenti dello stesso esperimento aleatorio  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ .

Quali saranno i possibili esiti di un esperimento statistico? Sappiamo che ad ogni ripetizione dell'esperimento aleatorio lo spazio campione è sempre  $\Omega$ . Potremmo pensare di raccogliere gli esiti delle  $n$  ripetizioni e creare una *lista ordinata* di valori. Il primo valore della lista corrisponde all'esito della prima esecuzione dell'esperimento aleatorio, il secondo valore corrisponde all'esito della seconda esecuzione e via dicendo. La nostra lista conterrà gli  $n$  esiti che indicheremo con  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Attenzione a non confondere la lista così costruita con lo spazio campione  $\Omega$ . Infatti, per ciascun  $i = 1, \dots, n$  l' $i$ -esimo elemento  $x_i$  della lista è un elemento di  $\Omega$  ma  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \Omega$ . Lo spazio campione può contenere un numero infinito non numerabile di esiti. Pensate ad esempio all'esperimento aleatorio di registrare il tempo d'attesa ad uno sportello postale. In tal caso  $\Omega = [0, \infty\}$  mentre  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sarà sempre un insieme finito.

*Esempio 8.* L'esperimento statistico corrisponde a lanciare 2 volte un dado. L'esperimento aleatorio è il lancio di un dado.  $\Omega = \{1, \dots, 6\}$  mentre  $P$  è la distribuzione uniforme discreta (dado non truccato). Gli esiti dell'esperimento statistico possono essere rappresentati graficamente come segue

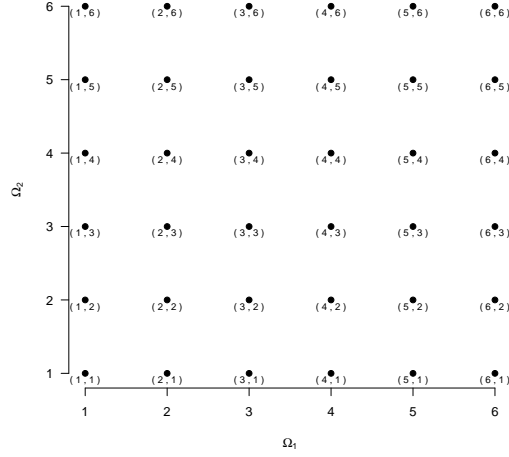


Figura 2.1: Esiti dell'esperimento statistico: lancio di due dadi.

*Esempio 9.* Indicando con  $\Omega_1$  lo spazio campionario della prima esecuzione dell'esperimento aleatorio e con  $\Omega_2$  lo spazio campionario della seconda esecuzione, l'esperimento statistico avrà quale spazio campionario l'insieme delle coppie di esiti  $(x_1, x_2)$  con  $x_1 \in \Omega_1$  e  $x_2 \in \Omega_2$ . Un esito di questo particolare esperimento statistico potrebbe essere  $(3, 4)$ . Poiché l'ordine conta, l'esito  $(3, 4)$  è da considerarsi diverso dall'esito  $(4, 3)$ .

*Definizione 9.* Chiamiamo *spazio campionario prodotto* l'insieme di tutte le coppie  $(x_1, x_2)$  dove  $x_1 \in \Omega_1$  e  $x_2 \in \Omega_2$ . Esso verrà notato con  $\Omega \times \Omega$  o  $\Omega^2$ . Nel caso di un numero  $n$  qualsiasi di ripetizioni scriveremo semplicemente  $\Omega^n$  e un esito dell'esperimento statistico sarà rappresentato tramite la lista  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Avendo definito lo spazio campionario di un esperimento statistico dovremo ora definire gli eventi ad esso associati. In maniera del tutto identica alla definizione di evento di un esperimento aleatorio, l'evento di un esperimento statistico è un sottoinsieme di  $\Omega^n$ . Indicheremo con  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i$  l'insieme degli eventi definiti su  $\Omega^n$ .

Le due immagini della Figura 2.2 rappresentano graficamente due possibili eventi dell'esperimento statistico discusso nell'Esempio 8. Come potete notare nella prima immagine, l'evento definito dall'area colorata corrisponde al



Figura 2.2: Esempi di eventi dello spazio campionario prodotto

prodotto cartesiano  $E_1 \times E_2$  dei due eventi  $E_1 = \{2, 3, 4\}$  ed  $E_2 = \{2, 3\}$  definiti rispettivamente sul primo e sul secondo lancio. Lo spazio  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i$  degli eventi definiti su  $\Omega^n$  è molto vasto. La seconda immagine ci mostra infatti che esso comprende eventi che non sono semplicemente riconducibili ad un prodotto cartesiano  $E_1 \times E_2$  di eventi rispettivamente di  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Ancora una volta evitiamo di addentrarci in dettagli tecnici. Considereremo lo spazio degli eventi  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i$  come un “particolare” insieme i cui *elementi* sono *sottoinsiemi* di  $\Omega^n$ .

Utilizzando la proprietà di indipendenza tra le varie ripetizioni dell’esperimento aleatorio varrà che la legge di probabilità di un esperimento statistico è semplicemente il prodotto delle singole leggi di probabilità  $P$ . Infatti, indicando con  $Q$  la legge di probabilità di un esperimento statistico (definita quindi su  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i$ ), avremo per qualsiasi evento

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$

appartenente a  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i$  che la sua probabilità è uguale

$$Q(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = P(E_1) P(E_2) \dots P(E_n) .$$

In maniera del tutto simile ad un esperimento aleatorio, un esperimento statistico può quindi essere rappresentato dalla tripla

$$\left( \Omega^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i, Q = \bigotimes_{i=1}^n P_i \right). \quad (2.3)$$

Un esperimento statistico possiede la medesima struttura di un esperimento aleatorio e soddisfa quindi le caratteristiche di uno spazio di probabilità. Vediamo ora un esempio di esperimento statistico.

*Esempio 10.* Consideriamo l'esperimento aleatorio che riguarda la misurazione della durata di vita di una lampadina:  $\Omega = \mathbb{R}$  mentre quale distribuzione parametrica per la legge di probabilità  $P$  utilizziamo la distribuzione esponenziale

$$\mathcal{P} = \{f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0, \infty)}(x) : \lambda > 0\}.$$

Definiamo ora l'esperimento statistico costituito dalla misurazione della durata di vita di  $n = 3$  lampadine prodotte in maniera indipendente l'una dall'altra. Il nuovo esperimento avrà quale spazio campionario  $\mathbb{R}^3$ . Un evento di questo spazio potrebbe essere il seguente sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$

$$E_1 \times E_2 \times E_3$$

dove

- $E_1 = \{\text{"La prima lampadina si spegne dopo 3 ore"}\} = [3, \infty),$
- $E_2 = \{\text{"La seconda lampadina dura meno di 20 minuti"}\} = [0, \frac{1}{3}),$
- $E_3 = \{\text{"La terza lampadina prima o poi si spegne"}\} = [0, \infty).$

Grazie all'ipotesi di indipendenza nell'esecuzione dei tre esperimenti la legge di probabilità su  $\bigotimes_{i=1}^3 \mathcal{E}_i$  non è altro che il prodotto di  $P$  sui rispettivi eventi

$$Q(E_1 \times E_2 \times E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3).$$

Le singole probabilità possono essere calcolate individualmente tramite l'integrale della funzione di densità, ad esempio

$$P(E_1) = \int_3^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Il modello parametrico della legge di probabilità  $Q$  sarà semplicemente (indichiamo con  $g$  la funzione di densità di  $Q$ )

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{g(x_1, x_2, x_3; \lambda) = f(x_1; \lambda) f(x_2; \lambda) f(x_3; \lambda) : \lambda > 0\} \\ &= \{g(x_1, x_2, x_3; \lambda) = \lambda^3 e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)} I_{(0,\infty)}(x_1) I_{(0,\infty)}(x_2) I_{(0,\infty)}(x_3) : \lambda > 0\}.\end{aligned}$$

Come potete constatare, la difficoltà è più di carattere formale (forma e notazione) che concettuale.

## 2.4 Variabili aleatorie

Talvolta succede che ciò a cui siamo veramente interessati non sia l'esito di un esperimento aleatorio ma una sua particolare funzione. Pensate ad esempio ad una compagnia aerea. Supponiamo che il ritardo di un volo di linea sia una variabile aleatoria. Alla compagnia probabilmente interessa soprattutto sapere i costi che un ritardo può generare in funzione della sua gravità piuttosto che l'ammontare in minuti del ritardo. I costi saranno quindi una certa funzione dei minuti di ritardo. Generalizzando al caso astratto, introduciamo la seguente definizione.

*Definizione 10.* Dato un esperimento aleatorio  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  diremo che la funzione  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è misurabile se, preso un qualsiasi evento  $E' \subset \mathbb{R}$ , l'insieme  $g^{-1}(E')$  è un elemento di  $\mathcal{E}$ .

In altre parole, diremo che la funzione  $g$  è misurabile se la preimmagine di un evento di  $\mathbb{R}$  è a sua volta un evento di  $\Omega$ . Le figure 2.3 e 2.4 mostrano astrattamente la situazione<sup>3</sup>.

Ricordiamo che per definizione

$$g^{-1}(E') = \{\omega \in \Omega \mid g(\omega) \in E'\}.$$

La preimmagine di  $E'$  rispetto alla funzione  $g$  è un sottoinsieme di  $\Omega$  e contiene tutti gli esiti la cui immagine attraverso  $g$  appartiene all'evento  $E'$  di  $\mathbb{R}$ . La nostra definizione di evento (confronta la Definizione 3) considera evento un qualsiasi sottoinsieme di  $\Omega$ . Ne segue che per noi qualsiasi funzione da  $\Omega$  verso  $\mathbb{R}$  è misurabile<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>Per convenienza assumeremo che i valori che la funzione  $g$  assume siano numeri reali. Tuttavia ci preme sottolineare che la definizione generale di variabile aleatoria non impone questa restrizione sul codominio di  $g$ . Un esempio in cui il codominio di  $g$  non è numerico è descritto nella Sezione 3.1.

<sup>4</sup>Come accennato precedentemente le definizioni di evento e dell'insieme  $\mathcal{E}$  andrebbero approfondite. In generale non tutte le funzioni da uno spazio di probabilità  $\Omega$  verso  $\mathbb{R}$  sono misurabili.

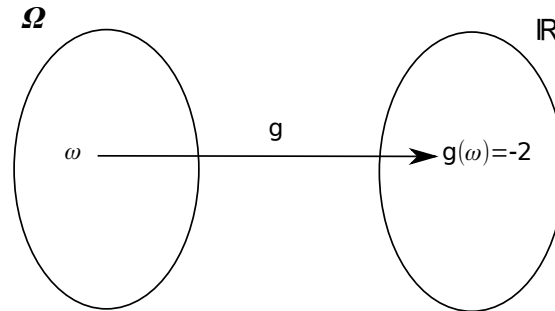


Figura 2.3: Variabile aleatoria - diagramma di Venn

*Definizione 11.* Sia  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  uno spazio di probabilità e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile. Allora  $g$  è chiamata variabile aleatoria.

*Osservazione 3.* In statistica si è soliti indicare una variabile aleatoria con una lettera maiuscola, tipicamente  $X$ . Ricordatevi dunque che malgrado il nome ingannevole, la variabile aleatoria  $X$  è una funzione! Anziché scrivere ogni volta “la variabile aleatoria  $X$ ” nell’ambito di questo corso utilizzeremo l’abbreviazione V.A.  $X$ .

Lasciamo ai matematici lo studio delle condizioni rispetto alle quali una funzione  $X$  è una variabile aleatoria. Per noi questa condizione sarà sempre soddisfatta. Ci domandiamo piuttosto perché una variabile aleatoria debba soddisfare una simile condizione di misurabilità. Il motivo è dato dalla necessità di assegnare una probabilità agli eventi  $E'$  di  $\mathbb{R}$ .

*Esempio 11.* Consideriamo l’esperimento aleatorio di lanciare una volta un dado e di fare una scommessa sul possibile esito. Supponiamo che la vincita o la perdita in franchi, notata  $X$ , dipenda dall’esito dell’esperimento e sia descritta dalla funzione  $X(\omega) = \omega - 2$  dove  $\omega$  rappresenta l’esito del lancio. Siamo interessati all’evento  $E' = [3, \infty)$  di guadagnare almeno 3 franchi. Il nostro esperimento è formalizzato da  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $P$  distribuzione uniforme discreta. La variabile aleatoria  $X$  può essere rappresentata tramite un diagramma di Venn simile alla Figura 2.3 oppure graficamente come in Figura 2.5.



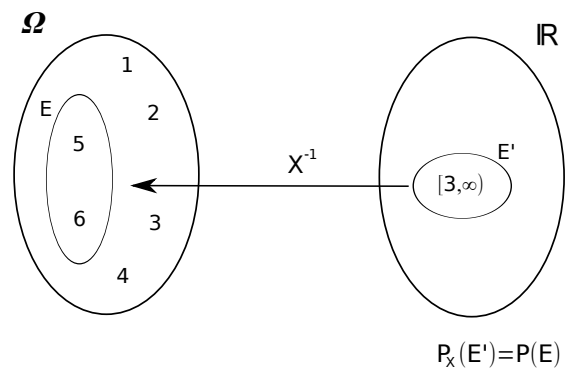


Figura 2.4: Preimmagine

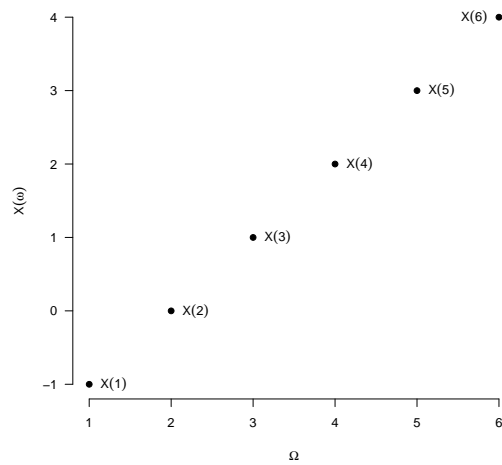


Figura 2.5: Variabile aleatoria

Consideriamo ora la probabilità dell'evento  $E'$ . Come si calcola tale probabilità? L'idea è semplicissima. Guardando il diagramma di Venn 2.4 è facile convincersi che l'evento  $E'$  si avvera se e solo se l'evento  $E = X^{-1}(E')$  si realizza. Nel nostro esempio vinceremo almeno 3 franchi se il lancio del dado risulterà in un numero superiore o alla peggio uguale a 5. L'evento  $E$  nel nostro caso è dato dal sottoinsieme  $\{5, 6\}$  di  $\Omega$ . La probabilità di vincere almeno 3 franchi è dunque uguale alla probabilità che esca un cinque o un sei. Scriveremo

$$P_X(E') := P(X^{-1}(E')) = P(E) = \frac{1}{3}. \quad (2.4)$$

Osservate attentamente l'uguaglianza 2.4. Quando ci si riferisce alla probabilità dell'evento  $E'$  occorre farlo aggiungendo la lettera  $X$  alla probabilità  $P$  in quanto  $E'$  non è evento di  $\Omega$  ma di  $\mathbb{R}$ , l'insieme di arrivo della V.A.  $X$ . È possibile dimostrare che  $P_X$ , così come definita tramite l'uguaglianza 2.4, possiede tutte le proprietà di una legge di probabilità su  $\mathbb{R}$ . La tripla  $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, P_X)$  costituisce un nuovo spazio di probabilità e  $P_X$  è chiamata la legge di probabilità indotta o distribuzione indotta dalla variabile aleatoria  $X$  su  $\mathbb{R}$ . Per semplicità si è soliti chiamare  $P_X$  legge di probabilità di  $X$ .

*Esempio 12.* Lanciamo 3 volte una moneta. In un singolo lancio la probabilità di ottenere croce è  $p$  con  $0 \leq p \leq 1$ . Per un singolo lancio utilizzeremo la convenzione di indicare con  $t$  l'esito testa e con  $c$  l'esito croce. Modelliamo questo esperimento con lo spazio campionario  $\Omega^3$  contenente gli 8 possibili esiti

$$\begin{aligned} \omega_1 = (t, t, t) \quad \omega_2 = (c, t, t) \quad \omega_3 = (c, t, c) \quad \omega_4 = (t, t, c) \\ \omega_5 = (t, c, c) \quad \omega_6 = (c, t, c) \quad \omega_7 = (t, c, c) \quad \omega_8 = (c, c, c) \end{aligned}$$

È immediato verificare che sotto l'ipotesi di indipendenza tra un lancio e l'altro la probabilità di ogni singolo esito è data da

$$Q(\{\omega_i\}) = p^{\#c}(1-p)^{\#t}$$

dove “ $\#c$ ” indica il numero di “ $c$ ” in  $\omega_i$ . La tripla  $(\Omega^3, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i, Q)$  è un esperimento statistico e forma uno spazio di probabilità.

Su questo spazio definiamo ora la V.A. reale  $X : \Omega^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto$  “il numero di croci ottenute diviso 2” che in pratica consiste nel contare il numero di “ $c$ ” presenti in  $\omega$  e dividere per 2. Vale dunque

$$\begin{aligned} X(\omega_1) = 0 \quad , \quad X(\omega_2) = \frac{1}{2} \quad , \quad X(\omega_3) = \frac{1}{2} \quad , \quad X(\omega_4) = \frac{1}{2} \\ X(\omega_5) = 1 \quad , \quad X(\omega_6) = 1 \quad , \quad X(\omega_7) = 1 \quad , \quad X(\omega_8) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

La V.A.  $X$  assumerà così i valori  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ . Con che probabilità la variabile aleatoria  $X$  sarà uguale a 0? Guardando la tabella dei possibili valori deduciamo che  $X = 0$  se e solo se  $\omega = \omega_1$ , quindi

$$P_X(\{0\}) = P(X = 0) = P(\{\omega_1\}).$$

In maniera analoga, dato l'evento  $E' = [\frac{1}{2}, 1] \subset \mathbb{R}$  diremo che  $E'$  si è realizzato se  $X(\omega) \in E'$ , dove  $\omega$  denota la realizzazione su  $\Omega$ . La probabilità che  $E'$  si realizzi è uguale a

$$P_X(E') = P(X^{-1}(E')) = P(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}).$$

La probabilità dell'evento  $E' = \{0, \frac{3}{2}\}$  è uguale a  $P(\{\omega_1, \omega_8\})$  e la probabilità di  $P_X([0, 1])$  è semplicemente uguale a  $P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\})$ .

La variabile aleatoria  $X$  induce una legge di probabilità su  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$  che abbiamo chiamato  $P_X$ .

La tripla  $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, P_X)$  è uno spazio di probabilità. In particolare,  $P_X$  è la distribuzione Binomiale  $Bin(3, p)$ .

## 2.5 Esperimento statistico e variabili aleatorie

La medesima situazione studiata nella Sezione 2.3 la ritroviamo nell'ambito delle variabili aleatorie. Prendiamo una variabile aleatoria  $X$  a valori in  $\mathbb{R}$  definita su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ . Come appena studiato, la V.A.  $X$  genera un nuovo esperimento statistico su  $\mathbb{R}$ , notato  $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, P_X)$ , dove  $P_X$  è la legge di probabilità indotta. Consideriamo ora un campione di  $n$  variabili aleatorie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mutualmente indipendenti e distribuite identicamente a  $X$ . Questo  $n$ -campione estratto da  $X$  induce uno spazio prodotto notato

$$\left( \mathbb{R}^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i, Q_{X_1, \dots, X_n} = \bigotimes_{i=1}^n P_{X,i} \right). \quad (2.5)$$

Se la legge di probabilità  $P_X$  appartiene ad una famiglia parametrica di distribuzioni con funzione di densità  $f_X(\cdot; \theta)$ , varrà per lo stesso discorso fatto in precedenza che la distribuzione  $Q_{X_1, \dots, X_n}$  apparterrà alla famiglia

$$\mathcal{P} = \left\{ g(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i; \theta) : \theta \in \Theta \right\}.$$

Come in precedenza la densità di  $Q_{X_1, \dots, X_n}$  è il prodotto delle  $n$  funzioni di densità  $f_{X_i}(\cdot; \theta)$ . Poiché le V.A.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sono identicamente distribuite, la forma delle funzione di densità  $f_{X_i}(x_i; \theta)$  è la stessa per ogni  $i$ .

*Definizione 12.* Dato un esperimento statistico  $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, P_X)$  diremo che  $\mathcal{P}$  è correttamente specificata se esiste almeno un valore  $\theta_0 \in \Theta$  tale per cui  $f(\cdot; \theta_0)$  è la vera funzione di densità/probabilità di  $X$ .

## 2.6 Campione

*Definizione 13.* Chiamiamo *campione* un particolare sottoinsieme di numerosità  $n$  della popolazione obiettivo utilizzato ai fini dell'inferenza. Nel caso di un esperimento statistico con *campione* intendiamo l'osservazione di un  $n$ -campione (inteso come la realizzazione di  $n$  variabili aleatorie<sup>5</sup> *i.i.d.*).

Ci sono alcune osservazioni su cui chinarsi.

*Osservazione 4.* La prima osservazione riguarda il caso di un esperimento statistico in cui si desidera stimare la distribuzione di una variabile aleatoria  $X$  tramite un  $n$ -campione. È fondamentale ai fini della comprensione di

---

<sup>5</sup>D'ora innanzi utilizzeremo semplicemente l'abbreviazione *i.i.d.* per indicare variabili aleatorie *indipendenti* ed *identicamente distribuite*.

quanto seguirà rendersi conto che l' $n$ -campione  $X_1, \dots, X_n$  è una collezione di variabili aleatorie che generano su  $\mathbb{R}^n$  uno spazio di probabilità (confronta Sezione 2.5). Così come una variabile aleatoria  $X$  induce una legge di probabilità  $P_X$  su  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ , anche  $X_1, X_2, \dots, X_n$  inducono una legge di probabilità su  $\left(\mathbb{R}^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i\right)$ . La probabilità indotta è stata indicata con  $Q_{X_1, \dots, X_n}$  (confronta Sezione 2.3).

*Osservazione 5.* Osservato l'esperimento, il ricercatore avrà a disposizione le realizzazioni di  $X_1, \dots, X_n$  che sono dei numeri. Le realizzazioni saranno disposte in modo ordinato in una lista  $(x_1, \dots, x_n)$  che chiameremo vettore. La notazione maiuscola denota la variabile aleatoria (funzione!) mentre la notazione minuscola ne indica il valore realizzato. Ad esempio  $x_1 = X_1(\omega)$ .

*Osservazione 6.* Consideriamo la stima della distribuzione statistica di una caratteristica della popolazione obiettivo. In tal caso il campione è definito come un sottoinsieme della popolazione obiettivo. Questa definizione non considera il modo come si è ottenuto questo sottoinsieme.

- Che regola di selezione è stata adottata?
- Come sono stati selezionati gli  $n$  individui o le  $n$  unità dalla popolazione?

Vedremo che applicando dei criteri aleatori è possibile ricondurre il problema del campionamento da una popolazione campione a quello relativo alla costruzione di un  $n$ -campione in un esperimento statistico. Affronteremo però questo tema nel corso del prossimo capitolo dove analizzeremo le varie tecniche di campionamento. Per il momento basterà ricordare che anche nel caso di una popolazione obiettivo la cui distribuzione statistica è sconosciuta il *campione* osservato sarà il risultato di un procedimento aleatorio e quindi è da considerarsi anch'esso come la realizzazione di  $n$  variabili aleatorie.

Ma perché, nell'analisi di una popolazione obiettivo, effettuare un'indagine campionaria e non un'indagine esaustiva? I motivi sono diversi; fra i principali annoveriamo:

- una rilevazione completa è impossibile (costi troppo elevati, impossibilità di raggiungere tutti gli individui);
- determinare le caratteristiche delle unità campionate ne determina la distruzione (ad esempio, misurare la durata di vita di una lampadina);

- La popolazione non è definibile in termini della sua numerosità e quindi non ha senso parlare di indagine esaustiva (ad esempio una data tecnologia permette di produrre lampadine la cui durata di vita è aleatoria. Quanto vale  $N$  in questo caso?).
- è necessaria una particolare accuratezza nella rilevazione e quindi a causa delle risorse limitate solo un numero ristretto di unità può essere osservato;
- tempi d'esecuzione elevati se confrontati alla necessità d'informazione (sondaggi elettorali).

## 2.7 Distribuzione campionaria, statistica, stimatore corretto

Il concetto di distribuzione di una V.A. (caso univariato) o di un insieme di V.A. (caso multivariato) ci accompagnerà per tutta la durata di questo corso. Abbiamo visto nei paragrafi precedenti il concetto di esperimento statistico e di  $n$ -campione ad esso associato. Affrontiamo ora la definizione di distribuzione campionaria che altro non è che la distribuzione congiunta  $Q_{X_1, \dots, X_n}$  delle  $n$  variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  vista in precedenza.

*Definizione 14.* Distribuzione campionaria. Sia  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un campione aleatorio di numerosità  $n$ . Si dice distribuzione campionaria di  $X_1, X_2, \dots, X_n$  la distribuzione o legge di probabilità congiunta di  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Perché la distribuzione campionaria è così importante? La sua importanza risiede nell'uso che se ne farà ai fini della stima del o dei parametri sconosciuti. Infatti,

- definito il modello di probabilità e l'esperimento statistico ad esso associato
- ricavata la distribuzione campionaria dei dati in nostro possesso

si passa alla fase di stima. Lo scopo della teoria della stima è quello di costruire delle funzioni  $T(X_1, \dots, X_n)$  delle variabili aleatorie osservate con cui produrre delle stime puntuali  $T(x_1, \dots, x_n)$  del vettore di parametri<sup>6</sup> sconosciuti

---

<sup>6</sup>Come già accennato in precedenza, il nome assegnato ai vari parametri sconosciuti cambia a seconda delle circostanze. Ad esempio, il valore atteso di una V.A. è generalmente indicato con il simbolo  $\mu$ . Se il parametro sconosciuto da stimare fosse la varianza si utilizzerebbe  $\sigma^2$ .

$\theta$ . Ancora una volta è fondamentale fare una netta distinzione fra il campione  $X_1, \dots, X_n$  quale insieme ordinato di V.A. ed il campione osservato  $x_1, \dots, x_n$ . Come precedentemente osservato, la sequenza  $x_1, \dots, x_n$  contiene dei *numeri* e raccoglie le rispettive realizzazioni delle V.A.  $X_1, \dots, X_n$ , cioè

$$x_1 = X_1(\omega), \quad x_2 = X_2(\omega), \quad \dots, \quad x_n = X_n(\omega).$$

*Definizione 15. Statistica.* Una statistica  $T$  è una funzione di variabili aleatorie osservabili (e quindi a sua volta variabile aleatoria osservabile) che non dipende da alcun parametro incognito.

*Esempio 13.* Alcuni esempi di statistiche sono

1. La media  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
2.  $X_{\max} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .
3. Lo stimatore corretto della varianza  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .
4. Siano  $X_1, \dots, X_n \sim i.i.d. N(3, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  sconosciuto. La variabile aleatoria

$$Z = \frac{\bar{X} - 3}{\sigma}$$

non è una statistica in quanto la varianza  $\sigma^2$  (e quindi anche  $\sigma$ ) non è nota.

*Osservazione 7.* Ci preme sottolineare che una statistica è una variabile aleatoria. La distribuzione di  $\bar{X}$  ad esempio, dipende dalla distribuzione congiunta di  $X_1, \dots, X_n$ . Lo stesso vale per  $X_{\max}$ ,  $S^2$  e qualsiasi altra funzione misurabile di  $X_1, \dots, X_n$ .

*Definizione 16. Stimatore corretto.* Sia  $\theta$  un parametro sconosciuto. Diremo che  $T(X_1, \dots, X_n)$  è uno stimatore corretto di  $\theta$  se

$$E(T(X_1, \dots, X_n)) = \theta.$$

*Esempio 14.* Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione di variabili aleatorie *i.i.d.*  $(\mu, \sigma^2)$ . La media campionaria è uno stimatore corretto di  $\mu$  in quanto

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

Anche

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

è uno stimatore corretto di  $\sigma^2$ . Per contro, ammettiamo che  $\mu$  sia conosciuto,

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

non è uno stimatore corretto di  $\sigma^2$ .

Terminiamo il capitolo con due ulteriori esempi di modelli parametrici.

*Esempio 15.* Rendimenti azionari. Sia  $P_t$  il prezzo di una certa azione il giorno<sup>7</sup>  $t$ . Il rendimento logaritmico giornaliero è definito come

$$R_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Assumiamo che

$$\mathcal{P} = \left\{ f(R; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (R - \mu)^2\right) : \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Supponiamo di avere un campione comprendente gli ultimi 100 rendimenti logaritmici giornalieri  $R_t, R_{t-1}, \dots, R_{t-99}$  e che i rendimenti a date diverse siano fra loro indipendenti. Vogliamo calcolare

$$P(R_{t+1} \leq -5\%).$$

*Esempio 16.* Funzione di produzione Cobb-Douglas. Definiamo la seguente relazione

$$Y := \ln Q_t = \beta_1 + \beta_2 \ln L_t + \beta_3 \ln K_t + U_t \quad (2.6)$$

dove

---

<sup>7</sup>In questo caso viene naturale utilizzare l'indice  $t$  anziché l'indice  $i$  per indicare la successione di osservazioni di  $R$ .



1.  $Q_t$  rappresenta la quantità prodotta l'anno  $t$  di un certo bene.
2.  $L_t$  rappresenta le ore di lavoro utilizzate per la produzione di  $Q_t$ .
3.  $K_t$  rappresenta la quantità di capitale utilizzato.
4.  $U_t$  è una variabile aleatoria, non osservabile che racchiude tutti quei fattori non sistematici che non sono stati inclusi nel modello. Assumiamo:  $U_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$ .

La famiglia parametrica  $\mathcal{P}$  è uguale a

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} f(y; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln q_t - \beta_1 - \beta_2 \ln l_t - \beta_3 \ln k_t)^2\right) : \\ \theta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right\}.$$

In quest'ultimo esempio la funzione di produzione Cobb-Douglas

$$Q = \exp(\beta_1) L^{\beta_2} K^{\beta_3} \quad (2.7)$$

ci è stata suggerita dalla teoria economica. Ne segue che i risultati empirici ottenuti sono interpretabili nel contesto dei modelli (micro-) economici ben conosciuti. Ad esempio è possibile interpretare i coefficienti  $\beta_2$  e  $\beta_3$  come le elasticità della produzione:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} / \frac{Q}{L} = \dots$$

L'equazione (2.7) è deterministica. In essa la produzione  $Q$  è una funzione deterministica delle quantità di lavoro  $L$  e capitale  $K$ . Nel modello (2.6) invece,  $Q$  è una variabile aleatoria in quanto funzione del termine d'errore<sup>8</sup>  $U$ .

È bene fare presente quanto segue. Affinché il modello sia utilizzabile sono state fatte numerose ipotesi semplificatrici:

- (a) forma funzionale della relazione tra le variabili  $Q$ ,  $L$  e  $K$ : lineare nei logaritmi,
- (b) costanza delle elasticità  $\beta_2$  e  $\beta_3$  nel tempo (progresso tecnologico?),
- (c) assenza di errori di misurazione in  $Q$ ,  $L$  e  $K$ .

---

<sup>8</sup>È bene non confondere il concetto di osservabilità di una variabile con il concetto di aleatorietà. Una variabile può essere deterministica ma non osservabile, deterministica osservabile, aleatoria non osservabile o aleatoria ed osservabile. Nel modello (2.6) gli  $U_t$  sono aleatori e non osservabili.

Raramente la teoria economica ci permette di specificare completamente un modello. Generalmente altre ipotesi, non motivabili economicamente, sono necessarie.

- La normalità del termine d'errore  $U_t$  nell'Esempio (16) non è sostenibile in modo naturale usando esclusivamente la teoria economica.
- Questo implica la necessità di verificare tramite opportuni test statistici le ipotesi assunte.
- Talvolta l'analisi esplorativa dei dati ci aiuta nella comprensione del fenomeno in esame e ci permette di ottenere dei modelli più prossimi alla realtà.

Concludendo: le informazioni utilizzate nella specificazione dei modelli fanno capo alla

- teoria della probabilità,
- teoria economica,
- analisi esplorativa (si veda l'articolo distribuito riguardante il premio Nobel 2003 per l'economia Robert F. Engle).

## Capitolo 3

# Campionamento

In questo capitolo studieremo come ottenere un campione aleatorio estratto da una popolazione obiettivo finita di numerosità  $N$ . Con piano o disegno di campionamento si intende il procedimento utilizzato per costruire il campione partendo da una popolazione finita o infinita. Del disegno di campionamento possiamo evidenziare

- la struttura del campione (liste, sottoliste, attributi, strati);
- le regole seguite per identificare gli insiemi di unità da inserire nel campione;
- la probabilità di inclusione delle singole unità;
- il modo con cui si determina la numerosità ottima del campione e la relativa frazione di campionamento. “... la numerosità ottima di un campione è quella che permette di ottenere gli obiettivi dell’indagine al minimo costo, e sarà il più piccolo numero in base al quale le stime raggiungono il livello di attendibilità atteso dal ricercatore” (Fabbris, p. 26).

La conoscenza della tecnica di campionamento utilizzata è essenziale ai fini della determinazione delle proprietà probabilistiche (distribuzione congiunta) del campione nonché della validità e correttezza dei risultati. Un piano di campionamento può infatti essere

- probabilistico, in tal caso le unità vengono estratte secondo un meccanismo aleatorio;
- deterministico o non probabilistico, le unità sono scelte dalla popolazione tramite una regola *deterministica*.

Un esempio di piano di campionamento deterministico è il seguente: dall'elenco telefonico estraggo, per ciascuna lettera dell'alfabeto, i primi 10 individui. Se da un lato risulta evidente la sua semplicità di implementazione, il metodo deterministico di campionamento presenta alcuni svantaggi non indifferenti. Esso non permette di calcolare il grado di precisione con cui viene eseguita la stima. Inoltre, la validità dei risultati ottenuti è fortemente legata alle informazioni utilizzate a priori per la scelta del campione. Se tali informazioni sono sbagliate oppure obsolete e non corrispondono più alla realtà, i risultati della ricerca saranno distorti. Per tale motivo in questo corso tratteremo esclusivamente piani di campionamento basati sulla selezione casuale delle unità (individui) della popolazione obiettivo. In particolare vedremo le tecniche di campionamento casuale semplice, di campionamento stratificato, di campionamento sistematico. Tutti questi tipi di campionamento si basano su delle tecniche di selezione.

### 3.1 Campionamento tramite selezione con re-inserimento

Supponiamo di avere quale popolazione obiettivo l'insieme delle automobili immatricolate in Svizzera ad una certa data. La numerosità della popolazione è indicata con la lettera  $N$ . Una casa automobilistica potrebbe essere interessata alla distribuzione del colore dell'automobile così da poi prevedere il consumo di vernice. Per semplicità supponiamo che i colori siano solo tre: nero, bianco e rosso e che la distribuzione sia tale per cui il 45% delle auto immatricolate è nero, il 25% è bianco ed il 30% è rosso. Definiamo ora il seguente esperimento aleatorio definito sull'insieme  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$  che consiste nel scegliere a caso in maniera *equiprobabile* un numero compreso tra 1 e  $N$ . Lo spazio di probabilità è dunque composto dalla solita tripla  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  con

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} \text{ per ogni } i \in \Omega.$$

Assegniamo ora in modo univoco a ciascuna automobile un numero  $i \in \Omega$  e definiamo la variabile aleatoria (funzione!)  $X$  da  $\Omega$  verso l'insieme dei colori  $\Omega' = \{\text{"nero"}, \text{"bianco"}, \text{"rosso"}\}$  in modo tale che per ogni  $i \in \Omega$  la V.A.  $X$  restituisca il colore della  $i$ -esima automobile

$$i \mapsto X(i) = \text{"il colore della } i\text{-esima automobile" } .$$

Domanda 1: Qual è la legge di probabilità indotta dalla variabile aleatoria  $X$ , notata  $P_X$ , sull'insieme dei tre colori?

Risposta: la legge di probabilità  $P_X$  non è altro che la distribuzione statistica della caratteristica in esame della popolazione obiettivo. Inoltre, se la caratteristica in esame fosse la cilindrata in  $cm^3$  dell'automobile anziché il suo colore, la variabile aleatoria  $X$  avrebbe una funzione di ripartizione  $F_X$  identica alla funzione di ripartizione della cilindrata della popolazione obiettivo.

È dunque possibile, partendo da un semplice spazio di probabilità discreto, definire una variabile aleatoria  $X$  la cui distribuzione  $P_X$  è uguale alla distribuzione dell'intera popolazione obiettivo. Si potrebbe allora pensare di ripetere l'esperimento  $n$  volte in maniera indipendente l'una dall'altra, reinserendo nell'urna il numero scelto dopo ogni estrazione e mescolando nuovamente molto bene. Il nuovo spazio campionario consiste ora nei vettori (liste) di lunghezza  $n$  i cui elementi appartengono all'insieme  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Scriviamo semplicemente  $\Omega^n = \{1, 2, \dots, N\}^n$ . Il numero di elementi di  $\Omega^n$  che corrisponde al numero di esiti possibili è  $N^n$ . Poiché il numero selezionato ad ogni estrazione è reinserito nell'urna, è possibile osservare vettori in cui un numero si ripete più volte. Ad esempio, per  $N = 5$  e  $n = 3$  un possibile esito potrebbe essere  $\omega = (2, 5, 2)$ . Qual è la probabilità di osservare un qualsiasi esito<sup>1</sup>  $\omega \in \Omega^n$ ? Poiché le estrazioni sono indipendenti l'una dall'altra e ad ogni estrazione la probabilità di estrarre un qualsiasi numero è pari a  $1/N$  vale

$$Q(\omega) = \frac{1}{N^n} \text{ per ogni } \omega \in \Omega^n.$$

Ecco così definito lo spazio di probabilità  $\left(\Omega^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i, Q = \bigotimes_{i=1}^n P_i\right)$  relativo al nostro nuovo esperimento. Possiamo ora definire le  $n$  variabili aleatorie che notiamo con  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  tramite la procedura

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1) \text{ Estraggo l' } i - \text{esimo numero da } \omega, \text{ notato } j_i \in \{1, 2, \dots, N\}. \\ 2) \text{ Associa la cilindrata dell' } j_i - \text{esima automobile.} \end{cases}$$

Continuando con l'esempio dove  $N = 5$  e  $n = 3$ , data una realizzazione  $\omega = (2, 5, 2)$  avremmo  $j_1 = 2$ ,  $j_2 = 5$ ,  $j_3 = 2$  (praticamente abbiamo selezionato due volte la seconda automobile ed una volta la quinta). Il valore che la V.A.  $X_i$  assume dipende *esclusivamente* dall'esito parziale della  $i$ -esima estrazione.

---

<sup>1</sup>Ora  $\omega$  denota un qualsiasi elemento di  $\Omega^n$  ed avrà quindi la forma

$$\omega = \underbrace{(5, 12, \dots, 4)}_{n \text{ numeri tra } 1 \text{ e } N}$$

di un vettore a  $n$  componenti.

Poiché le  $n$  estrazioni sono per costruzione indipendenti anche le variabili aleatorie  $X_i$  lo saranno e la legge di probabilità  $Q_{X_1, \dots, X_n}$  indotta da  $X_1, \dots, X_n$  su  $\mathbb{R}^n$  è semplicemente il prodotto delle singole leggi di probabilità  $Q_{X_i}$ .

Quando la distribuzione statistica della popolazione obiettivo è sconosciuta possiamo pensare di stimare  $P_X$  andando a pescare da una particolare famiglia parametrica di distribuzioni  $\mathcal{P}$  la distribuzione che riteniamo migliore rispetto all'evidenza empirica (le  $n$  osservazioni) in nostro possesso. È quindi possibile ricondurre il problema della stima della distribuzione della popolazione obiettivo alla definizione di esperimento statistico e di  $n$ -campione ad esso associato. In altre parole, le  $n$  variabili aleatorie *i.i.d.*  $X_1, \dots, X_n$  costruite estraendo a caso con reimmissione  $n$  unità dalla popolazione obiettivo costituiscono un  $n$ -campione di un esperimento statistico  $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$ . La problematica della non conoscenza della distribuzione statistica della popolazione obiettivo risulta quindi identica alla problematica della stima della legge di probabilità di un esperimento aleatorio o di una variabile aleatoria.

La tecnica di selezione casuale con reinserimento utilizzata precedentemente per la costruzione di un  $n$ -campione a partire da una data popolazione obiettivo di numerosità  $N$  è riassunta nel modo seguente.

1. A ciascuna delle  $N$  unità della popolazione viene assegnato univocamente un numero da 1 a  $N$ .
2. Si estrae a caso una sola pallina da un'urna contenente  $N$  palline numerate da 1 a  $N$ . Il numero indicato sulla pallina corrisponde all'u-

nità del campione da selezionare per l'osservazione della caratteristica o attributo in esame.

3. Si reintroduce la pallina estratta e si mescola nuovamente.
4. Si ripetono i punti 2. e 3. per un totale di  $n$  volte.

Le  $n$  osservazioni, raccolte in un vettore  $(x_1, \dots, x_n)$ , costituiscono una realizzazione delle  $n$  variabili aleatorie *i.i.d.*  $X_1, \dots, X_n$  distribuite secondo la legge di probabilità definita dalla distribuzione della popolazione obiettivo.

### 3.2 Campionamento tramite selezione senza reinserimento

Questa tecnica è identica alla precedente con l'unica differenza che le palline estratte non vengono reinserite nell'urna. Cosa cambia rispetto al paragrafo precedente? Possiamo ancora parlare di esperimento statistico? Quali sono le proprietà della nuova legge di probabilità  $Q$  che con  $\Omega^n$  e  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i$  definisce il nuovo spazio di probabilità? Per rispondere a queste domande partiamo dalla definizione del nuovo spazio campione. Supponiamo per semplicità di utilizzare ancora  $\Omega^n$ . Poiché la tecnica di estrazione è senza reinserimento lo spazio  $\Omega^n$  conterrà esiti che non osserveremo mai. Ad esempio, prendiamo nuovamente  $N = 5$  e  $n = 3$  e l'esito  $\omega = (2, 5, 2)$ . Ovviamente un simile  $\omega$  non sarà mai osservabile e potremmo escluderlo dallo spazio campione. Tuttavia per semplicità nella definizione del nostro spazio campionario lo lasciamo. Gli esiti in cui un numero si ripete due o più volte avranno semplicemente probabilità nulla. Dobbiamo ora calcolare la probabilità di un qualsiasi esito  $\omega$  le cui componenti sono tutte diverse. Tenendo conto dell'ordine (disposizioni), ci sono  $D_N^n = N!/(N-n)!$  modi diversi per estrarre  $n$  elementi da un insieme di  $N$  elementi. Se l'esperimento è condotto correttamente gli esiti con probabilità positiva saranno tutti equiprobabili. La probabilità di osservare un esito  $\omega$  a componenti tutte diverse è dunque

$$\frac{1}{\# \text{ esiti a componenti diverse}} = \frac{(N-n)!}{N!}.$$

La nuova legge di probabilità  $Q$  è dunque diversa dalla legge di probabilità vista nel caso di un'estrazione con reinserimento. Applichiamo la definizione delle  $n$  variabili aleatorie  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  al nuovo spazio di probabilità:

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1) \text{ Estraggo l' } i\text{-esimo numero da } \omega, \text{ notato } j_i \in \{1, 2, \dots, N\}. \\ 2) \text{ Associa la cilindrata dell' } j_i\text{-esima automobile.} \end{cases}$$

Il nome delle variabili aleatorie è lo stesso ma la loro distribuzione è cambiata. In particolare,  $X_1, \dots, X_n$  non sono più indipendenti. Questo perché l'esito della variabile aleatoria  $X_i$  dipende dall'esito delle precedenti V.A.  $X_1, \dots, X_{i-1}$ . Facciamo un esempio prendendo quale popolazione obiettivo il colore delle automobili immatricolate. Supponiamo che ci siano  $k$  automobili rosse. Calcoliamo

$$P(X_2 = \text{"rosso"} \mid X_1 = \text{"rosso"}) = \frac{k-1}{N-1}$$

mentre

$$P(X_2 = \text{"rosso"} \mid X_1 \neq \text{"rosso"}) = \frac{k}{N-1}.$$

Se  $X_1$  e  $X_2$  fossero indipendenti le due probabilità condizionate appena calcolate dovrebbero essere uguali fra loro e uguali a  $P(X_2 = \text{"rosso"})$ . Esse sono fra loro diverse e da ciò concludiamo che non sono indipendenti. Per tale motivo le  $n$  variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  così costruite, sebbene utili ai fini dell'inferenza statistica, non sono *i.i.d.* e non costituiscono un  $n$ -campione di un esperimento statistico  $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$ . Per quanto riguarda questo corso utilizzeremo quindi il termine *n-campione di un esperimento statistico* solo in riferimento a osservazioni di variabili aleatorie *i.i.d.*.

### 3.3 Campionamento tramite selezione sistematica

La selezione sistematica si effettua nella maniera seguente.

1. A ciascuna delle  $N$  unità della popolazione assegnamo univocamente un numero da 1 a  $N$ .
2. Calcoliamo il passo di campionamento, notato  $k$ , definito come il rapporto tra  $N$  (la numerosità della popolazione) e  $n$  (la numerosità del campione):

$$k = \frac{N}{n}.$$

3. Selezioniamo un numero a caso  $r$  compreso tra 1 e  $k$ :

$$1 \leq r \leq k. \tag{3.1}$$

4. Includiamo nel campione le  $n$  unità aventi posizioni

$$r, r+k, r+2k, \dots, r+(n-1)k.$$



*Osservazione 8.* Il salto che si effettua tra due unità consecutive selezionate si chiama *passo di campionamento*. In pratica la selezione sistematica consiste nel partizionare<sup>2</sup> la popolazione in  $k$  sottoinsiemi di numerosità  $n$  per poi selezionarne uno a caso. All'interno di ogni sottoinsieme la distanza tra le unità è costante ed uguale  $k$ .

*Esercizio 3.* Costruite lo spazio di probabilità che utilizzereste per eseguire un campionamento sistematico. Come sono definite le variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$ ? Sono indipendenti? Quanto vale la probabilità di estrarre un qualsiasi elemento della popolazione?

Quando  $N/n$  non è un numero intero, utilizzeremo la tecnica della *lista circolare*. In pratica, la procedura sarà modificata nel modo seguente.

1. Calcoliamo  $k^*$ , il numero intero più vicino a  $\frac{N}{n}$ .
2. Estraiamo un numero casuale compreso tra 1 e  $N$  (si noti la differenza con (3.1)):

$$1 \leq r \leq N.$$

3. Includiamo nel campione le  $n$  unità aventi posizioni

$$r, r + k^*, r + 2k^*, \dots, r + (n - 1)k^*$$

dove, una volta esaurita la lista all'unità  $N$ -esima senza aver estratto tutte le  $n$  unità campionarie, si continuerà a contare dalla prima unità (da qui il termine lista circolare).

### 3.4 Varianza di - e covarianza fra - somme pesate di variabili aleatorie

Molti stimatori in statistica ed econometria si possono rappresentare come particolari *somme pesate* di variabili aleatorie. Al fine di studiare alcune delle loro caratteristiche quali ad esempio la correttezza (Definizione 16), la varianza o la covarianza con altre statistiche sarà necessario utilizzare le proprietà del valore atteso, della varianza e della covarianza di somme di variabili aleatorie.

---

<sup>2</sup>Una partizione di un insieme  $\Omega$  si può definire come una collezione di sottoinsiemi di  $\Omega$  non vuoti, mutuamente disgiunti e tali che la loro unione è l'insieme  $\Omega$  stesso. (Definizione tratta da Wikipedia, Partizione (teoria degli insiemi)).

*Esempio 17.* Rendimenti di scala costanti. Nell'Esempio 16 abbiamo visto come si potrebbe stimare una funzione di produzione di tipo Cobb-Douglas. I parametri  $\beta_2$  e  $\beta_3$  corrispondono alle elasticità della produzione rispetto al lavoro e rispettivamente al capitale. Potremmo chiederci se una simile tecnologia possiede rendimenti di scala costanti. In termine dei coefficienti  $\beta_2$  e  $\beta_3$  tale ipotesi implica

$$\beta_2 + \beta_3 = 1. \quad (3.2)$$

Tuttavia  $\beta_2$  e  $\beta_3$  sono dei parametri sconosciuti che andranno stimati tramite opportune statistiche  $\hat{\beta}_i = T_i(Q_1, L_1, K_1, \dots, Q_n, L_n, K_n)$   $i = 1, 2, 3$ .  $\hat{\beta}_2$  e  $\hat{\beta}_3$  sono quindi delle variabili aleatorie, generalmente correlate fra loro in quanto funzioni delle medesime osservazioni. Per verificare tramite un opportuno test d'ipotesi la validità dell'ipotesi di rendimenti di scala costanti procederemo come segue:

1. sostituiremo i parametri sconosciuti  $\beta_2$  e  $\beta_3$  nella (3.2) con i rispettivi valori stimati,  $\hat{\beta}_2$  e  $\hat{\beta}_3$ .
2. calcoleremo la differenza (o scarto) tra il valore osservato  $\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3$  ed il valore teorico che in questo caso è 1.
3. Se la differenza in valore assoluto risulterà essere "grande" rifiuteremo l'ipotesi di rendimenti di scala costanti altrimenti non la rifiuteremo.

Per stabilire se la differenza così calcolata è significativa ("grande") o non significativa ("piccola") sarà necessario calcolare la varianza di  $\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3$  che come già sapete è pari a

$$V(\hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3) = V(\hat{\beta}_2) + V(\hat{\beta}_3) + 2Cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3).$$

Poiché  $\hat{\beta}_2$  e  $\hat{\beta}_3$  risulteranno essere delle particolari somme pesate<sup>3</sup> delle V.A.  $Q_1, \dots, Q_n$  e cioè

$$\hat{\beta}_2 = \sum_{i=1}^n a_i Q_i \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_3 = \sum_{j=1}^n b_j Q_j$$

dovremo essere in grado di calcolare espressioni del tipo

$$Cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = Cov\left(\sum_{i=1}^n a_i Q_i, \sum_{j=1}^n b_j Q_j\right).$$

---

<sup>3</sup>I termini  $a_i$  e  $b_i$  sono dei pesi deterministici (dei numeri).

### 3.4.1 Definizione della varianza e della covarianza

Rivediamo brevemente alcune definizioni. Consideriamo le due variabili aleatorie reali  $X$  e  $Y$  la cui funzione di densità<sup>4</sup> congiunta è notata  $f_{x,y}(x, y)$  mentre le funzioni di densità marginali sono notate rispettivamente  $f_x(x)$  e  $f_y(y)$ . La varianza di  $X$  è definita come il valore atteso ... del quadrato ... degli scarti di  $X$  dal proprio valore atteso  $\mu_X$ :

$$V(X) := E((X - \mu_X)^2) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_X)^2 f_x(x) dx . \quad (3.3)$$

Quale formula alternativa vale anche

$$V(X) = E(X^2) - (\mu_X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_x(x) dx - (\mu_X)^2 . \quad (3.4)$$

La covarianza fra  $X$  e  $Y$  è definita come il valore atteso ... del prodotto ... degli scarti di  $X$  e  $Y$  dai rispettivi valori attesi:

$$Cov(X, Y) := E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{x,y}(x, y) dx dy . \quad (3.5)$$

Come per la varianza abbiamo una formula equivalente

$$Cov(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f_{x,y}(x, y) dx dy - \mu_X \mu_Y .$$

Guardando alla definizione (3.5) di covarianza notiamo che abbiamo il prodotto di due termini  $x - \mu_X$  il primo e  $y - \mu_Y$  il secondo. Questo prodotto è ulteriormente moltiplicato per la rispettiva<sup>5</sup> “probabilità”. Poiché la funzione di densità è sempre maggiore o uguale a zero ma mai negativa il prodotto

$$(x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{x,y}(x, y)$$

sarà negativo quando  $(x - \mu_X)$  e  $(y - \mu_Y)$  possiedono segno diverso (+ – oppure – +) e positivo quando  $(x - \mu_X)$  e  $(y - \mu_Y)$  hanno lo stesso segno (+ + o – –). La covarianza è la “somma” su tutti i possibili esiti pesati per la rispettiva “probabilità”. Essa sarà dunque positiva se, mediamente, quando  $X$  è sopra o sotto il suo valore atteso lo è anche  $Y$ . La covarianza sarà invece negativa se, mediamente, quando  $X$  è sopra (sotto) il proprio valore atteso  $Y$  sarà sotto (sopra)  $\mu_Y$ . Intuitivamente, sapendo ad esempio che  $X$  e  $Y$  sono correlate negativamente e che il valore osservato di  $X$  è maggiore al suo valore atteso mi aspetto che la realizzazione di  $Y$  sia inferiore a  $\mu_Y$ .

<sup>4</sup>Consideriamo il caso di variabili aleatorie continue. Il caso discreto è del tutto identico.

<sup>5</sup>Ricordiamo che nel caso di variabili aleatorie continue la funzione di densità non indica la probabilità di un esito.

### 3.4.2 Tecnica di calcolo (difficoltà pari alla battaglia navale)

Iniziamo questo paragrafo prendendo due V.A. che chiameremo  $X$  e  $Y$  per le quali vale la seguente relazione

$$X = \sum_{i=1}^n a_i X_i \text{ e } Y = \sum_{j=1}^m b_j Y_j, \quad (3.6)$$

dove  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_m$  sono delle V.A. tali per cui  $Cov(X_i, Y_j) = c_{ij}$ .  $c_{ij}$  rappresenta la covarianza (un numero quindi) fra la variabile aleatoria  $X_i$  e  $Y_j$ . Sottolineiamo nuovamente che la variabile aleatoria  $X$  è semplicemente una somma pesata (si dice anche combinazione lineare) delle variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$ . I pesi di tale somma sono i coefficienti  $a_i$  e sono dei numeri.

*Esempio* 18. Prendiamo  $n = 3$ ,  $m = 2$  ed i seguenti valori degli  $a_i$  e  $b_j$ :

$$\begin{array}{lll} \text{Indice } i: & a_1 = 2 & a_2 = -3 & a_3 = 1 \\ \text{Indice } j: & b_1 = 1 & b_2 = -2 \end{array}$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} X &= 2X_1 - 3X_2 + X_3, \\ Y &= Y_1 - 2Y_2. \end{aligned}$$

Supponiamo che le covarianze  $c_{ij}$  siano conosciute. Come possiamo calcolare  $Cov(X, Y)$  in funzione delle covarianze  $c_{ij}$ ? Per spiegare come fare (la dimostrazione è data in appendice) facciamo un passo indietro e rivediamo la proprietà di linearità del valore atteso. Dal corso di analisi matematica sapete che una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare se soddisfa le seguenti due condizioni:

1. Per qualsiasi  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  vale che

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad (3.7)$$

2. Per qualsiasi  $\lambda, x \in \mathbb{R}$  vale che

$$f(\lambda x) = \lambda f(x). \quad (3.8)$$

L'operatore valore atteso, notato  $E$ , che associa ad una V.A.  $X$  il suo valore atteso

$$E(X) = \sum_{k=1}^N x_k p(x_k) \text{ oppure } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

è anch'esso lineare. Infatti, come visto nel corso di Statistica I, le proprietà (3.7) (3.8) sono soddisfatte per qualsiasi V.A.  $X$ ,  $X_1$  e  $X_2$  nonché scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \text{ e } E(\lambda X) = \lambda E(X) . \quad (3.9)$$

Dalla proprietà di linearità del valore atteso segue in maniera immediata che

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) . \quad (3.10)$$

A parole possiamo dire che "il valore atteso di una somma pesata è uguale alla somma pesata dei valori attesi".

*Esempio 19.* (continuato) Supponiamo che i valori attesi di  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  siano rispettivamente uguali a 1,  $-2$ , 3. Il valore atteso di  $X$  sarà pertanto uguale a

$$\begin{aligned} E(X) &= E(2X_1 - 3X_2 + X_3) \\ &= 2E(X_1) - 3E(X_2) + E(X_3) \\ &= 2 + 6 + 3 = 11. \end{aligned}$$

Torniamo ora al calcolo della covarianza fra (e alla varianza di) somme pesate di V.A.. Questo calcolo risulta estremamente semplice se si considera che la covarianza è una funzione (operatore) *bilineare*. Cosa significa bilineare? La spiegazione è molto semplice.

Innanzitutto osserviamo che la funzione di covarianza ha due argomenti: quando calcoliamo la covarianza lo facciamo fra due V.A.

$$Cov\left(\begin{array}{c} X \\ \text{1° argomento} \end{array}, \begin{array}{c} Y \\ \text{2° argomento} \end{array}\right) .$$

Una funzione a due variabili  $f(x, y)$  è detta bilineare se, fissato il secondo (primo) argomento risulta essere lineare nel primo (secondo). In pratica deve valere che

1. Per qualsiasi  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$  vale che

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y), \quad (3.11)$$

Per qualsiasi  $\lambda, x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$  vale che

$$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y). \quad (3.12)$$

2. Per qualsiasi  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}$  vale che

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2), \quad (3.13)$$

Per qualsiasi  $\lambda, y \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}$  vale che

$$f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y). \quad (3.14)$$

*Esempio 20.* La funzione  $f(x, y) = xy$  è bilineare. La dimostrazione è lasciata come esercizio.

Ora, si può dimostrare (si veda l'appendice) che la covarianza è un operatore bilineare. Da ciò risulta che la covarianza si comporta in maniera simile al valore atteso quando noi "fissiamo" uno dei due argomenti. Ad esempio, supponiamo di voler calcolare  $Cov(2X_1 - 3X_2 + X_3, Y_1 - 2Y_2)$ . Partiamo considerando "fisso" il secondo argomento che in questo caso è dato da  $Y_1 - 2Y_2$ . Per semplicità chiamiamo  $Z = Y_1 - 2Y_2$  l'argomento fisso.

$$\begin{aligned} Cov(2X_1 - 3X_2 + X_3, Z) &= Cov(2X_1, Z) + Cov(-3X_2, Z) + Cov(X_3, Z) \\ &= 2Cov(X_1, Z) - 3Cov(X_2, Z) + Cov(X_3, Z) \end{aligned}$$

Grazie alla bilinearità della covarianza possiamo ora sviluppare ciascuno dei tre termini rispetto al secondo argomento,  $Z$ , che riscriviamo nuovamente in funzione di  $Y_1$  e  $Y_2$ :

$$\begin{aligned} Cov(X_1, Y_1 - 2Y_2) &= Cov(X_1, Y_1) + Cov(X_1, -2Y_2) \\ &= Cov(X_1, Y_1) - 2Cov(X_1, Y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_2, Y_1 - 2Y_2) &= Cov(X_2, Y_1) + Cov(X_2, -2Y_2) \\ &= Cov(X_2, Y_1) - 2Cov(X_2, Y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_3, Y_1 - 2Y_2) &= Cov(X_3, Y_1) + Cov(X_3, -2Y_2) \\ &= Cov(X_3, Y_1) - 2Cov(X_3, Y_2) \end{aligned}$$

Quale risultato finale otteniamo la seguente espressione

$$\begin{aligned} Cov(2X_1 - 3X_2 + X_3, Y_1 - 2Y_2) &= 2Cov(X_1, Y_1) - 4Cov(X_1, Y_2) \\ &\quad - 3Cov(X_2, Y_1) + 6Cov(X_2, Y_2) \\ &\quad + Cov(X_3, Y_1) - 2Cov(X_3, Y_2) \\ &= 2c_{11} - 4c_{12} - 3c_{21} + 6c_{22} + c_{31} - 2c_{32}. \end{aligned}$$

Come potete vedere il calcolo della covarianza fra somme di variabili aleatorie è semplice ma laborioso. È tuttavia possibile aiutarsi utilizzando una tabella che ricorda la battaglia navale. La tabella consiste in  $n$  righe e  $m$  colonne, dove  $n$  è il numero di V.A. che figurano nella sommatoria della  $X$  (primo argomento) e  $m$  in numero di quelle della  $Y$  (secondo argomento). All'esempio precedente possiamo associare una tabella  $3 \times 2$  come questa:

	$Y_1$	$Y_2$
$X_1$	$c_{11}$	$c_{12}$
$X_2$	$c_{21}$	$c_{22}$
$X_3$	$c_{31}$	$c_{32}$

Questa tabella è anche chiamata tabella (o matrice) delle covarianze fra  $X_1, X_2, X_3$  e  $Y_1, Y_2$ . Per il calcolo della covarianza aggiungiamo dapprima i coefficienti della somma pesata (combinazione lineare) davanti ad ogni variabile

	$1Y_1$	$-2Y_2$
$2X_1$	$c_{11}$	$c_{12}$
$-3X_2$	$c_{21}$	$c_{22}$
$1X_3$	$c_{31}$	$c_{32}$

ed in seguito all'interno della tabella:

	$1Y_1$	$-2Y_2$
$2X_1$	$2 \cdot 1 \cdot c_{11}$	$2 \cdot (-2) \cdot c_{12}$
$-3X_2$	$(-3) \cdot 1 \cdot c_{21}$	$(-3) \cdot (-2) \cdot c_{22}$
$1X_3$	$1 \cdot 1 \cdot c_{31}$	$1 \cdot (-2) \cdot c_{32}$

Per terminare sommiamo tutti i termini della tabella ottenendo così la covarianza fra le due somme di V.A.:

$$Cov(2X_1 - 3X_2 + X_3, Y_1 - 2Y_2) = 2c_{11} - 4c_{12} - 3c_{21} + 6c_{22} + c_{31} - 2c_{32}.$$

Per completezza d'informazione diamo la formula generale per il calcolo della covarianza fra due combinazioni lineari qualsiasi di V.A.:

$$Cov\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j Cov(X_i, Y_j).$$

### 3.4.3 Varianza di una somma di variabili aleatorie

La varianza di una somma di variabili aleatorie, ad esempio

$$V(2X_1 - 3X_2 + X_3),$$

si calcola in maniera del tutto simile alla covarianza fra somme di V.A.. È infatti immediato verificare che per una qualsiasi V.A.  $X$

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E[(X - E(X))(X - E(X))] = Cov(X, X).$$

Da quest'ultima osservazione notiamo che la varianza di una somma pesata di V.A. altro non è che la somma debitamente pesata della varianze di e delle covarianze fra le V.A. che costituiscono la trasformazione lineare.

*Esempio 21.* Varianza di  $2X_1 - 3X_2 + X_3$

Costruiamo la tabella delle covarianze fra  $X_1, X_2, X_3$  e ...  $X_1, X_2, X_3$ :

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$X_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$
$X_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$
$X_3$	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$

Notiamo dapprima che la tabella delle covarianze ha in questo caso lo stesso numero di righe e di colonne. Inoltre, sulla diagonale principale (cioè in posizione  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  e  $(3, 3)$ ) abbiamo i termini  $c_{ii}$  che corrispondono a  $Cov(X_i, X_i) = V(X_i)$ . Queste covarianze non sono altro che le varianze degli  $X_i$ ! Per tale motivo questa tabella è chiamata la tabella (o matrice) delle *varianze-covarianze* delle V.A.  $X_1, X_2, X_3$ . Fuori dalla diagonale troviamo le covarianze fra  $X_i$  e  $X_j$ , con  $i \neq j$ . Poiché (verifichetelo dalla definizione e dalla proprietà di commutatività della moltiplicazione)  $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i)$  la tabella delle varianze-covarianze è *simmetrica*, cioè vale

$$c_{ij} = c_{ji}.$$

Per il calcolo della varianza procediamo come per il calcolo della covarianza fra somme di V.A., andando ad aggiungere alla tabella (matrice) delle varianze-covarianze i coefficienti della trasformazione lineare (somma pesata)

	$2X_1$	$-3X_2$	$1X_3$
$2X_1$	$2^2 \cdot c_{11}$	$2 \cdot (-3) \cdot c_{12}$	$2 \cdot 1 \cdot c_{13}$
$-3X_2$	$(-3) \cdot 2 \cdot c_{21}$	$(-3)^2 \cdot c_{22}$	$(-3) \cdot 1 \cdot c_{23}$
$1X_3$	$1 \cdot 2 \cdot c_{31}$	$1 \cdot (-3) \cdot c_{32}$	$1^2 \cdot c_{33}$

Le varianze sono moltiplicate per il quadrato del coefficiente della trasformazione lineare. Fuori dalla diagonale troviamo le covarianze fra le rispettive V.A. moltiplicate per i pesi corrispondenti. La varianza di questa trasfor-



mazione lineare è uguale alla somma di tutti gli elementi della tabella, ovvero

$$\begin{aligned} V(2X_1 - 3X_2 + X_3) = & 4c_{11} + 9c_{22} + c_{33} + \\ & -6c_{12} + 2c_{13} + \\ & -6c_{21} - 3c_{23} + \\ & +2c_{13} - 3c_{32} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Infine, grazie alla simmetria della matrice delle varianze-covarianze ( $c_{ij} = c_{ji}$ ) la (3.15) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} V(2X_1 - 3X_2 + X_3) = & 4c_{11} + 9c_{22} + c_{33} + \\ & -12c_{12} + 4c_{13} - 6c_{23} \end{aligned} \quad (3.16)$$

In generale, data una qualsiasi trasformazione lineare delle  $n$  V.A.  $X_1, \dots, X_n$  la varianza è calcolata tramite la seguente formula

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i > j}}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Caso particolare: variabili non correlate

Quando le V.A.  $X_1, \dots, X_n$  sono non correlate, cioè

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \text{ per } i \neq j$$

la formula (3.17) per il calcolo della varianza di una combinazione lineare di V.A. si semplifica notevolmente in

$$V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) . \quad (3.18)$$

In pratica, nel caso di variabili non correlate, la varianza di una somma è la somma delle varianze pesate per il *quadrato* dei coefficienti della combinazione lineare. Ricordate che la varianza è il valore atteso "di un quadrato": per tale motivo i coefficienti sono al quadrato!

## 3.5 Il campionamento casuale semplice

Consideriamo una popolazione di numerosità  $N$ . Chiameremo campione casuale semplice un campione di numerosità  $n$  dove ciascuna unità possiede, *ad ogni passo*, una probabilità pari a  $1/N$  di essere estratta.

*Esercizio 4.* Mostrate che entrambe le tecniche di campionamento con e senza reinserimento soddisfano la condizione imposta dalla definizione di campione casuale semplice. Suggerimento: per quanto riguarda la selezione senza reinserimento, aiutatevi utilizzando la proprietà condizionata.

È dunque possibile ottenere un campione casuale semplice applicando una delle due tecniche di selezione casuale con o senza reinserimento viste in precedenza. “Il campionamento casuale semplice è raramente applicato nelle indagini statistiche, sia perché la selezione è completamente affidata al caso e non incorpora le informazioni note a priori sulla popolazione o sulle caratteristiche distributive delle variabili, sia perché nelle indagini su vasta scala è pesante quanto a costi di rilevazione dei dati e a organizzazione del lavoro “sul campo” ... Il campionamento casuale semplice è invece quello che si assume nella teoria dell’inferenza statistica quando non è precisato il disegno adottato. Per questo tipo di campionamento sono, infatti, proposte metodiche di stima e di verifica della significatività statistica di ipotesi sui più disparati parametri delle distribuzioni, anche multivariate, di indici di relazione tra variabili, di dati organizzati in serie temporali ecc.” (Fabbris, pp. 53-54). Il campionamento casuale semplice è lo standard verso il quale confrontare gli altri tipi di campionamento. Per tale motivo sarà quello da noi maggiormente trattato.

### 3.5.1 Valore atteso e varianza della media campionaria

In questo e nei prossimi paragrafi desideriamo studiare le proprietà di correttezza e di “precisione” della media campionaria  $\bar{X}_n$  quale stimatore del valore medio  $\mu$  della popolazione. In questo caso scalziamo dal trono la distribuzione statistica  $P_p$  della popolazione campione quale principale oggetto di studio. Con modestia ci accontentiamo di stimare il valore medio  $\mu$  della popolazione. Supponiamo quindi che la popolazione sia composta da  $N$  unità. Denotiamo con  $a_i$  il valore della caratteristica studiata dell’ $i$ -esima unità. Ad esempio, se decidessimo di studiare la distribuzione del reddito della popolazione svizzera  $a_i$  rappresenterebbe il reddito dell’ $i$ -esimo individuo alla data in cui è eseguito lo studio. Il parametro sconosciuto da stimare

è dunque uguale a

$$\mu = \sum_{i=1}^N a_i \frac{1}{N}$$

mentre la varianza della distribuzione del reddito è

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N (a_i - \mu)^2 \frac{1}{N} .$$

$\mu$  e  $\sigma^2$  sono quantità che potrebbero essere calcolate se avessimo a disposizione i dati sull'intera popolazione. In realtà entrambe queste quantità sono sconosciute e pertanto dovranno essere stimate. Poiché non desideriamo stimare la distribuzione della popolazione ma solo il primo momento (valore atteso o valore medio) e la varianza per questa volta eviteremo di specificare una famiglia parametrica di distribuzioni.

*Definizione 17.* Frazione di campionamento. Chiameremo la quantità

$$f := \frac{n}{N} \tag{3.19}$$

frazione di campionamento. Essa indica semplicemente la % di unità estratte rispetto al totale della popolazione.

Ci interessiamo ora alla media del campione quale stimatore di  $\mu$ .

### 3.5.1.1 Campionamento con reinserimento

Supponiamo di estrarre un campione di numerosità  $n$  utilizzando la tecnica di selezione con reinserimento. Indichiamo con  $X_1, X_2, \dots, X_n$  le  $n$  variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite che descrivono il risultato della prima, seconda, ...  $n$ -esima estrazione. È immediato verificare<sup>6</sup> che per un qualsiasi  $i \in (1, \dots, n)$

$$E(X_i) = \sum_{j=1}^N a_j \frac{1}{N} = \mu$$

---

<sup>6</sup>Potete verificare applicando le proprietà della sommatoria che  $V(X_i)$  è anche uguale a

$$\sum_{j=1}^N a_j^2 \frac{1}{N} - \mu^2$$

che corrisponde alla formula alternativa (3.4) della varianza data da

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 .$$

e

$$V(X_i) = E((X_i - \mu)^2) = \sum_{j=1}^N (a_j - \mu)^2 \frac{1}{N} = \sigma^2.$$

Per quanto riguarda la media campionaria  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  avremo quindi

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_n) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu \\ V(\bar{X}_n) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La media campionaria è uno stimatore corretto del valore atteso della popolazione. La sua precisione, valutata utilizzando la varianza quale misura di dispersione, dipende da due fattori.

1. La numerosità del campione: la varianza della media  $\bar{X}_n$  decresce in maniera inversamente proporzionale al numero di osservazioni nel campione.
2. La varianza della popolazione: il ricercatore non ha alcun influsso su questo parametro.

Da ultimo sottolineiamo ancora che  $\bar{X}_n$  è una variabile aleatoria la cui distribuzione dipende indirettamente dalla distribuzione della popolazione campione. Purtroppo vale la seguente osservazione. Anche quando la distribuzione della popolazione obiettivo è conosciuta la forma della distribuzione della media  $\bar{X}_n$  non è derivabile analiticamente. Ci sono però delle eccezioni. Una fra queste è la distribuzione normale. Infatti, se le variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  sono *i.i.d.* e distribuite secondo la legge normale  $N(\mu, \sigma^2)$ , allora anche la loro media è una variabile aleatoria normale.

*Esercizio 5.* simulazione e studio dei risultati

### 3.5.1.2 Campionamento senza reinserimento

In questo caso l'estrazione degli  $n$  individui dalla popolazione avviene utilizzando la tecnica di selezione senza reinserimento. Da un punto di vista teorico il campionamento senza reinserimento appare giustificato dal fatto

che l'osservazione ripetuta dello stesso individuo (unità) non aumenta l'informazione disponibile sull'intera popolazione. Appare quindi sensato togliere dall'urna gli individui già osservati e procedere solo con la parte restante della popolazione. Vedremo che tale intuizione è corretta: la media di un campione estratto con la tecnica di selezione senza reinserimento possiede una varianza inferiore alla media di un campione estratto con reinserimento<sup>7</sup>. Come in precedenza abbiamo che

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (3.21)$$

Le variabili  $X_i$  sono ora definite nel seguente modo:

$$X_i = \sum_{j=1}^N a_j U_{ij} \quad (3.22)$$

dove la variabile aleatoria

$$U_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se lo } j\text{-esimo individuo è estratto alla } i\text{-esima estrazione,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*Esercizio 6.* Per  $N = 5$  e  $n = 3$  è dato lo spazio di probabilità  $\left(\Omega^3, \bigotimes_{i=1}^3 \mathcal{E}_i, Q\right)$  sul quale definiamo le variabili aleatorie  $U_{13}$ ,  $U_{21}$  e  $U_{35}$ .

- 1) Definite a parole le tre variabili  $U_{13}$ ,  $U_{21}$  e  $U_{35}$ .
- 2) Sono dati gli esiti  $\omega_1 = (1, 2, 5)$ ,  $\omega_2 = (5, 2, 1)$  e  $\omega_3 = (1, 1, 1)$ . Calcolate per ciascuna delle tre variabili  $U$  il valore che esse assumono in  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Possiamo riassumere il tutto nella seguente tabella

		Indiv. 1		Indiv. 2			Indiv. N
$X_1$	=	$a_1 U_{11}$	+	$a_2 U_{12}$	+	$\dots$	$a_N U_{1N}$
$X_2$	=	$a_1 U_{21}$	+	$a_2 U_{22}$	+		$a_N U_{2N}$
$\vdots$							$\vdots$
$X_n$	=	$a_1 U_{n1}$	+	$a_2 U_{n2}$	+		$a_N U_{nN}$
<hr/>							
$\sum_{i=1}^n X_i$	=	$a_1 \underbrace{\sum_{i=1}^n U_{i1}}_{T_1}$	+	$a_2 \underbrace{\sum_{i=1}^n U_{i2}}_{T_2}$	+	$\dots$	$a_N \underbrace{\sum_{i=1}^n U_{iN}}_{T_N}$

Questa tabella possiede più colonne che righe ( $n \leq N$ : non posso estrarre più di  $N$  individui). Le  $N$  variabili aleatorie  $T_j$  sono la somma rispetto al

<sup>7</sup>Il prezzo da pagare consiste in una maggiore difficoltà nel calcolo di  $V(\bar{X}_n)$ .

numero di estrazioni ( $i$ ) delle variabili  $U_{ij}$ . In pratica  $T_j$  assumerà il valore 1 o 0 a seconda che lo  $j$ -esimo individuo sia stato sorteggiato o meno.

Inserendo la relazione (3.22) nella (3.21) possiamo riscrivere la media come una somma pesata delle V.A.  $T_j$ :

$$\begin{aligned}\bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N a_j U_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n a_j U_{ij} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N a_j \sum_{i=1}^n U_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N a_j T_j.\end{aligned}\quad (3.23)$$

A questo punto è necessario calcolare valore atteso, varianza di - e covarianza fra - variabili aleatorie  $T_j$ .

Per quanto riguarda il valore atteso di  $T_j$  abbiamo

$$E(T_j) = 0 \cdot P(T_j = 0) + 1 \cdot P(T_j = 1) = P(T_j = 1)$$

$P(T_j = 1)$  è la probabilità che sull'arco delle  $n$  estrazioni lo  $j$ -esimo individuo venga sorteggiato. Poiché gli esiti sono tutti equiprobabili, è possibile calcolare  $P(T_j = 1)$  semplicemente come

$$P(T_i = 1) = \frac{\# \text{ esiti favorevoli}}{\# \text{ esiti possibili}}.$$

Il numero di esiti possibili è già stato calcolato in precedenza ed è uguale a

$$D_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}.$$

Il numero degli esiti favorevoli è uguale al numero di esiti con probabilità positiva<sup>8</sup> contenenti il numero  $j$ . Tale numero è la risposta alla seguente domanda: in quanti modo posso disporre gli  $N$  numeri  $1, \dots, N$  in  $n$  scatole, sapendo che una scatola sarà occupata dal numero  $j$ ? Abbiamo  $n$  possibilità per disporre il numero  $j$  nelle  $n$  scatole e successivamente resteranno  $n-1$  scatole libere che dovranno essere riempite scegliendo da  $N-1$  elementi. Il risultato è dunque

$$\frac{n (N-1)!}{(N-1-(n-1))!}.$$

---

<sup>8</sup>Ricordiamo che gli elementi  $\omega$  di  $\Omega^n$  in cui un numero si ripete più volte non vanno tenuti in considerazione in quanto non si realizzeranno mai (estrazione senza ripetizione!).

Otteniamo così

$$P(T_j = 1) = \frac{\frac{n(N-1)!}{(N-1-(n-1))!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{n}{N}. \quad (3.24)$$

Per quanto riguarda la varianza di  $T_j$ , essa è uguale a

$$V(T_j) = E(T_j^2) - (E(T_j))^2 = \frac{n}{N} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 = \frac{n(N-n)}{N^2}.$$

La covarianza fra  $T_j$  e  $T_k$  è invece uguale a

$$\begin{aligned} Cov(T_j, T_k) &= E(T_j T_k) - E(T_j)E(T_k) \\ &= E(T_j T_k) - \left(\frac{n}{N}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Quanto vale  $E(T_j T_k)$ ? Il prodotto  $T_j T_k$  è sempre uguale a 0 salvo quando entrambi gli individui  $j$  e  $k$  figurano nel campione. In tal caso  $T_j T_k = 1$ . Quindi

$$\begin{aligned} E(T_j T_k) &= 0P(T_j = 0, T_k = 0) + 0P(T_j = 1, T_k = 0) \\ &\quad + 0P(T_j = 0, T_k = 1) + 1P(T_j = 1, T_k = 1) \\ &= P(T_j = 1, T_k = 1) \end{aligned}$$

Per calcolare  $P(T_j = 1, T_k = 1)$  utilizziamo nuovamente la combinatoria:

1. Esiti favorevoli

Degli  $n$  posti 2 sono occupati: uno dall'individuo  $j$  e l'altro dall'individuo  $k$ . Abbiamo  $n(n-1)$  modi per disporre i nostri due individui nelle  $n$  scatole. Rimangono  $n-2$  posti liberi che possono essere riempiti dagli altri  $N-2$  individui. Abbiamo quindi

$$\# \text{ esiti favorevoli} = n(n-1)D_{N-2}^{n-2}.$$

2. Esiti possibili (calcolati in precedenza)  $\frac{N!}{(N-n)!}$ .

Abbiamo quindi

$$P(T_j = 1, T_k = 1) = \frac{n(n-1)\frac{(N-2)!}{(N-2-(n-2))!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}.$$

Inserendo quest'ultimo risultato nella (3.25) otteniamo (si noti il segno dell'espressione finale)

$$Cov(T_j, T_k) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Siamo ora pronti a calcolare il valore atteso e la varianza di  $\bar{X}_n$ .

**Il valore atteso di  $\bar{X}_n$**

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_n) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^N a_j T_j\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N a_j E(T_j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N a_j \frac{n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j = \mu. \end{aligned}$$

Quando il campionamento è effettuato senza reinserimento la media campionaria è uno stimatore corretto del valore atteso della popolazione. Questo risultato è identico a quello ottenuto nel caso di campionamento con reinserimento. Sarà dunque interessante confrontare le varianze della media campionaria nei due casi per vedere quale delle due tecniche di campionamento fornisce i risultati migliori in termini di precisione.

**La varianza di  $\bar{X}_n$**  Dall'equazione (3.23) otteniamo che

$$\begin{aligned} V(\bar{X}_n) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^N a_j T_j\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{j=1}^N a_j T_j\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^N a_j a_s \text{Cov}(T_j, T_s) \\ &= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{j=1}^N a_j^2 V(T_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ j \neq s}}^N a_j a_s \text{Cov}(T_j, T_s) \right). \end{aligned}$$

Utilizzando i risultati sulla varianza e covarianza delle V.A.  $T_j$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}_n) &= \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(N-n)}{N^2} \sum_{j=1}^N a_j^2 - \frac{n(N-n)}{N^2(N-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ j \neq s}}^N a_j a_s \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{n(N-n)}{N^2(N-1)} \left( (N-1) \sum_{j=1}^N a_j^2 - \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{s=1 \\ j \neq s}}^N a_j a_s \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \frac{N-n}{N^2(N-1)} \left( N \sum_{j=1}^N a_j^2 - \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^N a_j a_s \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{N-n}{N^2(N-1)} \left( N \sum_{j=1}^N a_j^2 - \left( \sum_{j=1}^N a_j \right) \left( \sum_{s=1}^N a_s \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j^2 - \mu^2 \right) \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Ma  $\sum_{j=1}^N a_j^2 \frac{1}{N} - \mu^2$  è la formula alternativa della varianza della popolazione. Per tale motivo otteniamo quale risultato finale

$$V(\bar{X}_n) = \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n}. \tag{3.27}$$

Confrontando le due formule (3.20) e (3.27) ottenute per la varianza dello stimatore  $\bar{X}_n$  notiamo che il campionamento senza reinserimento è più efficiente. Infatti la quantità  $\frac{N-n}{N-1}$  è sempre minore di uno salvo nel caso particolare (in pratica non rilevante) in cui  $n = 1$ . Questo risultato conferma la nostra intuizione riguardo all'inutilità di reinserire l'unità osservata al fine di acquisire informazioni sulla popolazione. In questo caso la tecnica di reinserimento si rivela persino "dannosa" in termini della varianza di  $\bar{X}_n$ .

### 3.5.1.3 Campionamento sistematico

Supponiamo che il campione di numerosità  $n$  sia stato scelto utilizzando la tecnica di selezione sistematica (si veda il paragrafo 3.3) e per semplicità che  $k = \frac{N}{n}$  sia un numero intero. Ricordiamo che  $k$  corrisponde al numero di gruppi in cui l'intera popolazione è partizionata. La probabilità di includere un particolare individuo nel campione è uguale alla probabilità di selezionare il suo gruppo d'appartenenza: poiché in totale ci sono  $k$  gruppi ed ogni individuo appartiene ad esattamente un solo gruppo tale probabilità è  $\frac{1}{k}$ . Tutti gli individui hanno la medesima probabilità di essere estratti. Tale probabilità è però diversa da  $\frac{1}{n}$  a meno che la numerosità  $N$  della popolazione non sia tale per cui  $N = n^2$ . La media campionaria  $\bar{X}_n$  è come al solito uguale alla somma dei redditi degli individui selezionati divisa per  $n$ , il numero di individui selezionati. Tuttavia, mentre nei casi della tecnica di selezione con e senza reinserimento avevamo potuto definire le variabili aleatorie  $X_i$  come il reddito dell'individuo estratto all' $i$ -esima estrazione, ora ci troviamo di fronte ad un'unica estrazione in cui tutti gli  $n$  individui sono estratti simultaneamente. In pratica è come se estraessimo in un unico colpo la somma  $\sum_{i=1}^n X_i$  che, nel caso del campionamento sistematico, corrisponde alla somma dei

redditi degli  $n$  individui appartenenti al gruppo selezionato. Definiamo per ciascun gruppo  $i \in (1, \dots, k)$  la quantità

$$g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

dove  $a_{ij}$  corrisponde per definizione alla  $j$ -esima persona dell'  $i$ -esimo gruppo. Le quantità  $g_i$  non sono aleatorie ma *sono dei numeri* in quanto il partizionamento della popolazione in  $k$  gruppi è avvenuto in maniera deterministica. La casualità viene introdotta definendo le variabili aleatorie  $T_i$  nel modo seguente

$$T_i = \begin{cases} 1 & \text{l}'i\text{-esimo gruppo è selezionato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Come calcolato in precedenza è facile dimostrare che

$$\begin{aligned} E(T_i) &= \frac{1}{k}, \\ V(T_i) &= \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right), \\ \text{Cov}(T_i, T_s) &= -\frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

A questo punto è semplice convincersi che la media campionaria di un campionamento sistematico altro non è che

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k g_i T_i.$$

**Il valore atteso di  $\bar{X}_n$**  Utilizziamo le proprietà ormai note del valore atteso:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_n) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k g_i T_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k g_i E(T_i) = \frac{1}{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g_i \\ &= \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ji}}_{\text{somma sull'intera pop.}} = \mu. \end{aligned}$$

La media campionaria è dunque uno stimatore corretto del valore atteso della popolazione anche quando la tecnica di campionamento è quella del campionamento sistematico. Veniamo ora alla calcolo del suo grado di precisione.

**La varianza di  $\bar{X}_n$**

$$\begin{aligned}
V(\bar{X}_n) &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^k g_i T_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^k g_i g_s \text{Cov}(T_i, T_s) \\
&= \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^k g_i^2 V(T_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^k \sum_{s=1}^k g_i g_s \text{Cov}(T_i, T_s) \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left( \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \sum_{i=1}^k g_i^2 - \frac{1}{k^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^k \sum_{s=1}^k g_i g_s \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g_i^2 - \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^k g_i g_s \right).
\end{aligned}$$

Continuando esattamente come visto nella (3.26) si ottiene

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (g_i - \bar{g})^2.$$

**Interpretazione:** la varianza di  $\bar{X}_n$  dipenderà quindi dall'eterogeneità dei  $k$  gruppi rispetto alla caratteristica in esame. Se ad esempio  $g_1$  contiene prevalentemente redditi bassi,  $g_2$  prevalentemente redditi medi e  $g_3$  prevalentemente redditi alti avremo una varianza elevata. Se invece  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  contengono tutti redditi bassi/medi/alti avremo che  $g_1 \approx g_2 \approx g_3$  e la varianza dello stimatore sarà quindi più bassa.

### 3.6 Campionamento stratificato

Stratificare una popolazione consiste nel creare una partizione della stessa sulla base di determinati criteri. Ogni sottoinsieme è detto "strato". I criteri utilizzati per definire gli strati dipendono dalle caratteristiche della popolazione nonché dall'obiettivo dello studio. Possibili criteri sono il sesso, l'età, il reddito, l'appartenenza ad una regione linguistica, la dimensione dell'azienda in termini di numero di dipendenti o cifra d'affari, il settore in cui opera l'azienda, ecc. Ovviamente gli strati non avranno quasi mai lo stesso numero di unità. Fabbris (p. 71) identifica i seguenti obiettivi che possono indurre ad effettuare una stratificazione della popolazione.

1. Evidenziare insiemi di unità significative per la ricerca.

2. Separare dalle altre le sottopopolazioni fisicamente isolate e con caratteristiche speciali.
3. Individuare certe unità che si vogliono osservare con tecniche particolari.
4. Introdurre sulla selezione il massimo controllo, pur mantenendola casuale.
5. Individuare sottopopolazioni al massimo omogenee rispetto alla variabile o alle variabili da rilevare e ricavare così stime più efficienti di quelle ottenibili con un campione casuale semplice.

Supponiamo per un istante di osservare l'intera popolazione. Potremmo suddividere gli uomini dalle donne e calcolare per ciascun strato i rispettivi valori medi  $\mu_d$  e  $\mu_u$ . Qual è la relazione tra il valore medio  $\mu$  dell'intera popolazione e quello dei due strati? Indichiamo con  $N_d$  e  $N_u$  il numero di donne e uomini contenuti nelle rispettive sottopopolazioni. Ovviamente varrà che  $N = N_d + N_u$ . Avremo dunque

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N a_i \right) = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^{N_d} a_{d,i} + \sum_{j=1}^{N_u} a_{u,j} \right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_d} a_{d,i} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_u} a_{u,j} = \frac{N_d}{N} \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} a_{d,i} + \frac{N_u}{N} \frac{1}{N_u} \sum_{j=1}^{N_u} a_{u,j} \\
 &= \frac{N_d}{N} \mu_d + \frac{N_u}{N} \mu_u = \pi_d \mu_d + \pi_u \mu_u.
 \end{aligned}$$

Il reddito medio della popolazione è dunque la *somma pesata* dei redditi medi dei due strati. Generalizzando al caso con  $H$  strati, varrà la seguente formula

$$\mu = \sum_{h=1}^H \pi_h \mu_h \tag{3.28}$$

dove

- $\pi_h$  corrisponde al *peso* assegnato all' $h$ -esimo strato e sarà uguale alla frazione di individui (unità) appartenenti allo strato  $h$  rispetto al numero totale di individui (unità) della popolazione

$$\pi_h = \frac{N_h}{N}. \tag{3.29}$$

- $\mu_h$  è il valore medio dell'  $h$ -esimo strato, ovvero

$$\mu_h = \frac{1}{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} a_{h,j}.$$

L'idea fondamentale del campionamento stratificato è quella di stimare i valori medi  $\mu_h$  delle sottopopolazioni (strati) selezionando da ciascuna di esse un campione casuale. In seguito, utilizzando le stime dei singoli  $\mu_h$ , si stimerà il valore medio  $\mu$  della popolazione tramite la formula (3.28), sostituendo ai valori sconosciuti  $\mu_h$  i rispettivi stimatori, notati  $\bar{X}_{n_h}$ :

$$\bar{X}_{str,n} = \sum_{h=1}^H \pi_h \bar{X}_{n_h}.$$

*Esempio 22.* In Svizzera il numero di persone occupate (dati del secondo trimestre 2007, in milioni) sono 4,369 di cui 2,415 uomini e 1,954 donne. Avremo quindi  $\pi_u = \frac{2,415}{4,369}$  e  $\pi_d = \frac{1,954}{4,369}$ . Supponiamo che  $n_u = 200$  e  $n_d = 100$ . Sulla base dei due campioni abbiamo calcolato  $\bar{x}_{n_u} = 60,000$  e rispettivamente,  $\bar{x}_{n_d} = 50,000$ . La stima del reddito medio dei lavoratori svizzeri sarebbe quindi

$$\begin{aligned} \bar{x}_{str,300} &= \frac{2,415}{4,369} 60,000 + \frac{1,954}{4,369} 50,000 \\ &= 33,165 + 22,362 = 55,527. \end{aligned}$$

La numerosità del campione dell'  $h$ -esimo strato è indicato con  $n_h$ . I sottocampioni potranno essere di numerosità diversa. La numerosità del campione è semplicemente la somma delle  $H$  numerosità dei sottocampioni

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_H = \sum_{h=1}^H n_h.$$

Il campione è l'unione degli  $H$  sottocampioni.

*Definizione 18.* Frazione di campionamento. La quantità

$$f_h = \frac{n_h}{N_h} \tag{3.30}$$

è chiamata frazione di campionamento dell' $h$ -esimo strato.

Quando si estrae la stessa frazione di unità da ogni strato, o in altre parole quando la frazione di campionamento è uguale per tutti gli strati

$$f_h = c \quad \forall h \tag{3.31}$$

allora il campione si dice "stratificato proporzionale". Quando invece  $f_h$  non è costante si parlerà di campione "stratificato non proporzionale" o "a probabilità variabili". Si noti che nel caso di campione stratificato proporzionale,  $c$  è uguale alla frazione di campionamento  $f$  definita dalla (3.19) e pari a  $\frac{n}{N}$ . Infatti, utilizzando le (3.30) e (3.31) otteniamo

$$\begin{aligned} n_h &= cN_h \quad \forall h \\ \sum_{h=1}^H n_h &= c \sum_{h=1}^H N_h \\ n &= cN \\ c &= \frac{n}{N}. \end{aligned}$$

Per un campione stratificato proporzionale vale dunque la relazione

$$n_h = \frac{N_h}{N}n \text{ o equivalentemente } \frac{n_h}{n} = \frac{N_h}{N} \quad \forall h. \quad (3.32)$$

Fissata la numerosità del campione sulla base di vincoli economici dettati dalla limitatezza delle risorse a disposizione, il numero di unità da estrarre dall' $h$ -esimo strato è dato dalla formula (3.32). Il campione selezionato avrà in questo caso le stesse caratteristiche della popolazione in termini di rappresentatività di ogni strato al suo interno (formula (3.31)).

*Osservazione 9.* Un campione stratificato proporzionale non è condizione né necessaria né sufficiente per garantire la correttezza dello stimatore  $\bar{X}_{str,n}$ .

*Osservazione 10.* Un campione di numerosità  $n$  verrà generalmente costruito eseguendo  $H$  campionamenti casuali semplici di numerosità  $n_h$  ciascuno,  $h = 1, \dots, H$ . Se il campione è stratificato proporzionale, avremo che individui appartenenti a strati diversi avranno la medesima probabilità di figurare nel campione. Infatti, la probabilità di figurare nel campione di un qualsiasi individuo (prendiamo ad esempio il primo) dello strato  $h$  è uguale (cf. formula (3.24))

$$P(\text{individuo 1 dello strato } h \text{ è estratto}) = \frac{n_h}{N_h} = c = \frac{n}{N}.$$

Se, al contrario, il campione non è stratificato proporzionale, il rapporto  $\frac{n_h}{N_h}$  varierà con  $h$  e quindi le probabilità di inclusione dei singoli individui varieranno anch'esse da strato a strato.

*Osservazione 11.* Se il campione è stratificato proporzionale, la formula per il calcolo di  $\bar{X}_{str,n}$  è semplificabile. Infatti

$$\begin{aligned}\bar{X}_{str,n} &= \sum_{h=1}^H \pi_h \bar{X}_{n_h} = \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \bar{X}_{n_h} = \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} X_{h,j} \\ &\stackrel{n_h = \frac{N_h}{N} n}{=} \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \frac{N}{N_h} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_h} X_{h,j} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^{n_h} X_{h,j}}_{\text{somma sull'intero campione}}.\end{aligned}$$

Tabella riassuntiva

Strato	$h$	1,	...	$h$ ,	...	$H$	Popolazione
# Unità componenti	$(N_h)$	$N_1$ ,	...	$N_h$ ,	...	$N_H$	$N$
Peso	$(\pi_h = \frac{N_h}{N})$	$\pi_1$ ,	...	$\pi_h$ ,	...	$\pi_H$	1
Varianza	$(\sigma_h^2)$	$\sigma_1^2$ ,	...	$\sigma_h^2$ ,	...	$\sigma_H^2$	$\sigma^2$
Unità campionarie	$(n_h)$	$n_1$ ,	...	$n_h$ ,	...	$n_H$	$n$
Frazione di campionamento	$(f_h)$	$f_1$ ,	...	$f_h$ ,	...	$f_H$	$f$

### 3.6.1 La correttezza di $\bar{X}_{str,n}$

Se gli stimatori  $\bar{X}_{n_h}$  di  $\mu_h$  sono tutti degli stimatori corretti,  $\bar{X}_{str,n}$  sarà automaticamente uno stimatore corretto di  $\mu$ :

$$E(\bar{X}_{str,n}) = E\left(\sum_{h=1}^H \pi_h \bar{X}_{n_h}\right) = \sum_{h=1}^H \pi_h E(\bar{X}_{n_h}) = \sum_{h=1}^H \pi_h \mu_h = \mu.$$

La stima di  $\mu$  richiede dunque la stima di  $H$  valori attesi, uno per strato. Per ciascun strato siamo liberi di scegliere la tecnica di selezione nonché il tipo di stimatore più appropriato alle sue caratteristiche.

### 3.6.2 La varianza di $\bar{X}_{str,n}$

Poiché i campionamenti eseguiti sui vari strati sono fra loro indipendenti, la varianza di  $\bar{X}_{str,n}$  è semplicemente uguale a

$$V(\bar{X}_{str,n}) = V\left(\sum_{h=1}^H \pi_h \bar{X}_{n_h}\right) = \sum_{h=1}^H \pi_h^2 V(\bar{X}_{n_h})$$

Quest'ultima formula è valida indipendentemente dalle tecniche di campionamento applicate ai vari strati (purché sia mantenuta l'indipendenza fra un campionamento e l'altro). Ammettiamo ora che ad ogni strato venga applicata la tecnica di campionamento senza reimmissione. Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che in tal caso la varianza<sup>9</sup> di  $\bar{X}_{n_h}$  (cf. formula (3.27)) è uguale a

$$V(\bar{X}_{n_h}) = \frac{N_h - n_h}{N_h - 1} \frac{\sigma_h^2}{n_h} = \frac{1 - f_h}{1 - 1/N_h} \frac{\sigma_h^2}{n_h}$$

dove ora  $\sigma_h^2$  rappresenta la varianza dello strato  $h$ , ovvero

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} (a_{h,j} - \mu_h)^2.$$

Nel caso di un campionamento senza reinserimento avremo quindi

$$V(\bar{X}_{str,n}) = \sum_{h=1}^H \pi_h^2 \frac{1 - f_h}{1 - 1/N_h} \frac{\sigma_h^2}{n_h}. \quad (3.33)$$

*Osservazione 12.* La varianza  $\sigma^2$  della popolazione non compare più nella formula (3.33) della varianza dello stimatore  $\bar{X}_{str,n}$ .

*Osservazione 13.*  $V(\bar{X}_{str,n})$  risulterà essere tanto più piccola quanto più omogenei saranno i diversi strati al loro interno. Ricordiamo che se uno strato  $h$  è perfettamente omogeneo allora la sua varianza è nulla. Nasce da qui il vantaggio di stratificare la popolazione quando gli strati possiedono una certa uniformità rispetto alla caratteristica studiata.

*Osservazione 14.* La formula (3.33) esprime la varianza di  $\bar{X}_{str,n}$  in funzione delle numerosità  $n_h$  dei sottocampioni. Sapendo che per un campione stratificato proporzionale vale (cf. la (3.32))

$$n_h = \frac{N_h}{N} n$$

è possibile riscrivere la varianza di  $\bar{X}_{str,n}$  come

$$V(\bar{X}_{str,n}) = \frac{1 - f}{n} \sum_{h=1}^H \pi_h \frac{N_h}{N_h - 1} \sigma_h^2. \quad (3.34)$$

---

<sup>9</sup>Rispetto alla formula (3.27) occorre evidentemente sostituire  $N$  con  $N_h$  e  $n$  con  $n_h$ .



### 3.6.3 Effetto della stratificazione sulla precisione di stima

Abbiamo visto in precedenza che quando il campione è ottenuto tramite campionamento casuale semplice senza reinserimento la varianza di  $\bar{X}_n$  è uguale a (cf. (3.27))

$$V(\bar{X}_n) = \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1-f}{n} \frac{N}{N-1} \sigma^2. \quad (3.35)$$

Possiamo confrontare questo risultato con la formula (3.34) della varianza di  $\bar{X}_{str,n}$  di un campione stratificato proporzionale. Tuttavia, prima di procedere al confronto vero e proprio, occorre chiarire che relazione sussiste tra la varianza dell'intera popolazione e la varianza di ogni singolo strato.

*Teorema 1.* Notiamo con  $SS$  ( $SS_h$ ) la somma degli scarti dal valore atteso al quadrato, ovvero

$$SS = \sum_{i=1}^N (a_i - \mu)^2 \text{ e } SS_h = \sum_{j=1}^{N_h} (a_{h,i} - \mu_h)^2.$$

Vale la seguente relazione

$$\sigma^2 = \sum_{h=1}^H \pi_h \sigma_h^2 + \sum_{h=1}^H \pi_h (\mu_h - \mu)^2 \quad (3.36)$$

**Interpretazione:** La varianza della popolazione può essere decomposta come la somma pesata delle varianze di ogni singolo strato (misura della eterogeneità interna agli strati) più la varianza dei valori medi degli strati (misura di eterogeneità fra strati).

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}
SS &= \sum_{i=1}^N (a_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2 - N\mu^2 = \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^{N_h} a_{h,i}^2 - N\mu^2 \\
&= \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^{N_h} (a_{h,i}^2 - \mu_h^2 + \mu_h^2) - N\mu^2 \\
&= \sum_{h=1}^H \left( \left( \sum_{i=1}^{N_h} (a_{h,i}^2 - \mu_h^2) \right) + N_h \mu_h^2 \right) - N\mu^2 \\
&= \sum_{h=1}^H \left( \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{N_h} a_{h,i}^2 - N_h \mu_h^2 \right)}_{SS_h} + N_h \mu_h^2 \right) - \underbrace{N}_{\sum_{h=1}^H N_h} \mu^2 \\
&= \sum_{h=1}^H SS_h + \sum_{h=1}^H N_h \mu_h^2 - \sum_{h=1}^H N_h \mu^2 \\
&= \sum_{h=1}^H SS_h + \sum_{h=1}^H N_h (\mu_h^2 - \mu^2)
\end{aligned}$$

Il secondo termine,  $\sum_{h=1}^H N_h (\mu_h^2 - \mu^2)$  è uguale a  $\sum_{h=1}^H N_h (\mu_h - \mu)^2$ . Infatti

$$\begin{aligned}
\sum_{h=1}^H N_h (\mu_h - \mu)^2 &= \sum_{h=1}^H N_h (\mu_h^2 - 2\mu_h \mu + \mu^2) = \\
&= \sum_{h=1}^H N_h \mu_h^2 - 2\mu \sum_{h=1}^H N_h \mu_h + \mu^2 \sum_{h=1}^H N_h \\
&= \sum_{h=1}^H N_h \mu_h^2 - 2N\mu^2 + N\mu^2 = \sum_{h=1}^H N_h (\mu_h^2 - \mu^2)
\end{aligned}$$

Per il termine  $SS$  vale dunque

$$SS = \sum_{h=1}^H SS_h + \sum_{h=1}^H N_h (\mu_h - \mu)^2.$$

Poiché  $\sigma^2 = \frac{SS}{N}$  abbiamo che

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{h=1}^H SS_h + \frac{1}{N} \sum_{h=1}^H N_h (\mu_h - \mu)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N_h} SS_h + 1 \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} (\mu_h - \mu)^2 \\ &= \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} \frac{SS_h}{N_h} + 1 \sum_{h=1}^H \frac{N_h}{N} (\mu_h - \mu)^2\end{aligned}$$

e quindi

$$\sigma^2 = \sum_{h=1}^H \pi_h \sigma_h^2 + \sum_{h=1}^H \pi_h (\mu_h - \mu)^2.$$

Tornando ora al confronto fra la varianza  $V(\bar{X}_n)$  e  $V(\bar{X}_{str,n})$  notiamo che

$$\begin{aligned}V(\bar{X}_n) - V(\bar{X}_{str,n}) &= \frac{1-f}{n} \frac{N}{N-1} \sigma^2 - \frac{1-f}{n} \sum_{h=1}^H \pi_h \frac{N_h}{N_h-1} \sigma_h^2 \\ &= \frac{1-f}{n} \left( \frac{N}{N-1} \sigma^2 - \sum_{h=1}^H \pi_h \frac{N_h}{N_h-1} \sigma_h^2 \right)\end{aligned}$$

Per  $N$  e  $N_h$  sufficientemente grandi  $\frac{N}{N-1} \simeq 1$  e  $\frac{N_h}{N_h-1} \simeq 1$  dimodoché

$$\begin{aligned}V(\bar{X}_n) - V(\bar{X}_{str,n}) &\simeq \frac{1-f}{n} \left( \sigma^2 - \sum_{h=1}^H \pi_h \sigma_h^2 \right) \\ &\stackrel{(\text{??})}{=} \frac{1-f}{n} \sum_{h=1}^H \pi_h (\mu_h - \mu)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Da quest'ultima disuguaglianza deduciamo che la varianza della media calcolata utilizzando un campione stratificato proporzionale è in genere inferiore a quella di un campione casuale semplice di uguale numerosità. Il guadagno risultante dal processo di stratificazione della popolazione rappresentato dalla quantità

$$\frac{1-f}{n} \sum_{h=1}^H \pi_h (\mu_h - \mu)^2$$

è proporzionale alla varianza dei valori medi di strato. Esso sarà nullo se tutti i valori medi sono uguali fra loro.

### 3.7 La stima di $\sigma^2$

Nei paragrafi precedenti è stata analizzata la proprietà di correttezza della media campionaria sotto diverse tipologie di campionamento: con e senza reinserimento, sistematico e stratificato. Oltre alla correttezza ci siamo interessati anche alla sua varianza, ovvero alla precisione con la quale il valore atteso della popolazione è approssimato. Nelle diverse formule (3.20) (3.27) (3.33) (3.34) inerenti alla varianza della media campionaria, figura sempre  $\sigma^2$  (o  $\sigma_h^2$ ), la varianza della popolazione (dell' $h$ -esimo strato). Ad esempio, per un campione casuale semplice estratto senza reimmissione la varianza è pari a

$$V(\bar{X}_n) = \frac{N - n}{N - 1} \frac{\sigma^2}{n}.$$

In generale  $N$  e  $n$  sono noti mentre  $\sigma^2$  (o  $\sigma_h^2$ ) può o non può esserlo.

1. Quando  $\sigma^2$  è noto non sussiste alcun problema:  $V(\bar{X}_n)$  è calcolabile.
2. Quando  $\sigma^2$  ( $\sigma_h^2$ ) non è noto.

In questo caso la varianza  $V(\bar{X}_n)$  del nostro stimatore non è calcolabile. Affinché le suddette formule siano utilizzabili, occorrerà stimare  $\sigma^2$ . Ai fini di questo corso - a meno che non venga specificato diversamente - utilizzeremo sempre  $S^2$  ( $S_h^2$ ) quale stimatore di  $\sigma^2$  ( $\sigma_h^2$ )

$$S^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

o rispettivamente

$$S_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (X_{h,i} - \bar{X}_h)^2,$$

dove

- $n_h$  rappresenta la numerosità del sottocampione estratto dall' $h$ -esimo strato,
- $X_{h,i}$  la variabile aleatoria relativa all' $i$ -esima estrazione dallo strato  $h$
- $\bar{X}_h$  la media calcolata sull' $h$ -esimo sottocampione.

È importante fare una chiara distinzione tra la vera varianza di  $\bar{X}_n$ , notata appunto  $V(\bar{X}_n)$ , e la varianza stimata. Per questo motivo quando  $\sigma^2$  ( $\sigma_h^2$ )

non è nota ed è stimata tramite lo stimatore  $S^2$  ( $S_h^2$ ) aggiungeremo l'accento circonflesso alla  $V$  della varianza di  $\bar{X}_n$ . Ad esempio, scriveremo

$$\widehat{V}(\bar{X}_n) = \frac{N-n}{N-1} \frac{S^2}{n}$$

per indicare che si tratta della stima della varianza di  $\bar{X}_n$  e non della sua vera varianza  $V(\bar{X}_n)$ .

### 3.8 L'intervallo di confidenza per $\mu$

Quando si presenta il risultato di una stima si è soliti fornire tale risultato sotto forma di un valore (stima puntuale) più o meno una certa quantità. Ad esempio, se organizzate il ballo dell'università potreste stimare il numero di partecipanti a  $1'000 \pm 100$  persone, intendendo in tal modo che il numero di persone sarà compreso con *molta probabilità* fra le 900 e le 1'100 persone. Un secondo esempio potrebbe essere quello di una manifestazione sportiva dove il numero esatto di partecipanti non è noto. Gli organizzatori dovranno stimare un intervallo plausibile di partecipanti. Sulla base di tale informazione verranno poi dimensionare le infrastrutture necessarie allo svolgimento della manifestazione. Capita dunque spesso di vedere delle stime in forma di intervallo. Vedremo nei successivi paragrafi come costruire un intervallo di confidenza per  $\mu$ , ovvero un intervallo dentro il quale, con molta probabilità, è contenuto il valore  $\mu$ . Prima di affrontare tale discussione è necessario presentare due importanti argomenti della teoria asintotica: la legge dei grandi numeri ed il teorema del limite centrale.

#### 3.8.1 La legge (debole) dei grandi numeri

La legge dei grandi numeri è utile al fine di comprendere il comportamento *asintotico* di medie di variabili aleatorie. Supponiamo infatti di avere a disposizione una successione infinita  $X_1, X_2, X_3, \dots$  di variabili aleatorie

- *indipendenti*
- di valore atteso  $\mu$
- di varianza  $\sigma^2$ .

Per mezzo di questa successione infinita costruiamo una seconda successione, la successione delle medie dei primi  $n$  elementi

$$\begin{aligned}\overline{X}_1 &= X_1 \\ \overline{X}_2 &= (X_1 + X_2) / 2 \\ \overline{X}_3 &= (X_1 + X_2 + X_3) / 3 \\ &\vdots \\ \overline{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ &\vdots\end{aligned}$$

La successione delle medie  $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \dots$  è ancora una successione di variabili aleatorie. È immediato calcolare, per fisso  $n$ , il valore atteso e la varianza di  $\overline{X}_n$ :

$$\begin{aligned}E(\overline{X}_n) &= \mu, \\ V(\overline{X}_n) &= \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

Come per la successione  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , le V.A.  $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \dots$  possiedono tutte il medesimo valore atteso. Tuttavia questo non è vero per la loro varianza, che tende a diminuire al crescere di  $n$ . Inoltre abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\overline{X}_n) = 0.$$

Ma questo significa che con  $n$  grande le realizzazioni di  $\overline{X}_n$  saranno molto concentrate attorno a  $\mu$ .

*Esempio 23.* Per meglio comprendere quanto accade, aggiungiamo alle tre ipotesi precedenti l'ipotesi di normalità, vale a dire

- $X_1, X_2, X_3, \dots$  sono distribuite secondo la legge normale.

Poiché la somma pesata di V.A. normali indipendenti è una V.A. normale, possiamo eseguire il grafico della funzione di densità degli  $\overline{X}_n$  per  $n = 1, 2$  e  $16$ . Scegliamo, senza perdita di generalità,  $\mu = 1$  e  $\sigma^2 = 4$ .

Al crescere di  $n$ , la funzione di densità (e quindi la probabilità) tende a concentrarsi attorno al valore atteso  $\mu$  (in questo esempio  $\mu = 1$ ). Il prossimo teorema formalizza quanto detto finora.

*Teorema 2.* Legge (debole) dei grandi numeri. Sia  $X_1, X_2, X_3, \dots$  una successione di V.A. indipendenti, di valore atteso  $\mu$  e di varianza  $\sigma^2 < \infty$ . Allora per qualsiasi  $\varepsilon > 0$  piccolo a piacere si avrà che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0. \quad (3.37)$$

Per fisso  $\varepsilon > 0$ , la probabilità  $P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \varepsilon)$  corrisponde alla probabilità che il valore realizzato di  $\bar{X}_n$  cada in un intervallo di centro  $\mu$  e raggio  $\varepsilon$ . La (3.37) ci permette di affermare che questa probabilità tende a 1 al crescere di  $n$  all'infinito.

### 3.8.2 Uguaglianza e convergenza in distribuzione

Nel corso di Statistica I avete studiato che ad ogni variabile aleatoria a valori reali  $X$  è associata una funzione di ripartizione  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definita per qualsiasi numero  $c \in \mathbb{R}$  da

$$F_X(c) := P(X \leq c).$$

La funzione di ripartizione  $F_X$  caratterizza la variabile aleatoria  $X$  in termini della sua *probabilità*. Ora, date due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  è lecito chiedersi se esse abbiano la medesima distribuzione. Diremo che le due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  sono uguali in distribuzione, e in tal caso scriveremo  $X \sim Y$ , se

$$F_X(c) = F_Y(c) \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (3.38)$$

Se le due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  sono uguali in distribuzione avremo dunque che

$$P(X \leq c) = P(Y \leq c) \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (3.39)$$

A scanso di equivoci è bene precisare quanto segue. Affermare che  $X \sim Y$  non significa che la realizzazione di  $X$  sarà uguale a quella di  $Y$ . Ad esempio, supponiamo di lanciare due volte un dado. Siano  $X$  e  $Y$  le V.A. che descrivono il risultato del primo e, rispettivamente, del secondo lancio. Ora, entrambe le V.A. hanno una distribuzione discreta uniforme  $U(1, 6)$ .  $X$  e  $Y$  sono uguali in distribuzione:  $X \sim Y$ . Ciò non toglie che nel primo lancio potrò osservare un cinque mentre nel secondo un tre.

*Definizione 19.* Convergenza in distribuzione. Diremo che la successione  $X_1, X_2, X_3, \dots$  di V.A. converge in distribuzione verso  $Y$  se per ogni  $c \in \mathbb{R}$  con  $F_Y$  continua in  $c$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(c) = F_Y(c) \text{ o equivalentemente } \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq c) = P(Y \leq c).$$

### 3.8.3 Il Teorema del Limite Centrale

Il Teorema del Limite Centrale (TLC) è di estrema importanza in probabilità e statistica in quanto è il fondamento sul quale sono costruiti moltissimi test d'ipotesi (rimandiamo al capitolo sull'inferenza statistica per la definizione

formale di un test d'ipotesi statistica). Nelle pagine precedenti abbiamo visto che, sotto certe condizioni, una media di V.A. converge verso il suo valore atteso. Il valore limite non è più una variabile aleatoria ma un numero ben preciso. L'idea del teorema del limite centrale è quella di evitare, tramite un'opportuna trasformazione, che la successione di V.A.  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots$  converga verso un numero. In altre parole, si desidera mantenere l'aleatorietà del limite della successione e, se possibile, ottenere come valore limite una V.A. la cui distribuzione sia nota. Come fare dunque? L'idea è quella di standardizzare le V.A.  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots$  così da ottenere una nuova successione di V.A. che chiameremo  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ . In pratica dovremo eseguire i due passi necessari alla standardizzazione ovvero

1. sottrarre a  $\bar{X}_n$  il suo valore atteso  $\mu$
2. dividere per la sua deviazione standard  $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

in maniera da ottenere la successione  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  di V.A.  $\sim (0, 1)$

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} . \quad (3.40)$$

*Esempio 24.* Riprendiamo l'Esempio (23) in cui  $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ . Ancora una volta, grazie alla proprietà della normale, dopo la standardizzazione le variabili aleatorie  $Y_n$  saranno ancora tutte normali  $N(0, 1)$  per qualsiasi valore di  $n = 1, 2, \dots$ .

La proprietà di normalità delle V.A.  $Y_n$  nell'Esempio 24 non è vera in generale. Se la successione di V.A.  $X_1, X_2, \dots$  non è costituita da variabili normali, la media  $\bar{X}_n$  non sarà più distribuita secondo la legge normale e, di riflesso, pure  $Y_n$ . La conseguenza della non normalità delle V.A.  $X_1, \dots, X_n$  è la non normalità di  $Y_n$ , sebbene che  $Y_n \sim (0, 1)$ .

Prima di presentare la versione classica del TLC facciamo notare una particolarità relativa alla standardizzazione di  $\bar{X}_n$  (formula (3.40)). Tramite una serie di semplici trasformazioni algebriche è possibile riscrivere  $Y_n$  come una somma pesata di V.A.  $\sim (0, 1)$ .

*Esercizio 7.* Dimostrate dapprima che

$$\bar{X}_n - \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$



e successivamente che

$$Y_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad (3.41)$$

dove  $\varepsilon_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ .

In pratica  $Y_n$ , che corrisponde alla media  $\bar{X}_n$  standardizzata, può essere interpretato come la somma debitamente pesata delle  $n$  V.A.  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  dove ogni  $\varepsilon_i$  altro non è che  $\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim (0, 1)$ . La somma  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$  delle  $n$  variabili aleatorie *i.i.d.*  $\sim (0, 1)$  ha valore atteso zero e varianza  $n$ . La standardizzazione richiede che il peso applicato a  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$  sia  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

*Teorema 3.* Teorema del Limite Centrale (TLC). Sia  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  una successione di V.A. indipendenti, di valore atteso nullo e varianza unitaria. Vale allora

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} N(0, 1). \quad (3.42)$$

*Osservazione 15.* Dal Teorema del Limite Centrale e la relazione (3.41) si deriva che, sotto le condizioni sopraelencate (quali sono?) sulla sequenza di V.A.  $X_1, X_2, \dots$ , per valori di  $n$  sufficientemente grandi la media standardizzata è distribuita come una variabile aleatoria normale standard. È importante notare e *ricordarsi* che il denominatore nella parte sinistra della (3.40) non è altro che la deviazione standard di  $\bar{X}_n$ .

Una variabile aleatoria normale standard è generalmente indicata con la lettera  $Z$ :

$$Z \sim N(0, 1).$$

Il vantaggio di lavorare con una variabile aleatoria normale standard risiede nel fatto che per essa è possibile calcolare probabilità del tipo

$$P(Z \leq c)$$

utilizzando le tavole che già conoscete. Ora se  $\bar{X}_n$  soddisfa il teorema del limite centrale avremo che per  $n$  sufficientemente grande<sup>10</sup>

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} \underset{\text{circa}}{\sim} Z.$$

---

<sup>10</sup>L'uguaglianza non sarà esatta ma al crescere di  $n$  all'infinito eventuali differenze saranno in pratica trascurabili.

Poiché  $Z$  e  $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$  sono uguali in distribuzione avremo (confronta (3.38) e (3.39)) che

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} < c\right) = P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < c\right) \underset{TL C}{\simeq} P(Z < c) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Sarà questo il punto di partenza per la costruzione dell'intervallo di confidenza di  $\mu$ .

### 3.8.4 L'intervallo di confidenza

Iniziamo la costruzione dell'intervallo di confidenza ragionando sulla variabile aleatoria  $Z$ . Siamo interessati a calcolare la probabilità

$$P(|Z| < 1.96) = P(-1.96 < Z < 1.96).$$

Detto a parole stiamo semplicemente calcolando la probabilità che la realizzazione di  $Z$  sarà compresa nell'intervallo  $[-1.96, 1.96]$ . Poiché  $Z$  è una variabile aleatoria normale standard è immediato verificare che

$$P(|Z| < 1.96) = 0.95. \quad (3.43)$$

Ora, poiché  $Z$  e  $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$  sono approssimativamente uguali in distribuzione<sup>11</sup> vale che

$$P(|Z| < 1.96) = P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}\right| < 1.96\right)$$

da cui ricaviamo

$$P(\mu - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)} < \bar{X}_n < \mu + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}) = 0.95. \quad (3.44)$$

All'uguaglianza (3.44) si dà la seguente interpretazione: 95 volte su 100 lo stimatore  $\bar{X}_n$  assumerà dei valori compresi nell'intervallo di centro  $\mu$  e raggio  $1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}$ , ovvero

$$P(\bar{X}_n \in [\mu - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}, \mu + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}]) = 0.95. \quad (3.45)$$

---

<sup>11</sup>Ricordiamo che l'uguaglianza è vera solo al limite.

Tuttavia, essendo  $\mu$  sconosciuto, questa informazione è poco utile. Infatti dove sarà posizionato sulla retta dei numeri reali l'intervallo

$$\left[ \mu - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}, \mu + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)} \right] ?$$

Per mezzo di semplici trasformazioni algebriche possiamo però riscrivere la (3.44) nel seguente modo

$$P(\bar{X}_n - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)} < \mu < \bar{X}_n + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}) = 0.95. \quad (3.46)$$

Quale interpretazione possiamo ora assegnare alla nuova rappresentazione (3.46) della precedente uguaglianza (3.44)? Per dare un significato a questa espressione i due estremi dell'espressione

$$\bar{X}_n - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)} < \mu < \bar{X}_n + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}$$

che definiscono l'intervallo

$$\left[ \bar{X}_n - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}, \bar{X}_n + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)} \right]. \quad (3.47)$$

L'estremo sinistro di questo intervallo è dato da  $\bar{X}_n - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}$ . Il termine  $1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}$  non è aleatorio ma è un numero.  $\bar{X}_n$  per contro è una variabile aleatoria. Lo stesso ragionamento si applica all'estremo destro dell'intervallo. Per tale motivo l'intervallo definito dalla (3.47) è chiamato *intervallo aleatorio* o più comunemente *intervallo di confidenza al 95%*. La (3.46) può essere riscritta in maniera simile alla (3.45) ovvero

$$P(\mu \in [\bar{X}_n - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}, \bar{X}_n + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}]) = 0.95. \quad (3.48)$$

Siamo ora pronti a dare un'interpretazione alla (3.46): con una probabilità del 95% l'intervallo aleatorio (3.47) conterrà il valore  $\mu$ . Oppure: 95 volte su 100 l'intervallo  $[\bar{X}_n - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}, \bar{X}_n + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}]$  conterrà il valore  $\mu$ . Notate la sottile differenza fra la (3.45) e la (3.48). Nella (3.45) l'intervallo è deterministico ma sconosciuto ed il punto ( $\bar{X}_n$ ) è aleatorio ed osservabile. Nella (3.48) per contro l'intervallo è aleatorio ed osservabile mentre il punto ( $\mu$ ) è deterministico ma sconosciuto. È importante sottolineare l'equivalenza delle due espressioni: è possibile passare dall'una all'altra tramite

semplici operazioni algebriche. È tuttavia la seconda espressione in termini dell'intervallo aleatorio

$$\left[ \bar{X}_n - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}, \bar{X}_n + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)} \right]$$

quella che ci fornisce uno strumento pratico per la stima del valore atteso  $\mu$ . Infatti sulla base dei valori realizzati di  $X_1, \dots, X_n$ , notati  $x_1, \dots, x_n$ , calcoleremo dapprima la realizzazione di  $\bar{X}_n$ , notata  $\bar{x}_n$ , ed in seguito la realizzazione dell'intervallo aleatorio ovvero l'intervallo

$$\left[ \bar{x}_n - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]. \quad (3.49)$$

Se  $\mu$  fosse conosciuto, potremmo andare a verificare se l'intervallo così calcolato lo contiene oppure no. Tuttavia questa verifica è impossibile. Quello che sappiamo è che nel 95% dei casi questa procedura determina un intervallo che contiene  $\mu$ .

In entrambi i casi l'ampiezza dell'intervallo è data da  $1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)} = 1.96\sigma/\sqrt{n}$ .

Come già sappiamo la varianza di  $\bar{X}_n$  dipende dalla numerosità  $n$  del campione, dalla varianza della popolazione (o degli stratti) e dalla tecnica di campionamento utilizzata. La costante 1.96 dipende invece dal livello di probabilità che era stato scelto all'inizio di questo paragrafo e che ammonta al 95%. Ricordiamo infatti che la costante 1.96 è stata calcolata come la soluzione in  $c$  della seguente equazione (confronta la (3.43))

$$P(|Z| < c) = 0.95.$$

La probabilità  $\alpha = 0.95$  è chiamata il *livello di confidenza*. Essa rappresenta la confidenza che riponiamo nel fatto che la realizzazione dell'intervallo aleatorio (3.49) contenga  $\mu$ . È il ricercatore che solitamente sceglie il livello di confidenza.  $\alpha = 90\%$ ,  $95\%$  e  $99\%$  sono i valori comunemente utilizzati. Per dato  $\alpha$  occorre poi risolvere l'equazione

$$P(|Z| < c) = \alpha$$

trovando il valore di  $c$  che la soddisfa. Le soluzioni per i tre livelli  $\alpha$  di significatività dati in precedenza sono nell'ordine 1.64, 1.96 e 2.58. Essi andranno utilizzati al posto dell'1.96 nella costruzione dell'intervallo di confidenza (3.49). Da ultimo facciamo semplicemente notare quanto segue. Il valore che la costante  $c$  assume in funzione del livello  $\alpha$  di confidenza corrisponde all' $\frac{1+\alpha}{2}$ -quantile della distribuzione normale. Ad esempio, per  $\alpha = 90\%$ , lo 0.95-quantile è uguale a 1.64.

# Capitolo 4

## Teoria della stima

Nel capitolo introduttivo è stato detto che lo scopo dell'induzione statistica è quello di trarre delle conclusioni di validità generale rispetto ad una o più caratteristiche di una popolazione obiettivo partendo da un insieme limitato di osservazioni (campione). È stato inoltre osservato come la validità di tali conclusioni non sia assoluta, ma soggetta a continua verifica. Con l'arrivo di nuove informazioni sarà necessario confermare alla luce della nuova evidenza empirica quanto inferito precedentemente. L'inferenza statistica si occupa quindi di due importanti problemi: la stima e la verifica d'ipotesi. In questo capitolo ci occuperemo del problema di stima ed in particolare della *stima parametrica puntuale*.

Come descritto nel capitolo 2, assumeremo che la caratteristica in esame della popolazione obiettivo possa essere rappresentata da una variabile aleatoria  $X$  a valori reali la cui distribuzione è conosciuta a meno di un parametro  $\theta$ . In altre parole si ipotizza che la distribuzione della variabile aleatoria  $X$  appartenga ad una famiglia di distribuzioni (cf. paragrafo 2.2)

$$\mathcal{P} = \{f_{\theta}(x), \theta \in \Theta\}$$

dove  $f_{\theta}(x)$  rappresenta la funzione di densità (caso continuo) o di probabilità (caso discreto) di  $X$ . Per fisso  $\theta$ , la forma della densità<sup>1</sup>  $f_{\theta}$  è dunque nota. Diremo che

1. il modello parametrico è correttamente specificato se esiste un  $\theta \in \Theta$ , notato  $\theta_0$ , tale per cui  $f_{\theta_0}(x)$  corrisponde alla *vera funzione* di densità di  $X$ ;

---

<sup>1</sup>Si parlerà semplicemente di densità intendendo qualora  $X$  fosse una V.A. discreta la funzione di probabilità di  $X$ .

2.  $\theta_0$  è identificato, se per qualsiasi altro  $\theta \in \Theta$  vale che  $f_{\theta_0} \neq f_{\theta}$ .

Il valore  $\theta_0$  indica semplicemente quel particolare valore di  $\theta$  per cui  $f_{\theta_0}$  coincide con la vera densità di  $X$ . Se il parametro  $\theta_0$  fosse conosciuto, la funzione di densità (e quindi la distribuzione di  $X$ ) sarebbe completamente specificata ed in tal caso non sarebbe necessario ricorrere all'inferenza. Tuttavia, non essendo questo il caso, dovremo, sulla base di un  $n$ -campione di  $X$ , stimare il valore  $\theta_0$ . Abbiamo a questo punto due possibilità: eseguire una stima puntuale di  $\theta_0$  oppure costruire un intervallo di confidenza per  $\theta_0$ . Ad esempio, nel caso della stima del valore medio  $\mu$  della popolazione abbiamo stimato il valore atteso della V.A.  $X$  sulla base del valore assunto dalla statistica (stimatore)  $\bar{X}_n$ . La realizzazione di  $\bar{X}_n$ , che notiamo con  $\bar{x}_n$ , è dunque una stima puntuale di  $\mu_0$ . In generale indicheremo con  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  la statistica utilizzata quale stimatore puntuale di  $\theta_0$ . La seconda possibilità per stimare  $\theta_0$  è quella di costruire un intervallo di confidenza. In tal caso avremo bisogno di due statistiche, che indicheremo con  $I_1(X_1, \dots, X_n)$  e  $I_2(X_1, \dots, X_n)$ , tali per cui  $I_1 < I_2$  per qualsiasi realizzazione di  $X_1, \dots, X_n$ .  $I_1$  e  $I_2$  sono gli estremi dell'intervallo aleatorio  $I = [I_1(X_1, \dots, X_n), I_2(X_1, \dots, X_n)]$ . Nel paragrafo 3.8.4, le due statistiche  $I_1$  e  $I_2$  ad un livello di confidenza del 95% erano date da

$$I_1 = \bar{X}_n - 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)} \text{ e } I_2 = \bar{X}_n + 1.96\sqrt{V(\bar{X}_n)}.$$

Questo secondo approccio per stimare il parametro sconosciuto è chiamato stima per intervalli. In questo capitolo ci soffermeremo sulla stima puntuale. Per tutto il presente capitolo, salvo indicato diversamente, assumeremo che

- $X$  è una variabile aleatoria con funzione di densità in  $\mathcal{P}$ , cioè esiste un  $\theta_0 \in \Theta$  tale per cui  $f_{\theta_0}(x)$  è la densità di  $X$ ;
- $\theta_0$  è identificato;
- $\theta_0$  è sconosciuto;
- $X_1, \dots, X_n$  è un  $n$ -campione di  $X$ .

Le variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  saranno quindi indipendenti ed identicamente distribuite con funzione di densità  $f_{\theta_0}$ . Il nostro obiettivo consiste nel trovare delle statistiche (funzioni di  $X_1, \dots, X_n$  e dunque V.A.) da usare quali stimatori del parametro sconosciuto  $\theta_0$ .

## 4.1 Il metodo dei momenti

Iniziamo questo paragrafo con alcune definizioni.

*Definizione 20.* Momento  $r$ -esimo. Sia  $X$  una V.A. con funzione di densità  $f_\theta$ . Il momento  $r$ -esimo di  $X$ , notato  $M_r$ , è definito come

$$M_r = E(X^r)$$

ammesso che il valore atteso esista.

Quando  $r = 1$ ,  $M_1$  corrisponde al valore atteso di  $X$  che indicheremo semplicemente come d'abitudine con  $\mu$ .  $M_2$  è il secondo momento di  $X$  che ritroviamo ad esempio nella formula alternativa della varianza di  $X$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2.$$

Utilizzando questa nuova notazione,  $V(X)$  può dunque essere scritta come  $M_2 - \mu^2$ .

*Osservazione 16.* Per una variabile aleatoria  $X$  distribuita simmetricamente<sup>2</sup> attorno allo 0 e tale per cui  $E(|X^r|) < \infty$ , gli  $r$ -esimi momenti dispari sono tutti uguali a 0.

L' $r$ -esimo momento di una variabile aleatoria  $X$  non è altro che il valore atteso della variabile aleatoria  $Y$ , dove  $Y := g(X)$  con

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = x^r.$$

Dal corso di Statistica I sappiamo che il valore atteso di  $Y$  può essere calcolato come

$$E(Y) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_\theta(x) dx. \quad (4.1)$$

Come intuibile dalla (4.1) (verificate nell'Esempio 26), il valore di  $M_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_\theta(x) dx$  dipenderà dal particolare valore del parametro sconosciuto  $\theta$ . Quando necessario esplicheremo la dipendenza di  $M_r$  dal parametro sconosciuto  $\theta$  scrivendo semplicemente  $M_r(\theta)$ .

*Esempio 25.* Supponiamo che la variabile aleatoria  $X$  sia distribuita secondo la legge normale  $N(0, \sigma^2)$  dove la varianza  $\sigma^2$  della distribuzione è sconosciuta. In questo caso il parametro sconosciuto  $\theta$  corrisponde alla varianza  $\sigma^2$ . Consideriamo il quarto momento

$$M_4 = E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx. \quad (4.2)$$

---

<sup>2</sup> $X$  possiede una distribuzione simmetrica rispetto allo 0 se  $f(x) = f(-x)$ .

Anziché calcolare direttamente l'integrale (4.2) definiamo la V.A.  $Z$

$$Z = \frac{X}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Utilizzando l'integrazione per parti (si veda il suggerimento), è semplice calcolare il valore atteso di

$$\begin{aligned} E(Z^4) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{z^3}_v \underbrace{z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}_{u'} dz. \\ &= \dots = 3 \end{aligned}$$

Da cui otteniamo

$$3 = E(Z^4) = E\left(\left(\frac{X}{\sigma}\right)^4\right) = \frac{1}{\sigma^4} E(X^4)$$

cioè

$$M_4 = E(X^4) = 3\sigma^4 = 3(\sigma^2)^2.$$

*Definizione 21.* Momento  $r$ -esimo centrato. Il momento  $r$ -esimo *centrato* di  $X$ , notato  $M_r^c$  è definito come

$$M_r^c = E((X - \mu)^r).$$

Il primo momento centrato di  $X$  è dunque uguale a 0. Il secondo momento centrato è la varianza di  $X$ , da cui segue come appena visto l'uguaglianza

$$M_2^c = M_2 - \mu^2.$$

Se  $X$  è simmetrica rispetto al suo valore atteso e tale per cui  $E(|X|^r) < \infty$  allora tutti i momenti centrati di ordine dispari saranno uguali a 0.

*Osservazione 17.* (Curiosità.) Esiste la seguente relazione tra i momenti  $M_r$  ed i momenti centrati  $M_r^c$

$$M_r^c = \sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i \mu^i M_{r-i}$$

dove  $C_r^i = \frac{r!}{i!(r-i)!}$  è il coefficiente binomiale.



*Esempio 26.* Sia  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -campione estratto da una distribuzione di Poisson. La famiglia parametrica  $\mathcal{P}$  di  $X$  è data da

$$\mathcal{P} = \left\{ f_\theta(x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x \in \{0, 1, \dots\}, \quad \theta \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Il momento  $M_1$  è semplicemente il valore atteso di  $X$  che solitamente notiamo con  $\mu$ :

$$\mu = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = \theta. \quad (4.3)$$

Il secondo momento  $M_2$  è invece

$$M_2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = \theta + \theta^2. \quad (4.4)$$

Infine, per il terzo momento  $M_3$  vale

$$M_3 = \sum_{x=0}^{\infty} x^3 \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} = \theta + 3\theta^2 + \theta^3. \quad (4.5)$$

Come potete constatare sia  $M_1$  che  $M_2$  sono particolari funzioni del parametro  $\theta$ .

Le Definizioni 20 e 21 considerano i momenti teorici della popolazione (o di una variabile aleatoria  $X$ ). È tuttavia possibile estendere la definizione di  $r$ -esimo momento ad un  $n$ -campione  $X_1, \dots, X_n$ .

*Definizione 22.* Momenti campionari. Sia  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -campione estratto da una popolazione  $X$ . Il momento campionario  $r$ -esimo, notato  $\widehat{M}_{r,n}$ , è definito come

$$\widehat{M}_{r,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r.$$

Il primo momento campionario corrisponde a  $\overline{X}_n$ , la media del campione. Analogamente alla Definizione 21 il momento campionario  $r$ -esimo centrato è definito come

$$\widehat{M}_{r,n}^c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^r.$$

Il secondo momento campionario centrato  $\widehat{M}_{2,n}^c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$  è l'equivalente *empirico* di  $\sigma^2$ , la varianza di  $X$ . È interessante osservare che lo stimatore  $S^2$  della varianza è derivabile da  $\widehat{M}_{2,n}^c$  tramite la semplice formula

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \widehat{M}_{2,n}^c.$$

Il fattore di proporzionalità  $\frac{n}{n-1}$  tende a 1 al crescere della numerosità  $n$  del campione.

*Osservazione 18.* Sia  $\widehat{M}_{r,n}$  che  $\widehat{M}_{r,n}^c$  sono delle statistiche (delle funzioni di  $X_1, \dots, X_n$  che possono essere calcolate in quanto non dipendono da nessun parametro sconosciuto) e quindi sono esse stesse delle variabili aleatorie. In generale non è possibile ricavare analiticamente la distribuzione di queste statistiche tuttavia per alcuni valori di  $r$  è possibile calcolarne il valore atteso e/o la varianza.

### 4.1.1 Convergenza dei momenti campionari

La proprietà fondamentale che caratterizza i momenti campionari è la loro convergenza verso il rispettivo momento teorico. Più precisamente vale il seguente teorema.

*Teorema 4.* Sia  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -campione estratto da una popolazione  $X$  avente i primi  $r$ -momenti finiti, ovvero:  $E(X^j) = M_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Allora per qualsiasi  $\varepsilon > 0$  si avrà che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\widehat{M}_{r,n} - M_r| > \varepsilon) = 0. \quad (4.6)$$

Per fisso  $\varepsilon > 0$  con  $\varepsilon$  piccolo a piacere la probabilità  $P(|\widehat{M}_{r,n} - M_r| \leq \varepsilon)$  corrisponde alla probabilità che il valore<sup>3</sup> realizzato di  $\widehat{M}_{r,n}$  cada in un intervallo di centro  $M_r$  e raggio  $\varepsilon$ . Il Teorema 4 afferma semplicemente che per quanto piccolo possa essere l'intervallo attorno al vero valore del momento teorico  $M_r$ , al crescere di  $n$  all'infinito il valore calcolato del momento campionario (utilizzando l'  $n$ -campione) sarà contenuto nell'intervallo stesso con probabilità prossima ad 1.

### 4.1.2 Stimatore dei momenti

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per definire lo stimatore dei momenti e comprendere l'idea che lo caratterizza. Ricapitolando abbiamo visto che

- La distribuzione della variabile aleatoria  $X$  è sconosciuta. Tuttavia sappiamo che essa appartenere alla famiglia di distribuzioni

$$\mathcal{P} = \{f_\theta(x), \theta \in \Theta\}.$$

In particolare esiste un unico  $\theta \in \Theta$ , notato  $\theta_0$ , tale per cui  $f_{\theta_0}(x)$  è la funzione di densità di  $X$ .

---

<sup>3</sup>Il valore che noi calcoleremo una volta osservate  $X_1, \dots, X_n$ .

- Per fisso  $\theta \in \Theta$  possiamo calcolare l' $r$ -esimo momento (momento centrato) di  $X$  che sarà notato  $M_r(\theta)$  o rispettivamente  $M_r^c(\theta)$ .
- Osservando un  $n$ -campione  $X_1, \dots, X_n$  estratto dalla popolazione  $X$  di densità  $f_{\theta_0}$  possiamo calcolare l' $r$ -esimo momento (centrato) campionario  $\widehat{M}_{r,n}$  ( $\widehat{M}_{r,n}^c$ ). Il limite per  $n \rightarrow \infty$  di  $\widehat{M}_{r,n}$  è uguale al corrispondente momento della popolazione  $M_r(\theta_0)$ . Avremo dunque

$$\widehat{M}_{r,n} \simeq M_r(\theta_0). \quad (4.7)$$

*Esempio 27.* Supponiamo che la variabile aleatoria  $X$  possenga una distribuzione di Poisson. Abbiamo visto che per  $r = 3$  vale la seguente relazione

$$M_3(\theta) = \theta + 3\theta^2 + \theta^3.$$

Questo significa che per  $n$  sufficientemente grande avremo

$$\widehat{M}_{3,n} \simeq M_3(\theta_0) = \theta_0 + 3\theta_0^2 + \theta_0^3$$

L'approssimazione (4.7) è il punto di partenza dal quale costruire lo stimatore. Il lato sinistro della (4.7) è calcolabile una volta che il campione  $X_1, \dots, X_n$  è osservato. Il lato destro invece contiene il parametro incognito  $\theta_0$ . Possiamo però tentare di risolvere "l'equazione" (4.7) rispetto a  $\theta_0$  ottenendo così un'approssimazione (stima) di  $\theta_0$  che indicheremo  $\widehat{\theta}$ . Nel caso dell'Esempio 27 supponiamo che il valore realizzato di  $\widehat{M}_{3,n}$  sia uguale 1. Vale dunque

$$\widehat{M}_{3,n} = 1 \simeq M_3(\theta_0) = \theta_0 + 3\theta_0^2 + \theta_0^3. \quad (4.8)$$

Risolvendo rispetto a  $\theta_0$  otteniamo le tre soluzioni  $\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} - 1, -1$  di cui solo la prima è ammissibile in quanto nel caso della distribuzione di Poisson  $\theta \in (0, \infty)$ . Poiché la soluzione è solo un'approssimazione del vero valore scriveremo

$$\widehat{\theta} = \sqrt{2} - 1$$

e non  $\theta_0 = \sqrt{2} - 1$ .

Cambiando l'ordine  $r$  del momento cambia sia la relazione che lega il valore teorico del momento al valore del parametro sia il valore stimato del momento empirico corrispondente. Ad esempio, se nell'Esempio 27 anziché utilizzare il terzo momento utilizzassimo il secondo momento, otterremmo la seguente situazione

$$\widehat{M}_{2,n} \simeq M_2(\theta_0) = \theta_0 + \theta_0^2. \quad (4.9)$$

Con lo stesso  $n$ -campione utilizzato in precedenza per calcolare  $\widehat{M}_{3,n}$  potremmo calcolare  $\widehat{M}_{2,n}$  ed utilizzare tale valore per risolvere la (4.9) ottenendo così

una nuova stima  $\widehat{\theta}$  di  $\theta_0$  che molto verosimilmente sarà diversa dalla precedente. Prendendo ad esempio  $\widehat{M}_{2,n} = 0.39$  avremmo quale unica soluzione ammissibile  $\widehat{\theta} = 0.3$  che è diversa dalla soluzione precedente. In questo caso  $\widehat{\theta}$  sarebbe lo stimatore dei momenti di  $\theta_0$  basato sul secondo momento.

Risolvere le equazioni (4.8) e (4.9) corrisponde, in pratica, a trovare l'inversa della funzione dei momenti

$$M_r(\cdot) : \Theta \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto M_r(\theta).$$

Infatti, applicando la funzione inversa  $M_r^{-1}$  ad ambo i lati della (4.7) otteniamo

$$M_r^{-1}(\widehat{M}_{r,n}) \simeq M_r^{-1}(M_r(\theta_0)) = \theta_0. \quad (4.10)$$

La quantità  $M_r^{-1}(\widehat{M}_{r,n})$  è calcolabile a condizione che la funzione inversa  $M_r^{-1}$  esista (l'equazione abbia un'unica soluzione). La quantità  $M_r^{-1}(\widehat{M}_{r,n})$  rappresenta un'approssimazione (stima) del vero parametro  $\theta_0$ . Come già accennato precedentemente questo è il motivo per cui utilizzeremo la notazione  $\widehat{\theta}$  anziché  $\theta_0$  nell'indicare il valore stimato. Riassumendo, quando la funzione inversa  $M_r^{-1}$  è disponibile in forma analitica lo stimatore col metodo dei momenti di  $\theta_0$  è uguale a

$$\widehat{\theta} = M_r^{-1}(\widehat{M}_{r,n}), \quad (4.11)$$

altrimenti  $\widehat{\theta}$  verrà calcolato quale soluzione rispetto a  $\theta$  dell'equazione

$$\widehat{M}_{r,n} = M_r(\theta)$$

come visto ad esempio nel caso della distribuzione di Poisson e  $r = 2, 3$ . Graficamente abbiamo la seguente interpretazione:

Grafico

*Esempio 28.* Supponiamo che  $X_1, \dots, X_n$  sia un campione casuale da una distribuzione normale  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  il cui valore atteso  $\mu_0$  e varianza  $\sigma_0^2$  sono entrambi sconosciuti. La famiglia parametrica di distribuzioni  $\mathcal{P}$  è uguale

$$\mathcal{P} = \left\{ f_{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right), x \in \mathbb{R}, \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \right\}$$

In questo esempio il parametro sconosciuto  $\theta$  è costituito da due elementi:  $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (\mu, \sigma^2)$ . Parleremo perciò di due parametri sconosciuti. Sarà necessario utilizzare due momenti distinti al fine di ottenere un sistema di due

equazioni e due incognite. Prendiamo arbitrariamente i primi due momenti  $M_1$  e  $M_2$  e costruiamo il seguente sistema di equazioni<sup>4</sup>

$$\begin{cases} \widehat{M}_{1,n} \simeq M_1(\mu, \sigma^2) = \mu \\ \widehat{M}_{2,n} \simeq M_2(\mu, \sigma^2) = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases} \quad (4.12)$$

Il primo momento campionario  $\widehat{M}_{1,n}$  corrisponde a  $\overline{X}_n$  mentre il secondo momento campionario  $\widehat{M}_{2,n}$  è uguale a  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ . Trascurando l'errore d'approssimazione riscriviamo il sistema precedente utilizzando l'uguaglianza stretta così da ottenere il sistema a due equazioni e due incognite desiderato

$$\begin{cases} \overline{X}_n = \mu \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases} .$$

Risolvendo rispetto a  $\mu$  e  $\sigma^2$  otteniamo lo stimatore dei momenti di  $\theta_0 = (\mu_0, \sigma_0^2)$

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \overline{X}_n \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 . \end{aligned}$$

Lo stimatore dei momenti della varianza  $\sigma^2$  di  $X$  è diverso da  $S^2$  che sappiamo essere uno stimatore corretto. Infatti per  $\hat{\sigma}^2$  vale che

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2\right) = E\left(\frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2\right) \\ &= \frac{n-1}{n} E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^2 . \end{aligned}$$

La distorsione (Bias in inglese) di  $\hat{\sigma}^2$  quale stimatore di  $\sigma^2$  è uguale a

$$B(\hat{\sigma}^2) = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = -\frac{1}{n} \sigma^2 .$$

Tuttavia, per  $n \rightarrow \infty$  tale distorsione tende a 0. Diremo allora che  $\hat{\sigma}^2$  è uno stimatore asintoticamente corretto di  $\sigma^2$ .

---

<sup>4</sup>Ricordiamo che

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= M_2 - \mu^2 \end{aligned}$$

da cui si ricava facilmente

$$M_2 = \sigma^2 + \mu^2 .$$

## 4.2 Il metodo di massima verosimiglianza

L'idea alla base del metodo di stima di massima verosimiglianza è molto semplice ed intuitiva. Il seguente esempio (preso da A. Mood, F. Graybill e D. Boes, Introduzione alla statistica, McGraw-Hill, ISBN 88-386-0661-7) è illuminante.

Supponiamo che un'urna contenga un certo numero di palle nere e un certo numero di palle bianche, e supponiamo che si sappia che il rapporto fra i due numeri è di  $3/1$ , ma che non si sappia se le palle più numerose siano le nere o le bianche. In altre parole, la probabilità di estrarre una palla nera è  $1/4$  oppure  $3/4$ . Se si estraggono dall'urna con reimmissione  $n$  palle, la distribuzione di  $X$ , la variabile aleatoria che denota il numero di palle nere presenti nel campione, è data dalla distribuzione binomiale

$$f_p(x) = C_{n,x} p^x q^{n-x} \quad \text{per } x = 0, 1, 2, \dots, n,$$

dove  $q = 1 - p$  e  $p$  è la probabilità di estrarre una palla nera. In questo caso  $p = 1/4$  oppure  $p = 3/4$ . Estrarremo con reimmissione un campione di tre palle, cioè  $n = 3$  e tenteremo di stimare il parametro incognito  $p$  della distribuzione. Il problema di stima è particolarmente semplice in questo caso perché dobbiamo solo scegliere fra  $p = .25$  oppure  $p = 0.75$ . Anticipiamo i risultati dell'estrazione del campione. Si danno di seguito gli esiti possibili e le loro probabilità:

Esito: $x$	0	1	2	3
$f_{\frac{3}{4}}(x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$
$f_{\frac{1}{4}}(x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

In questo esempio, se trovassimo  $x = 0$  su un campione di 3 estrazioni, sarebbe da preferire la stima  $p = 0.25$  rispetto a  $p = 0.75$ , perché la probabilità  $27/64$  è maggiore di  $1/64$ , cioè perché un campione con  $x = 0$  è estratto più probabilmente (nel senso di avere una maggiore probabilità) da una popolazione con  $p = 1/4$  piuttosto che da una con  $p = 3/4$ . E in generale dovremmo stimare  $p = 0.25$  quando  $x = 0$  o  $x = 1$  e  $p = 0.75$  quando  $x = 2$  o  $x = 3$ . Lo stimatore può quindi essere definito come

$$\hat{p} = \hat{p}(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{per } x = 0, 1 \\ 0.75 & \text{per } x = 2, 3 \end{cases}.$$

Lo stimatore “decide” così il valore di  $p$ , notato  $\hat{p}$ , per ogni possibile  $x$ , in modo tale che

$$f_{\hat{p}}(x) > f_{p'}(x),$$

dove  $p'$  è il valore alternativo di  $p$ .

Più in generale, se fossero possibili più valori alternativi di  $p$ , potremmo ragionevolmente procedere nella stessa maniera. Così se noi trovassimo  $x = 6$  in un campione di ampiezza 25 estratto da una popolazione binomiale, dovremmo sostituire tutti i possibili valori di  $p$  nell'espressione

$$f_p(6) = C_{25,6} p^6(1-p)^{19} \quad \text{per } 0 \leq p \leq 1. \quad (4.13)$$

Si può trovare la posizione del massimo ponendo la derivata della funzione (4.13) rispetto a  $p$  uguale a 0 e risolvendo rispetto a  $p$  l'equazione risultante. È immediato verificare che

$$\frac{\partial}{\partial p} f_p(6) = C_{25,6} p^5(1-p)^{18} [6(1-p) - 19p].$$

Ponendo  $\frac{\partial}{\partial p} f_p(6) = 0$  e risolvendo rispetto a  $p$  troviamo le radici  $p = 0, 1, 6/25$ . Le prime due radici danno un minimo della funzione e quindi vanno scartate. Quindi la nostra stima sarà  $\hat{p} = 6/25$ . Questa stima ha la proprietà che

$$f_{\hat{p}}(6) > f_{p'}(6)$$

per qualsiasi altro valore di  $p$  nell'intervallo  $[0, 1]$ .

La definizione di stimatore di massima verosimiglianza necessita dapprima la definizione di funzione di verosimiglianza.

*Definizione 23.* Funzione di verosimiglianza. Si dice funzione di verosimiglianza di  $n$  variabili casuali  $X_1, \dots, X_n$  la densità congiunta delle  $n$  variabili casuali,  $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \theta)$ , considerate come funzione di  $\theta$ . In particolare, se  $X_1, \dots, X_n$  è un  $n$ -campione estratto dalla popolazione  $X$  di densità  $f(x; \theta)$ , la funzione di verosimiglianza è semplicemente il prodotto delle densità  $f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta)$ .

*Osservazione 19.* Per ricordarci che la funzione di verosimiglianza è una funzione di  $\theta$ , utilizziamo per tale funzione la notazione  $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$  oppure  $L(\cdot; x_1, \dots, x_n)$ .

La funzione di verosimiglianza  $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$  fornisce la “verosimiglianza” che le variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  assumano il particolare valore osservato  $x_1, \dots, x_n$ . La *verosimiglianza* è dunque il valore della funzione di densità congiunta valutata in  $x_1, \dots, x_n$ ; per variabili aleatorie discrete corrisponde a una probabilità. Osservati  $x_1, \dots, x_n$  la funzione di verosimiglianza dipende

unicamente da  $\theta$ , il parametro sconosciuto. Se la funzione  $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$  possiede un massimo, tale massimo verrà indicato con  $\hat{\theta}$  e scriveremo

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, \dots, x_n) \quad (4.14)$$

per sottolineare che  $\hat{\theta}$  è la soluzione di un problema di massimizzazione. Il valore di  $\hat{\theta}$  dipenderà ovviamente dai valori osservati  $x_1, \dots, x_n$  (dalle realizzazioni delle V.A.  $X_1, \dots, X_n$ ).  $\hat{\theta}$  è dunque una funzione di  $x_1, \dots, x_n$ : potremo allora scrivere  $\hat{\theta} = T_{mv}(x_1, \dots, x_n)$ . La statistica  $T_{mv}(X_1, \dots, X_n)$  sarà chiamata stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ .

*Definizione 24.* Stimatore di massima verosimiglianza. Sia

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, \dots, x_n) \quad (4.15)$$

la funzione di verosimiglianza delle variabili casuali  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Se  $\hat{\theta}$  [dove  $\hat{\theta} = T_{mv}(x_1, \dots, x_n)$  è una funzione delle osservazioni  $x_1, \dots, x_n$ ] è il valore di  $\theta$  in  $\Theta$  che massimizza  $L(\theta)$ , allora  $T_{mv}(X_1, \dots, X_n)$  è lo *stimatore di massima verosimiglianza* di  $\theta$ .  $\hat{\theta} = T_{mv}(x_1, \dots, x_n)$  è la *stima* di massima verosimiglianza di  $\theta$  sulla base della realizzazione  $x_1, \dots, x_n$  dell' $n$ -campione  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Come già detto nei capitoli precedenti in questo corso tratteremo esclusivamente il caso in cui le variabili casuali  $X_1, \dots, X_n$  costituiscono un  $n$ -campione, ovvero quando esse formano un campione casuale semplice estratto con reimmissione da una popolazione  $X$  avente funzione di densità  $f_\theta$ . Le variabili casuali  $X_1, \dots, X_n$  saranno quindi indipendenti fra loro ed identicamente distribuite. Come già osservato nella definizione (23) di funzione di verosimiglianza, grazie all'indipendenza delle V.A.  $X_1, \dots, X_n$  la funzione di verosimiglianza si riduce al seguente prodotto di densità

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta).$$

Se la funzione di verosimiglianza  $L(\theta)$  soddisfa determinate *condizioni di regolarità*, lo stimatore di massima verosimiglianza sarà soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = 0.$$

Ricordiamo che il logaritmo naturale  $\ln()$  è una funzione monotona crescente (cf. il suo grafico). Questo significa che gli estremi della funzione di verosimiglianza  $L(\theta)$  e della cosiddetta log-verosimiglianza sono gli stessi. Pertanto è indifferente ai fini della massimizzazione della funzione di verosimiglianza massimizzare la stessa  $L(\theta)$  oppure il suo logaritmo  $\ln L(\theta)$ .



Se il numero di parametri sconosciuti anziché uno è  $k$ , la funzione di verosimiglianza dipenderà da  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  e scriveremo

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k}(x_i).$$

La funzione di verosimiglianza dovrà essere massimizzata rispetto ai  $k$  parametri. Come nel caso di un singolo parametro sconosciuto, il massimo della funzione di verosimiglianza sarà soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = 0. \end{cases}$$

Qualora invece decidessimo di massimizzare il logaritmo di  $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  avremo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = 0. \end{cases}$$

In entrambi i casi indicheremo con  $\hat{\theta}_i = T_{mv,i}(X_1, \dots, X_n)$ ,  $i = 1, \dots, k$  i valori che massimizzano la funzione di verosimiglianza  $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ .

*Esempio 29.* Supponiamo di estrarre con reimmissione un campione casuale semplice di numerosità  $n$  da un'urna contenente una certa frazione  $p$  di palline rosse e  $q = (1 - p)$  di palline bianche. Sia  $X$  definita da

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se la pallina estratta è rossa,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$X$  è dunque distribuita secondo la distribuzione di Bernoulli. La famiglia parametrica  $\mathcal{P}$  è data da

$$\mathcal{P} = \{f_p(x), p \in [0, 1]\},$$

con

$$f_p(x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1, \\ q & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Le realizzazioni campionarie  $x_1, \dots, x_n$  di  $X_1, \dots, X_n$  formeranno una successione di 0 e di 1. Poiché  $x_1$  sarà uguale a 0 o 1, possiamo anche scrivere che

$$f_p(x_1) = p^{x_1} q^{1-x_1}. \quad (4.16)$$

Infatti, se  $x_1 = 1$ ,  $f_p(1) = p^1 q^{1-1} = p$  mentre se  $x_1 = 0$ ,  $f_p(0) = p^0 q^{1-0} = q$ . Poiché le  $n$  variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  sono indipendenti, la funzione di verosimiglianza è il prodotto delle  $n$  densità per cui grazie alla (4.16) otteniamo

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^n f_p(x_i) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} q^{1-x_i} \\ &= p^{\sum x_i} q^{n - \sum x_i}. \end{aligned}$$

Ponendo  $y = \sum_{i=1}^n x_i$  otteniamo<sup>5</sup> che la log-verosimiglianza è uguale a

$$\ln L(p) = y \ln p + (n - y) \ln q.$$

Volendo massimizzare la funzione di log-verosimiglianza rispetto al parametro sconosciuto  $p$  poniamo la sua derivata prima uguale a zero:

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{n - y}{1 - p} \stackrel{!}{=} 0.$$

Risolvendo quest'ultima equazione rispetto a  $p$  otteniamo lo stimatore di massima verosimiglianza

$$\hat{p} = \frac{y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

Verifichiamo che il punto estremo così calcolato sia effettivamente un punto di massimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} &= -\frac{y}{p^2} - \frac{n - y}{(1 - p)^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{-p^2 + 2\bar{x}p - \bar{x}}{np^2(1 - p)^2} \end{aligned}$$

È immediato verificare che la derivata seconda nel punto  $p = \hat{p} = \bar{x}$  è uguale a  $\bar{x}^2 - \bar{x} < 0$ . In  $\hat{p}$  la funzione di verosimiglianza ha dunque un massimo.

*Osservazione 20.* In questo caso lo stimatore di massima verosimiglianza di  $p$  coincide con la media campionaria che intuitivamente dovrebbe essere la stima di questo parametro.

---

<sup>5</sup> $y$  corrisponde quindi al numero di palline rosse estratte.

*Esempio 30.* Due parametri sconosciuti. Supponiamo di estrarre un campione casuale semplice di numerosità  $n = 4$  da una popolazione normale  $N(\mu_0, \sigma_0^2)$  con entrambi  $\mu_0$  e  $\sigma_0^2$  sconosciuti. I valori osservati di  $X_1, \dots, X_4$  sono  $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 5, x_4 = -2$ . La famiglia parametrica è uguale a

$$\mathcal{P} = \left\{ f_{\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right), \theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \right\}.$$

In questo esempio la funzione di massima verosimiglianza  $L(\mu, \sigma^2)$  è data ancora una volta dal prodotto delle 4 densità

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^4 f_{\mu, \sigma^2}(x_i) \\ &= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{4/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(3 - \mu)^2 + (-3 - \mu)^2 + (5 - \mu)^2 + (-2 - \mu)^2]\right) \end{aligned}$$

Come già visto nell'Esempio 29 passando alla log-verosimiglianza si ottiene un'espressione più accessibile

$$\begin{aligned} \ln L(\mu, \sigma^2) &= -2 \ln(2\pi) - 2 \ln(\sigma^2) + \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} [(3 - \mu)^2 + (-3 - \mu)^2 + (5 - \mu)^2 + (-2 - \mu)^2]. \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione andrà massimizzata in funzione di  $\mu$  e  $\sigma^2$ .

### 4.3 Proprietà degli stimatori puntuali

Nei paragrafi precedenti abbiamo derivato il metodo dei momenti ed il metodo di massima verosimiglianza quali metodi possibili per ricavare degli stimatori puntuali. Ovviamente non sono questi gli unici metodi di stima. Lo stimatore dei minimi quadrati la cui presentazione è rimandata al corso di Introduzione all'Econometria potrebbe essere un ulteriore esempio. Vista l'abbondanza di stimatori la domanda che vogliamo affrontare in questo paragrafo è la seguente: "Dati due stimatori esiste un modo per decidere quale dei due è il migliore?". Per decidere questo definiremo alcune proprietà che uno stimatore può possedere oppure no. Esse ci aiuteranno a decidere se uno stimatore è migliore di un altro.

Nel paragrafo 2.2 abbiamo definito la proprietà di correttezza (cf. Definizione 16) di uno stimatore. Se uno stimatore non è corretto è possibile quantificare il suo grado di distorsione.

*Definizione 25.* Distorsione (Bias). Sia  $T(X_1, \dots, X_n)$  uno stimatore di  $\theta$ . La distorsione di  $T(X_1, \dots, X_n)$ , notata  $B(T)$ , è definita come

$$B(T) := E(T(X_1, \dots, X_n)) - \theta.$$

Il Bias di uno stimatore corretto è ovviamente 0. Per campioni finiti il bias di uno stimatore  $T(X_1, \dots, X_n)$  può essere funzione del numero  $n$  di osservazioni. Lo stimatore dei momenti  $\hat{\sigma}^2$  della varianza di una distribuzione  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  e  $\sigma^2$  entrambi sconosciuti, derivato nell'Esempio 28 lo dimostra. Nel medesimo esempio abbiamo studiato il comportamento asintotico (per  $n \rightarrow \infty$ ) della distorsione. Lo studio del comportamento asintotico di uno stimatore e delle sue proprietà è molto importante in quanto per  $n$  finito la funzione di distribuzione di  $T_n$  non è generalmente conosciuta<sup>6</sup>. Per tale motivo si è costretti a confrontare gli stimatori sulla base delle loro *proprietà asintotiche* il cui calcolo è possibile grazie a teoremi quali la legge dei grandi numeri e il teorema del limite centrale (a tal proposito su veda il paragrafo 4.4 dedicato alla teoria asintotica).

La correttezza di uno stimatore è una proprietà importante ma non fondamentale per la determinazione del miglior stimatore. Come è stato visto nelle serie di esercizi esiste in genere più di uno stimatore corretto dello stesso parametro. Per tale motivo la correttezza non è un criterio sufficiente per individuare quale sia lo stimatore migliore fra due o più stimatori dello stesso parametro. Per trovare una soluzione al nostro problema consideriamo la seguente situazione. Sia  $X_1, X_2$  e  $X_3$  un campione aleatorio estratto da una popolazione normale  $N(\mu, 1)$ . Sono proposti i seguenti stimatori

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \frac{X_1 + X_2}{2} & \Rightarrow E(\hat{\mu}_1) &= \mu, \\ \hat{\mu}_2 &= \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} & \Rightarrow E(\hat{\mu}_2) &= \mu, \\ \hat{\mu}_3 &= \frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4} & \Rightarrow E(\hat{\mu}_3) &= \mu, \\ \hat{\mu}_4 &= X_1 & \Rightarrow E(\hat{\mu}_4) &= \mu, \\ \hat{\mu}_5 &= \frac{1}{9}(X_1 + X_2 + X_3) & \Rightarrow E(\hat{\mu}_5) &= \frac{1}{3}\mu. \end{aligned}$$

I primi quattro stimatori sono tutti stimatori corretti di  $\mu$ . L'ultimo per contro è distorto, con un termine di distorsione pari a  $B(\hat{\mu}_5) = \frac{1}{3}\mu - \mu = -\frac{2}{3}\mu$ . Qual è dunque il migliore? Notiamo che i cinque stimatori hanno varianze diverse. Infatti

$$V(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{2}, \quad V(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{3}, \quad V(\hat{\mu}_3) = \frac{3}{8}, \quad V(\hat{\mu}_4) = 1, \quad V(\hat{\mu}_5) = \frac{1}{27}.$$

---

<sup>6</sup>Finora avete incontrato stimatori relativamente semplici quali la media campionaria  $\bar{X}_n$  o  $S^2$ , per i quali è possibile calcolare i momenti pur non conoscendo la famiglia parametrica di densità utilizzata. Tuttavia essi sono dei casi particolari. In generale anche il semplice calcolo di  $E(T(X_1, \dots, X_n))$  può risultare assai complesso o addirittura impossibile.

Fra i primi quattro stimatori corretti quello con la varianza minore è  $\hat{\mu}_2$ . Per contro  $\hat{\mu}_5$  è distorto, ma con una varianza in assoluto inferiore, anche rispetto a  $\hat{\mu}_2$ . Se decidessimo di restringere la ricerca dello stimatore migliore all'interno della classe di stimatori corretti, ovviamente  $\hat{\mu}_2$  sarebbe quello da preferire in quanto è il più preciso in termini di varianza. Tuttavia se estendessimo la ricerca anche a stimatori non necessariamente corretti, dovremmo trovare un criterio che ci permetta di misurare il “trade-off” tra la perdita in precisione causata dalla distorsione ed il guadagno in precisione dovuto ad una varianza inferiore. Tale criterio ci è dato dal cosiddetto *Errore Quadratico Medio* (*Mean Squared Error*).

*Definizione 26.* Errore Quadratico Medio (EQM). Sia  $T(X_1, \dots, X_n)$  uno stimatore di  $\theta$ . L'Errore Quadratico Medio dello stimatore  $T(X_1, \dots, X_n)$  di  $\theta$  è definito da

$$EQM_T = E((T - \theta)^2).$$

Il termine “errore quadratico medio” può essere giustificato se si pensa alla differenza  $T - \theta$  come all'errore che si compie nella stima di  $\theta$ .  $E((T - \theta)^2)$  è dunque una misura di dispersione dei valori dello stimatore  $T$  attorno al vero valore  $\theta$ . Se noi confrontassimo gli stimatori guardando i loro rispettivi errori quadratici medi, ne preferiremmo naturalmente uno con errore quadratico medio piccolo.

*Teorema 5.* Sia  $T(X_1, \dots, X_n)$  uno stimatore di  $\theta$ . Vale la seguente identità:

$$\begin{aligned} EQM_T &= \underbrace{V(T)}_{\text{Varianza di } T} + \underbrace{(E(T) - \theta)^2}_{\text{quadrato della distorsione}} \\ &= V(T) + (B(\theta))^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

*Osservazione 21.* Per uno stimatore corretto  $T$  di  $\theta$  avremo che il secondo termine è zero e quindi varrà semplicemente  $EQM_T = V(T)$ .

Tornando ai due stimatori  $\hat{\mu}_2$  e  $\hat{\mu}_5$  possiamo ora calcolare il rispettivo EQM. Poiché  $\hat{\mu}_1$  è uno stimatore corretto avremo che

$$EQM_{\hat{\mu}_2} = V(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{3}.$$

Per quanto riguarda invece  $\hat{\mu}_5$

$$EQM_{\hat{\mu}_5} = V(\hat{\mu}_5) + \left(-\frac{2}{3}\mu\right)^2 = \frac{1}{27} + \frac{4}{9}\mu^2.$$

Avremo quindi che lo stimatore  $\hat{\mu}_5$  è superiore allo stimatore  $\hat{\mu}_2$  in media quadratica per valori di  $\mu$  compresi nell'intervallo  $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ .

## 4.4 Elementi di teoria asintotica

In questo paragrafo consideriamo due importanti caratteristiche di uno stimatore  $T(X_1, \dots, X_n)$  di  $\theta$ . La prima è la consistenza, definita attraverso la convergenza in probabilità di  $T(X_1, \dots, X_n)$  a  $\theta$  mentre la seconda è la normalità asintotica della quantità  $\sqrt{n}(T(X_1, \dots, X_n) - \theta)$ . Entrambi i concetti sono già stati incontrati in precedenza: il primo ad esempio quando è stata trattata la convergenza dei momenti campionari  $M_{r,n}$  ai rispettivi momenti  $\mu_r$ , il secondo quando abbiamo considerato la distribuzione limite della media standardizzata  $\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ .

### 4.4.1 Consistenza

La consistenza dello stimatore  $T(X_1, \dots, X_n)$  di  $\theta$  è definita nel seguente modo

*Definizione 27.* Consistenza. Sia  $T(X_1, \dots, X_n)$  uno stimatore del parametro sconosciuto  $\theta$ . Diremo che  $T$  è uno stimatore consistente di  $\theta$  se per qualsiasi  $\epsilon > 0$   $T$  soddisfa la seguente condizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T(X_1, \dots, X_n) \in (\theta - \epsilon, \theta + \epsilon)) = 1. \quad (4.18)$$

*Osservazione 22.* Uno stimatore che soddisfa la (4.18) si dice convergente in probabilità a  $\theta$  e si scrive  $T(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ .

La consistenza di uno stimatore è dunque una proprietà asintotica. Al crescere dell'informazione disponibile la precisione della stima, misurata tramite la probabilità di trovarsi in prossimità del vero valore, deve essere totale e cioè la probabilità deve tendere a 1. Uno stimatore consistente ci garantisce che all'aumentare dell'informazione (numero di osservazioni) il valore stimato si avvicinerà con probabilità crescente al vero valore. Potremmo chiederci quale sia la relazione tra la consistenza di uno stimatore e la sua varianza. Prima di affrontare questa discussione presentiamo un'ulteriore definizione.

*Definizione 28.* Convergenza in media quadratica. Lo stimatore  $T(X_1, \dots, X_n)$  del parametro sconosciuto  $\theta$  è convergente (o consistente) in media quadratica se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EQM_T = E((T - \theta)^2) = 0.$$

*Osservazione 23.* Poiché, come visto nel teorema 26 vale che

$$EQM_T = V(T) + (B(\theta))^2,$$

lo stimatore  $T$  sarà convergente in media quadratica se e solo se sia la varianza che la sua distorsione tendono a 0 al crescere di  $n$  all'infinito. In questo modo

abbiamo un criterio molto semplice per verificare la convergenza in media quadratica di  $T$ .

Possiamo ora caratterizzare la relazione che lega la consistenza di uno stimatore alla sua varianza.

*Teorema 6.* Se uno stimatore  $T$  di  $\theta$  è consistente in media quadratica, esso sarà pure uno stimatore consistente di  $\theta$  (non è necessariamente vero l'inverso).

Il precedente teorema è particolarmente utile in quanto permette di trovare un criterio semplice per verificare la consistenza di uno stimatore  $T$  di  $\theta$ . Infatti, se sia la distorsione che la varianza di  $T$  tendono a 0 al crescere di  $n$ , allora lo stimatore è consistente. Ovviamente per uno stimatore corretto è sufficiente che la sua varianza tenda a 0 al crescere di  $n$  essendo la sua distorsione uguale a 0.

#### 4.4.2 Normalità asintotica

Il teorema 3 del limite centrale afferma che la media  $\bar{X}_n$  delle variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  se opportunamente standardizzata converge per  $n \rightarrow \infty$  in distribuzione ad una variabile aleatoria  $Z \sim N(0, 1)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} Z. \quad (4.19)$$

Il lato sinistro della (4.19) che chiameremo  $Y_n$  può essere riscritto come

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}.$$

Una proprietà della convergenza in distribuzione è quella che se  $Y_n$  converge a  $Z$  e noi moltiplichiamo  $Y_n$  per un numero, diciamo  $c$ , allora  $cY_n$  convergerà in distribuzione a  $cZ$ . Questa proprietà ci permette di studiare il comportamento asintotico della quantità  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ . Infatti

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) = \sigma \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} = \sigma Y_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sigma Z.$$

Ma poiché  $Z$  è  $N(0, 1)$ ,  $\sigma Z$  avrà una distribuzione  $N(0, \sigma^2)$ . Abbiamo dunque dimostrato che

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} N(0, \sigma^2). \quad (4.20)$$

Le due formule (4.19) e (4.20) sono del tutto equivalenti. Tuttavia la formula (4.20) è quella generalmente utilizzata per presentare la distribuzione asintotica dello stimatore di massima verosimiglianza (dopo le opportune modifiche di notazione).

*Teorema 7.* Distribuzione asintotica dello stimatore di massima verosimiglianza. Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione *i.i.d.* estratto da una popolazione  $X$  di densità  $f_\theta(x)$ . Sia  $\hat{\theta}_n := T_{mv}(X_1, \dots, X_n)$  lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$  con

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f_\theta(x_i)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_n} = 0.$$

Allora vale che

1. Lo stimatore di massima verosimiglianza è consistente per il parametro  $\theta$ :  $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$ .
2.  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$  è asintoticamente normale

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} N(0, \frac{1}{I(\theta)})$$

dove  $I(\theta) := E \left[ \left( \frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta} \right)^2 \right]$  è chiamata l'informazione di Fisher.

3. Alternativamente  $I(\theta)$  può essere calcolata nel seguente modo

$$I(\theta) = -E \left( \frac{\partial^2 \ln f_\theta(X)}{\partial \theta^2} \right).$$

*Osservazione 24.* Per il calcolo di  $I(\theta)$  la funzione  $\ln f_\theta(x)$  è derivata rispetto a  $\theta$  (la  $x$  è considerata costante!). La stessa cosa vale per la derivata seconda  $\partial^2 \ln f_\theta(x) / \partial \theta^2$ .

Quest'ultimo teorema è particolarmente importante in quanto stabilisce che lo stimatore di massima verosimiglianza è uno stimatore consistente di  $\theta$  e asintoticamente normale. Infatti, come nel caso della media campionaria  $\bar{X}_n$ , la distribuzione asintotica di  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$  è anch'essa normale con una varianza che dipende da un'espressione conosciuta col nome di *informazione di Fisher* (ed uguale al valore atteso del quadrato di  $\frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta}$ ). Per finire l'informazione di Fisher, notata  $I(\theta)$ , è altresì calcolabile per mezzo del valore atteso della seconda derivata di  $\ln f_\theta$ .

*Esempio 31.* Supponiamo di estrarre un campione casuale semplice di numerosità  $n$  da una popolazione normale  $N(\mu, \sigma^2)$  con solo  $\mu$  sconosciuto. La famiglia parametrica è uguale a  $(\sigma^2 \text{ poiché conosciuto è ora da considerarsi alla stregua di un numero})$

$$\mathcal{P} = \left\{ f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right), \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$



La funzione di massima verosimiglianza  $L(\mu)$  è data dal prodotto delle  $n$  densità

$$\begin{aligned} L(\mu) &= \prod_{i=1}^n f_{\mu}(x_i) \\ &= \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right). \end{aligned}$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\mu$  sappiamo essere uguale alla media campionaria  $\bar{X}_n$ . Inoltre, poiché la somma di variabili aleatorie normali indipendenti è ancora normale (è questa una particolarità della distribuzione normale), la distribuzione di  $\bar{X}_n$  è  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ . La distribuzione di  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  è dunque  $N(0, \sigma^2)$ . Se il Teorema 7 è corretto, dovranno valere le seguenti uguaglianze:

$$\sigma^2 = E \left[ \left( \frac{\partial \ln f_{\mu}(X)}{\partial \mu} \right)^2 \right]^{-1} = - \left[ E \left( \frac{\partial^2 \ln f_{\mu}(X)}{\partial \mu^2} \right) \right]^{-1}. \quad (4.21)$$

*Esercizio 8.* Quale esercizio verificate voi stessi la correttezza della (4.21) nel caso in cui la  $X$  è distribuita secondo la legge di normale  $N(\mu, \sigma^2)$ . Procedete come segue:

1. Calcolate la derivata  $\frac{\partial \ln f_{\mu}}{\partial \mu}$ , il suo quadrato ed infine il valore atteso del suo quadrato, notato  $E \left[ \left( \frac{\partial \ln f_{\mu}(X)}{\partial \mu} \right)^2 \right]$ .
2. Calcolate la derivata seconda  $\partial^2 \ln f_{\theta}(x) / \partial \theta^2$  ed in seguito il suo valore atteso.

### 4.4.3 Disuguaglianza di Cramèr-Rao

La disuguaglianza di Cramèr-Rao stabilisce un *limite inferiore* per quanto riguarda la varianza di un *qualsiasi* stimatore corretto del parametro  $\theta$ . In altre parole, per quanto preciso possa essere lo stimatore in questione la sua varianza non sarà mai al di sotto di tale limite.

*Teorema 8.* Disuguaglianza di Cramèr-Rao. Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione *i.i.d.* estratto da una popolazione  $X$  di densità  $f_{\theta}(x)$  e  $T(X_1, \dots, X_n)$  uno stimatore corretto di  $\theta$ . Vale la seguente disuguaglianza

$$V(T(X_1, \dots, X_n)) \geq \frac{1}{n I(\theta)} \quad (4.22)$$

dove  $I(\theta)$  è l'informazione di Fisher definita nel Teorema 7.

*Osservazione 25.* Grazie alle proprietà della varianza la disuguaglianza (4.22) può essere riscritta come

$$V(\sqrt{n}(T(X_1, \dots, X_n) - \theta)) \geq \frac{1}{I(\theta)}.$$

L'utilità di quest'ultimo teorema risiede nel fatto che esso rivela il limite massimo di efficienza nella stima del parametro sconosciuto  $\theta$ . Come detto precedentemente, per  $n$  finito, può non essere possibile calcolare la varianza dello stimatore  $T$  e ovviamente non sarà neppure possibile verificare se il limite inferiore dato nella (4.22) è raggiunto<sup>7</sup> o meno. In tal caso si è soliti guardare alla varianza della distribuzione asintotica di

$$\sqrt{n}(T(X_1, \dots, X_n) - \theta)$$

che nella maggior parte dei casi che incontrerete in econometria sarà  $N(0, v^2)$ . Il termine  $v^2$  corrisponde alla varianza della distribuzione asintotica di

$$\sqrt{n}(T(X_1, \dots, X_n) - \theta).$$

Quando  $T(X_1, \dots, X_n)$  è lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\theta$ , il teorema 7 ci dice che  $v^2$  è uguale a  $\frac{1}{I(\theta)}$  che per l'osservazione 25 corrisponde al limite inferiore. Lo stimatore di massima verosimiglianza raggiunge quindi *asintoticamente* il limite inferiore di Cramér-Rao.

È possibile generalizzare la disuguaglianza di Cramér-Rao anche al caso di uno stimatore  $T$  non corretto di  $\theta$ . In tal caso il teorema 8 va modificato come segue.

*Teorema 9.* Disuguaglianza di Cramér-Rao, caso generale. Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione *i.i.d.* estratto da una popolazione  $X$  di densità  $f_\theta(x)$  e  $T(X_1, \dots, X_n)$  uno stimatore di  $\theta$  la cui distorsione è uguale a  $B(\theta)$ . Vale la seguente disuguaglianza

$$V(T(X_1, \dots, X_n)) \geq \frac{(1 + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta})^2}{n I(\theta)} \quad (4.23)$$

dove  $I(\theta)$  è l'informazione di Fisher definita nel Teorema 7.

---

<sup>7</sup>In generale, per  $n$  fisso, il limite di Cramér-Rao è un limite inferiore non raggiungibile.

## Capitolo 5

### Verifica d'ipotesi

Dopo aver trattato alcuni argomenti propri della teoria della stima affronteremo in questo capitolo il secondo grande tema della statistica inferenziale: la verifica d'ipotesi.

L'induzione statistica e la verifica di ipotesi sono alla base di tutta la ricerca scientifica. In economia così come nelle scienze naturali o in medicina accade spesso che l'oggetto del problema sia quello di capire se, a seguito di un particolare evento o di un intervento pianificato, vi sia un cambiamento nelle caratteristiche della popolazione in termini del suo comportamento e/o attributi. In medicina, ad esempio, si potrebbe voler determinare se un nuovo farmaco o una nuova terapia sia più efficace nella cura di una certa malattia rispetto a un farmaco o trattamento tradizionale. Anche in micro- e macroeconomia ci sono numerosi esempi dove la verifica d'ipotesi può essere utilizzata per appurare empiricamente la correttezza di una teoria economica o l'efficacia di una determinata politica economica. In primo luogo sarà necessario definire la famiglia parametrica  $\mathcal{F}$  di densità che si intende utilizzare. In seguito si dovrà definire l'ipotesi che si desidera verificare in termini della distribuzione di probabilità della popolazione in esame.

*Definizione 29.* Ipotesi statistica. Un'ipotesi statistica è un'affermazione o supposizione sulla distribuzione di una o più variabili casuali.

L'ipotesi statistica soggetta ad esame è chiamata ipotesi nulla ed è generalmente notata con " $H_0$ :" seguito dalla descrizione dell'ipotesi.

*Esempio 32.* Un produttore di penne a sfera ha acquistato una macchina per la produzione delle sfere da inserire nella punta della penna. Una volta messa a punto, la macchina dovrebbe produrre penne dal diametro di 0.6 millimetri. Per il produttore è particolarmente importante che le sfere prodotte non siano

né troppo grandi né troppo piccole. Dall'esperienza maturata in passato si sa che una macchina messa a punto correttamente produce sfere di diametro 0.6 millimetri con una variabilità di  $\sigma = 0.005$  millimetri:  $X \sim N(0.6, (0.005)^2)$ . La famiglia parametrica di densità è dunque data da

$$\mathcal{P} = \left\{ f(x | \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.005} \exp \left( -\frac{1}{2 \cdot 0.005^2} (x - \mu)^2 \right), \mu \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Sotto l'ipotesi che la macchina abbia la giusta messa a punto,  $\mu$  è conosciuto ed uguale a 0.6. Per contro<sup>1</sup>, se la macchina fosse mal funzionante il diametro medio della produzione potrebbe essere superiore o inferiore a 0.6. Poiché la prima ipotesi determina univocamente la distribuzione di  $X$  la utilizzeremo quale ipotesi nulla:

$$H_0 : \text{la macchina è tarata correttamente.}$$

L'alternativa all'ipotesi nulla, chiamata *ipotesi alternativa*, verrà indicata con " $H_A$  :". In questo primo esempio essa può essere espressa matematicamente come

$$H_A : \mu \neq 0.6.$$

*Esempio 33.* Un caseificio ha il forte sospetto che un suo fornitore diluisca il latte con acqua. Da numerosi test eseguiti in passato dal Laboratorio cantonale si sa che la temperatura di gelo di un campione di latte è una variabile aleatoria normale di valore atteso  $-0.545$  °C e deviazione standard  $0.008$  °C.

La famiglia parametrica di densità è ancora normale

$$\mathcal{P} = \left\{ f(x | \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.008} \exp \left( -\frac{1}{2 \cdot 0.008^2} (x - \mu)^2 \right), \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Supponiamo che il latte non sia annacquato: in tal caso il valore di  $\mu$  sarebbe quello calcolato dal Laboratorio cantonale e la distribuzione di  $X$  e di un campione  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  sarebbe conosciuta. Per contro, qualora il latte venisse diluito con acqua, la sua temperatura di gelo sarebbe superiore a quella del latte "puro". Avremmo quindi<sup>2</sup>  $\mu > -0.545$ . Tuttavia, non conoscendo la percentuale di acqua aggiunta al latte, l'esatto valore di  $\mu$  non sarebbe comunque calcolabile. Inoltre la legge afferma che "chiunque è presunto innocente fino a quando la sua colpevolezza non sia dimostrata dinanzi alla Corte". Quindi la nostra ipotesi nulla sarà la seguente

$$H_0 : \text{Il latte non è annacquato (} \Leftrightarrow \text{il fornitore è onesto)}$$

---

<sup>1</sup>Implicitamente si assume che difetti nella taratura della macchina non influenzano la varianza della distribuzione.

<sup>2</sup>Si assume ragionevolmente che l'annacquamento del latte non modifichi  $\sigma^2$ .

che in base al nostro ragionamento può essere espressa in termini del parametro  $\mu$  semplicemente come

$$H_0 : \mu = -0.545.$$

Non rifiutare  $H_0$  significa scagionare il fornitore dal sospetto di truffa nei confronti del caseificio. Per contro, l'alternativa di  $H_0$  è che il fornitore effettivamente diluisca con acqua il latte venduto. In tal caso il valore atteso della temperatura di gelo sarà superiore a  $-0.545$ . L'*ipotesi alternativa*  $H_A$  sarà dunque espressa come

$$H_A : \mu > -0.545.$$

Il grosso vantaggio di aver scelto quale ipotesi nulla  $\mu = -0.545$  è dato dal fatto che  $H_0$  identifica in maniera esatta la distribuzione di  $X$  e di  $(X_1, X_2, \dots, X_5)$ .

Abbiamo definito l'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa sulla base delle informazioni in nostro possesso ed alle varie assunzioni riguardo alla famiglia parametrica  $\mathcal{P}$ . In entrambi i casi l'ipotesi nulla è tale per cui la distribuzione della variabile aleatoria  $X$  è completamente specificata. In generale diremo che un'ipotesi statistica (nulla o alternativa che sia) è *semplice* se specifica completamente la distribuzione di  $X$ , come è appunto il caso per le due ipotesi nulle dei due ultimi esempi. In caso contrario diremo invece che l'ipotesi è *composta*. Ad esempio l'ipotesi alternativa

$$H_A : \mu > -0.545$$

dell'Esempio 33 è un'ipotesi composta in quanto non identifica esattamente la distribuzione di  $X$ .  $H_A$  è l'unione di un'infinità di ipotesi semplici.

## 5.1 Test per un'ipotesi statistica

Eseguire un test di un'ipotesi statistica significa costruire una regola di decisione basata sulle osservazioni disponibili che ci permette di concludere se l'ipotesi sotto esame debba essere rifiutata o meno. Vista la natura aleatoria di quanto osservato, tale conclusione varierà a seconda del campione osservato. Diamo innanzi tutto una definizione formale di quanto detto.

*Definizione 30.* Test per un'ipotesi statistica. Un test di una ipotesi statistica  $H$  è una regola o procedimento per decidere se rifiutare o meno  $H$ .

Il problema è come determinare tale regola. In pratica l'informazione disponibile sarà contenuta in un  $n$ -campione  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  di osservazioni di  $X$ . La decisione dipenderà dai valori che osserveremo: se quanto osservato sarà “in sintonia” con l'ipotesi non la rifiuteremo. Le osservazioni ci daranno dunque evidenza pro o contro l'ipotesi. Tale evidenza sarà generalmente definita in termini di probabilità. Illustriamo quanto appena detto continuando gli esempi precedenti.

*Esempio 34.* Continuazione dell'Esempio 33. Il caseificio decide di calcolare la temperatura di gelo di un campione di 5 cartoni di latte, notato  $(x_1, \dots, x_5)$ , provenienti dal fornitore in questione. Potremmo a questo punto domandarci qual è la probabilità, sotto l'ipotesi nulla, di osservare  $(x_1, \dots, x_5)$ . Tuttavia questa domanda ha poco senso: la distribuzione di  $(X_1, \dots, X_5)$  è una distribuzione continua per cui tale probabilità è 0. Per contro, anziché lavorare direttamente con i valori del campione, utilizziamo una statistica  $S$ . In particolare, calcoliamo la media delle cinque osservazioni,  $\bar{x} = -0.536$ . Grazie alle proprietà della distribuzione normale sappiamo che la media campionaria  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{0.008^2}{5})$ . Sotto l'ipotesi  $H_0$  la distribuzione di  $\bar{X}$  è  $N(-0.545, \frac{0.008^2}{5})$ . A questo punto è possibile calcolare la probabilità di osservare un valore di  $\bar{X}$  uguale o superiore a quello calcolato dal caseificio:

$$\begin{aligned} P_{H_0}(\bar{X} > -0.536) &= P_{H_0}(\bar{X} + 0.545 > 0.009) \\ &= P_{H_0}\left(\frac{\sqrt{5}(\bar{X} + 0.545)}{0.008} > 2.515\right) \\ &= 0.59\%. \end{aligned}$$

La probabilità è dunque 0.59%. Quindi se il latte fosse “puro” osserveremmo in media una temperatura simile o superiore meno di una volta su cento. Questo è un evento raro visto che la sua probabilità è bassa. Una probabilità dello 0.59% genera evidenza contro l'ipotesi di onestà del fornitore. Si potrebbe dunque decidere di rifiutare l'ipotesi nulla a favore dell'ipotesi alternativa.

*Definizione 31.  $p$ -value.* La *probabilità* sotto  $H_0$  di osservare un valore della statistica almeno estremo quanto il valore osservato è detta  $p$ -value.

Il  $p$ -value è dunque un indice di evidenza empirica a favore dell'ipotesi nulla  $H_0$ . Il test statistico parlerà tanto più a favore dell'ipotesi nulla tanto più elevato sarà il  $p$ -value. La decisione finale di rifiutare o meno  $H_0$  dipenderà dalla “quantità” di evidenza sotto la quale non siamo più disposti a mantenere

$H_0$  come ipotesi valida. Tale soglia, notata  $\alpha$ , è detta *livello di significatività*. Essa può variare a dipendenza delle circostanze. In economia si utilizza generalmente un livello di significatività del 5%. Assumendo dunque un livello di significatività  $\alpha = 5\%$ , rifiuteremo l'ipotesi nulla se il  $p$ -value  $< \alpha$ . In tal caso diremo che il test è significativo ad un livello di significatività dell' $\alpha$  per cento.

*Osservazione 26.* È importante sottolineare che a causa della natura aleatoria del fenomeno le nostre conclusioni saranno soggette ad errore. Infatti, la scarsa evidenza a favore di  $H_0$  non significa che  $H_0$  sia falsa. Come avremo modo di approfondire in seguito, il livello di significatività  $\alpha$  misura la probabilità dell'errore di rifiutare  $H_0$  quando questa è effettivamente vera.

*Esempio 35.* Continuazione dell'Esempio 32. Per verificare il corretto funzionamento della macchina il produttore produce un campione *i.i.d.* di  $n = 25$  sfere. Come in precedenza utilizziamo quale statistica  $S$  la media campionaria  $\bar{X}$ . Supponiamo che il valore medio realizzato sia di  $\bar{x} = 0.5985$ . Sotto l'ipotesi  $H_0$  la distribuzione di  $\bar{X}$  è  $N(0.6, 0.001^2)$ . A differenza dell'Esempio 33, in questo caso l'ipotesi alternativa non ha una direzione ben precisa. Il vero valore di  $\mu$  potrebbe essere superiore o inferiore a 0.6. Per questo motivo nel calcolo del  $p$ -value si terrà conto della probabilità di osservare un valore di  $S$  ( $\bar{X}$  in questo caso) inferiore a 0.5985 (più estremo sulla sinistra della distribuzione) e superiore a 0.6015 (più estremo sulla destra della distribuzione). Tale valore è stato calcolato nel seguente modo

$$0.6 + (0.6 - 0.5985) = 0.6015.$$

Il  $p$ -value è dunque uguale a

$$\begin{aligned} P_{H_0}(\bar{X} < 0.5985, \bar{X} > 0.6015) &= P_{H_0}(|\bar{X} - 0.6| > 0.0015) \\ &= P_{H_0}\left(\frac{|\bar{X} - 0.6|}{0.001} > 1.5\right) = 13.4\%. \end{aligned}$$

Decisamente questo non rappresenta un evento raro. Fissato un livello di significatività pari al 5% il  $p$ -value risulta essere più grande. Per tale motivo non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla. La macchina è da considerarsi perfettamente funzionante.

Ricapitolando quanto visto fino ad ora abbiamo i seguenti elementi costitutivi di un test d'ipotesi

1. L'ipotesi, definita come un'asserzione su un determinato fenomeno. Nei nostri due esempi le ipotesi sotto esame concernono il funzionamento di una macchina per la produzione di sfere e la composizione del latte.

2. L'ipotesi nulla,  $H_0$ . È un'affermazione grazie alla quale è possibile ricavare la distribuzione di una o più variabili aleatorie. Spesso l'ipotesi nulla è qualcosa del tipo "... nessun problema ..." oppure "... nessun effetto ..." oppure "... nessuna differenza ...".
3. L'ipotesi alternativa,  $H_A$ , è da intendersi come una "direzione contro l'ipotesi nulla". Nel primo esempio con  $H_A : \mu \neq 0.6$  parleremo di test bilaterale, in quanto l'alternativa non specifica una direzione per il vero valore di  $\mu$  rispetto a quello proposto dall'ipotesi nulla. Nel secondo esempio il test è unilaterale destro in quanto l'alternativa si trova alla destra ( $\mu > \mu_0 = -0.545$ ) del valore suggerito da  $H_0$ . Riassumendo:
  - *Test unilaterale*: l'alternativa è specificata in una sola direzione.
  - *Test bilaterale*: l'alternativa è specificata in due direzioni.
4. Statistica del test. In entrambi gli esempi la statistica  $S$  utilizzata nella costruzione del test è la media campionaria. La statistica  $S$  deve essere tale per cui, sotto l'ipotesi nulla  $H_0$ , la sua distribuzione è conosciuta.
5.  $\alpha \in (0, 1)$  (ad esempio  $\alpha = 5\%$ ) che corrisponde al livello di significatività desiderato. È la soglia o quantità di evidenza (in termini di probabilità) minima richiesta, sotto la quale si rigetta l'ipotesi nulla in quanto giudicata poco credibile.
6. Il  $p$ -value, calcolato tenendo conto dell'ipotesi alternativa (unilaterale o bilaterale). Esso corrisponde alla probabilità di osservare qualcosa di simile o di più estremo (come indicato dall'ipotesi alternativa).
7. La decisione se rifiutare o meno il test. Se il  $p$ -value è inferiore al livello di significatività predefinito  $H_0$  sarà rifiutata, altrimenti l'ipotesi nulla verrà mantenuta.

## 5.2 Regione critica di un Test d'ipotesi

Il test per un'ipotesi statistica presentato nel precedente paragrafo è basato sul concetto di  $p$ -value, ovvero la probabilità di osservare un valore della statistica  $S$  uguale o più estremo di quello calcolato tramite le osservazioni  $(x_1, \dots, x_n)$ . Il  $p$ -value è un concetto relativamente nuovo, introdotto con l'avvento del personal computer grazie al quale il suo calcolo risulta essere immediato. Tuttavia, quella del  $p$ -value non è l'unica formulazione possibile di un test d'ipotesi. Infatti, studieremo ora un modo di formulare un test



d'ipotesi che è alternativo a quello basato sul  $p$ -value, ma *equivalente* dal punto di vista delle conclusioni. La formulazione del test è diversa, non il suo risultato. Utilizzeremo l'Esempio 33 quale punto di partenza.

### 5.2.1 Test unilaterale destro

Abbiamo la seguente situazione:

1. Vogliamo testare l'ipotesi riguardante la composizione del latte acquistato da un certo fornitore sospettato di aggiungere acqua al suo latte.
2. L'ipotesi nulla  $H_0$  è che il fornitore sia una persona onesta. Sotto questa ipotesi la distribuzione della temperatura di gelo del latte del fornitore, notata  $X$ , è identica a quella definita dal Laboratorio cantonale ("non c'è nessuna differenza"), ovvero  $X \sim N(-0.545, 0.008^2)$ . L'ipotesi nulla può essere quindi formalizzata come

$$H_0 : \mu = -0.545.$$

3. L'ipotesi alternativa è che il fornitore abbia aggiunto acqua. In tal caso il latte ghiaccerà in media ad una temperatura superiore

$$H_A : \mu > -0.545.$$

4. Abbiamo deciso di utilizzare la media campionaria  $\bar{X}$  quale statistica per costruire il test. Sotto l'ipotesi nulla la nostra statistica è distribuita  $N(-0.545, \frac{0.008^2}{5})$ .
5.  $\alpha = 5\%$  è il livello di significatività desiderato.

Fino a questo punto la costruzione del test è identica alla formulazione tramite il  $p$ -value. Ora, anziché calcolare il  $p$ -value, calcoliamo l'  $1 - \alpha$  quantile  $k$  della distribuzione della media campionaria  $\bar{X}$  (vedi disegno).  $k$  sarà in seguito utilizzato per definire quando rigettare  $H_0$ . Poiché abbiamo scelto  $\alpha = 5\%$ , il valore  $k$  soddisfa la seguente uguaglianza

$$P_{H_0}(\bar{X} > k) = 0.05. \quad (5.1)$$

Il quantile può essere ricavato utilizzando le tavole della distribuzione normale. Infatti

$$\begin{aligned} P_{H_0}(\bar{X} + 0.545 > k + 0.545) &= 0.05 \\ P_{H_0}\left(\frac{\bar{X} + 0.545}{0.008/\sqrt{5}} > \frac{k + 0.545}{0.008/\sqrt{5}}\right) &= 0.05 \\ P\left(Z > \frac{k + 0.545}{0.008/\sqrt{5}}\right) &= 0.05 \\ P\left(Z \leq \frac{k + 0.545}{0.008/\sqrt{5}}\right) &= 0.95 \end{aligned}$$

Sotto l'ipotesi nulla la quantità  $Z = \frac{\bar{X} + 0.545}{0.008/\sqrt{5}}$  è distribuita  $N(0, 1)$ . Dalle tavole sappiamo che  $P(Z \leq 1.645) = 0.95$  da cui si ricava che<sup>3</sup>

$$k = -0.545 + 1.645 \cdot 0.008/\sqrt{5} = -0.539.$$

Per costruzione, la probabilità di osservare un valore di  $\bar{X}$  superiore o uguale a  $-0.539$  è dunque uguale 5%. Inoltre, come già osservato nel caso del  $p$ -value, l'osservazione di valori estremi in direzione dell'ipotesi alternativa è da considerarsi come evidenza sfavorevole all'ipotesi nulla. Per questo motivo utilizzeremo la seguente regola di decisione:

7 bis. Se il valore calcolato della statistica  $\bar{X}$  ( $S$  in generale) cadrà “lontano” e in direzione dell'ipotesi alternativa, ovvero se

$$\bar{x} > k = -0.539 \tag{5.2}$$

rifiuteremo l'ipotesi nulla, altrimenti non la rifiuteremo.

*Osservazione 27.* Il “quanto lontano” deve cadere il valore della nostra statistica affinché  $H_0$  venga rigettata dipende dal livello di significatività  $\alpha$ . Tanto più piccolo il valore di  $\alpha$  (che rappresenta il livello minimo di evidenza richiesta a favore di  $H_0$ ) e tanto più estrema sarà la soglia  $k$ .

La decisione se rifiutare o meno il test dipende dalla disequazione (5.2). Essa definisce implicitamente una così detta *regione critica*.

---

<sup>3</sup>Ricordiamo che data una variabile aleatoria  $N(\mu, \sigma^2)$  l' $\alpha$ -quantile è dato dalla seguente formula

$$q_\alpha = \mu + z_\alpha \sigma$$

dove  $z_\alpha$  rappresenta l' $\alpha$ -quantile della distribuzione normale standard.

*Definizione 32.* Regione critica (test unilaterale destro). L'insieme  $R$  delle possibili realizzazioni  $(x_1, \dots, x_5)$  di  $(X_1, \dots, X_5)$  per cui  $\bar{x} > k = -0.539$  (e quindi tali per cui il test è rifiutato) è chiamato la regione critica del test o semplicemente regione critica

$$R = \{(x_1, \dots, x_5) \mid \bar{x} > k = -0.539\}.$$

Notiamo che la regione critica è definita in termini delle possibili realizzazioni  $(x_1, \dots, x_5)$  del campione  $(X_1, \dots, X_n)$  e non rispetto all'intervallo  $(-0.539, \infty)$ . Talvolta è possibile ottenere una rappresentazione grafica di  $R$ . Per esempio, il grafico di  $\bar{x} > -0.539$  per  $n = 2$  dà la seguente regione critica

### 5.2.2 Test bilaterale

Ricapitolando quanto discusso nell'Esempio 32 concernente il produttore di penne a sfera ci troviamo nella seguente situazione.

1. Vogliamo testare l'ipotesi riguardante la corretta messa a punto della macchina che produce le sfere per la punta delle penne.
2. L'ipotesi nulla  $H_0$  è che la macchina sia correttamente tarata, ovvero che il diametro  $X \sim N(0.6, (0.005)^2)$ . Matematicamente l'ipotesi nulla può essere espressa semplicemente da

$$H_0 : \mu = 0.6.$$

3. L'ipotesi alternativa è che la macchina non sia a punto e che di conseguenza il diametro medio delle sfere prodotte sia diverso da 0.6

$$H_A : \mu \neq 0.6.$$

4. Abbiamo deciso di utilizzare la media campionaria  $\bar{X}$  quale statistica per costruire il test. Sotto l'ipotesi nulla la media campionaria delle 25 osservazioni è distribuita  $N(0.6, (0.001)^2)$ .
5.  $\alpha = 5\%$  è il livello di significatività desiderato.

Per quanto riguarda i punti 1-5 non vi è alcuna differenza con la specificazione del test basata sul  $p$ -value. A questo punto però anziché calcolare il  $p$ -value, costruiamo la regione critica. Essa verrà in seguito utilizzata per definire quando rifiutare il test.

Tendenzialmente rigetteremo l'ipotesi nulla se osserveremo dei valori della statistica estremi in direzione dell'ipotesi alternativa. Essendo questo un test bilaterale, dobbiamo considerare valori estremi della statistica in ambo le direzioni. Ciò è possibile assegnando metà del livello di significatività al lato sinistro della distribuzione e l'altra metà al lato destro. Dovremo quindi calcolare due quantili della distribuzione di  $\bar{X}$ : il primo (lato sinistro) è il 2.5%-quantile ed il secondo (lato destro) è il 97.5%-quantile

$$\begin{cases} P_{H_0}(\bar{X} < k_1) = 2.5\% \\ P_{H_0}(\bar{X} > k_2) = 2.5\% \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} P_{H_0}(\bar{X} - 0.6 < k_1 - 0.6) = 2.5\% \\ P_{H_0}(\bar{X} - 0.6 > k_2 - 0.6) = 2.5\% \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-0.6}{0.001} < \frac{k_1-0.6}{0.001}\right) = 2.5\% \\ P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-0.6}{0.001} > \frac{k_2-0.6}{0.001}\right) = 2.5\% \end{cases}$$

Ancora una volta sotto l'ipotesi nulla la quantità  $\frac{\bar{X}-0.6}{0.001} = Z$  è distribuita  $N(0, 1)$ . Definendo  $z_{0.025} = \frac{k_1-0.6}{0.001}$  e  $z_{0.975} = \frac{k_2-0.6}{0.001}$  il sistema si può riscrivere come

$$\begin{cases} P(Z < z_{0.025}) = 2.5\% \\ P(Z > z_{0.975}) = 2.5\% \end{cases} \Leftrightarrow P\left(\left|\frac{\bar{X} - 0.6}{0.001}\right| > z_{0.975}\right) = 0.05$$

Utilizzando le tavole della distribuzione normale standard e la sua simmetria attorno allo 0 deduciamo che  $z_{0.975} = -z_{0.025} = 1.96$ . Infine, si ottiene  $k_1 = 0.598$  e  $k_2 = 0.6019$ . Siamo ora pronti a definire la regola per il rifiuto dell'ipotesi nulla.

7 bis. Se il valore calcolato della statistica  $\bar{X}$  cadrà “lontano” e in direzione dell'ipotesi alternativa, ovvero se

$$\bar{x} < k_1 = 0.598 \text{ oppure } \bar{x} > k_2 = 0.6019 \quad (5.4)$$

rifiuteremo l'ipotesi nulla. In caso contrario<sup>4</sup>  $H_0$  sarà mantenuta. La regola di decisione può essere espressa anche nella sua forma standardizzata: se

$$\left|\frac{\bar{x} - 0.6}{0.001}\right| > z_{0.975} = 1.96$$

rifiuteremo l'ipotesi nulla.

---

<sup>4</sup>Ciò corrisponde al caso in cui

$$\frac{|\bar{X} - 0.6|}{0.001} \leq z_{0.975}.$$

Anche nel caso di un'ipotesi bilaterale possiamo definire una regione critica  $R$  includendo in essa tutte quelle realizzazioni  $(x_1, \dots, x_{25})$  tali per cui una delle due disuguaglianze della (5.4) è soddisfatta.

*Definizione 33.* Regione critica (test bilaterale). L'insieme  $R$  delle possibili realizzazioni  $(x_1, \dots, x_{25})$  di  $(X_1, \dots, X_{25})$  per cui  $\bar{x} < k_1 = 0.598$  oppure  $\bar{x} > k_2 = 0.6019$  (e quindi tali per cui il test è rifiutato) è chiamato regione critica del test

$$R = \{(x_1, \dots, x_{25}) \mid \bar{x} < k_1 = 0.598 \text{ oppure } \bar{x} > k_2 = 0.6019\}.$$

*Osservazione 28.* La costruzione di un test d'ipotesi statistica consiste quindi nel scegliere, oltre che l'ipotesi nulla e quella alternativa, una regione critica.  $R$  è un sottoinsieme delle possibili realizzazioni campionarie. Se i valori  $(x_1, \dots, x_n)$  che osserveremo cadranno nella regione critica, ovvero se

- test unilaterale destro:  $\bar{x} > k$ ,
- test unilaterale sinistro:  $\bar{x} < k$ ,
- test bilaterale:  $\bar{x} < k_1$  oppure  $\bar{x} > k_2$ , rifiuteremo l'ipotesi nulla.
- test bilaterale (forma standardizzata):  $|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}| > z_{1-\alpha/2}$ , rifiutiamo  $H_0$ .

Per costruzione la regione critica dovrà soddisfare il vincolo concernente il livello di significatività prescelto, ovvero

$$P_{H_0}(R) = \alpha. \quad (5.5)$$

### 5.3 Scelta della statistica $S$

La scelta della statistica  $S$  utilizzata nella costruzione di un test di ipotesi è importante tanto quanto lo è la scelta dello stimatore  $T$  nell'ambito della stima puntuale. Nei due esempi precedenti abbiamo utilizzato la media  $\bar{X}$  quale statistica  $S$  per la costruzione del test<sup>5</sup>. Cosa succederebbe se, anziché la media, utilizzassimo un'altra statistica? Vogliamo considerare questa possibilità per l'Esempio 33 e la statistica  $S = X_{\min} = \min(X_1, \dots, X_5)$ . Supponiamo che i cinque valori osservati siano uguali a<sup>6</sup>

$$(x_1, \dots, x_5) = (-0.532, -0.54, -0.525, -0.541, -0.542).$$

---

<sup>5</sup>Dunque nei due casi visti  $S$  coincide con lo stimatore  $\bar{X}$  del valore atteso della popolazione.

<sup>6</sup>La media dei cinque valori è uguale a  $-0.536$  che corrisponde al valore utilizzato precedentemente per  $\bar{x}$ .

Il valore di  $X_{\min}$  per questa realizzazione del campione è dunque  $x_{\min} = -0.542$ . La distribuzione di  $S$  dipende dalla distribuzione congiunta di  $(X_1, \dots, X_5)$ . Per eseguire il test (indipendentemente se formulato col  $p$ -value o con la regione critica) dovremo ricavare la funzione di ripartizione di  $S$ .

### 5.3.1 Distribuzione del $\min(X_1, \dots, X_5)$

Prima di proseguire nella costruzione del test di  $H_0$  dell'Esempio 33 calcoliamo<sup>7</sup>  $F_S(s)$ , la distribuzione di  $S$ , cioè del minimo fra  $(X_1, \dots, X_5)$ . Essa è per definizione uguale a

$$F_S(s) = P(\min(X_1, \dots, X_5) \leq s).$$

Anziché tentare di calcolare direttamente la probabilità  $P(\min(X_1, \dots, X_5) \leq s)$ , la riscriviamo come

$$F_S(s) = 1 - P(\min(X_1, \dots, X_5) > s). \quad (5.6)$$

Il motivo per cui si percorre questa strada è semplice: prendiamo ad esempio  $s = 2$ .  $\min(X_1, \dots, X_5) > 2$  se e solo se tutte e 5 le variabili aleatorie saranno maggiori di 2. Quindi l'evento che  $\min(X_1, \dots, X_5) > 2$  corrisponde (è identico) all'evento che tutte e 5 le variabili aleatorie sono maggiori di 2. Per tale motivo e per un valore qualsiasi  $s$

$$P(\min(X_1, \dots, X_5) > s) = P(X_1 > s, \dots, X_5 > s).$$

Utilizzando l'indipendenza degli  $X_i$

$$P(X_1 > s, \dots, X_5 > s) = \prod_{i=1}^5 P(X_i > s).$$

Infine, poiché  $P(X_i > s) = 1 - P(X_i \leq s)$ , otteniamo la seguente identità

$$P(\min(X_1, \dots, X_5) > s) = P(X_1 > s, \dots, X_5 > s) = \prod_{i=1}^5 (1 - P(X_i \leq s))$$

che quando inserita nella (5.6) ci permette di ottenere la formula finale

$$F_S(s) = 1 - \prod_{i=1}^5 [1 - P(X_i \leq s)]. \quad (5.7)$$

---

<sup>7</sup>Al fine di distinguere fra la funzione di ripartizione (densità) di  $S$  e la funzione di ripartizione (densità) delle  $X_i$  aggiungeremo la lettera  $S$  o  $X_i$  al piede di  $F$  ( $f$ ).

Questa formula vale per il minimo di qualsiasi campione  $(X_1, \dots, X_5)$  di variabili aleatorie indipendenti. Per ottenere la formula (5.7) abbiamo utilizzato esclusivamente l'indipendenza degli  $X_i$ . Poiché  $(X_1, \dots, X_5)$  sono oltre che indipendenti anche identicamente distribuiti la (5.7) è semplificabile in

$$\begin{aligned} F_S(s) &= 1 - [1 - P(X \leq s)]^5 \\ &= 1 - [1 - F_X(s)]^5 \end{aligned} \quad (5.8)$$

La formula (5.8) è la formula finale che mette in relazione la funzione di ripartizione di  $S$  (il minimo fra  $(X_1, \dots, X_5)$ ) con la funzione di ripartizione di  $X$ , la popolazione dalla quale sono campionate le  $X_i$ . Da questa formula è immediato derivare la funzione di densità di  $S$ . Derivando entrambi i lati rispetto ad  $s$  otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial s} F_S(s) = f_S(s) = 5 [1 - F_X(s)]^4 f_X(s). \quad (5.9)$$

Abbiamo ora tutto quanto occorre per continuare l'Esempio 33.

### 5.3.2 Formulazione del test

Riprendiamo qui di seguito la situazione punto per punto:

1. Vogliamo testare l'ipotesi riguardante la composizione del latte acquistato da un certo fornitore sospettato di aggiungere acqua al suo latte.
2. L'ipotesi nulla  $H_0$  è che il fornitore sia onesto

$$H_0 : \mu = -0.545.$$

3. L'ipotesi alternativa è che il fornitore abbia aggiunto acqua

$$H_A : \mu > -0.545.$$

Fino a questo punto nulla è mutato. La novità consiste nell'utilizzare la statistica  $X_{\min}$  al posto di  $\bar{X}$ . Grazie al paragrafo 5.3.1 conosciamo la distribuzione di  $X_{\min}$ . Il nuovo punto 4. diventa

4. Abbiamo deciso di utilizzare  $S = X_{\min}$  quale statistica per costruire il test. Sotto l'*ipotesi nulla* ogni singola  $X_i \sim N(-0.545, 0.008^2)$ . La funzione di ripartizione di  $S$  è data da

$$F_S(s) = 1 - [1 - F_X(s)]^5$$

mentre la funzione di densità è uguale

$$f_S(s) = 5 [1 - F_X(s)]^4 f_X(s).$$

dove

$$f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}0.008} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 0.008^2} (s + 0.545)^2\right)$$

e

$$F_X(s) = \int_{-\infty}^s f_X(x) dx$$

Notate che per dato valore di  $s$  sia  $F_S$  che  $f_S$  potrebbero essere calcolate in Excel o Openoffice utilizzando la funzione NORMDIST().

5. Come con la media campionaria  $\bar{X}$  prendiamo un livello di significatività  $\alpha = 5\%$ .
6. Calcolo del  $p$ -value.

In questo caso il  $p$ -value è da calcolarsi rispetto alla statistica  $S = X_{\min}$ . Come detto in precedenza, il valore realizzato di  $x_{\min} = -0.542$ . Il  $p$ -value sarà dunque

$$\begin{aligned} P_{H_0}(S > -0.542) &= 1 - P_{H_0}(S \leq -0.542) \\ &= 1 - F_S(-0.542) = 0.5545\%. \end{aligned}$$

È questa una probabilità assai bassa ed inferiore al livello di significatività prefissato del 5%. L'evidenza a favore di  $H_0$  è come nel caso della media campionaria  $\bar{X}$  insufficiente<sup>8</sup> e per tale motivo rifiutiamo l'ipotesi nulla.

- 6 bis. Calcolo della regione critica.

Essendo questo un test d'ipotesi unilaterale destro, la regione critica è definita tramite l' $1 - \alpha$  quantile della distribuzione di  $S$ , notato  $k$ .

$$P_{H_0}(S > k) = 0.05 \tag{5.10}$$

$$F_S(k) = 0.95 \tag{5.11}$$

$$k = F_S^{-1}(0.95)$$

$$k = -0.546$$

---

<sup>8</sup>Ricordiamo che in precedenza per la media campionaria  $\bar{X}$  era stato calcolato un  $p$ -valore dello 0.59%.



7. Per valori della statistica  $S$  superiori a  $k = -0.546$  (estremi in direzione dell'ipotesi alternativa) rigetteremo l'ipotesi nulla. In questo caso la regione critica  $R$  è definita dall'insieme delle possibili realizzazioni  $(x_1, \dots, x_5)$  tali che  $\min(x_1, \dots, x_5) > k = -0.546$ ,

$$R = \{(x_1, \dots, x_5) \mid \min(x_1, \dots, x_5) > k = -0.546\}.$$

Il valore realizzato  $x_{\min} = -0.542$  è effettivamente maggiore di  $-0.546$  e pertanto  $(x_1, \dots, x_5) = (-0.532, -0.54, -0.525, -0.541, -0.542) \in R$ . L'ipotesi nulla va rigettata! Per  $n = 2$  è istruttivo eseguire il grafico di  $\min(x_1, x_2) > -0.546$  e confrontarlo con il grafico di  $\bar{x} > -0.539$ . Ovviamente le due regioni critiche sono diverse a conferma che i due test, sebbene costruiti ad uno stesso livello di significatività del 5%, sono diversi.

In questo esempio i due test, l'uno basato sulla media campionaria e l'altro basato sul minimo del campione, hanno condotto alla medesima conclusione. Tuttavia ciò non è sempre il caso. È allora spontaneo chiedersi quale dei due test sia il migliore. Per costruzione, entrambi i test rigetteranno l'ipotesi nulla con una probabilità del 5% quando questa è effettivamente vera. Da questo punto di vista essi sono equivalenti. Per il fornitore dunque, potrebbe essere indifferente l'uso dell'uno o dell'altro al fine di valutare la sua onestà. Riprenderemo questo discorso all'interno del prossimo paragrafo.

## 5.4 Errore di prima e seconda specie

Se osserviamo la verifica d'ipotesi come un problema decisionale possiamo identificare due tipi di decisioni e due tipi di errori possibili. Per quanto riguarda le decisioni possiamo

- rifiutare  $H_0$ ,
- non rifiutare  $H_0$  (mantenere l'ipotesi in vista di ulteriori verifiche tramite altri test).

Per quanto riguarda invece gli errori abbiamo due tipi di errori che indichiamo con un asterisco

	$H_0$ vera	$H_0$ falsa
Rifiutare $H_0$	decisione incorretta* $\alpha$	decisione corretta $\beta$
Non rifiutare $H_0$	decisione corretta $1 - \alpha$	decisione incorretta* $1 - \beta$

Abbiamo quindi tipi di errore con probabilità associate ( $\alpha$  e  $1 - \beta$ ).

- $\alpha$  è chiamato livello di significatività o *errore di prima specie* e corrisponde alla probabilità di rifiutare  $H_0$  quando  $H_0$  è vera. Si tratta di una probabilità condizionata:

$$\alpha = P(\text{Rifiutare } H_0 \mid H_0 \text{ è vera}) = P_{H_0}(\text{Rifiutare } H_0).$$

- $\beta$  è invece la probabilità di rifiutare  $H_0$  quando questa è falsa ( $\Leftrightarrow$  quando  $H_A$  vera)

$$\beta = P(\text{Rifiutare } H_0 \mid H_0 \text{ è falsa}) = P_{H_A}(\text{Rifiutare } H_0).$$

- $1 - \beta$  è chiamato errore di seconda specie e corrisponde all'errore di non rifiutare  $H_0$  quando questa è falsa.

*Osservazione 29.* Nell'Esempio 33 del caseificio abbiamo quale ipotesi nulla

$$H_0 : \text{"innocente"}$$

ed i seguenti due errori

- Errore di 1<sup>a</sup> specie: fornitore dichiarato colpevole quando in realtà è innocente.

- Errore di 2<sup>a</sup> specie: fornitore dichiarato innocente quando in realtà è colpevole.

Idealmente non vorremmo mai rifiutare  $H_0$  quando questa è vera (cioè vorremmo un  $\alpha$  uguale a 0) e rifiutarla sempre quando essa è falsa (un  $\beta = 1$ ). Questo però non è possibile. Occorre studiare come si possono controllare queste due probabilità per ridurre al minimo le possibilità d'errore.

Possiamo dunque chiederci come si decide di "Rifiutare  $H_0$ " sulla base dei dati disponibili? Nei paragrafi precedenti abbiamo definito dei test d'ipotesi basati su una statistica  $S$  ed una regione critica

$$\begin{aligned} R &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid S(x_1, \dots, x_n) > k\} \text{ (test unilaterale destro),} \\ R &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid S(x_1, \dots, x_n) < k\} \text{ (test unilaterale sinistro),} \\ R &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid |S(x_1, \dots, x_n)| > k\} \text{ (test bilaterale).} \end{aligned}$$

Il criterio per rifiutare  $H_0$  dipende dal fatto che i valori osservati del campione appartengano o meno alla regione critica, ovvero se

$$S(x_1, \dots, x_n) > k$$

rifiutiamo  $H_0$  altrimenti non la rifiutiamo (test unilaterale destro). Il valore di  $k$  che definisce la soglia fra rifiuto e non rifiuto di  $H_0$  è stato fissato in modo tale che la probabilità di osservare valori più estremi di  $k$  sia uguale al livello di significatività  $\alpha$  prescelto. Per tale motivo si è soliti aggiungere al piede di  $k$  il valore  $1 - \alpha$  (test unilaterale destro),  $\alpha$  (test unilaterale sinistro),  $1 - \frac{\alpha}{2}$  (test bilaterale).

*Esempio 36.* Tornando all'Esempio 33 del caseificio (test unilaterale destro basato sulla media campionaria)

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0}(\text{rifiutare } H_0) = P_{H_0}(\bar{X} > k_{1-\alpha}) \\ &= P_{H_0}\left(\frac{\bar{X} + 0.545}{0.008/\sqrt{5}} > \frac{k_{1-\alpha} + 0.545}{0.008/\sqrt{5}}\right) \\ &= P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} > \frac{k_{1-\alpha} + 0.545}{0.008/\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

Utilizzando la solida proprietà  $P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$

$$P\left(Z \leq \frac{k_{1-\alpha} + 0.545}{0.008/\sqrt{5}}\right) = 1 - \alpha$$

da cui

$$\frac{k_{1-\alpha} + 0.545}{0.008/\sqrt{5}} = z_{1-\alpha}$$

$$k_{1-\alpha} = -0.545 + z_{1-\alpha} 0.008/\sqrt{5}$$

Utilizzando la tabella sottostante è possibile calcolare le varie soglie della regione critica in funzione del livello di significatività (errore di prima specie) desiderato:

$\alpha$	5%	2.5%	1%
$1 - \alpha$	95%	97.5%	99%
$z_{1-\alpha}$	1.645	1.96	2.33

Ricordiamo che grazie alla simmetria della distribuzione normale avremo per un test unilaterale sinistro i seguenti valori di  $z_\alpha$  :

$\alpha$	5%	2.5%	1%
$z_\alpha$	-1.645	-1.96	-2.33

*Osservazione 30.* Come già accennato, il livello "tipico" di significatività è del 5%. In medicina si indica con

- n.s. : se il risultato non è significativo al 5%,
- \* : se il risultato è significativo al 5%,
- \*\* : se il risultato è significativo all'1%,
- \*\*\* : se il risultato è significativo allo 0.1%.

### 5.4.1 Relazione tra errore di prima e di seconda specie

Ci chiediamo quale sia la relazione fra errore di prima e di seconda specie. Per fare questo analizziamo il seguente esempio.

*Esempio 37.* Supponiamo che la variabile aleatoria  $X$  sia distribuita secondo la legge normale  $N(\mu, 1)$  e che l'ipotesi nulla sia  $H_0 : \mu = 0$  mentre l'ipotesi alternativa<sup>9</sup>  $H_A : \mu = 2$ . Si osserva un'unica realizzazione di  $X$ , notata semplicemente  $x$ . L'errore di prima specie (livello di significatività) è fissato inizialmente ad  $\alpha = 5\%$ . Il grafico della funzione di densità di  $X$  sotto le due ipotesi è riportato qui sotto. Poiché l'ipotesi alternativa è situata alla destra di  $H_0$ , la soglia  $k$  della regione critica al livello di significatività desiderato è definita da

$$P_{H_0}(X > k) = 0.05 \Rightarrow k_{95\%} = z_{95\%} = 1.645.$$

La regione critica<sup>10</sup> è

$$R = \{x \in (1.645, \infty)\}.$$

Graficamente la probabilità  $P_{H_0}(X > k)$  è rappresentata dalla superficie tratteggiata della figura precedente. Una volta determinata la regione critica, il test di  $H_0$  è dunque il seguente:

- si osserva la realizzazione  $x$  di  $X$ .
- Se  $x$  cade nella regione critica rifiutiamo  $H_0$ . (Se  $H_0$  è vera, questo accadrà, per costruzione, con una probabilità pari ad  $\alpha = 5\%$ .)
- Se  $x$  cade al di fuori della regione critica non rifiutiamo  $H_0$ . (Se  $H_0$  è vera, questo accadrà, per costruzione, con una probabilità uguale ad  $1 - \alpha = 95\%$ .)

Una volta determinata la regione critica  $R$  sulla base dell'ipotesi nulla ed il livello di significatività desiderato (errore di prima specie) possiamo chiederci cosa sarebbe la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla (o di non rifiutarla) se la vera distribuzione di  $X$  fosse data da  $H_A$ .

*Osservazione 31.* È importante sottolineare che la regione critica non varia: noi rifiuteremo  $H_0$  se l'osservazione di  $x$  cadrà nell'intervallo  $(1.645, \infty)$  mentre non la rifiuteremo se  $x \in (-\infty, 1.645]$ . Ciò che vogliamo fare ora è calcolare la probabilità dell'evento  $X \in (1.645, \infty)$  dato che la distribuzione di  $X$  è ora data dall'ipotesi alternativa  $H_A$ .

---

<sup>9</sup>Sono entrambe ipotesi semplici in quanto identificano esattamente la distribuzione di  $X$ .

<sup>10</sup>In questo esempio ad uso didattico la statistica  $S$  utilizzata è semplicemente il valore osservato. La regione critica  $R$  coincide quindi con l'intervallo  $(k, \infty)$ . Tuttavia è questo un caso che capita rarissimamente nelle applicazioni.

La probabilità di rigettare  $H_0$  è definita dalla probabilità dell'evento  $X > 1.645$  e la sua probabilità è semplicemente

$$P(X > 1.645). \quad (5.12)$$

Questa probabilità deve essere calcolata sotto l'ipotesi alternativa  $H_A$ , vale a dire sotto l'ipotesi che  $X \sim N(2, 1)$ . Facciamo questo aggiungendo  $H_A$  alla  $P$  della (5.12) che quindi diventa

$$P_{H_A}(X > 1.645)$$

Per calcolare questa probabilità utilizziamo la solita tecnica di standardizzazione, tenendo presente che sotto l'ipotesi alternativa  $H_A$  il valore atteso di  $X$  è uguale 2 (mentre la varianza in questo caso è ancora 1).

$$P_{H_A} \left( \underbrace{X - 2}_{Z \sim N(0,1)} > 1.645 - 2 \right) = P(Z > -0.355) = P(Z \leq 0.355) = 63.87\%.$$

Abbiamo in questo modo calcolato la probabilità di rifiutare  $H_0$  condizionatamente al fatto che essa sia falsa. Questa probabilità è stata indicata con la lettera  $\beta$  e corrisponde all'azione corretta nel caso che  $H_A$  sia vera. Graficamente essa corrisponde alla superficie alla destra di  $k$  rispetto alla funzione di densità tratteggiata (funzione di densità di  $X$  rispetto a  $H_A$ ). In teoria noi vorremmo che questa probabilità fosse uguale 1, ma come è evidente dal disegno questo è impossibile per  $\alpha > 0$ . Siamo dunque costretti ad accettare il fatto che con una probabilità pari a  $1 - \beta$  (36.13% in questo caso) noi non rifiuteremo  $H_0$  quando questa andrebbe invece rifiutata. Come descritto precedentemente  $1 - \beta$  è l'errore di seconda specie. In questo semplice esempio ad un errore di prima specie del 5% corrisponde un errore di seconda specie del 36.13%.

Potremmo decidere a questo punto di diminuire l'errore di prima specie (il livello di significatività) e portarlo al 2.5%. Cosa capiterà a  $\beta$  ed indirettamente all'errore di seconda specie  $1 - \beta$ ? Calcoliamo innanzi tutto il nuovo valore critico di  $k$ , ovvero

$$P_{H_0}(X > k) = 0.025 \Rightarrow k_{97.5\%} = z_{97.5\%} = 1.96.$$

Abbiamo ridotto l'errore di prima specie ed il valore di  $k$  si è spostato sulla destra rispetto al valore precedente. Cosa implica questo per  $\beta$ ? Sappiamo che

$$\beta = P_{H_A}(\text{Rifiuto } H_0) = P_{H_A}(X > 1.96).$$

Per calcolare  $\beta$  usiamo la solita tecnica di standardizzazione tenendo presente che sotto l'ipotesi alternativa  $X \sim N(2, 1)$ :

$$\begin{aligned}\beta &= P_{H_A}(X > 1.96) = P_{H_A}\left(\underbrace{X - 2}_{Z \sim N(0,1)} > -0.04\right) \\ &= P(Z \leq 0.04) = 51.6\%\end{aligned}$$

Guardando il disegno notiamo che la superficie a destra di  $k$  delimitata dalla densità tratteggiata è diminuita rispetto al valore precedente. Si è quindi ridotta la probabilità  $\beta$  di rifiutare  $H_0$  quando questa andrebbe giustamente rifiutata: ora  $\beta = 51.6\%$  mentre prima era  $63.87\%$ . L'errore di seconda specie  $1 - \beta$  è dunque aumentato, passando dal  $36.13\%$  al  $48.4\%$ .

Da questo esempio deduciamo che esiste una relazione inversa fra errore di prima specie ed errore di seconda specie nel senso che qualora si decida di diminuire la probabilità d'errore di prima specie si dovrà pagare un costo in termini della probabilità d'errore di seconda specie e viceversa. Possiamo semplicemente scrivere quanto detto a parole con

$$\alpha \downarrow \Rightarrow 1 - \beta \uparrow.$$

Per tale motivo non è possibile scendere a zero con entrambe le probabilità. Si è pertanto soliti fissare il livello di significatività  $\alpha$  ad un livello appropriato. Come detto, in econometria si utilizza un  $\alpha = 5\%$ . Il nostro sistema giuridico per contro assegna maggiore importanza all'errore di 1<sup>a</sup> specie (dichiarare colpevole un innocente) e per tale motivo i valori di  $\alpha$  saranno di molto inferiori (radar detection  $\alpha = 10^{-10}\%$ ).

### 5.4.2 Potenza di un test

J. Neyman e E. Pearson, due famosi statistici del ventesimo secolo, propongono di fissare  $\alpha$ , il livello di significatività del test e di massimizzare<sup>11</sup> la probabilità  $\beta = P(\text{Rifiutare } H_0 \mid H_0 \text{ è falsa})$ . La probabilità  $\beta$  è chiamata potenza del test.

*Definizione 34.* Potenza di un test (caso unilaterale destro). La potenza di un test, notata  $\beta$ , è definita come la probabilità di rifiutare  $H_0$  quando essa è falsa<sup>12</sup>

$$\beta = P_{H_A}(S > k_{1-\alpha}).$$

<sup>11</sup>Che corrisponde a minimizzare l'errore di seconda specie  $1 - \beta$ .

<sup>12</sup>Per un test unilaterale sinistro la potenza è definita da

$$\beta = P_{H_A}(S < k_\alpha)$$

*Esempio 38.* Nell'Esempio 33 del caseificio abbiamo costruito due possibili test d'ipotesi, il primo basato sulla media  $\bar{X}$  del campione ed il secondo basato sul minimo  $X_{\min}$  del campione. Per un livello di significatività del 5% i due test avevano condotto alla medesima conclusione. Nel primo caso (uso di  $\bar{X}$ ) il valore critico  $k_{0.95} = -0.539$ , infatti

$$P_{H_0}(\bar{X} > -0.539) = 5\%.$$

Nel secondo caso (uso di  $X_{\min}$ ) il valore critico  $k_{0.95} = -0.546$

$$P_{H_0}(X_{\min} > -0.546) = 5\%.$$

Vogliamo ora calcolare la potenza  $\beta$  per entrambi i test, che per definizione sappiamo essere

$$\beta = P_{H_A}(\bar{X} > -0.539)$$

e rispettivamente

$$\beta = P_{H_A}(X_{\min} > -0.546).$$

Tuttavia l'ipotesi alternativa  $H_A : \mu > -0.545$  non identifica con precisione la distribuzione, essa si limita a dire che il valore atteso della popolazione  $X$  è superiore a  $-0.545$ . Per tale motivo eseguiamo dapprima il calcolo per un particolare valore di  $\mu > -0.545$ , diciamo  $\mu = -0.54$ , ed in seguito per un valore di  $\mu > -0.545$  qualsiasi.

#### 5.4.2.1 Potenza quando $S = \bar{X}$

- Caso particolare, ipotesi alternativa  $X \sim N(-0.54, 0.008^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N(-0.54, 0.008^2/5)$

$$\begin{aligned} \beta &= P_{H_A}(\bar{X} > -0.539) = P_{H_A} \left( \underbrace{\frac{\bar{X} - (-0.54)}{0.008/\sqrt{5}}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{-0.539 - (-0.54)}{0.008/\sqrt{5}} \right) \\ &= P(Z > 0.2795) = 1 - P(Z \leq 0.2795) = 0.39 \end{aligned}$$

- Caso generale, ipotesi alternativa  $X \sim N(\mu, 0.008^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, 0.008^2/5)$  con  $\mu > -0.545$

---

e per un test bilaterale

$$\beta = P_{H_A}(|S| > k_{1-\frac{\alpha}{2}}).$$



Il calcolo è esattamente uguale al precedente, basta sostituire  $-0.54$  con  $\mu$

$$P_{H_A}(\bar{X} > -0.539) = P_{H_A} \left( \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{0.008/\sqrt{5}}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{-0.539 - \mu}{0.008/\sqrt{5}} \right) = P \left( Z > \frac{-0.539 - \mu}{0.008/\sqrt{5}} \right).$$

Il valore assunto da  $\beta$  dipende dal valore di  $\mu$ . È dunque possibile rappresentare graficamente  $\beta$  come funzione del valore del parametro  $\mu$ .

#### 5.4.2.2 Potenza quando $S = X_{\min}$

- Caso particolare, ipotesi alternativa  $X \sim N(-0.54, 0.008^2)$

Nel paragrafo 5.3.2, punto 4, abbiamo derivato la distribuzione di  $X_{\min}$  sotto l'ipotesi nulla. La funzione di ripartizione di  $S$  sotto l'ipotesi alternativa sarà del tutto simile, e cioè

$$\beta = P_{H_A}(S > -0.546) = 1 - F_S(-0.546) = [1 - F_X(-0.546)]^5$$

ma con  $F_X(s)$  che rappresenta ora la funzione di ripartizione di  $X$  sotto  $H_A$ , ovvero la funzione di ripartizione di una V.A. normale di valore atteso  $-0.54$  e varianza  $0.008^2$ . Il valore di  $\beta$  è dunque

$$\beta = [1 - F_X(-0.546)]^5 = 0.277$$

Osserviamo che il valore calcolato è inferiore a quello ottenuto utilizzando la media  $\bar{X}$  del campione. Ciò significa che quando l'ipotesi nulla è falsa, il test basato sulla statistica  $S = X_{\min}$  la rigetterà con una probabilità di solo il 27.7% mentre il test basato sulla statistica  $S = \bar{X}$  la rigetterà con una probabilità ben superiore ed uguale al 39%. Il test sulla media  $\bar{X}$  è dunque da preferirsi rispetto al test sul minimo  $X_{\min}$  poiché *più potente* nel testare  $H_0$  contro l'ipotesi alternativa  $H_A : \mu = -0.54$ . È interessante chiedersi se questo vale solo per  $\mu = -0.54$  o la superiorità del test sulla media è "uniforme" per qualsiasi  $\mu > -0.545$ .

• Caso generale, ipotesi alternativa  $X \sim N(\mu, 0.008^2)$ . In questo caso come con la media calcoleremo  $\beta = P_{H_A}(S > -0.546)$  per un qualsiasi valore di  $\mu > -0.545$ . Il grafico della potenza  $\beta$  del test in funzione di  $\mu$  dà il seguente risultato. Sovrapponendo nel medesimo grafico le curve di potenza dei due test notiamo che effettivamente il test sulla media è da preferire al test sul minimo per qualsiasi ipotesi alternativa semplice  $H_A : \mu = \tilde{\mu} > -0.545$ . Vogliamo ora metterci nei panni del fornitore di latte e ragionare rispetto alla scelta del test ottimale. Supponiamo dapprima che egli sia innocente, cioè che  $H_0$  sia corretta. Per il fornitore è indifferente che la corte utilizzi il test basato sulla media campionaria  $\bar{X}$  o sul minimo  $X_{\min}$ . Questo perché, in entrambi i casi, la probabilità di essere ingiustamente condannato (errore di prima specie) è uguale 5%. Per contro, supponiamo che egli sappia di essere colpevole o, in altre parole, che  $H_A$  sia vera. In tal caso egli non sarà più indifferente rispetto alla scelta del test. Infatti, qualora la corte utilizzasse il test sulla media, la probabilità  $\beta$  di essere (giustamente) condannato sarebbe uguale al 39% mentre per il test basato su  $X_{\min}$  la probabilità sarebbe solo del 27.7%. È chiaro quindi che il fornitore preferirà il test meno potente poiché meno efficace nello scoprire la verità. Il tribunale per contro, deciderà di utilizzare il test più potente a disposizione che in questo caso è il test basato su  $\bar{X}$ .

In generale potremmo chiederci se, dati

- un'ipotesi nulla  $H_0 : \mu = \mu_0$ ,
- un'ipotesi alternativa  $H_A : \mu = \mu_A$ ,
- un livello prefissato  $\alpha$  di significatività (errore di prima specie),

sia possibile trovare (costruire) un test che, fra tutti i possibili test, sia il più potente in assoluto. La risposta a questo quesito ci è data dall'importante lemma di Neyman e Pearson.

## 5.5 Il Lemma di Neyman e Pearson

In questo paragrafo daremo una soluzione alla domanda che ci siamo posti al termine del paragrafo precedente, ovvero come trovare il test di massima potenza (ricordiamo che la potenza di un test è la probabilità di rifiutare  $H_0$  quando questa è falsa). Prima di dare la soluzione cerchiamo di formalizzare il problema i cui elementi essenziali sono i seguenti.

1. Una popolazione  $X$  la cui distribuzione, caratterizzata tramite la sua funzione di densità, è sconosciuta. Si suppone che la densità di  $X$  sia

contenuta nella famiglia parametrica

$$\mathcal{P} = \{f_\theta(x), \theta \in \Theta\}.$$

2. Un'ipotesi nulla  $H_0$  riguardante la distribuzione di  $X$ . Tale ipotesi è espressa in termini del parametro sconosciuto  $\theta$  nel seguente modo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

dove  $\theta_0$  rappresenta un particolare valore del parametro ( $\theta_0$  è quindi un numero).

3. Un'ipotesi alternativa semplice

$$H_A : \theta = \theta_A$$

dove  $\theta_A$  è il valore che il parametro  $\theta$  assume sotto l'ipotesi alternativa.

4. Il livello  $\alpha$  di significatività desiderato (errore di prima specie).

Sulla base di questi elementi desideriamo costruire il test ottimale. Ricordiamo che un qualsiasi test basato sulla statistica  $S$  sarà caratterizzato da una regione critica  $R$  definita tramite<sup>13</sup>

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) \mid S(x_1, \dots, x_n) > k_{1-\alpha}\} \quad (5.13)$$

dove la soglia  $k_{1-\alpha}$  è stata scelta in maniera tale che la regione critica  $R$  soddisfi<sup>14</sup>

$$P_{H_0}(R) = P_{H_0}(S > k_{1-\alpha}) = \alpha. \quad (5.14)$$

Il problema risiede quindi nel trovare la statistica  $S^*$  (e la soglia  $k_\alpha^*$  corrispondente) tale per cui

$$P_{H_A}(R^*) = P_{H_A}(S^* > k_\alpha^*) = P(\text{rifiuto } H_0 \mid H_0 \text{ è falsa}) = \beta \quad (5.15)$$

sia massimo rispetto a qualsiasi altra statistica  $S$ .

---

<sup>13</sup>Se i valori osservati danno un valore della statistica  $S$  superiore alla soglia  $k_{1-\alpha}$  si rifiuta l'ipotesi nulla. Si veda gli esempi con  $\bar{X}$  e  $X_{\min}$ .

<sup>14</sup>Una volta scelta la statistica  $S$ , il valore della soglia  $k_\alpha$  è automaticamente fissato tramite l'equazione (5.14). In pratica quindi il problema si riduce alla scelta ottimale di  $S$ .

*Esempio 39.* State passeggiando tranquillamente nel bosco quando notate l'entrata di una grotta ed incuriositi decidete di entrarvi. Nel suo interno la luce è molto debole, tanto che dopo alcuni metri la visibilità è praticamente nulla. A questo punto decidete di tornare indietro ma all'improvviso andate ad inciampare contro un baule che una volta aperto risulta contenere 100 kg di gioielli e pietre preziose di ogni genere, colore e dimensione. Volendo approfittare della situazione, decidete di riempire lo zaino con le gemme e i gioielli più preziosi. Purtroppo per voi però, lo zaino ha una capacità massima di  $\alpha = 5$  kg. Vi trovate dunque nella spiacevole situazione di dover selezionare, tramite un'opportuna strategia di selezione  $S$ , quali gioielli mettere nello zaino. L'insieme dei gioielli e delle pietre preziose che verranno da voi scelti è notato  $R$  (raccolto). Ogni gioiello/pietra  $g$  ha un peso  $p_s(g)$  ed un prezzo di mercato  $p_r(g)$ . Il vostro scopo è dunque quello di massimizzare il valore della raccolta, sotto il vincolo che il suo peso sia uguale ad  $\alpha$ . Supponiamo che i gioielli contenuti nel baule siano quelli della Tabella (5.1). Per massimizzare il valore del contenuto dello zaino dobbiamo semplicemente ordinare i gioielli in ordine decrescente rispetto al rapporto prezzo/peso. Così facendo ci assicuriamo di prendere gli oggetti di maggior valore per unità di peso.

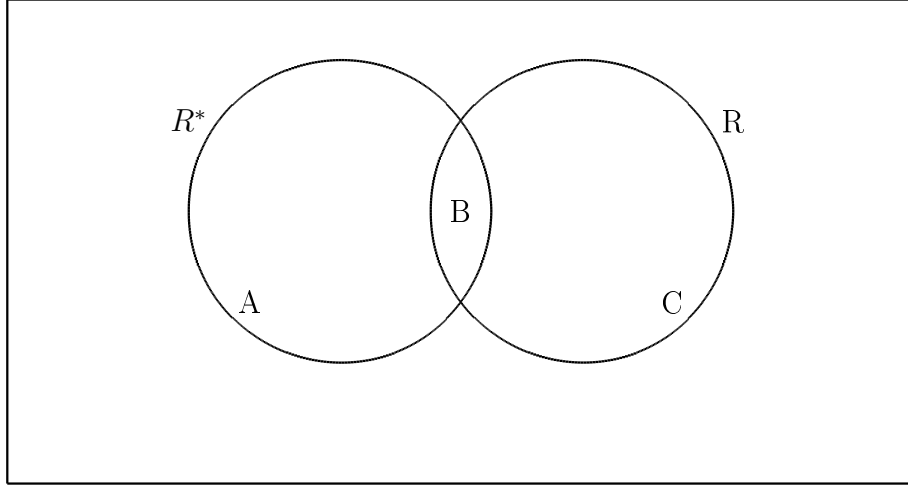
La Tabella (5.2) contenente la lista dei gioielli ordinata rispetto al rapporto prezzo/peso permette di costruire l'insieme  $R^*$  della raccolta ottimale, che corrisponde a

$$R^* = \{g_{32}, g_{24}, g_1, g_{21}, g_{36}, g_{16}, g_{27}\}.$$

Notiamo che la strategia di selezione ottimale  $S^*(x) = \frac{p_r(g)}{p_s(g)}$  prevede di prendere solo gli oggetti aventi un rapporto prezzo/peso superiore ad una soglia  $k_\alpha^*$ , che nel nostro caso è uguale a 7'481.30. Tale soglia è stata scelta in maniera che il peso complessivo della regione critica sia uguale ad  $\alpha$  ovvero 5 kg. Formalmente abbiamo determinato  $k_\alpha^*$  tramite la seguente relazione ( $P_s$  denota il peso totale)

$$P_s(R^*) = P_s(g \mid S^*(g) > k_\alpha^*) = 5 \text{ kg}.$$

*Teorema 10.* La strategia di selezione  $S^* = \frac{p_r(g)}{p_s(g)} > k_\alpha^*$  massimizza il valore (prezzo totale) del raccolto  $R$  rispetto a tutte le possibili strategie  $S$  aventi una raccolta  $R$  di peso 5 kg.



Indichiamo con  $R^*$  e  $R$  l'insieme dei gioielli e delle pietre preziose selezionati utilizzando rispettivamente la strategia di selezione  $S^*$  ed una qualsiasi altra strategia  $S$  tale per cui il  $P_s(R) = 5$  kg. I prezzi di mercato dei raccolti  $R^*$  ed  $R$ , indicati rispettivamente con  $P_r(R^*)$  e  $P_r(R)$  sono calcolabili semplicemente come la somma del prezzo di ogni singolo gioiello in essi contenuti, ovvero

$$P_r(R^*) = \sum_{g \in R^*} p_r(g) = \sum_{g \in A} p_r(g) + \sum_{g \in B} p_r(g)$$

e

$$P_r(R) = \sum_{g \in R} p_r(g) = \sum_{g \in B} p_r(g) + \sum_{g \in C} p_r(g).$$

Vogliamo ora dimostrare che

$$P_r(R^*) > P_r(R).$$

A tal fine consideriamo la differenza

$$P_r(R^*) - P_r(R) = \sum_{g \in A} p_r(g) - \sum_{g \in C} p_r(g). \quad (5.16)$$

Poiché la strategia  $S^*$  prevede di includere  $g$  in  $R^*$  se e solo se  $\frac{p_r(g)}{p_s(g)} > k_\alpha^*$ , per ogni  $x \in R^*$  (e quindi anche per ogni  $g \in A \subset R^*$ ) sarà vero che  $p_r(g) > p_s(g)k_\alpha^*$ . Di conseguenza varrà la seguente disuguaglianza

$$P_r(R^*) - P_r(R) > k_\alpha^* \sum_{g \in A} p_s(g) - \sum_{g \in C} p_r(g).$$

D'altra parte, visto che l'insieme  $C$  è disgiunto da  $R^*$ , per qualsiasi  $g \in C$  deve valere che  $\frac{p_r(g)}{p_s(g)} \leq k_\alpha^*$ , ovvero  $p_r(g) \leq p_s(g)k_\alpha^*$  e di conseguenza

$$\begin{aligned} P_r(R^*) - P_r(R) &> k_\alpha^* \sum_{g \in A} p_s(g) - \sum_{g \in C} p_r(g) \\ &\geq k_\alpha^* \sum_{g \in A} p_s(g) - k_\alpha^* \sum_{g \in C} p_s(g) \\ &= k_\alpha^* \left( \sum_{g \in A} p_s(g) - \sum_{g \in C} p_s(g) \right) \end{aligned}$$

Infine, notiamo che la quantità fra parentesi è uguale 0:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in A} p_s(g) - \sum_{g \in C} p_s(g) &= \sum_{g \in A} p_s(g) + \sum_{g \in B} p_s(g) - \sum_{g \in B} p_s(g) - \sum_{g \in C} p_s(g) \\ &= \sum_{g \in R^*} p_s(g) - \sum_{g \in R} p_s(g) \\ &= P_s(R^*) - P_s(R) = 5 - 5 = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo dunque dimostrato che

$$P_r(R^*) > P_r(R).$$

L'Esempio 39 può essere ripreso ed adattato al problema di scelta del test ottimale. Infatti valgono le seguenti analogie:

- L'insieme dei gioielli e delle pietre preziose (raccolto)  $R$  messe nel sacco corrispondono alla regione critica  $R$ , ovvero all'insieme delle osservazioni campionarie tali per cui l'ipotesi nulla  $H_0$  va rifiutata.
- Il limite di peso  $\alpha = 5$  kg che coincide col peso del raccolto  $P_s(R) = \sum_{g \in R} p_s(g)$  corrisponde al livello di significatività  $\alpha$  ovvero a  $P_{H_0}(R)$ .
- $P_s$  che nell'esempio denota la funzione peso di un qualsiasi insieme di pietre preziose corrisponde alla probabilità sotto l'ipotesi nulla  $P_{H_0}$ .  $p_s$  dal canto suo corrisponde alla funzione di densità sotto l'ipotesi nulla.
- Allo stesso modo  $P_r$ , che corrisponde al prezzo di un qualsiasi insieme di pietre preziose, rappresenta la probabilità sotto l'ipotesi alternativa  $H_A$  di rifiutare l'ipotesi nulla. Tale probabilità è rappresentata da  $P_{H_A}(R)$  e va massimizzata per dato  $\alpha$ . Nell'Esempio 39 abbiamo massimizzato il valore del raccolto, ovvero  $P_r(R)$ . Analogamente a  $p_s$ ,  $p_r$  corrisponde alla funzione di densità sotto l'ipotesi alternativa.

- La strategia  $S$ , ovvero il criterio utilizzato per la costruzione del raccolto (selezione dei gioielli da inserire nel sacco) corrisponde alla statistica  $S$  da utilizzarsi per la costruzione della regione critica  $R$ . La strategia ottimale dell'Esempio 39 corrisponde alla strategia

$$S^*(g) = \frac{p_r(g)}{p_s(g)}$$

utilizzata per la costruzione della regione critica (riempire il sacco)

$$R^* = \{g \mid S^*(g) > k_{1-\alpha}^*\}$$

con  $k_{1-\alpha}^*$  scelto in maniera tale che

$$P_s(R) = \alpha = 5 \text{ kg.}$$

Se adattato alla scelta del test ottimale la statistica ottimale  $S^*$  diventa semplicemente il rapporto

$$S^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{f_{\theta_A}(x_1, \dots, x_n)}{f_{\theta_0}(x_1, \dots, x_n)}$$

delle due funzioni di densità del campione sotto l'ipotesi alternativa (numeratore) e sotto l'ipotesi nulla (denominatore). Il criterio per la costruzione della regione critica  $R^*$  corrispondente è dunque

$$R^* = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid S^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{f_{\theta_A}(x_1, \dots, x_n)}{f_{\theta_0}(x_1, \dots, x_n)} > k_{1-\alpha}^* \right\}. \quad (5.17)$$

L'interpretazione della relazione (5.17) è molto semplice ed intuitiva. Essa afferma che nella costruzione della regione critica (l'insieme delle osservazioni per le quali rigettare l'ipotesi nulla) occorre tener conto del rapporto delle probabilità sotto le due ipotesi. La regione critica dovrà essere costituita da quelle osservazioni che forniscono la maggiore evidenza a favore dell'ipotesi alternativa (contro l'ipotesi nulla). La regione critica ottimale sarà dunque composta dalle realizzazioni con un alto rapporto  $\frac{f_{\theta_A}(x_1, \dots, x_n)}{f_{\theta_0}(x_1, \dots, x_n)}$ . La soglia  $k_{1-\alpha}^*$  è determinata dalla condizione che l'errore di prima specie sia uguale al livello desiderato

$$P_{H_0}(R^*) = P_{H_0}(S^* > k_{1-\alpha}^*) = \alpha.$$

Così facendo, per un dato livello di errore di primo tipo  $\alpha$ , la potenza  $\beta$  del test è massima e l'errore di secondo tipo  $1 - \beta$  minimo.

Tabella 5.1: Elenco gioielli

Gioiello	Peso (grammi)	Prezzo in Fr.	Prezzo/Peso
$g_1$	671	8'000	11'923
$g_2$	1'717	1'000	582
$g_3$	1'034	7'000	6'770
$g_4$	1'756	7'000	3'986
$g_5$	1'199	2'000	1'668
$g_6$	886	1'000	1'129
$g_7$	1'166	1'000	858
$g_8$	1'040	2'000	1'923
$g_9$	932	5'000	5'365
$g_{10}$	1'380	7'000	5'072
$g_{11}$	1'769	10'000	5'653
$g_{12}$	1'686	2'000	1'186
$g_{13}$	902	6'000	6'652
$g_{14}$	1'257	3'000	2'387
$g_{15}$	1'768	3'000	1'697
$g_{16}$	528	5'000	9'470
$g_{17}$	1'676	6'000	3'580
$g_{18}$	1'523	10'000	6'566
$g_{19}$	1'666	9'000	5'402
$g_{20}$	1'456	3'000	2'060
$g_{21}$	871	10'000	11'481
$g_{22}$	988	4'000	4'049
$g_{23}$	1'190	6'000	5'042
$g_{24}$	540	7'000	12'963
$g_{25}$	831	5'000	6'017
$g_{26}$	802	6'000	7'481
$g_{27}$	900	8'000	8'889
$g_{28}$	1'679	6'000	3'574
$g_{29}$	1'166	6'000	5'146
$g_{30}$	1'980	5'000	2'525
$g_{31}$	850	2'000	2'353
$g_{32}$	676	10'000	14'793
$g_{33}$	1'399	3'000	2'144
$g_{34}$	1'883	3'000	1'593
$g_{35}$	2'535	7'000	2'761
$g_{36}$	814	9'000	11'057
$g_{37}$	853	2'000	2'345
$g_{38}$	1'488	2'000	1'344
$g_{39}$	1'430	2'000	1'399
$g_{40}$	1'113	1'000	898
Totale	50'000	202'000	



Tabella 5.2: Elenco gioielli ordinati secondo  $P_r/P_s$

Gioiello	Prezzo/Peso	Peso Cumulato	Prezzo Cumulato
$g_{32}$	14'792.9	676	10'000
$g_{24}$	12'963.0	1'216	17'000
$g_1$	11'922.5	1'887	25'000
$g_{21}$	11'481.1	2'758	35'000
$g_{36}$	11'056.5	3'572	44'000
$g_{16}$	9'469.7	4'100	49'000
$g_{27}$	<b>8'888.9</b>	<b>5'000</b>	<b>57'000</b>
$g_{26}$	7'481.3	5'802	63'000
$g_3$	6'769.8	6'836	70'000
$g_{13}$	6'651.9	7'738	76'000
$g_{18}$	6'566.0	9'261	86'000
$g_{25}$	6'016.8	10'092	91'000
$g_{11}$	5'652.9	11'861	101'000
$g_{19}$	5'402.2	13'527	110'000
$g_9$	5'364.8	14'459	115'000
$g_{29}$	5'145.8	15'625	121'000
$g_{10}$	5'072.5	17'005	128'000
$g_{23}$	5'042.0	18'195	134'000
$g_{22}$	4'048.6	19'183	138'000
$g_4$	3'986.3	20'939	145'000
$g_{17}$	3'580.0	22'615	151'000
$g_{28}$	3'573.6	24'294	157'000
$g_{35}$	2'761.3	26'829	164'000
$g_{30}$	2'525.3	28'809	169'000
$g_{14}$	2'386.6	30'066	172'000
$g_{31}$	2'352.9	30'916	174'000
$g_{37}$	2'344.7	31'769	176'000
$g_{33}$	2'144.4	33'168	179'000
$g_{20}$	2'060.4	34'624	182'000
$g_8$	1'923.1	35'664	184'000
$g_{15}$	1'696.8	37'432	187'000
$g_5$	1'668.1	38'631	189'000
$g_{34}$	1'593.2	40'514	192'000
$g_{39}$	1'398.6	41'944	194'000
$g_{38}$	1'344.1	43'432	196'000
$g_{12}$	1'186.2	45'118	198'000
$g_6$	1'128.7	46'004	199'000
$g_{40}$	898.5	47'117	200'000
$g_7$	857.6	48'283	201'000
$g_2$	582.4	50'000	202'000

## 5.6 Esempio

Vogliamo applicare il lemma di Neyman e Pearson alla seguente, classica situazione. Supponiamo di osservare un campione di numerosità  $n$  estratto da una popolazione  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  conosciuto. La famiglia parametrica  $\mathcal{P}$  è dunque data da

$$\mathcal{P} = \left\{ f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right), \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Supponiamo di voler testare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_A : \mu = \mu_1$$

dove  $\mu_1 > \mu_0$ . Qual è sotto queste condizioni il test più potente? Per rispondere a questa domanda applichiamo i risultati del lemma di Neyman e Pearson. La funzione di densità congiunta di  $(X_1, \dots, X_n)$  è semplicemente il prodotto delle densità di  $X_1, \dots, X_n$

$$f_\mu(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x_i - \mu)^2\right)$$

e

$$\begin{aligned} f_\mu(x_1, \dots, x_n) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2]\right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right). \end{aligned}$$

La statistica ottimale  $S$  definita dal rapporto fra le densità del campione sotto l'ipotesi alternativa e quella nulla è data da

$$\begin{aligned}
S(x_1, \dots, x_n) &= \frac{f_{H_A}(x_1, \dots, x_n)}{f_{H_0}(x_1, \dots, x_n)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right)} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right]\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ n(\mu_1^2 - \mu_0^2) - 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \mu_1}_{n\bar{x}} + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \mu_0}_{n\bar{x}} \right]\right)
\end{aligned}$$

La regione critica sappiamo essere definita dalla seguente formula.

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) \mid S(x_1, \dots, x_n) > k_\alpha\}.$$

Otteniamo quindi

$$R = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} [n(\mu_1^2 - \mu_0^2) - 2n(\mu_1 - \mu_0)\bar{x}] \right) > k_\alpha \right\}, \quad (5.18)$$

con  $k_\alpha$  da determinare tramite il vincolo  $P_{H_0}(R) = \alpha$ . Poiché  $n$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  sono conosciuti possiamo riscrivere la (5.18) come

$$\begin{aligned}
R &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid -\frac{1}{2\sigma^2} [n(\mu_1^2 - \mu_0^2) - 2n(\mu_1 - \mu_0)\bar{x}] > \ln(k_\alpha) \right\} \\
&= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid [n(\mu_1^2 - \mu_0^2) - 2n(\mu_1 - \mu_0)\bar{x}] < -2\sigma^2 \ln(k_\alpha) \right\} \\
&= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid -2n(\mu_1 - \mu_0)\bar{x} < -2\sigma^2 \ln(k_\alpha) - n(\mu_1^2 - \mu_0^2) \right\} \\
&= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \bar{x} > [2\sigma^2 \ln(k_\alpha) + n(\mu_1^2 - \mu_0^2)] / 2n(\mu_1 - \mu_0) \right\} \\
&= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \bar{x} > \tilde{k}_\alpha \right\}.
\end{aligned}$$

Abbiamo sorprendentemente ottenuto il test basato sulla media campionaria incontrato ripetutamente in questo capitolo. La soglia  $\tilde{k}_\alpha$  deve essere semplicemente scelta in modo che  $P_{H_0}(R) = \alpha$ . Il passaggio da  $k_\alpha$  a  $\tilde{k}_\alpha$  è stato causato dalle trasformazioni che abbiamo applicato alla (5.18). Tuttavia

queste trasformazioni non modificano la regione critica  $R$ , modificano solo la formula utilizzata per rappresentarla.

Il risultato così ottenuto ha la seguente interpretazione. Quando la popolazione è distribuita secondo la legge normale con  $\sigma^2$  conosciuto il test sulla media è il miglior test (il più potente). Non a caso avevamo visto nel lungo Esempio 33 che il test basato su  $\bar{X}$  risultava essere più potente rispetto al test basato su  $X_{\min}$ . Notiamo inoltre che il risultato è indipendente dal valore di  $\mu_1$ . Questo significa che sotto l'ipotesi di normalità il test basato sulla media è il più potente non solo rispetto all'ipotesi alternativa semplice  $H_A : \mu = \mu_1$  ma anche rispetto all'ipotesi alternativa multipla  $H_A : \mu > \mu_0$ .

### 5.6.1 Calcolo della potenza

Il calcolo della potenza del test basato sulla media è particolarmente istruttivo per analizzare la dipendenza di  $\beta$  da  $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ,  $n$  ed  $\alpha$ . Sia dunque  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  conosciuto e

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

mentre l'ipotesi alternativa

$$H_A : \mu = \mu_1, \quad \mu_1 > \mu_0.$$

Prendendo il test basato sulla media abbiamo per il caso unilaterale destro che

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \bar{x} > k_{1-\alpha}\}$$

con la soglia critica  $k_{1-\alpha}$  determinata tramite la solita equazione

$$P_{H_0}(\bar{X} > k_{1-\alpha}) = \alpha.$$

Poiché sotto l'ipotesi nulla  $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$  applichiamo la standardizzazione seguente

$$P_{H_0} \left( \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha$$

Utilizzando la relazione  $P\left(Z > \frac{\sqrt{n}(k_{1-\alpha} - \mu_0)}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}(k_{1-\alpha} - \mu_0)}{\sigma}\right)$  otteniamo

$$P\left(Z \leq \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha. \quad (5.19)$$

Poiché  $z_{1-\alpha}$  è soluzione della precedente equazione, cioè

$$P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha,$$

ricaviamo il valore della soglia critica  $k_{1-\alpha}$  uguagliando l'espressione nella (5.19) a  $z_{1-\alpha}$

$$\begin{aligned} \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &= z_{1-\alpha} \\ k_{1-\alpha} &= \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

La soglia critica  $k_{1-\alpha}$  dipende dunque

- da  $\mu_0$ , il valore di  $\mu$  sotto l'ipotesi nulla,
- dal livello di significatività  $\alpha$  che determinina indirettamente  $z_{1-\alpha}$ ,
- dalla numerosità del campione (quantità d'informazione disponibile).

Una volta che  $k_{1-\alpha}$  è stato fissato *esso rimane costante*. Il calcolo della potenza del test presuppone il calcolo della probabilità  $P(\bar{X} > k_{1-\alpha} \mid H_A \text{ è vera})$ , cioè

$$\begin{aligned}
 \beta &= P_{H_A}(\bar{X} > k_{1-\alpha}) \\
 &= P_{H_A} \left( \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{k_{1-\alpha} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \\
 &= P \left( Z > \frac{k_{1-\alpha} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \\
 &= 1 - P \left( Z \leq \frac{k_{1-\alpha} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \right)
 \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione ricavata in precedenza per  $k_{1-\alpha}$  otteniamo la formula finale

$$\begin{aligned}
 \beta &= 1 - P \left( Z \leq z_{1-\alpha} - (\mu_1 - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right) \\
 &= 1 - \Phi \left( z_{1-\alpha} - (\mu_1 - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

dove  $\Phi$  rappresenta la funzione di ripartizione della normale standard, cioè

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2}x^2 \right) dx.$$

Osserviamo che la potenza  $\beta$  del test dipende oltre che

- dal valore di  $\mu$  sotto l'ipotesi nulla  $H_0$ ,
- dal livello di significatività  $\alpha$
- dalla numerosità del campione

anche da

- $\mu_1$ , il valore di  $\mu$  sotto l'ipotesi alternativa  $H_A$ .

La formula (5.21) ci permette di analizzare il comportamento della potenza in funzione dei vari parametri  $\mu_1, n, \alpha$ .

1.  $\mu_1, n$  fissi: modifichiamo solo  $\alpha$ .

Quando il livello di significatività  $\alpha$  aumenta,  $1 - \alpha$  diminuisce e con esso  $z_{1-\alpha}$ . Poiché  $\Phi$  è una funzione monotona crescente,  $\beta$  aumenterà. Quindi quando

$$\alpha \uparrow \rightarrow \beta \uparrow \text{ e } 1 - \beta \downarrow.$$

2.  $\alpha, n$  fissi: cambia solo  $\mu_1$ .

Quando  $\mu_1$  aumenta l'alternativa si allontana dall'ipotesi nulla. Ceteris paribus  $\Phi$  diminuirà e quindi  $\beta$  tenderà ad aumentare. L'errore di secondo tipo  $1 - \beta$  diminuirà. Più l'ipotesi alternativa si allontana dall'ipotesi nulla e più la potenza aumenta (l'errore di seconda specie diminuisce): il test discrimina meglio fra l'ipotesi nulla e l'alternativa.

3.  $\mu_1, \alpha$  fissi: cambia solo  $n$ .

Con l'aumentare del numero  $n$  di osservazioni la funzione  $\Phi$  diminuisce e la potenza  $\beta$  del test aumenta. L'errore di seconda specie diminuisce. Ciò è in linea con l'intuizione. Se ho più informazione a disposizione riuscirò a discriminare in maniera migliore tra le due ipotesi.

Questi calcoli di potenza vengono eseguiti prima di fare una stima. Ad esempio, supponiamo che per dato errore di prima specie  $\alpha = 5\%$  e ipotesi alternativa  $\mu_1$  si desideri avere un errore di seconda specie  $1 - \beta = 20\%$ . La relazione data dalla formula (5.21) ci permette di determinare la numerosità del campione necessario

$$\begin{aligned}\beta &= 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - (\mu_1 - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ 1 - \beta &= \Phi\left(z_{1-\alpha} - (\mu_1 - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

Poiché  $z_{1-\beta}$  soddisfa  $1 - \beta = \Phi(z_{1-\beta})$  uguagliamo  $z_{1-\beta}$  a  $z_{1-\alpha} - (\mu_1 - \mu_0) \frac{\sqrt{n}}{\sigma}$  ed otteniamo

$$n = \left(\frac{z_{1-\beta} - z_{1-\alpha}}{(\mu_1 - \mu_0)/\sigma}\right)^2$$

che in questo caso per  $(\mu_1 - \mu_0) / \sigma = 0.1$  diventa

$$n = \left( \frac{-0.841 - 1.645}{0.1} \right)^2 = 618.$$



# Capitolo 6

## TEST

### 6.1 Test sulla media con $X$ non normale

Il test sulla media fino ad ora considerato si basa sull'ipotesi di normalità della popolazione  $X$ . Vogliamo ora rinunciare all'ipotesi di normalità ed assumere unicamente che  $X \sim F$  (non necessariamente normale quindi) con  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ . Per contro manteniamo l'ipotesi di *i.i.d.* (indipendenza e medesima distribuzione) delle osservazioni  $X_1, \dots, X_n$ . Come andrà effettuato ora il test sulla media? Supponiamo di voler testare

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu = \mu_0 \\H_A &: \mu > \mu_0\end{aligned}$$

dato un livello di significatività  $\alpha$  del 5%. Sebbene grazie alle proprietà del valore atteso e della varianza possiamo affermare che  $\bar{X} \sim (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ , la distribuzione di  $\bar{X}$  non è più conosciuta. Questo pone un problema per la determinazione della regione critica ed in particolare della soglia  $k_{1-\alpha}$ :

$$P_{H_0}(\bar{X} > k_{0.95}) = 0.05.$$

Fortunatamente, per  $n$  sufficientemente grandi, il teorema del limite centrale viene in nostro soccorso permettendoci di calcolare il valore di  $k_{0.05}$  come se  $X$  fosse  $N(\mu, \sigma^2)$  e quindi come se  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ . Infatti sappiamo che per un campione  $X_1, \dots, X_n$  di  $n$  osservazioni indipendenti di  $X \sim (\mu, \sigma^2)$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} N(0, 1).$$

Ma questo significa che, sotto l'ipotesi nulla

$$P_{H_0} \left( \underbrace{\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\text{circa } Z} > \frac{k_{0.95} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \stackrel{\text{circa}}{=} P \left( Z > \frac{k_{0.95} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = 0.05.$$

In pratica quindi, il teorema del limite centrale, per  $n$  sufficientemente grandi, ci permette di eseguire il test sulla media come se la popolazione  $X$  sia normale.

## 6.2 Test di Student (t-test)

Vogliamo riprendere nuovamente il test sulla media riportandoci al caso in cui la popolazione  $X$  è normale  $N(\mu, \sigma^2)$ . Questa volta consideriamo la situazione in cui la varianza  $\sigma^2$  della popolazione è sconosciuta. In questo contesto  $\sigma^2$  è detto parametro di disturbo (nuisance parameter) in quanto non è il parametro di immediato interesse. Le nostre ipotesi sono sempre

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0, \\ H_A &: \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

Bisogna stimare  $\mu$  e  $\sigma^2$  simultaneamente

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ (buon stimatore di } \mu), \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ (buon stimatore di } \sigma^2, E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2). \end{aligned}$$

Sappiamo che se  $\sigma^2$  fosse conosciuto potremmo effettuare il test abituale andando a calcolare per un dato livello di significatività il valore critico  $k_{1-\alpha}$ :

$$P_{H_0} \left( \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z \sim N(0,1)} > \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \alpha. \quad (6.1)$$

Potremmo pensare di fare la stessa cosa sostituendo a  $\sigma$  sconosciuto la stima  $\hat{\sigma}$ . In tal caso però la quantità  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$  consiste nel rapporto di due variabili casuali che riscriviamo come segue

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\hat{\sigma}/\sigma}$$

- Numeratore: variabile casuale  $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$  distribuita sotto l'ipotesi nulla  $H_0$  come una normale standard,  $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ .
- Denominatore: variabile casuale  $\hat{\sigma}/\sigma \underset{H_0}{\sim} ?$  (la distribuzione è sconosciuta!)

Sostituendo  $\hat{\sigma}$  a  $\sigma$  nella (6.1) e considerando quanto detto otteniamo

$$P_{H_0} \left( \underbrace{\frac{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\hat{\sigma}/\sigma}}_{\sim ?} > \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right) = \alpha. \quad (6.2)$$

La nostra statistica rappresenta quindi il rapporto tra 2 variabili casuali. La soluzione a questo problema è in due tappe:

1. Derivazione della distribuzione del denominatore
2. Derivazione della distribuzione del rapporto

Vedremo che la distribuzione del denominatore dipende direttamente dalla distribuzione  $\chi_m^2$  (Chi-2).

### 6.2.1 La distribuzione $\chi_m^2$

La distribuzione Chi-2, notata  $\chi_m^2$ , con  $m$  gradi di libertà è definita come la somma del quadrato di  $m$  variabili aleatorie normali standard indipendenti.  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  *i.i.d.*  $N(0, 1)$ .

$$V = \sum_{n=1}^m Z_n^2 \sim \chi_m^2.$$

- Funzione di densità:

$$f(v, m) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) v^{\frac{m}{2}-1}$$

dove

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{y-1} du$$

- Calcolo:

$$P(V \leq x) = \int_0^x f(v, m) dv$$

oppure in Excel o Openoffice tramite la funzione  $CHIDIST(x, m)$ .  
Attenzione: la funzione  $CHIDIST(x, m) = P(V > x)$ .

### 6.2.2 La distribuzione di Student (o distribuzione-t)

*Definizione 35.* Distribuzione-t. Siano  $Z \sim N(0, 1)$  e  $V \sim \chi_m^2$  due variabili aleatorie indipendenti. Il rapporto

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{m}}} \sim t_m$$

segue una distribuzione di student a  $m$  gradi di libertà.

La distribuzione-t è simile alla normale, simmetrica rispetto allo zero, ma possiede delle code più pesanti (tendono meno velocemente a zero rispetto alla distribuzione normale). Come per la distribuzione normale standard esistono delle tavole per il calcolo dell'  $\alpha$ -quantile. A differenza della distribuzione normale, per la distribuzione  $t$  occorre specificare oltre alla probabilità  $\alpha$  anche i gradi di libertà  $m$  desiderati.

### 6.2.3 Il $t$ -test

Torniamo ora al rapporto della statistica utilizzata nella (6.2)

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\hat{\sigma}/\sigma} = \frac{Z \sim N(0, 1)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}}.$$

Per quanto riguarda il denominatore, ed in particolare il rapporto  $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$  notiamo che

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{V \sim \chi_{n-1}^2}{n-1}.$$

Riassumendo abbiamo dunque che

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\hat{\sigma}/\sigma} = \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}.$$

La nostra statistica è dunque distribuita come una variabile casuale  $t$  a  $n - 1$  gradi di libertà<sup>1</sup>.

La struttura del test di Student è dunque identica a quella del test sulla media con la sola differenza che la varianza sconosciuta va sostituita con lo stimatore  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Il calcolo della soglia critica  $k_\alpha$  andrà poi modificato come segue. Sotto l'ipotesi nulla

$$P_{H_0} \left( \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}}_{\sim t_{n-1}} > \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right) = \alpha$$

$$P \left( t_{n-1} > \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right) = \alpha$$

Il procedimento è *identico* a quello con la normale:

$$1 - P \left( t_{n-1} \leq \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right) = \alpha$$

$$P \left( t_{n-1} \leq \frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha.$$

È dunque necessario derivare l'  $1 - \alpha$ -quantile della distribuzione di Student a  $n - 1$  gradi di libertà che notiamo con  $t_{1-\alpha, n-1}$ . Infine, uguagliando  $t_{1-\alpha, n-1}$  a  $\frac{k_{1-\alpha} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$  si ottiene il valore di  $k_\alpha$ :

$$k_\alpha = \mu_0 + t_{1-\alpha, n-1} \hat{\sigma}/\sqrt{n}. \quad (6.3)$$

---

<sup>1</sup>È immediato vedere che la statistica

$$W = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

è una  $\chi_n^2$ . Tuttavia  $\mu$  è sconosciuto e va sostituito con  $\bar{X}$ . Poiché

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$$

abbiamo in realtà solo  $n - 1$  gradi di libertà nella "scelta" di  $X_1 - \bar{X}$ ,  $X_2 - \bar{X}$ , ...,  $X_n - \bar{X}$ : l'ultima osservazione non può essere scelta come si vuole in quanto la somma deve essere 0.

Confrontando la (6.3) con la versione corrispondente (5.20) nel caso in cui la varianza  $\sigma^2$  è conosciuta notiamo che la vera deviazione standard  $\sigma$  è stata sostituita con la deviazione standard stimata e l'  $1 - \alpha$ -quantile della distribuzione normale è stato rimpiazzato dall'  $1 - \alpha$ -quantile della distribuzione  $t$  a  $n - 1$  gradi di libertà.

## 6.3 Altri test

### 6.3.1 Test su due campioni: uguaglianza di due medie

Il test che tratteremo in questo paragrafo riguarda il confronto fra due gruppi di osservazioni campionate da due popolazioni distinte. Le osservazioni della prima popolazione sono indicate con  $X_1, \dots, X_m$  mentre quelle della seconda con  $Y_1, \dots, Y_n$ . Gli interi  $m$  ed  $n$  indicano la numerosità del primo e rispettivamente del secondo campione. In medicina, psicologia, economia e nelle scienze sociali in genere capita sovente di dover determinare l'efficacia di un nuovo medicamento, la validità di un nuovo metodo d'insegnamento, l'effetto di una campagna pubblicitaria, ecc. Per questo motivo si è soliti raccogliere dati su due popolazioni fra loro ben distinte, notate appunto  $X$  e  $Y$ .

	"treatment"	controllo
medicina	nuovo farmaco	placebo
didattica	nuovo programma	vecchio programma
marketing	dopo la campagna pubbl.	prima della campagna pubbl.

Il parametro d'interesse in questo caso è il valore atteso delle due popolazioni. Infatti, se le due popolazioni hanno valore atteso diverso significa che l'azione da noi intrapresa ha avuto l'effetto sperato. Generalmente si è soliti utilizzare l'ipotesi nulla: le due popolazioni possiedono lo stesso valore atteso. La speranza è dunque quella di rifiutare l'ipotesi nulla. Studieremo ora come effettuare il test quando le due popolazioni possiedono la stessa varianza (parleremo in tal caso di omoschedasticità) e quando invece possiedono varianza diversa (caso questo di eteroschedasticità).

#### 6.3.1.1 Caso 1: homoschedasticità delle due popolazioni

Assumiamo le seguenti ipotesi sulle due popolazioni e sui rispettivi campioni:

1. Le osservazioni  $X_1, \dots, X_m$  formano un campione di osservazioni *i.i.d.* (indipendenti ed identicamente distribuite) estratte dalla popolazione  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$
2. Le osservazioni  $Y_1, \dots, Y_n$  formano un campione di osservazioni *i.i.d.* (indipendenti ed identicamente distribuite) estratte dalla popolazione  $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$
3. La varianza della popolazione  $X$  è la stessa della popolazione  $Y$ :  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ .  $\sigma^2$  è sconosciuta.
4. Per ogni  $X_i$  in  $X_1, \dots, X_m$  e  $Y_j$  in  $Y_1, \dots, Y_n$  vale che  $X_i$  e  $Y_j$  sono fra loro indipendenti.

Calcoliamo ora la varianza di  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  e  $cov(\bar{X}, \bar{Y})$ :

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= \frac{\sigma_x^2}{m} = \frac{\sigma^2}{m} \\ V(\bar{Y}) &= \frac{\sigma_y^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cov(\bar{X}, \bar{Y}) &= cov\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j\right) \\ &= \frac{1}{m} cov\left(\sum_{i=1}^m X_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j\right) \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{n} cov\left(\sum_{i=1}^m X_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right) \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m cov\left(X_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right) \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \underbrace{cov(X_i, Y_j)}_{0 \text{ per ogni } i,j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La varianza di  $\bar{X} - \bar{Y}$  sarà dunque uguale a

$$\begin{aligned} V(\bar{X} - \bar{Y}) &= V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) - 2cov(\bar{X}, \bar{Y}) \\ &= \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \sigma^2 . \end{aligned}$$

Sotto l'ipotesi nulla la differenza  $\bar{X} - \bar{Y}$  sarà distribuita secondo la legge normale, con valore atteso 0 e varianza  $(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \sigma^2$ . Poiché  $\sigma^2$  è sconosciuto andrà stimato. Lo stimatore da utilizzarsi in questo caso è

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m+n-2} \left( \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \right)$$

$$H_0 : \mu_x = \mu_y$$

$$\tau = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \hat{\sigma}^2}}$$

sotto l'ipotesi nulla

$$\tau \sim t_{m+n-2}$$

gradi di libertà.

### 6.3.1.2 Caso 2: eteroschedasticità delle due popolazioni

Le ipotesi riguardanti la normalità delle due popolazioni  $X$  e  $Y$  così come le ipotesi di indipendenza fra i rispettivi campioni rimangono invariate. Solo l'ipotesi numero tre riguardante l'uguaglianza delle varianze delle due popolazioni viene a cadere nel senso che non sarà necessariamente vero che  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ . L'ipotesi nulla rimane immutata, cioè  $H_0 : \mu_x = \mu_y$ . In questo caso avremo

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= \frac{\sigma_x^2}{m} \\ V(\bar{Y}) &= \frac{\sigma_y^2}{n} \\ cov(\bar{X}, \bar{Y}) &= 0 \end{aligned}$$

La varianza di  $\bar{X} - \bar{Y}$  sarà dunque uguale a

$$\begin{aligned} V(\bar{X} - \bar{Y}) &= V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) - 2cov(\bar{X}, \bar{Y}) \\ &= \frac{\sigma_x^2}{m} + \frac{\sigma_y^2}{n}. \end{aligned}$$

Le varianze delle due popolazioni saranno stimate utilizzando lo stimatore usuale, ovvero

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^2 &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \\ \hat{\sigma}_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \end{aligned}$$



Sotto l'ipotesi nulla, la distribuzione della statistica

$$\tau = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{m} + \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n}}}$$

non è conosciuta. Tuttavia vale il seguente risultato:

$$\tau \text{ circa } \sim t_k$$

dove  $k = \min(m-1, n-1)$ .

*Osservazione 32.* In caso di eteroschedasticità la distribuzione della statistica  $\tau$  non è conosciuta ma è approssimabile tramite una distribuzione  $t$  a  $k = \min(m-1, n-1)$  gradi di libertà (problema di Behrens-Fisher).

### 6.3.2 Test per la dispersione su singolo campione

È questo un test utilizzato per verificare un'ipotesi sulla varianza della popolazione. Supponiamo che il campione composto dalle  $n$  osservazioni indipendenti ed identicamente distribuite  $X_1, \dots, X_n$  sia stato estratto dalla popolazione  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\mu$  e  $\sigma^2$  entrambi sconosciuti. Supponiamo inoltre di voler testare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \sigma = \sigma_0$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_A : \sigma > \sigma_0.$$

In questo caso  $\sigma$  è il parametro d'interesse mentre  $\mu$  è il parametro di disturbo (nel  $t$ -test visto in precedenza era  $\sigma$  ad essere il parametro di disturbo e  $\mu$  quello d'interesse). Prendiamo quale statistica del test

$$S(X_1, \dots, X_n) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2},$$

con  $\sigma^2$  stimata col "solito" stimatore

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Quindi un rapporto  $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > 1$  sarà evidenza negativa contro l'ipotesi nulla (tanto più estremo sarà questo rapporto e tanto maggiore sarà l'evidenza contro  $H_0$ )

mentre se  $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \approx 1$  non si rifiuterà l'ipotesi nulla. Si può dimostrare che sotto l'ipotesi nulla

$$(n-1)S(X_1, \dots, X_n) = (n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_0} \right)^2 \underset{H_0}{\sim} \chi_{n-1}^2$$

Costruzione della regione critica (zona di rifiuto di  $H_0$ ) ad un livello di significatività  $\alpha$ :

$$R = \{(x_1, \dots, x_n) \mid (n-1)S > k_{1-\alpha}\}$$

con

$$P_{H_0} \left( \underbrace{(n-1)S}_{\chi_{n-1}^2} > k_{1-\alpha} \right) = \alpha \text{ cioè } k_{1-\alpha} = \chi_{n-1, 1-\alpha}^2$$

Quindi se  $(n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > k_{1-\alpha}$  rifiuto  $H_0$  altrimenti non rifiuto.

### 6.3.3 Test per la dispersione su due campioni (F-Test)

Assumiamo le seguenti ipotesi sulle due popolazioni e sui rispettivi campioni:

1. Le osservazioni  $X_1, \dots, X_m$  formano un campione di osservazioni *i.i.d.* (indipendenti ed identicamente distribuite) estratte dalla popolazione  $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$
2. Le osservazioni  $Y_1, \dots, Y_n$  formano un campione di osservazioni *i.i.d.* (indipendenti ed identicamente distribuite) estratte dalla popolazione  $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$
3. Per ogni  $X_i$  in  $X_1, \dots, X_m$  e  $Y_j$  in  $Y_1, \dots, Y_n$  vale che  $X_i$  e  $Y_j$  sono fra loro indipendenti.
4.  $\mu_x, \sigma_x^2$  e  $\mu_y, \sigma_y^2$  sono sconosciuti.

Desideriamo testare l'ipotesi nulla:

$$H_0 : \sigma_x = \sigma_y$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_A : \sigma_x > \sigma_y.$$

Stimiamo le varianze  $\sigma_x^2$  e  $\sigma_y^2$  delle due popolazioni con lo stimatore abituale:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x^2 &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \\ \hat{\sigma}_y^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2.\end{aligned}$$

Sotto l'ipotesi nulla la quantità

$$S(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_y^2} \underset{H_0}{\sim} F_{m-1, n-1}.$$

*Definizione 36.* Distribuzione  $F_{l,k}$ . Chiamiamo Distribuzione  $F$  con  $l$  gradi di libertà a numeratore e  $k$  gradi di libertà a denominatore il rapporto fra due variabili aleatorie  $U$  e  $V$  standardizzate e tali che

- $U \sim \chi_l^2$
- $V \sim \chi_k^2$
- $U$  e  $V$  fra loro indipendenti

$$h = \frac{\frac{U}{l}}{\frac{V}{k}} \sim F_{l,k} \text{ (rapporto di due } \chi^2 \text{ standardizzate).}$$

Costruzione della regione critica (zona di rifiuto di  $H_0$ ) ad un livello di significatività  $\alpha$ :

$$R = \left\{ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mid \frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_y^2} > k_{1-\alpha} \right\}$$

con

$$P_{H_0} \left( \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{\hat{\sigma}_y^2}}_{F_{m-1, n-1}} > k_{1-\alpha} \right) = \alpha \text{ cioè } k_\alpha = F_{m-1, n-1; 1-\alpha}.$$

### 6.3.4 Test di conformità

Il test di conformità ("goodness-of-fit" test) non è un test su un'ipotesi parametrica. Ciò che si desidera verificare è se la distribuzione dei dati è uguale ad una distribuzione data (ad esempio normale, di Pareto, esponenziale, ecc.) che indicheremo con  $F$ .

*Esempio 40.* Distribuzione dei redditi. Vogliamo vedere se la distribuzione dei dati  $X_1, \dots, X_n$  è compatibile con l'ipotesi che la popolazione  $X \sim F$ , dove in questo caso  $F$  è la distribuzione di Pareto la cui funzione di densità sappiamo essere uguale a

$$f(x) = k \frac{x_0^k}{x^{k+1}} \quad \text{per } x \geq x_0,$$

e  $x_0$  e  $k$  sono due parametri supposti conosciuti. La funzione di ripartizione di  $X$  è data da

$$F(x) = 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^{-k}.$$

Al fine di costruire il test dovremo, partendo dalle osservazioni, costruire delle classi di reddito, che noteremo con  $c_1, c_2, \dots, c_K$ .

Classe	Intervallo Mia Fr.	# osservazioni	# osservazioni atteso sotto $H_0$	Deviazioni	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
$c_1$	$[0, 30)$	$O_1$	$n p_1 = E_1$	$O_1 - E_1$	$\frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1}$
$c_2$	$[30, 50)$	$O_2$	$n p_2 = E_2$	$O_2 - E_2$	$\frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_k$	$[100, 120)$	$O_k$	$n p_k = E_k$	$O_k - E_k$	$\frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_K$	$[200, +)$	$O_K$	$n p_K = E_K$	$O_K - E_K$	$\frac{(O_K - E_K)^2}{E_K}$
Totale		$n = \sum_{k=1}^K O_k$	$n$	0	$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$

Le probabilità  $p_k$  sono le probabilità teoriche di osservare una realizzazione nell'intervallo corrispondente, ovvero

$$p_k = P_{H_0}(l_{k-1} \leq X < l_k).$$

Su  $n$  estrazioni indipendenti il numero atteso di osservazioni nell'intervallo  $[l_{k-1}, l_k)$  sarà semplicemente  $n p_k$ . Il test consiste nel confrontare le frequenze assolute empiriche con quelle teoriche. Se le differenze sono "grandi", avremo evidenza contro l'ipotesi nulla. Occorre pertanto sapere la distribuzione della somma dei quadrati delle differenze "standardizzate",  $\sum_{k=1}^K \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$ . Sotto l'ipotesi nulla  $H_0$  la quantità

$$\sum_{k=1}^K \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \chi_{K-1}^2.$$

*Osservazione 33.* Affinché la statistica così costruita sia valida occorre selezionare le classi in maniera tale che le frequenze teoriche  $E_i$  siano maggiori o uguali a 5. Per tale motivo è talvolta necessario ridurre il numero di classi aumentando l'ampiezza degli intervalli.

*Esempio 41.* Osserviamo  $n$  incidenti della circolazione. Ci chiediamo se la distribuzione degli incidenti è uniforme rispetto ai mesi dell'anno. Il numero di classi  $K$  sarà quindi uguale a 12. Definiamo con  $O_k :=$  "# incidenti osservati nel mese  $k$ ". La statistica

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{12} \frac{(O_k - \frac{n}{12})^2}{\frac{n}{12}}$$

è distribuita secondo una  $\chi^2_{11}$ .

Scelto il valore critico  $k_{1-\alpha} = \chi^2_{11,1-\alpha}$  al livello di significatività desiderato, rigetteremo l'ipotesi nulla se

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{(O_k - \frac{n}{12})^2}{\frac{n}{12}} > k_{1-\alpha}$$

e non la rigetteremo altrimenti.

### 6.3.5 Test d'indipendenza