Metodi Quantitativi per la Finanza
Appunti del corso

Claudio Ortelli

Semestre Estivo

Indice

Capitolo 1

Fonti e raccolta di dati finanziari

1.1 Fornitori di dati finanziari

La raccolta e l'archiviazione di dati è un tema estremamente importante in finanza. Pensate semplicemente ad una banca che offre un servizio di gestione patrimoniale. Essa deve, tra le altre cose, essere in grado di

- calcolare il valore attuale ma anche a qualsiasi data passata dei portafogli in deposito,
- valutare il rischio associato alle singole posizioni assunte sui vari mercati finanziari (azionario, dei cambi, reddito fisso, derivati, ecc.) o in aggregato dell'intero portafoglio.

A tale scopo la banca (il discorso è tuttavia generalizzabile a qualsiasi operatore finanziario) deve conoscere la composizione attuale del portafoglio, le transazioni effettuate in passato con i relativi prezzi d'acquisto e/o vendita, i prezzi odierni ed i prezzi storici di chiusura di tutti gli strumenti in portafoglio. Con il costante aumento della potenza di calcolo disponibile e grazie

- all'avvento di internet
- al diffondersi di database relazionali (vedi informatica I e II)

la domanda e l'offerta di dati finanziari sono entrambe cresciute enormemente nel corso dell'ultimo decennio. Oltre ai banali esempi sopracitati esiste tutta una serie di attività proprie del settore finanziario che fanno largo uso di dati. Fra queste, senza pretesa di esaustività, citiamo

- Calcolo della performance
- Scomposizione della performance
- Calcolo del rischio
- Ottimizzazione del portafoglio

- Analisi tecnica
- Analisi di bilancio
- Pricing di derivati
- Formazione di aspettative

È quindi chiaro quanto sia importante saper reperire in maniera

1. affidabile: il flusso di dati non deve essere interrotto (applicazioni di borsa real time), la qualità deve essere impeccabile (i dati non devono e non possono contenere errori),
2. efficace: i dati devono arrivare in tempo utile e poter essere elaborati facilmente,
3. economica: i costi devono essere tali da non pregiudicare l'attività (la redditività del business)

tutte le informazioni desiderate. Esistono a tal scopo dei cosiddetti fornitori di dati (data providers), ovvero ditte specializzate nel fornire informazioni legate all'attività finanziaria o più in generale economica nazionale e mondiale. Fra le principali citiamo

- Reuters
- Bloomberg
- Datastream
- Telekurs
- Infotec
- VWD group
- Yahoo finance
- Swiss Exchange
- Swissquote
- Google finance
- Altri ...

All'Università della Svizzera italiana sono a disposizione due importanti fonti di dati finanziari: Datastream, che sarà oggetto di approfondimento nel corso di questo capitolo e l'applicazione Reuters 3000 Xtra (un grazie all'associazione Finance Floor USI senza la quale l'applicazione non sarebbe disponibile).

Osservazione 1. Per tutta la durata di questo corso il termine *dati* sarà da considerarsi quale sinonimo di *serie storiche* dei prezzi dei vari strumenti finanziari che analizzeremo (ci limiteremo a considerare azioni, tassi di cambio e alcuni indici). Tuttavia il concetto generale di dati in finanza è da interpretare in maniera assai più ampia. Citiamo ad esempio

- i bilanci pubblicati dalle aziende (essenziali per gli analisti al fine della loro valutazione)
- le serie macroeconomiche divulgate dai diversi uffici governativi (PIL, indice dei prezzi, massa monetaria, tasso di disoccupazione, ..., importazioni, esportazioni, dati settoriali, ...)
- le news
- ...

1.2 Codici d'identificazione

Quando cerchiamo i dati di un qualsiasi prodotto o strumento finanziario (un'azione, un'obbligazione, un fondo, un indice, ecc.) è necessario conoscere il suo identificativo. Per identificativo intendiamo un sequenza alfanumerica che identifica l'emissione di ogni strumento finanziario in maniera univoca. Purtroppo non esiste un unico standard: ogni borsa ed ogni data provider ha la propria metodologia di classificazione. Noi studieremo in dettaglio Datastream. Tuttavia è utile osservare quanto segue:

1. Esistono almeno due standard molto utilizzati a livello internazionale:

   - ISIN
     ISIN = International Securites Identification Number. An ISO coding system that uniquely identifies a specific securities issue. The organization that allocates ISINs in any particular country is the National Numbering Agency (NNA).
   - SEDOL
     SEDOL = Stock Exchange Daily Official List. The stock code used to identify all securities issued in the UK or Eire. It is the basis of the ISIN code for UK securities, and is composed of a 7-digit number allocated by the master file service of the London Stock Exchange.

   Conoscere uno di questi due identificativi è particolarmente utile poiché, soprattutto per quanto riguarda il codice ISIN, praticamente tutti i data provider lo riconoscono. Ad esempio, la banca dati Datastream accetta entrambi questi codici.

2. In Svizzera è ancora molto utilizzato il numero di valore (in tedesco: Valorennummer). Tuttavia il codice ISIN sembra lentamente ma inesorabilmente avere il sopravvento.

3. È sempre utile verificare attentamente che i dati raccolti corrispondano a quanto desiderato. Capita infatti che lo stesso prodotto finanziario venga trattato su più borse o in più valute. È quindi molto facile commettere errori nella scelta della serie da scaricare se non si presta la massima attenzione all'origine dei dati. In caso di dubbio e quando ciò è possibile andate a verificare e/o cercare direttamente nelle varie borse gli identificativi appropriati. Su Wikipedia trovate i collegamenti alle principali piazze finanziarie, raggruppate per area geografica. Fra queste scegliamo quattro esempi:

- *Mercato svizzero*

  Seguite poi Shares ... Company -> List of Companies

  -> ABB LTD -> Share details [VN: ... ISIN: CH0012221716 ... Trading currency: ...]

- *Mercato svedese*

  Cercate ABB e controllate il codice ISIN e la moneta in cui è quotata l'azione. Come potrete notare la medesima azione (il codice ISIN è identico, cioè CH0012221716) è quotata in valuta diversa!

- *Mercato inglese*
- *Mercato italiano*
  -> Quotazioni -> Cerca Strumento -> Azioni -> Roma -> ISIN: IT0001008876
- *Titoli azionari americani*
  -> SYMBOL LOOKUP (The Coca-Cola Company)
  Symbol: KO
  Website Coca Cola: http://www.coca-cola.com

4. Datastream

   Il codice alfanumerico ISIN può essere d'aiuto nella ricerca dell'azione desiderata. Datastream infatti contiene questo codice nel suo "mnemonic" (è questo il nome del codice interno a Datastream che identifica univocamente ogni singola serie).

   Ad esempio la Roma ha quale codice alfanumerico ASR e Datastream ha quale mnemonic "I:ASR". La Coca-Cola ha quale codice alfanumerico "KO" e Datastream ha quale mnemonic "U:KO". La prima lettera denota quindi il paese (I=Italy, U=United States, C=Canada, ...), il carattere ":" serve quale delimitatore e poi segue il codice alfanumerico. È importante ricordarsi questa costruzione laddove non è stato possibile rintracciare il codice ISIN poiché Datastream permette una ricerca per "mnemonic" (è inoltre possibile utilizzare nella ricerca caratteri jolly quali "*").

1.3 Datastream, classi di strumenti finanziari e tipologie di dati

Al quarto piano dell'Istituto di Finanza è disponibile un pc con Datastream Advance. Il login deve essere effettuato col nome utente: "ospite_datastream", mentre la password è: "datastream". Per lanciare il programma andate come d'abitudine nel menu Start -> All Programs -> Datastream -> Datastream 5.1. Per scaricare dati da Datastream è necessario procedere come segue:

1. Aprire Datastream Advance e selezionare dal riquadro superiore sinistro "Data category" il tipo di strumento per cui si desidera ottenere la serie storica.

2. Nel riquadro inferiore sinistro “Analysis” selezionare “Single Series - Data”. Selezionare *Time Series Data*.

3. Nella parte superiore centrale della finestra di Datastream se conoscete il codice SEDOL o quello ISIN inseritelo direttamente nel campo *Enter Series* dopo aver attivato il Chekbox denominato *Expert*.

4. Nel caso in cui non si conoscano né il codice ISIN, nè il codice SEDOL e neppure il *mnemonic* Datastream, quale aiuto alla ricerca è possibile definire dei filtri. I criteri dipendono dalla categoria in cui si effettua la ricerca. Per esempio, i criteri disponibili per la categoria Equity sono diversi da quelli della categoria Economics. Per eseguire una ricerca cliccare il bottone arancione “Find series”.

5. Selezionate il periodo per il quale desiderate scaricare i dati (bottone blu “Time period” oppure cliccando sul checkbox corrispondente il numero di periodi a partire da oggi per i quali volete scaricare le osservazioni). Sempre nel medesimo riquadro ma più a destra premere il bottone blu *Settings...* . Scegliere la frequenza desiderata: daily, weekly, ecc. .

6. Selezionare la valuta. *Local currency* significa che verrà utilizzata la valuta propria del paese (stock exchange) in cui è scambiato il titolo.

7. Una volta che la serie desiderata è stata individuata, premere il bottone *Run Now*. I risultati della ricerca sono visualizzati nel riquadro inferiore centrale. Se la ricerca è stata fruttuosa, potete esportare i dati in un foglio excel premendo il bottone con il simbolo di excel nella ”Toolbar” proprio sotto i menu a cascata.

Datastream associa a ciascuna classe di strumenti finanziari (azioni, indici azionari, bonds, ...) un determinato insieme di *“Datatypes*” per ciascuno dei quali è possibile scaricare una serie storica. I tipi di dati disponibili variano a seconda della classe di strumenti. Ad esempio, il tipo di default per la classe equity è il ”Price (Adjusted)”. Cliccando il bottone arancione con la scritta *“Datatype*” si ottiene la lista completa dei tipi disponibili. Ad ogni tipo è associato un codice. Il ”Price (Adjusted - Default)” ha codice uguale a P. Discutiamo ora i seguenti tipi:

1. Adjustment Factor (accumulated, Mnemonic = AF)

2. Adjustment Factor (not accumulated, Mnemonic = AX)

3. Dividends per share (Mnemonic = DPS)

4. Marketvalue (Mnemonic = MV)

5. Price (unadjusted) (Mnemonic = UP)

6. Ex-Dividend Date (Mnemonic = XDDE)

7. Date - Dividend Payment (Mnemonic = PYD)

Come potrete constatare voi stessi, cambiando la classe di strumenti finanziari e selezionando nuovamente il bottone *Datatype* la lista di tipi di dato fra cui scegliere cambierà.

Datastream prevede[1] la possibilità di scaricare le serie storiche direttamente in un file Excel, senza dover passare dall'applicazione Datastream Advance. Due sono i principali vantaggi di un simile approccio. Da un lato è possibile scaricare simultaneamente più di una serie storica e di un tipo di dato. Secondariamente l'aggiornamento di serie già scaricate richiede pochi passi ed un eventuale ulteriore elaborazione può essere automatizzata utilizzando la grande flessibilità di VBA (Visual Basic for Applications). Un esempio verrà presentato in classe. L'Help di Datastream Advance alla voce *Creating time series requests in Excel* è un buon punto di partenza.

Esercizio 1. Il primo esercizio consiste nel simulare la gestione di un portafoglio azionario. Lo studente dovrà inizialmente selezionare un certo numero di titoli e a frequenza giornaliera calcolare il valore del portafoglio. Sono consentite modifiche alla struttura del portafoglio (ribilanciamenti) a patto che non ci siano afflussi o deflussi di capitale. Dovrete osservare le seguente regole:

1. Inizio gestione: lunedì 29 febbraio 2016.
2. Fine gestione: venerdì 3 giugno 2016.
3. Capitale iniziale in gestione: 5'000'000 CHF.
4. È richiesta una valutazione giornaliera del portafoglio (ai prezzi di chiusura della giornata).
5. Le seguenti regole devono essere rispettate:
   (a) È consentito investire unicamente in cash (a interessi zero), azioni, fondi azionari, opzioni su azioni o indici azionari, ETF purché siano disponibili i dati per una corretta valutazione del portafoglio a fine giornata.
   (b) È possibile vendere allo scoperto. Tuttavia la somma del valore assoluto di tutte le posizioni escluso il cash non può superare il 100% del valore totale del portafoglio.
   (c) L'investimento iniziale in un qualsiasi titolo non può, in valore assoluto, superare il 10% del valore totale del portafoglio. Lo stesso dicasi per qualsiasi ribilanciamento di portafoglio.
   (d) Al termine di ogni mese (ultimo giorno lavorativo) è richiesto un ribilanciamento di tutte le posizioni che superano in valore assoluto il limite del 10% .
   (e) I ribilanciamenti sono da effettuare ai prezzi di chiusura della giornata in cui si effettua il ribilanciamento.

[1]Si veda la Figura 1.4.

(f) In caso di ribilanciamento alla data t i nuovi pesi di portafoglio dovranno essere comunicati per e-mail al docente del corso entro la mezzanotte del giorno precedente, cioè $t - 1$. Si prega di indicare quale oggetto della e-mail "Ribilanciamento yyyy-mm-dd", dove yyyy-mm-dd corrisponde alla data in formato ISO 8601.

(g) Si assume che sia possibile investire in quantità non intere di titoli, ad esempio 1.37 azioni della compagnia XY.

6. Al termine del periodo lo studente con il migliore rapporto rischio / rendimento vincerà un buono per una favolosa pizza.

Esercizio 2. Desideriamo analizzare lo Swiss Market Index (SMI).

1. Trovate su internet le azioni che attualmente sono incluse nello Swiss Market Index. Suggerimento: visitate il seguente sito `http://www.six-swiss-exchange.com/indices/overview_en.html`
2. Di quanti titoli è composto lo SMI? Quali sono?
3. Qual è il criterio utilizzato per includere un titolo nell'indice?
4. Qual è il peso di ciascun titolo all'interno dell'indice?
5. Ogni quanto tempo vengono ricalcolati i pesi?
6. Ogni quanto tempo viene aggiornata la lista dei titoli da includere nello SMI?
7. Scaricate le serie storiche *a frequenza giornaliera* dello SMI degli ultimi 3 anni di osservazioni.
8. Scegliete 3 azioni attualmente rappresentate nell'indice e scaricate la serie storica *a frequenza giornaliera* degli ultimi 3 anni di osservazioni.
9. Eseguite il grafico di ogni serie separatamente. Eseguite poi un XY Scatter plot dell'indice SMI con ciascuna delle 3 serie scaricate. Cosa osservate?
10. Che differenza c'è con lo SMIC index?

□

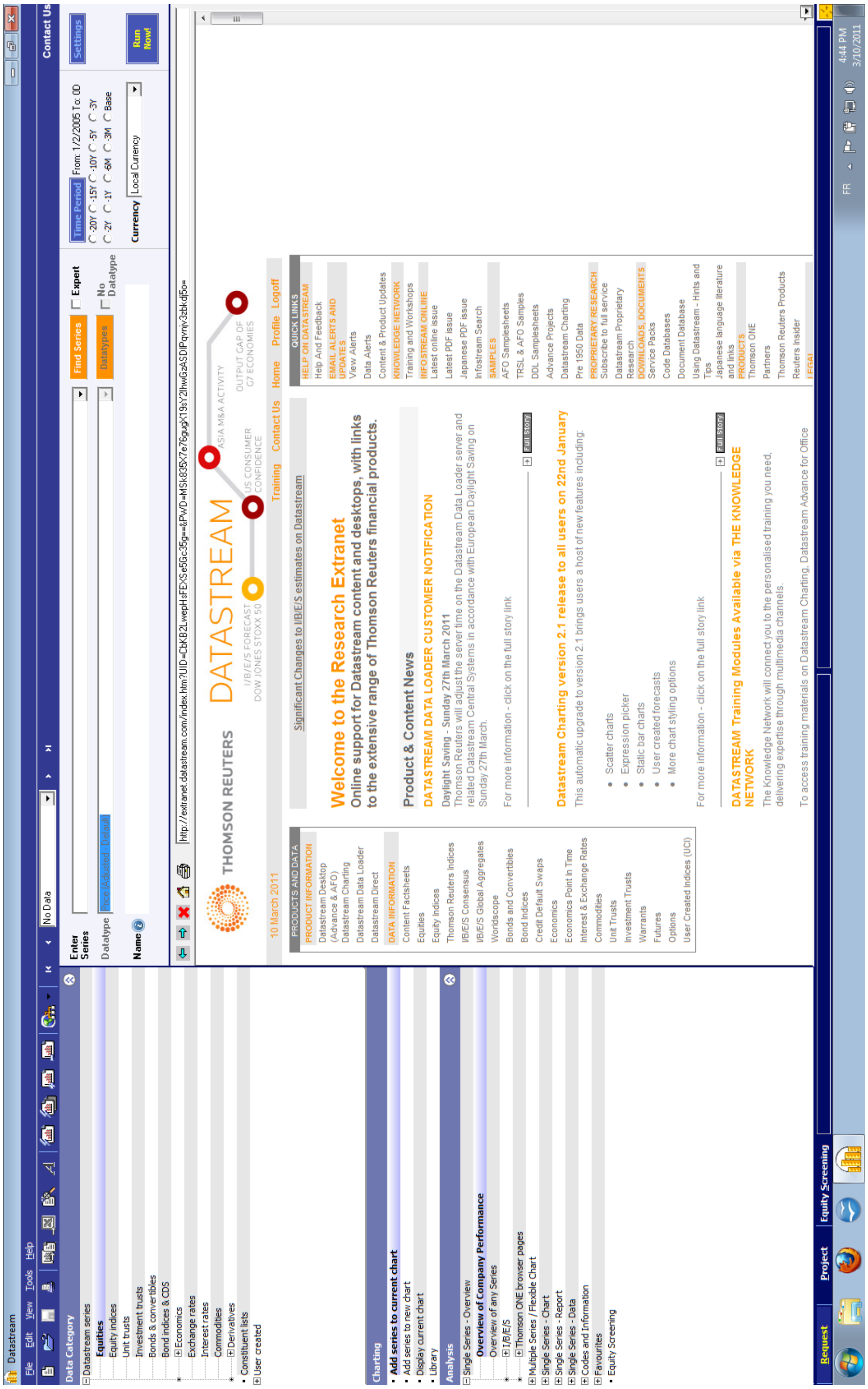

Figura 1.1: L'applicativo Datastream.

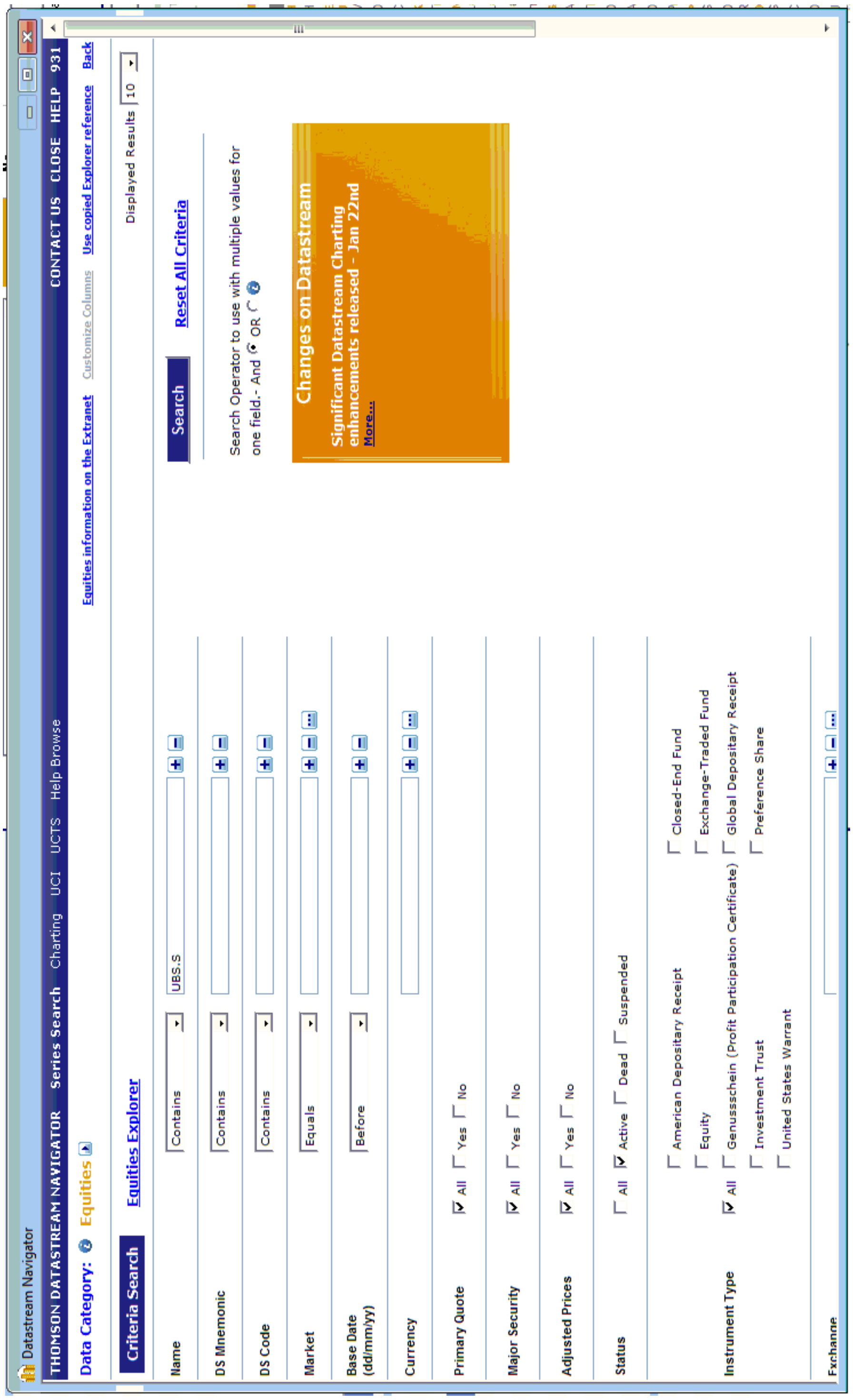

Figura 1.2: Criteri di ricerca di un titolo azionario.

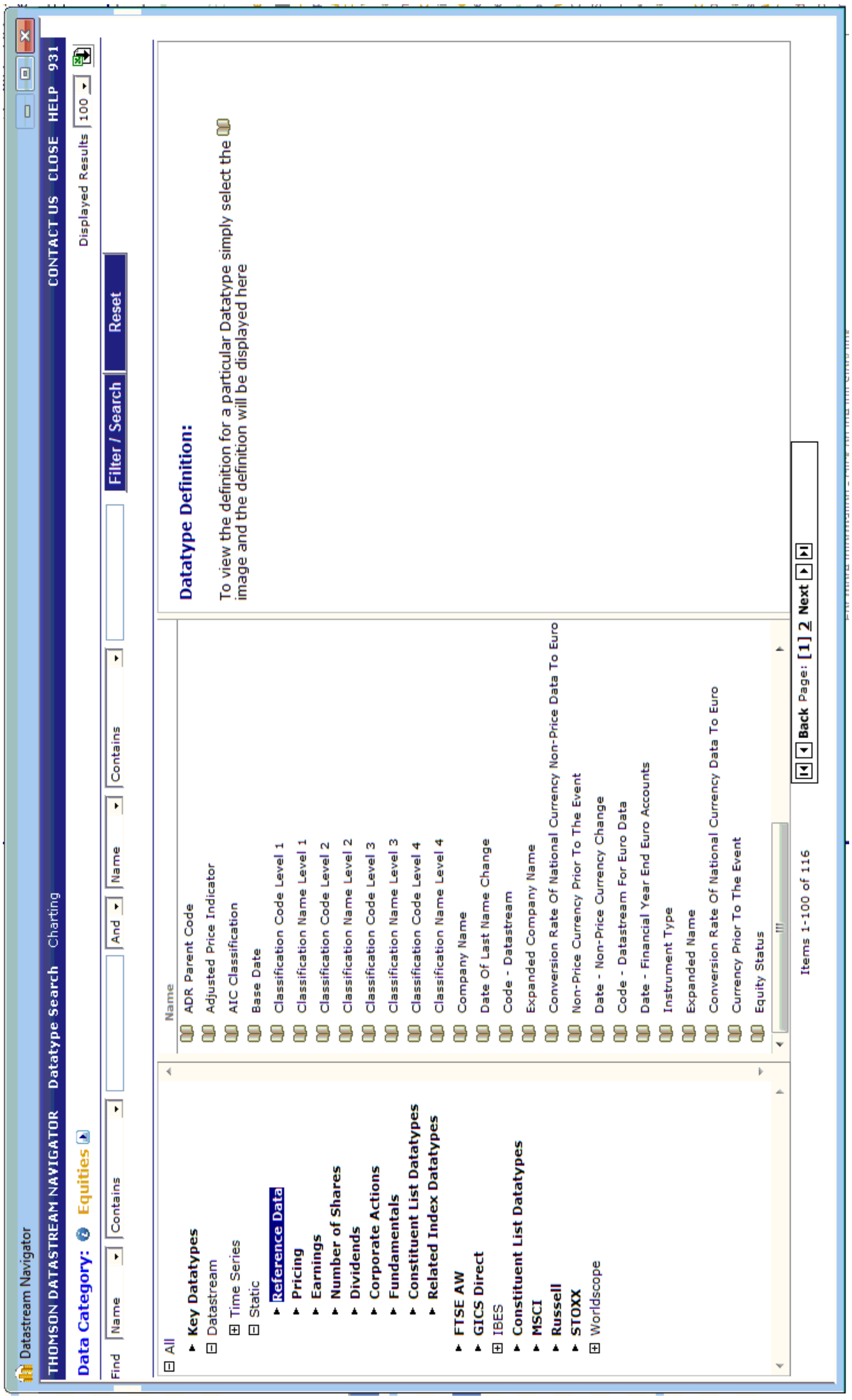

Figura 1.3: Selezione dei “datatypes” azionari.

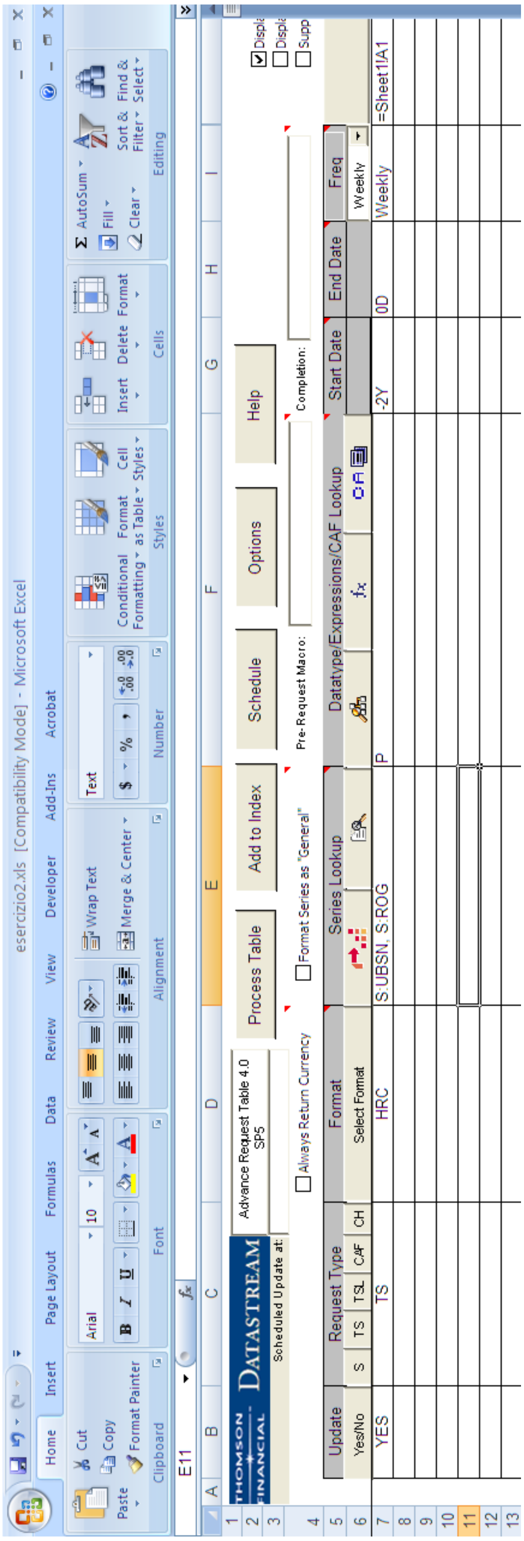

Figura 1.4: Request table in Excel.

Capitolo 2

Portfolio Models - Introduction

2.1 Notazione

In questo e nei prossimi capitoli faremo ampio uso del calcolo matriciale e delle nozioni di statistica multivariata apprese durante i corsi di Algebra Lineare e Introduzione all'Econometria. Prima di adoperare questi potenti strumenti presentiamo la notazione che verrà utilizzata. Purtroppo Benninga utilizza una notazione diversa da quella utilizzata nei corsi sopracitati. È questa una situazione alla quale dovrete abituarvi: in finanza ed in econometria non esiste nessuna convenzione per quanto riguarda la notazione. Ogni autore utilizzerà perciò i simboli a lui più congeniali. Per quanto riguarda questo corso indicheremo con

- $P_t :=$ Vettore aleatorio $N \times 1$ dei prezzi al tempo t.
- $r_t :=$ Vettore aleatorio $N \times 1$ dei rendimenti al tempo t (quando necessario verrà specificato il tipo - % o logaritmico - di rendimento).
- $V_t :=$ La matrice $N \times N$ delle varianze e covarianze di r_t.
- $e_t :=$ Il vettore $N \times 1$ dei rendimenti attesi, in altre parole
$$e_t := E[r_t].$$

Per indicare che il vettore aleatorio r_t ha valore atteso e_t e matrice delle varianze e covarianze V_t scriveremo semplicemente $r_t \sim (e_t, V_t)$. Quest'ultima espressione può essere semplificata ipotizzando che il valore atteso e la matrice delle varianze e covarianze dei rendimenti siano costanti nel tempo[1]. Scriviamo allora semplicemente
$$r_t \sim (e, V)\ . \tag{2.1}$$

[1]Abbiamo già utilizzato un'ipotesi simile nel modello di regressione classica
$$y_t = x_t'\beta + \epsilon_t$$
dove il valore atteso e la varianza dell'errore ϵ_t (di dimensione 1×1) sono costanti ed uguali rispettivamente a 0 e σ^2. Le ipotesi già applicate su ϵ_t vengono ora applicate ed in un certo senso estese a r_t (di dimensione $N \times 1$). Infatti, l'ipotesi di stazionarietà dei primi due momenti è la stessa (si tratta di una semplice generalizzazione al caso multivariato).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**PRICE AND RETURN DATA FOR WALMART (WMT) AND TARGET (TGT)** Yahoo adjusts prices for dividends						
2		Prices			Returns		
3	**Date**	**WMT**	**TGT**		**WMT**	**TGT**	
4	5-Jul-01	26.07	37.40				
5	1-Aug-01	22.00	33.53		-16.97%	-10.92%	<-- =LN(C5/C4)
6	4-Sep-01	20.07	30.73		-9.18%	-8.72%	<-- =LN(C6/C5)
7	1-Oct-01	20.02	30.15		-0.25%	-1.91%	<-- =LN(C7/C6)
8	1-Nov-01	23.35	36.38		15.39%	18.78%	
9	3-Dec-01	24.79	39.79		5.98%	8.96%	
10	2-Jan-02	23.03	43.04		-7.36%	7.85%	
11	4-Feb-02	18.09	40.66		-24.14%	-5.69%	
12	1-Mar-02	19.17	41.85		5.80%	2.88%	
13	1-Apr-02	20.25	42.36		5.48%	1.21%	
14	1-May-02	22.79	40.29		11.82%	-5.01%	
15	3-Jun-02	20.52	37.03		-10.49%	-8.44%	
55	3-Oct-05	50.93	55.37		7.95%	6.97%	
56	1-Nov-05	52.19	53.31		2.44%	-3.79%	
57	1-Dec-05	55.31	54.76		5.81%	2.68%	
58	3-Jan-06	55.63	54.54		0.58%	-0.40%	
59	1-Feb-06	58.46	54.29		4.96%	-0.46%	
60	1-Mar-06	60.23	51.90		2.98%	-4.50%	
61	3-Apr-06	65.46	52.99		8.33%	2.08%	
62	1-May-06	60.84	48.92		-7.32%	-7.99%	
63	1-Jun-06	67.51	48.87		10.40%	-0.10%	
64	3-Jul-06	67.65	49.17		0.21%	0.61%	

Figura 2.1: Esempio con $N = 2$ titoli, Benninga Capitolo 8.2 .

Esempio 1. Nell'esempio a pagina 240 di Benninga troviamo $N = 2$ titoli (azioni in questo caso) con i relativi prezzi. Le $n = 61$ osservazioni riportate sono a frequenza mensile: da $t =$ "2001-07-05" a "2006-07-03". Generalmente si è soliti disporre le serie storiche in ordine cronologico partendo dall'osservazione più distante nel tempo. Come con la matrice X della regressione classica la $t-$esima riga conterrà i prezzi osservati di tutti gli N titoli alla data t mentre la prima (seconda ...) colonna conterrà tutte le osservazioni del primo (secondo ...) titolo. Nell'esempio di Benninga la prima colonna (colonna **Date**) contiene l'indice temporale[2] t ma questa colonna non fa parte della matrice X.

Riserveremo gli indici i e j per indicare l'$i-$ esimo ed il $j-$ esimo titolo: $V_{ij} = Cov(r_{it}, r_{jt})$. Avremo allora che $V_{ii} = Cov(r_{it}, r_{it}) = Var(r_{it})$ è la varianza del rendimento dell'$i-$ esimo titolo. Denotiamo inoltre con

- $q_t :=$ Il vettore deterministico $N \times 1$ delle quantità (il numero) di titoli in portafoglio al tempo t. Quantità negative indicano vendite allo scoperto. Ad esempio $q_{it} = 5$ indica che, al tempo t, il portafoglio contiene 5 unità dell'$i-$ esimo titolo. Qualora le quantità dovessero essere costanti (la struttura del portafoglio non viene modificata) eviteremo di utilizzare l'indice temporale e scriveremo semplicemente q.

[2]Notiamo che la frequenza con cui vengono osservati i prezzi è il mese. Per tale motivo in questo esempio l'unità di misura dell'indice temporale t è il mese.

- P_{pt} := Il valore ("prezzo") del portafoglio al tempo t. Per definizione di q_t avremo $P_{pt} = q_t' P_t$. Come potete vedere si tratta del prodotto scalare tra il vettore dei prezzi e quello delle quantità.

- w_t := Il vettore $N \times 1$ dei pesi del portafoglio. Ogni componente w_{it} rappresenta la percentuale del valore totale del portafoglio investita nel titolo i al tempo t. Formalmente abbiamo

$$w_{it} = \frac{q_{it} P_{it}}{P_{pt}} \ .$$

  Poiché sono permesse vendite allo scoperto (short selling), w_{it} può avere segno negativo. Tuttavia, ad ogni istante temporale t, la somma delle componenti di w_t deve forzatamente essere uguale ad 1. In altre parole deve valere $S' w_t = 1$, dove come al solito S rappresenta il vettore somma a N componenti.

- r_{pt} := Il rendimento del portafoglio al tempo t.

2.2 Rendimenti percentuali e logaritmici: definizioni e proprietà

Supponiamo, senza perdita di generalità, che l'unità di misura del tempo t sia il giorno.

Definizione 1. Il rendimento percentuale giornaliero alla data t dell'azione i è

$$r_{it} := \frac{P_{it} - P_{i(t-1)}}{P_{i(t-1)}} = \frac{P_{it}}{P_{i(t-1)}} - 1 \ . \tag{2.2}$$

Osservazione 2. Dalla Definizione 1 di rendimento percentuale otteniamo l'identità

$$1 + r_{it} = \frac{P_{it}}{P_{i(t-1)}} \ . \tag{2.3}$$

Definizione 2. Il rendimento logaritmico giornaliero alla data t dell'azione i è

$$r_{it} := \ln\left(\frac{P_{it}}{P_{i(t-1)}}\right) \ . \tag{2.4}$$

Osservazione 3. Se la data t corrisponde alla "Ex-Dividend date", allora il calcolo del rendimento percentuale e logaritmico vanno modificati come segue:

$$r_{it} = \frac{P_{it} + d_{i(t-1)} - P_{i(t-1)}}{P_{i(t-1)}} = \frac{P_{it} + d_{i(t-1)}}{P_{i(t-1)}} - 1 \ ,$$

rispettivamente

$$r_{it} = \ln\left(\frac{P_{it} + d_{i(t-1)}}{P_{i(t-1)}}\right) \ .$$

Il motivo per cui viene aggiunto il dividendo è il seguente. Al momento dell'acquisto dell'azione in data $t-1$ l'acquirente mantiene il diritto a percepire il dividendo pur rivendendo l'azione il giorno t. Quindi a fronte di un costo iniziale di $P_{i(t-1)}$ il ricavo totale è dato dal prezzo di vendita P_{it} più il dividendo $d_{i(t-1)}$. Quando il rendimento è calcolato su un periodo superiore al giorno, ad esempio l'anno, $d_{i(t-1)}$ deve comprendere tutti i dividendi versati nel periodo (alcune azioni pagano dividendi a frequenza semestrale o addirittura trimestrale). Se il periodo è particolarmente lungo occorre tener conto del fatto che il dividendo è reinvestito. Questo comporta un aumento del numero di azioni che, a sua volta, va ad incidere sul calcolo del rendimento per il periodo successivo (si veda l'esempio numerico a pagina 256 di Benninga).

Esempio 2. Continuando con l'esempio precedente (vedi pag. 240 di Benninga) possiamo calcolare i rendimenti logaritimici *mensili* delle due azioni WMT e TGT utilizzando la funzione LN (logaritmo naturale) di Excel. In questo esempio gli eventuali dividendi versati nel periodo non sono stati considerati. Poiché l'osservazione per il calcolo del rendimento alla data 0 non è disponibile (sarebbero necessari i prezzi alla data $t = -1$) la matrice dei rendimenti osservati avrà una riga in meno rispetto alla matrice dei prezzi osservati (vedi Figura 2.1). □

2.2.1 Aggregazione cross-section dei rendimenti

Consideriamo in questo paragrafo la proprietà "*cross-section*" dei rendimenti di un portafoglio. La domanda a cui si desidera rispondere è la seguente: qual è la relazione tra il rendimento del portafoglio e i rendimenti dei singoli titoli in esso contenuto? La proprietà 1 dà una risposta a questa domanda.

Proprietà 1. Il rendimento percentuale del portafoglio soddisfa la seguente relazione

$$r_{pt} = w'_{t-1} r_t \ . \tag{2.5}$$

Quando i rendimenti sono logaritmici la proprietà 1 non è più mantenuta.

Proprietà 2. La Proprietà 1 non è soddisfatta dal rendimento logaritmico.

Le due proprietà appena discusse riguardano l'aggregazione *ad un medesimo istante temporale* di più titoli. Per tale motivo si parla della proprietà "*cross-section*" dei rendimenti. È questo un aspetto statico rispetto al tempo ma dinamico (aggrego) rispetto alle componenti del portafoglio. Vogliamo ora analizzare la situazione opposta, ovvero cosa capita quando l'aggregazione è temporale e non rispetto ai titoli in portafoglio. Questo implica analizzare il rendimento di *un singolo titolo* su un periodo di n giorni in funzione degli n rendimenti giornalieri.

2.2.2 Aggregazione temporale dei rendimenti

Consideriamo dapprima *un unico titolo*. In particolare, calcoliamo il suo rendimento su un orizzonte di n periodi utilizzando i rendimenti calcolati sui singoli periodi precedenti. Ad esempio, avendo a disposizione $n = 12$ rendimenti mensili come è possibile calcolare il rendimento annuo?

Definizione 3. Il rendimento percentuale dell'$i-$esimo titolo calcolato fra $t-n$ e t (su n giorni) è definito come

$$r_{i(t-n),t} := \frac{P_{it} - P_{i(t-n)}}{P_{i(t-n)}} = \frac{P_{it}}{P_{i(t-n)}} - 1 \tag{2.6}$$

Proprietà 3. Il rendimento percentuale su n periodi soddisfa la seguente relazione

$$r_{i(t-n),t} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + r_{i(t-k+1)}\right) - 1. \tag{2.7}$$

Osservazione 4. Al fine di snellire la notazione, il rendimento giornaliero o in generale il rendimento calcolato sul singolo periodo ($n = 1$) anziché $r_{i(t-1),t}$ verrà semplicemente scritto come r_{it}.

Definizione 4. Il rendimento logaritmico dell'$i-$esima azione calcolato fra $t-n$ e t è definito come

$$r_{i(t-n),t} = \ln\left(\frac{P_{it}}{P_{i(t-n)}}\right) \tag{2.8}$$

Proprietà 4. Il rendimento logaritmico su n periodi soddisfa la seguente relazione

$$r_{i(t-n),t} = \sum_{k=1}^{n} r_{i(t-k+1)} \ . \tag{2.9}$$

Le Proprietà 1-4 sono molto importanti per comprendere come viene calcolato il rischio associato al movimento dei prezzi di mercato, il cosiddetto *market-risk* (si veda il Capitolo 7: Value at Risk). Notiamo innanzi tutto che ci sono due dimensioni da considerare. La prima riguarda il fatto che il portafoglio è composto da più titoli (dimensione *cross-section*). Questo ci obbliga a considerare un vettore r_t di N rendimenti. Le Proprietà 1 e 2 riguardano proprio questa dimensione: la Proprietà 1 afferma che il rendimento percentuale di un portafoglio è dato dalla *combinazione lineare* dei rendimenti percentuali di ogni singolo titolo. I pesi di tale combinazione lineare corrispondono alle percentuali con cui i titoli erano rappresentati in portafoglio al momento dell'investimento, cioè $t-1$. Il rendimento logaritmico non possiede questa interessante proprietà (Proprietà 2). Questo significa che il rendimento logaritmico di un portafoglio non è uguale alla somma pesata dei rendimenti logaritmici sui singoli titoli.

La seconda dimensione, che riguada invece le Proprietà 3 e 4, concerne l'aspetto *temporale* dell'investimento: il rendimento percentuale di un singolo titolo aggrega in maniera geometrica rispetto al tempo (Proprietà 3) mentre il rendimento logaritmico aggrega in maniera lineare (Proprietà 4). È molto importante aver ben capito e sapere distinguere questi due aspetti al fine di non cadere in confusione e commettere errori. In particolare, come vedremo tra breve e nei prossimi capitoli, a dipendenza dalle ipotesi iniziali, dal tipo di rendimento e dalle sue proprietà d'aggregazione giungeremo a conclusioni diverse rispetto alle proprietà statistiche (distribuzione, momenti, ...) dei rendimenti.

Un'ultima osservazione: quando si discute dell'aspetto temporale di aggregazione dei rendimenti è necessario specificare la frequenza con cui si osservano i prezzi e l'orizzonte sul quale si desidera effettuare l'aggregazione. Ad esempio, se disponiamo di rendimenti giornalieri e desideriamo calcolare i rendimenti settimanali avremo un orizzonte temporale di 5 periodi.

Consideriamo ora *un intero portafoglio* e chiediamoci se l'uguaglianza (2.7) è valida anche per un portafoglio composto da più titoli. La risposta è sì, ma con un'importante precisazione.

Definizione 5. Il rendimento percentuale calcolato fra $t-n$ e t *di un portafoglio* è definito come

$$r_{p(t-n),t} := \frac{P_{pt} - P_{p(t-n)}}{P_{p(t-n)}} = \frac{P_{pt}}{P_{p(t-n)}} - 1 \ . \tag{2.10}$$

Proprietà 5. Il rendimento percentuale su n periodi soddisfa la seguente relazione

$$r_{p(t-n),t} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + r_{p(t-k+1)}\right) - 1, \tag{2.11}$$

dove i singoli rendimenti $r_{p(t-k+1)}$ sono calcolati utilizzando la relazione (2.5) ma ovviamente con un vettore di pesi w_{t-k} diverso per ogni periodo.

Osservazione 5. La proprietà 5 evidenzia una caratteristica legata alla proprietà cross-section dei rendimenti percentuali di un portafoglio: i pesi w_{it} generalmente *non* sono costanti nel tempo (a meno di intervenire sulla composizione del portafoglio e ribilanciarlo continuamente). Questo perché i prezzi dei titoli che costituiscono un portafoglio non variano in ugual misura e di conseguenza il peso relativo di ciascun titolo rispetto al valore totale del portafoglio tenderà a variare nel tempo.

Esercizio 3. 1. Dimensione *cross-section* dei rendimenti

Il valore P_{pt} al tempo t di un portafoglio composto da solo due titoli è semplicemente

$$P_{pt} = q_1 P_{1,t} + q_2 P_{2,t}$$

dove q_1 e q_2 (per ipotesi costanti nel tempo) rappresentano la quantità della prima e rispettivamente della seconda azione in portafoglio.

(a) Dimostrate *algebricamente* che il rendimento percentuale del portafoglio

$$r_{p(t+1)} = \left(P_{p(t+1)} - P_{pt}\right) / P_{pt}$$

è uguale alla somma ponderata dei rendimenti percentuali

$$r_{i(t+1)} = \left(P_{i(t+1)} - P_{it}\right) / P_{it}$$

su ogni singola azione, ovvero

$$r_{p(t+1)} = w_{1t} r_{1(t+1)} + w_{2t} r_{2(t+1)} \ ,$$

verificando che ciascun peso w_{it} corrisponde alla percentuale iniziale dell'$i-$esima azione in portafoglio.

(b) Verificate quanto avete dimostrato nel punto precedente prendendo due serie storiche qualsiasi dei dati scaricati nell'Esercizio 2. Assumete $q_1 = 1$ e $q_2 = 2$.

(c) Mostrate numericamente con un semplice controesempio che ciò non è valido per i rendimenti logaritmici.

2. Variazione nel tempo della composizione percentuale del portafoglio

   Per risolvere quest'esercizio utilizzate le serie storiche contenute nel *Sheet1* del file *Esercizio2.xls*. Consideriamo un portafoglio costituito da un'azione di *Ubs* ed un'azione di *Roche*.

   (a) In base ai dati a vostra disposizione a quanto ammonta l'unità di misura del tempo t?

   (b) Eseguite il grafico delle due serie storiche.

   (c) Calcolate il prezzo (o valore) del portafoglio a tutte le date disponibili.

   (d) Utilizzando le serie dei prezzi calcolate i rendimenti percentuali di *Ubs*, *Roche*.

   (e) Utilizzando la serie storica del valore (prezzo) del portafoglio calcolatene i rentimenti percentuali.

   (f) Calcolate i pesi w_{it} di *Ubs* e *Roche*. Sono costanti? Sommano sempre a 1? Fate un grafico delle serie storiche dei due pesi.

   (g) Calcolate i rendimenti percentuali del portafoglio utilizzando i rendimenti percentuali di *Ubs*, *Roche* ed i pesi w_t. Verificate che essi corrispondano ai rendimenti calcolati al punto (e).

3. Rendimenti su più periodi: aggregazione temporale

   Consideriamo dapprima i rendimenti *logaritmici* settimanali di un'azione i, notati r^w_{it} (w = weekly) in funzione dei rendimenti giornalieri. Per definizione essi sono uguali a

$$r^w_{it} := r_{i(t-5),t} = \ln(P_{it}/P_{i(t-5)}) = \sum_{k=1}^{5} r_{i(t-k+1)}.$$

   (a) Esplicitate la sommatoria che definisce r^w_{it} per $t = 5$. Disegnate l'asse temporale ed evidenziate con un colore l'intervallo temporale che comprende i rendimenti logaritmici giornalieri utilizzati per il calcolo di r^w_{i5}. Sul medesimo asse eseguite la stessa procedura ma per un valore di $t = 11$. Notate sovrapposizioni fra i colori? Interpretate il risultato.

   (b) Assumiamo che i rendimenti logaritmici giornalieri a date diverse non siano fra loro correlati e che $r_{i,t} \sim (\mu, \sigma^2)$. Cosa possiamo dedurre riguardo

      i. al valore atteso del rendimento logaritmico settimanale?

      ii. alla varianza del rendimento logaritmico settimanale?

      iii. alla covarianza fra due rendimenti settimanali $Cov(r^w_{i(t-l)}, r^w_{it})$? Calcolate la covarianza per valori di l pari a $1, 2, 5$ e 6. Suggerimento: per ciascuna coppia $(r^w_{i(t-l)}, r^w_{it})$ eseguite il disegno dell'asse temporale t ed indicate, con colori diversi, i due intervalli di tempo utilizzati per colcolare i rendimenti logaritmici settimanali corrispondenti. Calcolate i periodi in comune e confrontate con il valore della covarianza.

(c) Se i rendimenti logaritmici giornalieri $r_{i,t}$ fossero $i.i.d. \sim (\mu, \sigma^2)$, cambierebbe qualcosa nei risultati del punto precedente? Argomentate la vostra risposta.

(d) Se i rendimenti logaritmici giornalieri $r_{i,t}$ fossero $i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$, quale sarebbe la distribuzione di r_{it}^w e perché?

Consideriamo ora i rendimenti *percentuali* sempre di un'unica azione i

(e) Qual è la formula che esprime i rendimenti percentuali settimanali di un'azione i in funzione dei suoi rendimenti percentuali giornalieri?

(f) Se i rendimenti percentuali giornalieri $r_{i,t}$ fossero non correlati $\sim (\mu, \sigma^2)$, cosa potremmo concludere riguardo

i. al valore atteso del rendimento percentuale settimanale?

ii. alla varianza del rendimento percentuale settimanale?

iii. alla covarianza fra due rendimenti settimanali $Cov(r_{i(t-l)}^w, r_{it}^w)$? Suggerimento: non perdete troppo tempo su questo punto ...

(g) Se i rendimenti percentuali giornalieri fossero $i.i.d. \sim (\mu, \sigma^2)$, cambierebbe qualcosa nei risultati del punto precedente? Argomentate la vostra risposta.

(h) Se i rendimenti percentuali giornalieri fossero $i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$, la distribuzione di r_{it}^w sarebbe ancora normale? Argomentate la vostra risposta.

4. Utilizzando le serie storiche contenute nei fogli di lavoro *Sheet1* del file *Esercizio2.xls* calcolate

   (a) la serie storica a frequenza settimanale dei rendimenti logaritmici settimanali.

5. Utilizzando le serie storiche contenute nei fogli di lavoro *Sheet2* del file *Esercizio2.xls* calcolate

   (a) la serie storica a frequenza giornaliera dei rendimenti logaritmici giornalieri.

   (b) la serie storica a frequenza giornaliera dei rendimenti logaritmici settimanali.

   (c) Confrontate il risulato del punto (b) con quanto ottenuto utilizzando i dati del foglio di lavoro *Sheet1*. Cosa osservate?

   (d) Utilzzando la serie storica a frequenza giornaliera dei rendimenti logaritmici settimanale calcolate la covarianza stimata $\hat{Cov}(r_{i(t-l)}^w, r_{it}^w)$ per $l = 1, 3, 5, 6$. Cosa notate? Cercate di spiegare. □

In genere un portafoglio titoli pur essendo valutato in un'unica moneta (la cosiddetta moneta di riferimento) è costituito da titoli denominati in valute diverse (chf, eur, usd, jpy, ...). Sorge quindi il problema di come scomporre il rendimento o il rischio di un titolo (o in aggregato di un portafoglio) nella parte dovuta al movimento del tasso di cambio e in quella dovuta al movimento del prezzo in valuta estera.

Per chiarirci le idee, consideriamo un'azione trattata in EUR alla borsa di Francoforte, il cui prezzo sarà notato P_{it}^{eur}. Ovviamente quali investitori svizzeri siamo interessati al suo prezzo in franchi, cioè $P_{it} = P_{eur,t}P_{it}^{eur}$. Il termine $P_{eur,t}$ denota quindi il tasso di cambio fra EUR e CHF alla data t: ad esempio $P_{eur,t} = 1.43\ Fr/Eur$.

Esempio 3. Un investitore svizzero ha acquistato 10 azioni della BASF. L'azione della BASF è quotata in euro. La tabella seguente riporta i prezzi a tre date successive.

Data	Prezzo in eur	Cambio 1 eur = $x$chf	Prezzo in chf
7-Apr-09	23.40	1.516	
8-Apr-09	23.43	1.523	
9-Apr-09	24.96	1.522	

Evidentemente il prezzo (e quindi il rendimento) in chf della BASF è soggetto a due fonti di incertezza: i movimenti del prezzo della BASF in eur e i movimenti del tasso di cambio.

□

Quattro sono le domande che concernono i rendimenti di titoli quotati in moneta estera:

Domanda 1. Dato l'$i-$esimo titolo, che relazione sussiste fra il suo rendimento percentuale in CHF ed il suo rendimento percentuale in EUR *su un singolo periodo*?

Domanda 2. Dato l'$i-$esimo titolo, che relazione c'è fra il suo rendimento logaritmico in CHF ed il suo rendimento logaritmico in EUR *su un singolo periodo*?

Domanda 3. Come si calcola il rendimento percentuale in CHF fra $t-n$ e t (su n periodi) utilizzando i rendimenti percentuali calcolati su un singolo periodo (confronta la formula (2.7))?

Domanda 4. Come si calcola il rendimento logaritmico in CHF fra $t-n$ e t utilizzando i rendimenti logaritmici calcolati su un singolo periodo?

Risponderete a queste domande risolvendo l'esercizio seguente.

Esercizio 4. Utilizziamo quale unità di misura del tempo t il giorno. Consideriamo un'unica azione[3], quotata in dollari al New York Stock Exchange e il cui prezzo in moneta locale (usd) è indicato[4] con P_t^{usd}. Quali investitori svizzeri siamo interessati ai rendimenti in moneta di riferimento, ovvero in chf. Indicando con $P_{usd,t}$ il tasso di cambio al tempo t e con $r_{usd,t}$ il suo rendimento percentuale, abbiamo la semplice relazione $P_t = P_{usd,t}P_t^{usd}$.

[3]Eviteremo quindi di utilizzare l'indice i a pedice del suo prezzo o del suo rendimento.

[4]Utilizziamo la convenzione che quando un prezzo (o un rendimento) è espresso in una valuta diversa dalla valuta di riferimento, tale valuta sarà posta ad apice del prezzo (rendimento).

D1. Trovate la formula che lega il rendimento giornaliero percentuale $r_t := (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$ ai rendimenti percentuali giornalieri $r_{usd,t}$ e r_t^{usd}. Cosa notate?

Suggerimento:

$$r_t = \frac{P_{usd,t}P_t^{usd} - P_{usd,t}P_{t-1}^{usd} + P_{usd,t}P_{t-1}^{usd} - P_{usd,t-1}P_{t-1}^{usd}}{P_{usd,t-1}P_{t-1}^{usd}}$$

$$\frac{P_{usd,t}P_t^{usd} - P_{usd,t}P_{t-1}^{usd}}{P_{usd,t-1}P_{t-1}^{usd}} = (1 + r_{usd,t})r_t^{usd}$$

D2. Mostrate che il rendimento giornaliero logaritmico in chf è uguale alla somma dei due rendimenti logaritmici giornalieri e cioè quello sul prezzo in valuta locale più quello sul tasso di cambio.

D3. Parte 1. Derivate la relazione che lega il rendimento percentuale in CHF fra $t-n$ e t, notato $r_{(t-n),t}$, ai rendimenti percentuali $r_{usd,(t-n),t}$ e $r_{(t-n),t}^{usd}$.

Suggerimento: riutilizzate, adattando l'indice temporale, il suggerimento del punto 1.

D3. Parte 2. Ricavate la formula per il calcolo del rendimento $r_{(t-n),t}$ a partire dai rendimenti percentuali sui singoli periodi $r_{usd,t}$ e r_t^{usd}.

D4. Derivate la relazione che lega il rendimento logaritmico in CHF fra $t-n$ e t, notato $r_{(t-n),t}$, ai rendimenti logaritmici $r_{usd,(t-n),t}$ e $r_{(t-n),t}^{usd}$. Utilizzando questo risultato derivate la formula per il calcolo $r_{(t-n),t}$ a partire dai rendimenti logaritmici sui singoli periodi $r_{usd,t}$ e r_t^{usd} (proprietà di aggregazione temporale).

D5. Assumiamo che i vettori $\left(r_{usd,t}, r_t^{usd}\right)'_{t=1,2,\cdots}$ dei rendimenti logaritmici formino una successione $i.i.d. \sim N(\mu, \Sigma)$. Cosa possiamo concludere riguardo alla successione di rendimenti logaritmici in chf r_t?

$\square$

2.3 Flashback: varianze, covarianze e coefficiente di correlazione

La varianza di una variabile aleatoria U (scalare) sappiamo essere definita da

$$Var(U) := E\left(U - E\left(U\right)\right)^2 \tag{2.12}$$

mentre la covarianza con la variabile aleatoria W (anch'essa scalare) è uguale

$$Cov(U, W) := E\left(U - E\left(U\right)\right)\left(W - E\left(W\right)\right) \ . \tag{2.13}$$

Infine il coefficiente di correlazione fra U e W è definito come

$$Cor(U, W) := \frac{Cov(U, W)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(W)}} \ . \tag{2.14}$$

Per quanto riguarda varianza e covarianza, esistono formule alternative che possono essere ricavate a partire dalla loro definizione utilizzando la proprietà di linearità del valore atteso. Tali formule sono

$$Var(U) = E\left(U^2\right) - \left(E\left(U\right)\right)^2$$

e

$$Cov(U,W) = E\left(UW\right) - E\left(U\right)E\left(W\right) \ .$$

Poiché nel caso scalare la moltiplicazione è commutativa, vale che

$$Cov(U,W) = Cov(W,U).$$

Lo stesso non vale nel caso in cui U e/o W siano dei vettori aleatori. In tal caso occorre prestare attenzione all'ordine in cui U e W appaiono nella funzione di Cov. Ricordiamo che la Cov fra due vettori aleatori $\underset{(r\times 1)}{U}$ e $\underset{(c\times 1)}{W}$ è definita nel seguente modo (si noti il trasposto nella formula)

$$\underset{(r\times c)}{Cov(U,W)} = E\left[\left(U - E\left(U\right)\right)\left(W - E\left(W\right)\right)'\right] \ .$$

Come nel caso scalare potete dimostrare che

$$Cov(U,W) = E\left(UW'\right) - E\left(U\right)E\left(W\right)'$$

e quando $U = W$ la formula della covarianza si riduce alla varianza del vettore aleatorio Y:

$$Cov(U,U) = Var(U) = E\left[\left(U - E\left(U\right)\right)\left(U - E\left(U\right)\right)'\right] \ .$$

Ricordiamo che, per definizione, la varianza di un vettore aleatorio è una matrice quadrata, simmetrica, avente quale elemento nella posizione (i,j) la covarianza fra l'$i-$esima e la $j-$esima componente di U, $Cov(U_i,U_j)$. È possibile definire in maniera del tutto analoga la *matrice di correlazione* del vettore aleatorio U come la matrice quadrata avente nella posizione (i,j) la correlazione fra l'$i-$esima e la $j-$esima componente di U, $Cor(U_i,U_j)$. Poiché $Cor(U_i,U_j) = Cor(U_j,U_i)$, anche la matrice di correlazione di U è simmetrica! In particolare, la diagonale di qualsiasi matrice di correlazione è formata da 1, mentre fuori dalla diagonale devono esserci dei numeri compresi nell'intervallo $[-1,1]$. La matrice di correlazione è positiva semidefinita. La matrice di correlazione del vettore aleatorio U sarà notata

$$Cor(U) \ .$$

Abbiamo studiato nella prima parte del corso la convergenza in probabilità dei momenti empirici verso i momenti teorici (si riveda la parte riguardante la *Convergenza dei momenti del campione*). La versione empirica della (2.12) è, dato un campione di numerosità n, semplicemente uguale[5]

$$\widehat{Var}(U) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(U_t - \overline{U}\right)^2 \ , \tag{2.15}$$

mentre la versione empirica della (2.13) altro non è che

$$\widehat{Cov}(U,W) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(U_t - \overline{U}\right)\left(W_t - \overline{W}\right) \ . \tag{2.16}$$

[5]In MS Excel questa è esattamente la formula sottostante alla funzione *varp*().

Esercizio 5. Consideriamo il vettore aleatorio[6] $Z := (U, W)' \sim (\mu, V)$ di dimensione $N = 2$, dalla cui popolazione bivariata estraiamo un campione aleatorio di numerosità $n = 3$. Questo significa che avremo a che fare con le realizzazioni di 3 vettori aleatori $Z_1 = (U_1\ W_1)'$, $Z_2 = (U_2\ W_2)'$ e $Z_3 = (U_3\ W_3)'$. I tre vettori Z_1, Z_2 e Z_3 sono fra loro indipendenti (ad esempio U_3 è indipendente da W_1 o U_1) mentre le due componenti U_t e W_t avranno covarianza pari a V_{12}. Possiamo impilare i 3 vettori Z_t disponendoli nelle righe di una matrice

$$\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_3' \\ Z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1\ W_1 \\ U_2\ W_2 \\ U_3\ W_3 \end{bmatrix} = [x, y] \,.$$

Come nella regressione possiamo leggere ed interpretare il contenuto di questa matrice per riga o per colonna. Le colonne conterranno tutte le 3 (n in generale) osservazioni della medesima variabile, la U ad esempio (prima colonna). Le righe invece conterranno le osservazioni su tutte le variabili ad un determinato istante (di una determinata estrazione). x ed y sono i due vettori aleatori contenenti tutte le n osservazioni della variabile U e rispettivamente della W.

1. Quale sarà la dimensione della matrice $Cov(x, y)$? Calcolatela esplicitamente in fuzione della matrice V.

2. Riscrivete la (2.16) come

   $$\widehat{Cov}(U, W) = \frac{1}{3} y\prime M x \ ,$$

   e date esplicitamente il contenuto della matrice M. Di che matrice si tratta? Quali sono le sue caratteristiche?

3. Consideriamo il prodotto (S è il vettore somma a 3 componenti)

   $$(x - \mu_1 S)\,(y - \mu_2 S)' \ \ .$$

   Date dimensione e contenuto di ogni simbolo ed esplicitate il prodotto. Calcolatene poi il valore atteso.

4. Applicando le proprietà di linearità e commutatività della traccia e del valore atteso (già viste ed utilizzate per il calcolo del valore atteso di una forma quadratica) calcolate il valore atteso di

   $$\frac{1}{3}\,(y - \mu_2 S)'\, M\, (x - \mu_1 S) \ \ . \tag{2.17}$$

   e mostrate che è uguale a $\frac{2}{3} Cov(U, W)$.

5. Dopo aver sciolto le parentesi della (2.17) calcolate il valore atteso di ciascun termine. Utilizzando il risultato del punto precedente date $E\left(\widehat{Cov}(U, W)\right)$.

[6] Il vettore μ è semplicemente il vettore dei valori attesi di Z:

$$\mu = E(Z) = E\left[\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} E\,[U] \\ E\,[W] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \ .$$

6. Generalizzate il risultato al caso con n osservazioni.

$\square$

Osservazione 6. L'esercizio precedente ci mostra che, come nel caso della stima della varianza, anche per la stima della covarianza lo stimatore (2.16) non è corretto poiché sarebbe necessario dividere per $n-1$. Tuttavia la distorsione (Bias) è dell'ordine $\frac{1}{n}$ e diventa trascurabile (tende a 0) al tendere di n all'infinito.

Osservazione 7. La dimensionalità cross-section del problema[7] è espressa dalle dimensioni del vettore aleatorio Z dalla cui distribuzione sono campionate le osservazioni. La dimensione temporale è data dal numero[8] $n = 3$ di campionamenti.

Tornando al coefficiente di correlazione: poiché entrambi gli stimatori convergono in probabilità alla varianza di X (Y) e alla covarianza fra X ed Y, utilizzando una delle proprietà del $p\lim$ (quale?) avremo che lo stimatore

$$\widehat{Cor}(X,Y) := \frac{\widehat{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\widehat{Var}(X)}\sqrt{\widehat{Var}(Y)}}$$

è uno stimatore consistente della correlazione fra X ed Y.

Concludiamo questa sezione con una semplice applicazione di statistica multivariata. Sia V la matrice delle varianze e covarianze del vettore aleatorio N-dimensionale Z e Λ la matrice diagonale con elementi $\Lambda_{ii} = Var(Z_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Vale allora la relazione

$$Cor(Z) = \Lambda^{-1/2} V \Lambda^{-1/2} \ . \tag{2.18}$$

Esercizio 6. Sia $Z = (X\ Y)'$ un vettore aleatorio a $N = 2$ componenti di valore atteso nullo e matrice delle varianze e covarianze

$$V = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 25 \end{bmatrix} .$$

1. Calcolate la matrice Λ e $\Lambda^{-1/2}$.

2. Verificate che *post-moltiplicare* V per la matrice *diagonale* $\Lambda^{-1/2}$ significa moltiplicare la $i-$esima *colonna* di V per il corrispettivo $i-$esimo elemento della diagonale di $\Lambda^{-1/2}$.

3. Verificate che *pre-moltiplicare* V per la matrice *diagonale* $\Lambda^{-1/2}$ significa moltiplicare la $i-$esima *riga* di V per il corrispettivo $i-$esimo elemento della diagonale di $\Lambda^{-1/2}$.

4. Calcolate $Cor(Z)$.

[7] Ci riferiamo al numero di titoli in portafoglio.

[8] Tale numero corrisponde al numero di date per le quali abbiamo le osservazioni degli N rendimenti azionari.

2.4 Valore atteso e varianza del rendimento di un portafoglio

Abbiamo dimostrato che il rendimento percentuale $r_{p(t-n),t}$ di un portafoglio è la somma ponderata dei rendimenti $r_{i(t-n),t}$ delle azioni che lo compongono. Il vettore di questa combinazione lineare è $w_{(t-n)}$. Esso contiene le posizioni percentuali ad inizio periodo. Per semplicità di notazione assumiamo $n = 1$, tralasciando per il momento l'indice temporale sia dei pesi che dei rendimenti. Poiché il vettore dei rendimenti $r \sim (e, V)$ e $r_p = w'r$, avremo per la famosissima formula AVA', che $Var(r_p) = w'Vw$. Il valore atteso di r_p sarà invece uguale a $\mu_p = w'e$.

2.4.1 Caso con due soli titoli

Il caso con due soli titoli è triviale: $r_p = w_1r_1+w_2r_2$ da cui segue semplicemente che

$$\sigma_p^2 := Var(r_p) = w_1^2V(r_1) + w_2^2V(r_2) + 2w_1w_2Cov(r_1, r_2) \tag{2.19}$$

Utilizzando il vincolo $w_1 + w_2 = 1$ è possibile riscrivere la (2.19) solo in funzione di w_1 (o w_2 ovviamente) ed eseguire un grafico della funzione $\sigma_p^2(w_1)$ ovvero della varianza di r_p in funzione del peso w_1. Il tutto è lasciato come semplice esercizio.

2.4.2 Caso generale

Il caso con N titoli è praticamente già stato discusso nell'introduzione dove è stato detto che $Var(r_p) = w'Vw$. Possiamo considerare il caso più generale della covarianza tra i rendimenti di due portafogli p_1 e p_2 definiti tramite i rispettivi *vettori* di pesi w_1 e w_2 . In questo caso w_1 indica il vettore di pesi del portafoglio 1 e non la prima componente del vettore di pesi w. Per definizione della covarianza abbiamo

$$\begin{aligned} Cov\left(r_{p_1}, r_{p_2}\right) &= E\left(\left(w_1'r - w_1'e\right)\left(w_2'r - w_2'e\right)'\right) \\ &= E\left(w_1'\left(r-e\right)\left(r-e\right)'w_2\right) \\ &= w_1'E\left(\left(r-e\right)\left(r-e\right)'\right)w_2 \\ &= w_1'\Sigma w_2 \end{aligned}$$

La covarianza tra i rendimenti di due portafogli definiti sul medesimo universo di titoli è dunque uguale al prodotto dei vettori dei pesi per la matrice delle varianze e covarianze dei rendimenti dei titoli.

2.5 Teoria delle decisioni

2.5.1 Relazione di preferenza e funzione di utilità di tipo ordinale

La teoria delle decisioni (decision theory, preference theory) riferita alla scelta individuale (single -person choice theory) riguarda la formulazione assiomatica di una teoria che spieghi o descriva il modo in cui i singoli agenti economoci effettuino le loro scelte fra due o più possibili alternative. Il contesto in cui un individuo deve effettuare una scelta può includere anche situazioni di incertezza in cui la conseguenza della scelta non è conosciuta al momento della decisione.

La teoria della decisione si basa sul principio secondo il quale un individuo è in grado di attribuire un "valore" a panieri di beni e servizi secondo le sue preferenze. Assumiamo che esistano n beni. Un paniere è rappresentato da un vettore x la cui $i-$esima componete x_i rappresenta la quantità dell'$i-$esimo bene nel paniere x. Ogni consumatore seleziona il proprio paniere x attingendo dall'insieme $\mathscr{X}$ dei panieri.

Le preferenze di un individuo sono descritte da un relazione di preferenza solitamente chiamata relazione di preordinamento totale $\gtrsim$ sull'insieme $\mathscr{X}$.

Osservazione 8. Una relazione binaria $\gtrsim$ su un insieme $\mathscr{X}$ (cioè un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$) si dice un preordine se soddisfa le seguenti proprietà per ogni x, y, $z \in \mathscr{X}$:

A1 Riflessività: per ogni $x \in \mathscr{X}$ vale $x \gtrsim x$.

A2 Transitività: se $x \gtrsim y$ e $y \gtrsim z$ allora $x \gtrsim z$.

A3 Completezza: il preordinamento è detto totale (o lineare) se presi due qualsiasi x, $y \in \mathscr{X}$ vale che

$$x \gtrsim y \text{ oppure } y \gtrsim x.$$

Assumiamo quindi che la relazione di preferenza soddisfi gli assiomi A1-A3. Le proprietà di riflessività sembra essere evidente ed intuitiva quando applicata al contesto economico. L'espressione $x \gtrsim y$ è da interpretare come "il paniere di beni x è debolmente preferito al paniere$y$". Una relazione di preordinamento $\gtrsim$ introduce anche i concetti di preferenza stretta $\succ$ ed indifferenza $\sim$, definiti rispettivamente da

- $x \succ z$ se $x \succeq z$ ma non $z \succeq x$
- $x \sim z$ se $x \succeq z$ e $z \succeq x$

e sono da leggersi come "il paniere di beni x è (strettamente) preferito al paniere$y$" e "il paniere di beni x è equivalente al paniere$y$".

La domanda che ci poniamo ora è la seguente: dato un individuo con una relazione di preordinamento totale su $\mathscr{X}$ è possibile costruire una funzione di utilità *ordinale* che rappresenti le preferenze dell'individuo? Ricordiamo che una funzione di utilità ordinale su $\mathscr{X}$, notata Υ è una funzione da $\mathscr{X}$ in $\mathbb{R}$ tale per cui

$$\Upsilon(x) > \Upsilon(y) \iff x \succ y \tag{2.20}$$
$$\Upsilon(x) = \Upsilon(y) \iff x \sim y \tag{2.21}$$

La risposta alla domanda data è negativa. Al fine di assicurare l'esistenza di una funzione di utilità ordinale occorre un'ulteriore condizione detta di continuità che riportiamo di seguito senza ulteriori commenti:

A4 Continuità: per qualsiasi paniere $x \in \mathscr{X}$, l'insieme A dei panieri strettamente preferiti a x e l'insieme B dei panieri strettamente peggiori di x sono entrambi insiemi aperti.

Siamo ora pronti a dare il seguente teorema

Teorema 1. Per ogni preordinamento totale definito su un insieme chiuso e convesso $\mathscr{X}$ di panieri per cui la condizione di continuità è soddisfatta esiste una funzione di utilità ordinale Υ continua che mappa $\mathscr{X}$ in $\mathbb{R}$.

La funzione di utilità ordinale così ricavata, fatta eccezione per la sua continuità, contiene le medesime informazioni sulle preferenze del preordinamento totale. Al livello di utilità $\Upsilon(x)$ del paniere x non può essere attribuito alcun altro significato se non nell'ambito della relazione "maggiore di". Infatti *non* è corretto affermare che x è doppiamente migliore di z se $\Upsilon(x) = 2\Upsilon(z)$. Analogamente non è possibile affermare che x incrementa maggiormente l'utilità rispetto ad y di quanto non lo faccia y rispetto a z se $\Upsilon(x) - \Upsilon(y) > \Upsilon(y) - \Upsilon(z) > 0$.

Da questo punto di vista quindi, se una particolare funzione di utilità Υ è una rappresentazione valida di una data relazione di preordinamento totale, allora lo sarà anche $\Phi(x) := h\left(\Upsilon(x)\right)$, dove h è una qualsiasi funzione strettamente crescente.

Generalmente nella teoria microeconomica si è soliti assumere la seguente ulteriore ipotesi

Ipotesi 1. La funzione di utilità Υ è due volte differenziabile, crescente e strettamente concava.

Quest'ultima ipotesi garantisce che le derivate parziali prime siano positive. Questo implica che un incremento di reddito speso su un qualsiasi bene darà sicuramente un incremento di utilità. L'ipotesi di concavità garantisce che le curve di indifferenza abbiano la "solita forma all'insù" (concava) ed indirettamente che la scelta ottimale di un consumatore sia unica.

Indicando con W (wealth) il patrimonio del consumatore, il problema di allocazione da risolvere è il seguente

$$\max \Upsilon(x) \quad \text{sotto il vincolo} \quad p'x \leq W.$$

La soluzione di questo problema di massimizzazione è dato dal Lagrangiano

$$L = \Upsilon(x) + \lambda(W - p'x) \tag{2.22}$$

e le condizioni di primo ordine che ne derivano. Poiché sappiamo che la funzione di utilità è monotona crescente possiamo sostituire il segno di uguaglianza al vincolo di disuguaglianza $p'x \leq W$ ottenendo in questo modo le equazioni

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial x} - \lambda p = 0, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = W - p'x = 0. \tag{2.24}$$

Dalla condizione (2.23) si ricava facilmente che

$$\frac{\partial \Upsilon / \partial x_i}{\partial \Upsilon / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j} \tag{2.25}$$

2.5.2 Scelta sotto incertezza

Nella realtà ci sono situazioni in cui è necessario effettuare delle scelte sotto condizione di incertezza. Ad esempio, un investitore che deve decidere oggi come investire il proprio patrimonio non sa come evolveranno i prezzi dei singoli titoli ed il reddito che verrà versato. L'investitore dovrà informarsi sulle caratteristiche di rischio e le prospettive di rendimento dei titoli su cui desidera investire in maniera tale da poterne valutare la convenienza.

L'obiettivo di questa sezione è quello di estendere il discorso presentato nei paragrafi precedenti in maniera da coprire situazioni di incertezza riguardo alle conseguenze delle decisioni prese. La scelta che un individuo dovrà compiere è definita rispetto a delle "lotterie". Una lotteria è descritta da un vettore di payoff $(x_1, \ldots, x_m)$ con le relative probabilità $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$. In questo caso x_i rappresenta l'$i-$esimo paniere che la lotterie potrebbe distribuire e π_i corrisponde alla propabilità di ottenere il paniere i. I precdenti assiomi $A1 - A4$ sono

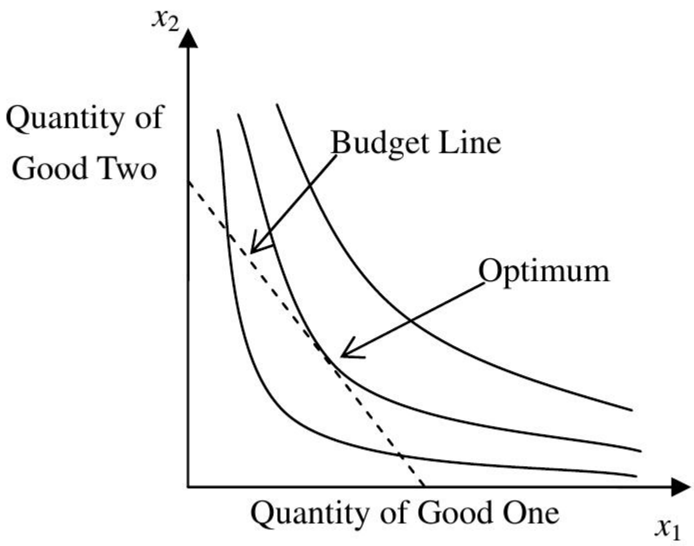

Figura 2.2: Soluzione grafica al problema di massimizzazione

sempre validi e definiscono le preferenze sui singoli panieri presenti nelle lotterie. Assumiamo inoltre che le preferenze dell'individuo siano tali per cui esiste un preordinamento totale sull'insieme delle lotterie e che questo preordinamento soddisfi i seguenti ulteriori assiomi:

A1 Completezza: per qualsiasi coppia L_1, L_2 di lotterie vale che $L_1 \succeq L_2$ oppure $L_2 \succeq L_1$. Le relazioni di preferenza stretta $\succ$ e di indifferenza $\sim$ sono definite in maniera analoga al caso dei semplici panieri.

A2 Riflessività: data una qualsiasi lotteria L vale $L \succeq L$.

A3 Transitività: se $L_1 \succeq L_2$ e $L_2 \succeq L_3$ allora $L_1 \succeq L_3$.

Gli assiomi A1-A3 sono equivalenti a quelli visti in precedenza ma si applicano sull'insieme delle lotterie e possiedono la medesima interpretazione. Grazie ad essi è possibile dimostrare che le scelte dell'individuo sono consistenti con l'esistenza di una funzione di utilità ordinale definita su lotterie.

I prossimi tre assiomi sono utili a sviluppare il concetto di scelta tramite la massimizzazione del valore atteso di una funzione di utilità cardinale definita su payoff di panieri.

A5 Indipendenza: siano date le due lotterie $L_1 = \{((x_1, \ldots, x_v, \ldots, x_m), \pi)\}$ e $L_2 = \{((x_1, \ldots, z, \ldots, x_m), \pi)\}$. Se $x_v \sim z$, allora $L_1 \sim L_2$. Facciamo notare che z può essere un paniere o una lotteria. Se z è una lotteria, cioè $z = \{((x_1^z, x_2^z, \ldots, x_n^z), \pi^z)\}$ allora deve valere

$$\begin{aligned} L_1 \sim L_2 \quad \sim \quad & \{(x_1, \ldots, x_{v-1}, x_1^z, \ldots, x_n^z, x_{v+1} \ldots, x_m), \\ & ((\pi_1, \ldots, \pi_{v-1}, \pi_v \pi^z, \pi_{v+1}, \ldots, \pi_m)\}) \end{aligned}$$

Nel precedente assioma A5 l'interpretazione del vettore di propabilità $\pi_v \pi^z$ è importante. Il vettore π^z è da interpretarsi come le probabilità condizionate di ricevere i panieri x^z condizionatamente al fatto che nella lotteria L_1 si sia verificato l'esito v. Il prodotto $\pi_v \pi^z$ corrisponde quindi alle probabilità non condizionate di ricevere i panieri x_i^z in x^z. L'assioma A5 afferma che il meccanismo aleatorio con cui vengono assegnati i premi non ha nessun impatto sulle preferenze individuali. Una lotteria di lotterie o un'unica grande lotteria sono equivalente fin tanto che i panieri e le rispettive probabilità coincidono. Non esistono quindi preferenze rispetto al "gioco" in se o al meccanismo aleatorio che genera incertezza.

A6 Continuità: se $x_1 \succeq x_2 \succeq x_3$, allora esiste una probabilità $\pi \in [0,1]$ tale per cui $x_2 \sim \left\{(x_1, x_3), (\pi_1, 1-\pi_1)'\right\}$. Inoltre la probabilità è unica a meno che $x_1 \sim x_3$.

A7 Dominanza: sia $L_1 \left\{(x_1, x_2), (\pi_1, 1-\pi_1)'\right\}$ e $L_2 \left\{(x_1, x_2), (\pi_2, 1-\pi_2)'\right\}$. Se $x_1 \succ x_2$, allora $L_1 \succ L_2$ se e solo se $\pi_1 > \pi_2$.

Teorema 2. Sotto le ipotesi degli assiomi A1-A7 la scelta effettuata da un individuo che deve scegliere tra due o più lotterie sarà quella con l'utilità attesa più alta. In oltre parole, la scelta massimizza $\sum \pi_i \Psi(x_i)$, dove Ψ è una particolare funzione di utilità cardinale.

La funzione di utilità Ψ appena introdotta è chiamata funzione di utilità di von Neumann-Morgenstern. Essa possiede le caratteristiche di una funzione di utilità ordinale ma, in aggiunta, essa è anche una misura cardinale dell'utilità. In contrapposizione ad una funzione di utilità ordinale, il valore numerico dell'utilità possiede un preciso significato (a meno di un fattore di scala) che va al di là del semplice ordinamento di numeri.

Per vedere quanto appena detto assumiamo l'esistenza di un singolo bene e consideriamo una lotteria che paga 0 o 9 unità del bene in maniera equiprobabile ed una seconda lotteria che paga 4 unità per certo. Sotto la funzione di utilità $\Psi(x) = x$ la prima lotteria possiede un'utilità attesa di 4.5 ed è preferità alla seconda. Ma se applichiamo la trasformazione monotona crescente $h(s) = \sqrt{s}$ a Ψ ecco che l'utilità attesa della prima lotteria scende a 1.5 mentre l'utilità del payoff certo va a 2. Il nuovo ordinamento è però in contraddizione col primo e questo dimostra che arbitrarie trasformazioni monotone di funzioni di utilità cardinali Ψ non mantengono l'ordine sulle lotterie. Per contro è facile verificare che grazie alla proprietà di linearità del valore atteso una qualsiasi trasformazione lineare monotona crescente $h(s) = a + bs$ $(b > 0)$ della funzione di utilità Ψ non modifica l'ordine di preferenza delle lotterie. La funzione di utilità di von Neumann-Morgenstern è dunque univocamente determinata a meno di una trasformazione lineare monotona crescente.

È dunque possibile definire una funzione di utilità ordinale sulle lotterie tramite

$$Q\left[\pi_X\right] = \mathbb{E}\left[\Psi(X)\right] := \int \Psi(x)\pi(x)dx \tag{2.26}$$

Sino ad ora abbiamo misurato gli esiti in termini di panieri di beni di consumo. In finanza si è però soliti misurare gli esiti in termini monetari dove l'utilità esprime il livello di soddisfazione associato ad un particolare livello di denaro (patrimonio).

Esempio 4. Assumiamo che i payoff di una lotteria provengano da una stessa famiglia parametrica di distribuzioni, la distribuzione lognormale (cioè $ln(x)$ è distribuito $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, si veda anche il Capitolo 5.3) ed indichiamo con $\Psi(x) = x^\gamma/\gamma$ la funzione di utilità cardinale del consumatore.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Psi(X)\right] &= \int \frac{x^\gamma}{\gamma} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\left(ln(x)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\gamma} \int exp(\gamma y) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\left(y-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\gamma} \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\left(y-\mu\right)^2 - 2\gamma y\sigma^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\gamma} \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\left(y-\left(\mu+\gamma\sigma^2\right)\right)^2 - \left(\mu+\gamma\sigma^2\right)^2 + \mu^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\gamma} exp\left(\frac{\left(\mu+\gamma\sigma^2\right)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}\right) \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\left(y-\left(\mu+\gamma\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\gamma} exp\left(\frac{\left(\mu+\gamma\sigma^2\right)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\gamma} exp\left(\frac{\mu^2 + 2\mu\gamma\sigma^2 + \gamma^2\sigma^4 - \mu^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{\gamma} exp\left(\mu\gamma + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

La funzione di utilità ordinale Q sull'insieme delle lotterie è allora data da[9]

$$
Q\left[\pi_x\right] = \frac{1}{\gamma} exp\left[\gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\right] := \Upsilon(\mu, \sigma). \tag{2.27}
$$

I parametri μ e σ possono essere ora considerati i "beni". Poiché questa è un'utilità ordinale, è possibile utilizzare quale criterio equivalente per massimizzare l'utilità sulle lotterie la trasformazione monotona

$$
\Phi(\mu, \sigma) := \frac{ln\left[\gamma\Upsilon(\mu, \sigma)\right]}{\gamma} = \mu + \frac{\gamma\sigma^2}{2}. \tag{2.28}
$$

2.5.3 Funzione di utilità quadratica

In questo paragrafo assumiamo che un investitore debba pianificare i propri investimenti sull'arco di un determinato orizzonte temporale T. Supponiamo inoltre che egli abbia una funzione di utilità quadratica definita rispetto al patrimonio di fine periodo notato W_T. Utilizzando il rendimento lordo $Z := W_T/W_0$ possiamo riscrivere $W_T = W_0 Z$. Poiché la funzione di utilità è identificata a meno di una trasformazione lineare monotona crescente, possiamo senza perdita di

[9] Il valore atteso $\mathbb{E}\left[\Psi(X)\right]$diventa

$$
\int \frac{x^\gamma}{\gamma} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\left(ln(x)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) dx
$$

Utilizzando l'integrale per sostituzione, con $y = ln(x)$ e quindi $dy = \frac{1}{x}dx$, otteniamo generalità utilizzare la sua rappresentazione senza la costante in funzione di Z

$$\Psi(Z) = Z - b\frac{Z^2}{2}. \tag{2.29}$$

Calcoliamo ora l'utilità attesa

$$\mathbb{E}\left(\Psi(Z)\right) = \mu_Z - \frac{b}{2}\mathbb{E}\left(Z^2\right) = \mu_Z - \frac{b}{2}\left(\sigma_Z^2 + \mu_Z^2\right). \tag{2.30}$$

È dunque facile notare come per funzioni di utilità quadratiche l'utilità attesa dipenda unicamente dal valore atteso e dalla varianza del rendimento. Se restringiamo il dominio della funzione alla parte in cui è crescente, $\Psi(z)' > 0$, otteniamo la condizione $Z < 1/b$. Per valori di $\mu_z < 1/b$ abbiamo $\partial\mathbb{E}\left(\Psi(Z)\right)/\partial\mu_Z = 1 - b\mu_Z > 0$ e $\partial\mathbb{E}\left(\Psi(Z)\right)/\partial\sigma_z = -b < 0$. La funzione di utilità attesa è quindi crescente rispetto al rendimento atteso e decrescente rispetto alla volatilità (varianza) del rendimento.

2.6 Portafoglio efficiente: concetti generali e definizione

Supponiamo che i rendimenti percentuali r_t dei titoli in portafoglio siano indipendenti ed identicamente distribuiti secondo la legge normale:

$$r_t \sim i.i.d.\ N(e, V).$$

Il rendimento r_{pt} del portafoglio, quale combinazione lineare dei rendimenti dei singoli titoli, sarà pertanto una variabile aleatoria distribuita secondo la legge normale, di valore atteso μ_p e varianza σ_p^2.

Sappiamo inoltre che per caratterizzare una variabile aleatoria normale è necessario e sufficiente specificare il suo valore atteso e la sua varianza. Un investitore avrà dunque quali unici parametri di scelta il valore atteso e la varianza del portafoglio. È quindi ovvio che se i rendimenti sono variabili aleatorie normali, un individuo *razionale* ed *avverso al rischio*[10] preferirà investire in un portafoglio A a bassa volatilità anziché in un portafoglio B di medesimo rendimento atteso ma volatilità superiore[11]. È dunque legittimo chiedersi se, per un fisso rendimento atteso $\mu_p = c$, esiste un portafoglio a varianza minima fra tutti i portafogli di rendimento atteso uguale a c. Un simile portafoglio, se esiste, sarà chiamato portafoglio frontiera ("envelope portfolio").

Tuttavia nulla ci impedisce di ragionare partendo dal rischio associato al portafoglio, identificato da $\sigma_p^2 = d$. In tal caso dovremo chiederci se esiste un portafoglio che massimizza il rendimento atteso fra tutti i portafogli con varianza minore o al massimo uguale a σ_p^2. Un portafoglio del genere, se esiste, è chiamato portafoglio efficiente.

[10] Abbiamo evitato di dare una definizione formale di avversione al rischio. A titolo indicativo e senza pretese di completezza diciamo che un individuo è avverso al rischio ad un determinato livello di patrimonio W se la sua funzione di utilità Ψ soddisfa la condizione $\Psi(W) > \mathbb{E}\left[\Psi\left(W + \tilde{\epsilon}\right)\right]$ per qualsiasi lotteria $\tilde{\epsilon}$ per cui$\mathbb{E}\left(\tilde{\epsilon}\right) = 0$ e la dispersione è positiva.

[11] Quale alternativa alla presente argomentazione abbiamo precedentemente osservato che sotto l'ipotesi di una funzione di utilità quadratica l'utilità attesa è una funzione crescente rispetto al rendimento atteso del portafoglio e decrescente rispetto alla sua varianza (deviazione standard).

Figura 2.3: Portafogli frontiera

Nel definire il portafoglio frontiera ed il portafoglio efficiente abbiamo utilizzato nel nostro ragionamento la varianza del portafoglio. Avremmo potuto fare lo stesso ragionamento in termini della volatilità σ_p del portafoglio e giungere esattamente alla stessa conclusione in quanto le due misure di dispersione sono legate fra loro da una trasformazione monotona crescente: dati due portafogli p_1e p_2:

$$\sigma_{p_1}^2 > \sigma_{p_2}^2 \Longleftrightarrow \sigma_{p_1} > \sigma_{p_2} \ .$$

Capitolo 3

Stima della Matrice delle Varianze e Covarianze

3.1 Introduzione

In questa parte del corso studieremo alcuni modi per stimare la matrice delle varianze e covarianze del vettore aleatorio r di dimensione $N \times 1$ dei rendimenti (logaritmici o percentuali che siano). Una prima condizione necessaria (ma non sufficiente) per ottenere una matrice delle varianze e covarianze stimata *definita positiva* è che il numero di osservazioni nel tempo, n sia almeno uguale o superiore al numero di asset in portafoglio: $n \geq N$. Al fine di eseguire una stima occorre tener conto dei seguenti punti:

1. Definire l'orizzonte del rendimento e la frequenza di osservazione. Normalmente l'orizzonte e la frequenza corrispondono. In caso contrario accertarsi che la frequenza con cui si effettua l'osservazione non sia superiore all'orizzonte per il quale si calcola il rendimento. Un esempio che non pone problemi consiste nel calcolare le varianze e covarianze di rendimenti giornalieri (orizzonte di 1 giorno) utilizzando dati a frequenza giornaliera. Problematico sarebbe invece calcolare varianze e covarianze di rendimenti settimanali osservati a frequenza giornaliera. Come abbiamo già discusso precedentemente, in una situazione simile le osservazioni adiacenti nel tempo sono correlate e questo fatto influenza la stima.

2. Associare un calendario ad ogni serie storica per identificare correttamente le date in cui non ci sono prezzi in quanto la borsa era chiusa. Spesso i fornitori di dati riportano quale valore il prezzo del giorno precedente. Tuttavia questo genera un numero eccessivo di rendimenti nulli che ovviamente può influenzare anche in maniera importante la stima della varianza e delle correlazioni.

3. Decidere un algoritmo per sostituire i valori mancanti nella stima della matrice delle varianze covarianze. Soluzioni possibili sono (lista non esaustiva):

    (a) Prendere il valore del giorno precedente

   (b) Interpolare linearmente i valori mancanti. Questa soluzione è equivalente ad assumere una dinamica dei prezzi di tipo “random walk”.
   (c) Eliminare dal campione le date per cui esiste almeno un valore mancante nella lista degli N prezzi.
   (d) Lasciare i buchi nella serie storica dei prezzi, calcolare i rendimenti e considerare di volta in volta per ciascuna coppia di osservazioni unicamente le date in cui entrambi i rendimenti sono presenti.

4. Verificare che la matrice delle varianze e covarianze stimata, notata $\hat{\Sigma}$, sia una matrice (semi-) definita positiva. In caso contrario applicare una trasformazione che porti $\hat{\Sigma}$ ad essere (semi-) definita positiva. (Vedi discussione in classe ed esempio in R).

3.2 Stima in Excel

Rimandiamo alla discussione in classe.

3.3 Stima in R

Supponiamo che i prezzi azionari siano in una matrice $(n \times N)$ P dove ad ogni colonna corrispondono le osservazioni dei prezzi di una certa azione. I prezzi sono ordinati cronologicamente, partendo dalla data più distante. I rendimenti logaritmici possono essere calcolati nel seguente modo:

1. Calcola il logaritmo dei prezzi

   > lnP <- log(P)

   > nrOss <- nrow(lnP)

2. Calcola i rendimenti storici

   > lnRet <- lnP[-1,]-lnP[-nrOss,]

3. Calcola i rendimenti storici medi

   > lnRetMedio <- mean(lnRet)

4. Calcola la matrice di covarianza

   > V <- cov(lnRet,use="pair")

5. Calcola le volatilità storiche

   > volStoriche <- sqrt(diag(V))

   > names(volStoriche) <- colnames(V)

6. Calcola la matrice di correlazione

   > rho <- cor(lnRet,use="pair")

   O in alternativa potremmo calcolare **rho** nel modo seguente

7. **rho <- diag(1/volStoriche) %*% V %*% diag(1/volStoriche)**

Domanda 5. Spiegate cosa avviene nel punto 7. Suggerimento: confrontate il codice con la formula (2.18).

Come potete vedere il calcolo di tutte queste quantità è estremamente semplice e rapido.

3.4 Applicazione: the Single-Index Model

Nel corso del semestre invernale avete incontrato un modello chiamato "The single-factor model". Evidenzieremo ora alcune proprietà del modello applicandolo a dati svizzeri.

Consideriamo dunque $N = 5$ azioni incluse nello SMI e i cui rendimenti logaritmici[1] sono delle variabili aleatorie notate r_i, $i = 1, \ldots, 5$. Il rendimento dell'indice di mercato, lo SMI nel nostro caso, sarà indicato con r_x. E' ipotizzata una relazione lineare fra r_i e r_x del tipo

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{xt} + \varepsilon_{it} \qquad t = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

Per fisso t possiamo raccogliere i rendimenti delle $N = 5$ azioni nel vettore aleatorio $r_t = (r_{1t}, r_{2t}, \ldots, r_{Nt})'$. Le N equazioni possono essere scritte in forma compatta come

$$r_t = \alpha + \beta r_{xt} + \varepsilon_t \qquad t = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Osservazione 9. La (3.2) è dunque un sistema di $N = 5$ equazioni: benvenuti nel mondo multivariato!

Ipotesi sulla variabile esplicativa (stocastica):

Ipotesi 2. $E(r_{xt}) = \mu_x$

Ipotesi 3. $Var(r_{xt}) = \sigma_x^2 < \infty$.

Ipotesi sugli errori:

Ipotesi 4. $\varepsilon_t \sim i.i.d.\ (0, \Sigma)$.

Ipotesi 5. $Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0$ per $i \neq j$.

Ipotesi sulla relazione tra r_{xt} e gli errori:

Ipotesi 6. $Cov(r_{xt}, \varepsilon_t) = 0$.

Ipotesi 7. Rendimenti a istanti temporali diversi non sono fra loro correlati.

Osservazione 10. È questo un modo compatto di esprimere le N regressioni in un'unico grande modello di regressione. La sua struttura è molto simile a quella solita ma con l'importante differenza che la variabile spiegata è ora un vettore (dobbiamo spiegare N rendimenti!). Automaticamente il vettore di parametri α contiene le N costanti degli N modelli (3.1) di regressione semplice ed ε_t contiene gli N termini d'errore. Le componenti di ε_t non sono fra loro correlate in quanto $cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0$ per $i \neq j$. Tuttavia la loro varianza non è necessariamente uguale, infatti $Var(\varepsilon_{it}) = \sigma_i^2$. Come nella regressione classica gli errori sono *i.i.d.*, quindi *non correlati nel tempo*. Poiché la variabile esplicativa è aleatoria è necessario introdurre l'Ipotesi 7.

[1] In questa sezione parleremo semplicemente di rendimenti intendendo però rendimenti logaritmici.

Esercizio 7. Single-Index Model

1. Si dia dimensione e contenuto di ogni simbolo della (3.2).

2. Si espliciti la struttura della matrice $\Sigma = Var(\varepsilon_t)$ (Ipotesi 4) in funzione dei σ_i^2. Che particolarità presenta Σ? Date infine la dimensione di $Cov(r_{xt}, \varepsilon_t)$.

3. Calcolate $e = E(r_t)$.

4. Calcolate, utilizzando il modello 3.2 e le sue ipotesi, $Var(r_{it})$ e $Cov(r_{it}, r_{jt})$ quando $i \neq j$.

5. Si dia $Var(r_t)$ (la matrice delle varianze e covarianze di r_t, notata V), in funzione di β, σ_x^2 e Σ.

   Il file '**esercizio7.xls**' contiene 158×6 prezzi osservati a frequenza *settimanale*. Le sei serie storiche considerate si riferiscono a $N = 5$ azioni svizzere ed all'indice SMI.

6. Per tutte e sei le serie storiche di prezzi calcolate dapprima i rendimenti ed in seguito il rendimento medio. Utilizzando sempre i rendimenti calcolatene la matrice di covarianza, facendo in modo di lasciare quale ultima serie l'indice SMI. Della matrice di covarianza appena calcolata evidenziate in rosso la sottomatrice della covarianza stimata di r_t, denotata $\widehat{V}_{dati}$.

   Le 5 equazioni stimabili avranno tutte forma

   $$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{x,t} + \varepsilon_{i,t} \ , \ t = 1, \ldots, 157$$

7. Utilizzando esclusivamente i risultati del punto precedente (dunque senza eseguire la regressione) calcolate per ciascuna equazione le stime di α_i, β_i ed il vettore dei residui stimati.

   Suggerimento: Nella parte comune quando abbiamo trattato la regressione stocastica abbiamo visto che i coefficienti stimati di una regressione semplice (costante più una sola variabile esplicativa) sono funzioni delle varianze e covarianze stimate. Adattate questo risultato al caso in esame.

8. Calcolate per ogni equazione la varianza stimata di ε_{it}, notata $\widehat{\sigma}_i^2$.

9. Proponete $\widehat{\Sigma}$, lo stimatore della matrice Σ (prendete spunto dal punto 2).

10. Utilizzando $\widehat{\beta}$, $\widehat{\sigma}_x^2$ e $\widehat{\Sigma}$ calcolate $\widehat{V}$ (cf. punto 5). Confrontate poi $\widehat{V}$ con $\widehat{V}_{dati}$. Notate delle differenze? Se sì, come le spiegate?

$\square$

Capitolo 4

Calculating Efficient Portfolios When are No Short-Sale Restrictions

4.1 Notazione e definizioni preliminari

In questo capitolo utilizzeremo la notazione introdotta precedentemente. Ci troviamo al tempo t e dobbiamo costruire un portafoglio la cui struttura verrà mantenuta sino al periodo successivo, ovvero $t+1$. Poiché il modello è statico, evitiamo di apporre l'indice temporale alle variabili: r_p indicherà quindi il rendimento $r_{p(t+1)}$ del portafoglio, r sarà il vettore dei rendimenti azionari e così via. Assumiamo che

- esistano $N \geq 2$ asset rischiosi il cui vettore dei rendimenti attesi è notato $e := E(r)$,
- il rendimento r_i di un qualsiasi asset non possa essere espresso quale combinazione lineare dei rendimenti dei restanti $N-1$ asset, il che implica una matrice V delle varianze e covarianze dei rendimenti non singolare,
- ci siano almeno due asset di rendimento atteso diverso,
- sia ammesso vendere allo scoperto (short selling).

4.2 La matematica della frontiera efficiente

Sappiamo che un portafoglio p si trova sulla frontiera se ha varianza minima rispetto a tutti i portafogli con medesimo rendimento. Matematicamente avremo che un portafoglio p è sulla frontiera se e solo se w_p, il vettore degli N pesi (weights) di p, è soluzione del seguente problema di minimizzazione quadratica:

$$\min_{\{w\}} \frac{1}{2} w'Vw$$

sotto i vincoli

$$\begin{aligned} w'e &= E[r_p] \\ w'S &= 1 \end{aligned}$$

Osservazione 11. Grazie all'ipotesi che gli N asset non hanno tutti il medesimo rendimento atteso ed alla possibilità di vendere allo scoperto è possibile costruire portafogli aventi un qualsiasi rendimento atteso. Da ciò segue che ci sarà sempre almeno un portafoglio che soddisfa il primo vincolo e quindi, per qualsiasi rendimento atteso desiderato, il problema ha sempre soluzione. Ovviamente se ulteriori vincoli dovessero essere aggiunti ai due precedenti l'esistenza di una soluzione non sarebbe più garantita.

4.2.1 La soluzione

Formando il lagrangiano $\mathcal{L}(w, \lambda, \gamma)$, w_p è soluzione di

$$\min_{\{w,\lambda,\gamma\}} \mathcal{L} = \frac{1}{2} w'Vw + \lambda(E[r_p] - w'e) + \gamma(1 - w'S)$$

ovvero

$$\frac{\partial L}{\partial w} = Vw_p - \lambda e - \gamma S = \underset{(N\times 1)}{0} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E[r_p] - w_p'e = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - w_p'S = 0 \tag{4.3}$$

Poiché V è definita positiva, le condizioni di primo ordine (4.1), (4.2) e (4.3) sono necessarie e sufficienti per un mimimo globale. Risolvendo la (4.1) rispetto a w_p si ottiene

$$w_p = \lambda V^{-1}e + \gamma V^{-1}S \tag{4.4}$$

e premoltiplicando (4.4) per e' ed utilizzando la (4.2):

$$E[r_p] = \lambda e'V^{-1}e + \gamma e'V^{-1}S \tag{4.5}$$

Premoltiplicando sempre la (4.4) per S' ed utilizzando (4.1):

$$1 = \lambda S'V^{-1}e + \gamma S'V^{-1}S \tag{4.6}$$

Grazie a (4.5) e (4.6) abbiamo 2 equazioni in 2 incognite, λ e γ. Risolvendo

$$\lambda = \frac{CE[r_p] - A}{D} \tag{4.7}$$

$$\gamma = \frac{B - AE[r_p]}{D} \tag{4.8}$$

dove

$$
\begin{aligned}
A &= S'V^{-1}e = e'V^{-1}S \\
B &= e'V^{-1}e \\
C &= S'V^{-1}S \\
D &= BC - A^2
\end{aligned}
$$

Poiché l'inversa di una matrice definita positiva è definita positiva, B e C sono entrambi strettamente maggiori di 0. Essendo

$$0 \stackrel{!}{<} (Ae - BS)'V^{-1}(Ae - BS) = \underset{>0}{B}(BC - A^2)$$

segue che

$$(BC - A^2) > 0$$

e quindi $D > 0$. Sostituiamo ora λ e γ in (4.4) così da ottenere

$$w_p = g + hE[r_p] \tag{4.9}$$

dove

$$
\begin{aligned}
\underset{(N\times 1)}{g} &= \frac{1}{D}\left[BV^{-1}S - AV^{-1}e\right] \\
\underset{(N\times 1)}{h} &= \frac{1}{D}\left[CV^{-1}e - AV^{-1}S\right]
\end{aligned}
$$

4.2.2 Proprietà della frontiera

Le equazioni (4.1), (4.2) e (4.3) definiscono delle condizioni necessarie e sufficienti affinché la soluzione w_p sia sulla frontiera (tuttavia non necessariamente sulla parte efficiente). Quindi se w_p si trova sulla frontiera, esso avrà una rappresentazione in termini della (4.9), cioé in termini di g e h . Per contro, se w_p è rappresentabile tramite la (4.9), w_p soddisfa le (4.1), (4.2) e (4.3) e quindi esso è sulla frontiera.

L'interpretazione dei portafogli associati al vettore di pesi g e $g + h$ è la seguente:

- g corrisponde al vettore di pesi del portafoglio frontiera avente 0 "expected return". Infatti
$$w_p = g + h0 = g.$$
- $g+h$ corrisponde al vettore di pesi del portafoglio frontiera con rendimento atteso 1
$$w_p = g + h1 = g + h.$$

Teorema 3. Qualsiasi portafoglio situato sulla frontiera è generato tramite combinazione lineare dei due portafogli di pesi g e $g + h$.

Dimostrazione. Sia r^* un qualsiasi rendimento e w_{q^*} il portafoglio frontiera di rendimento atteso $E[r_{q^*}] = r^*$. La formula (4.9) afferma che tale portafoglio avrà pesi uguali a

$$w_{q^*} = g + hE[r_{q^*}].$$

Consideriamo la combinazione lineare dei portafogli g e $g + h$ con pesi $\{1 - E[r_{q^*}], E[r_{q^*}]\}$:

$$(1 - E[r_{q^*}])\, g + E[r_{q^*}]\,(g + h) = g + hE[r_{q^*}] = w_{q^*}.$$

Tale combinazione lineare genera esattamente il portafoglio q^*! Poiché r^* era un qualsiasi rendimento il teorema è dimostrato. $\square$

Osservazione 12. Notiamo che la precedente argomentazione fa indirettamente uso del fatto che i due portafogli frontiera g e $g + h$ hanno rendimento atteso diverso, 0 e 1. È possibile generalizzare ulteriormente il teorema precedente. È infatti possibile dimostrare che l'intera frontiera può essere generata a partire da due qualsiasi portafogli frontiera distinti[1], non necessariamente g e $g + h$.

Dimostrazione. Prendiamo due portafogli frontiera distinti, notati rispettivamente p_1 e p_2, di rendimento atteso $E[r_{p_1}]$, $E[r_{p_2}]$ e pesi $w_{p_1} = g + hE[r_{p_1}]$, $w_{p_2} = g + hE[r_{p_2}]$. Sia ora p un qualsiasi portafoglio frontiera di rendimento atteso $E[r_p]$. Poiché $E[r_{p_1}] \neq E[r_{p_2}]$ l'equazione in α

$$E[r_p] = \alpha E[r_{p_1}] + (1 - \alpha)E[r_{p_2}] \tag{4.10}$$

ha quale unica soluzione

$$\alpha^* = \frac{E[r_p] - E[r_{p_2}]}{E[r_{p_1}] - E[r_{p_2}]}.$$

Consideriamo ora la combinazione lineare dei portafogli p_1 e p_2 di pesi $\{\alpha^*, 1 - \alpha^*\}$. Avremo

$$\begin{aligned}
\alpha^* w_{p_1} + (1 - \alpha^*)w_{p_2} &= \alpha^*\,(g + hE[r_{p_1}]) + (1 - \alpha^*)\,(g + hE[r_{p_2}]) \\
&= g + h\,(\alpha^* E[r_{p_1}] + (1 - \alpha^*)E[r_{p_2}]) \\
&= g + hE[r_p] = w_p.
\end{aligned}$$

Poiché il portafoglio p era un qualsiasi portafoglio frontiera , abbiamo dimostrato che anche con p_1 e p_2 è possibile costruire l'intera frontiera. $\square$

4.2.3 La covarianza fra portafogli frontiera

La covarianza fra due portafogli frontiera qualsiasi p e q è data da

$$Cov(r_p, r_q) = w_p' V w_q = \frac{C}{D}\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)\left(E[r_q] - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C} \tag{4.11}$$

La formula (4.11) ci permette di concludere che la covarianza fra due portafogli efficienti è sempre positiva.

Domanda 6. Spiegate perché la covarianza fra due portafogli efficienti è sempre positiva.

[1] E quindi di valore atteso diverso fra loro!

Quando $p = q$ la precedente formula si riduce alla varianza di r_p che potrà essere scritta come

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \frac{C}{D}\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C} \\
&= \frac{1}{D}\left(C(E[r_p])^2 - 2AE[r_p] + \frac{A^2 + D}{C}\right) \\
&= \frac{1}{D}\big(C(E[r_p])^2 - 2AE[r_p] + B\big)
\end{aligned}$$

che è una parabola nello spazio $\big(\sigma^2, E[r]\big)$.

Grafico

oppure un'iperbole di equazione

$$\frac{\sigma_p^2}{1/C} - \frac{(E[r_p] - A/C)^2}{D/C^2} = 1 \tag{4.12}$$

nello spazio $(\sigma, E[r])$.

Grafico

Calcoliamo ora il differenziale totale della funzione definita implicitamente dalla (4.12):

$$f(x, y) = 1$$

dove $x = \sigma_p,\ y = E[r_p]$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{1/C} - \frac{\left(y - \frac{A}{C}\right)^2}{D/C^2} &= 1 \\
2Cx\ dx - \frac{C^2}{D} 2(y - \frac{A}{C})\ dy &= 0
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Dx}{Cy - A} \Rightarrow \frac{dE[r_p]}{d\sigma_p} = \frac{D\sigma_p}{CE[r_p] - A} \tag{4.13}$$

Sapendo che la retta passa per il punto p di coordinate $(\sigma_p, E[r_p])$ possiamo ora calcolare il coefficiente a della tangente $y = a + bx$ alla frontiera nel punto p:

$$\begin{aligned}
a &= E[r_p] - b\sigma_p \underset{(4.13)}{=} E[r_p] - \frac{D\sigma_p}{CE[r_p] - A}\sigma_p \\
&= E[r_p] - \frac{D\sigma_p^2}{CE[r_p] - A} \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a σ_p^2 nella (4.12) e sostituendo nella (4.14) otteniamo:

$$\begin{aligned}
a &= E[r_p] - \frac{D\sigma_p^2}{CE[r_p] - A} \\
&= E[r_p] - \frac{\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)^2 D}{\frac{D}{C^2} C\left(CE[r_p] - A\right)} - \frac{D}{C}\frac{1}{\left(E[r_p]C - A\right)} \\
&= E[r_p] - \frac{\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)^2 D}{C^2\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)\frac{D}{C^2}} - \frac{D}{C^2}\frac{1}{\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)} \\
&= E[r_p] - \left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right) - \frac{D}{C^2}\frac{1}{\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)} \\
&= \frac{A}{C} - \frac{D}{C^2}\frac{1}{\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)}
\end{aligned}$$

La retta tangente alla frontiera nel punto $(\sigma_p, E[r_p])$ avrà dunque equazione

$$E[r] = \frac{A}{C} - \frac{D}{C^2}\frac{1}{\left(E[r_p] - \frac{A}{C}\right)} + \frac{D\sigma_p}{CE[r_p] - A}\ \sigma\ . \tag{4.15}$$

4.2.4 Il portafoglio a varianza minima

Il portafoglio a varianza minima, notato *mvp*, di valore atteso $\frac{A}{C}$ e varianza $\frac{1}{C}$ ha la seguente proprietà:

$$Cov(r_q, r_{mvp}) = Var(r_{mvp}) \tag{4.16}$$

per ogni portafoglio q, non necessariamente sulla frontiera. Vogliamo dimostrare questo risultato.

Esercizio 8. Proprietà del minimum-variance-portfolio (mvp)

Sia dunque q un qualsiasi portafoglio. Consideriamo un portafoglio p definito tramite una combinazione lineare di q e mvp con pesi a e $(1-a)$.

1. Si calcoli la varianza di p in funzione del peso a, σ_q^2, σ_{mvp}^2 e $Cov(r_q, r_{mvp})$.

2. Si imposti il problema di minimizzazione della varianza di p in funzione del parametro a. Si dia la condizione di primo ordine, notata $(c1)$, e si verifichi che un'eventuale soluzione è un punto di minimo.

3. Ovviamente, essendo mvp il portafoglio a varianza minima, esso è anche soluzione del precedente problema di minimizzazione e quindi avremo che $p = mvp$. Quanto vale dunque il parametro a?

4. Inserite il valore di a dedotto al punto precedente nell'equazione $(c1)$ e dimostrate la (4.16).

$\square$

4.2.5 La frontiera efficiente

I portafogli frontiera di rendimento atteso superiore ad $\frac{A}{C}$ (rendimento atteso del mvp) sono chiamati portafogli efficienti. Abbiamo visto in precedenza che la combinazione lineare di due portafogli frontiera è ancora un portafoglio frontiera. Questa proprietà è generalizzabile alla combinazione lineare di un numero qualsiasi di portafogli frontiera.

Proprietà 1. Qualsiasi combinazone lineare di portafogli frontiera è un portafoglio frontiera.

Proprietà 2. Combinazioni lineari convesse (cioè $\alpha_i \geq 0$ e $\sum \alpha_i = 1$) di portafogli efficienti sono portafogli efficienti. Da questa proprietà segue che l'insieme dei portafogli efficienti è un insieme convesso.

Esercizio 9. Dimostrazione della Proprietà 1
Siano w_i, $i = 1, 2, \ldots m$, m portafogli frontiera ed α_i, $i = 1, 2, \ldots m$, m numeri reali tali che $\sum \alpha_i = 1$. Si dia in funzione dei rendimenti attesi dei portafogli w_i, notati $E(\widetilde{r}_i)$, $i = 1, 2, \ldots m$, il rendimento atteso del portafoglio p definito da $w_p = \sum \alpha_i w_i$ e si dimostri che p è un portafoglio frontiera.
Suggerimento: cercate di dimostrare che w_p è esprimibile nella solita forma $g + hE(\widetilde{r}_p)$.

Esercizio 10. Dimostrazione della Proprietà 2
Siano ora w_i, $i = 1, 2, \ldots m$, m portafogli efficienti ed $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots m$, m numeri reali tali che la loro somma $\sum \alpha_i = 1$. Dimostrate che se $w_p = \sum \alpha_i w_i$, allora p è un portafoglio efficiente.
Suggerimento: dovete dimostrare che

1. p è un portafoglio frontiera,

2. $E(\widetilde{r}_p) > \frac{A}{C}$.

4.2.6 Portafogli frontiera a 0 covarianza

Una proprietà importante della frontiera è che per qualsiasi portafoglio frontiera p diverso da mvp esite un portafoglio frontiera, notato $zc(p)$, tale che $Cov(r_p, r_{zc(p)}) = 0$. Utilizzando l'equazione caratterizzante la covarianza fra due portafogli frontiera è possibile determinare il rendimento atteso del portafoglio $zc(p)$ semplicemente eguagliando la $Cov(r_p, r_{zc(p)})$ a 0.

Nel paragrafo 4.2.3 abbiamo calcolato la tangente alla frontiera nel punto $(\sigma_p, E[r_p])$:

$$E[r] = \underbrace{E[r_p] - \frac{D\sigma_p^2}{CE[r_p] - A}}_{a} + \underbrace{\frac{D\sigma_p}{CE[r_p] - A}}_{b}\sigma.$$

È possibile dimostrare che il coefficiente a è uguale al rendimento atteso del portafoglio $zc(p)$. Questo implica che il rendimento del portafoglio a covarianza 0 di un portafoglio p può essere trovato graficamente trovando il punto di intersezione fra l'asse delle ordinate e la retta tangente alla frontiera nel punto $(\sigma_p, E[r_p])$.

4.2.7 La security market line

Vogliamo ora caratterizzare la relazione fra il rendimento atteso di un qualsiasi portafoglio frontiera diverso da mvp ed il rendimento di un qualsiasi altro portafoglio (non necessariamente sulla frontiera quindi). Sia dunque $p \neq mvp$ un portafoglio frontiera. Utilizzando la (4.4) otteniamo

$$\begin{aligned} Cov(r_p, r_q) &= w_p' V w_q = \lambda e' V^{-1} V w_q + \gamma S' V^{-1} V w_q \\ &= \lambda E[r_q] + \gamma \end{aligned}$$

Sostituendo la (4.7) e (4.8) a λ e γ:

$$E[r_q] = \frac{AE[r_p] - B}{CE[r_p] - A} + Cov(r_p, r_q)\frac{D}{CE[r_p] - A}$$

e tramite l'equazione (4.12)

$$\begin{aligned} E[r_q] &= \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{E[r_p] - A/C} + \underbrace{\frac{Cov(r_p, r_q)}{\sigma_p^2}}_{\beta_{q,p}} \underbrace{\left[\frac{1}{C} + \frac{(E[r_p] - A/C)^2}{D/C}\right]}_{\text{tramite (4.12) } \sigma_p^2} \frac{D}{CE[r_p] - A} \\ &= E[r_{zc(p)}] + \beta_{q,p}\left(E[r_p] - A/C + \frac{D/C^2}{E[r_p] - A/C}\right) \\ &= E[r_{zc(p)}] + \beta_{q,p}\left(E[r_p] - E[r_{zc(p)}]\right) \qquad (4.17) \\ &= \beta_{q,p} E[r_p] + (1 - \beta_{q,p}) E[r_{zc(p)}] \qquad (4.18) \end{aligned}$$

Il rendimento atteso di un qualsiasi portafoglio q può quindi scriversi come una combinazione lineare dei rendimenti attesi del portafoglio p e del suo "zero covariance" $zc(p)$ portafoglio con pesi uguali a $\beta_{q,p}$ e rispettivamente $(1 - \beta_{q,p})$.

Notiamo che $zc(zc(p)) = p$ (il portafoglio "zero covariance" del portafoglio $zc(p)$ è p) per qualsiasi portafoglio frontiera $p \neq mvp$. Questo ci permette di ripetere[2] l'argomentazione invertendo i ruoli fra p e $zc(p)$, cioè prendendo quale

[2]Tuttavia deve valere $\sigma^2_{zc(p)} > 0$.

portafoglio frontiera iniziale $zc(p)$ ed ottenendo per analogia[3]

$$E[r_q] = \beta_{q,zc(p)} E[r_{zc(p)}] + (1 - \beta_{q,zc(p)}) E[r_p] \tag{4.19}$$

Poiché $E[r_{zc(p)}] \neq E[r_p]$, l'equazione

$$E[r_q] = \alpha E[r_{zc(p)}] + (1 - \alpha) E[r_p]$$

possiede un'unica soluzione che notiamo α^*. Confrontanto i pesi di $E[r_{zc(p)}]$ nell'equazione (4.18) e (4.19) otteniamo la seguente identità:

$$(1 - \beta_{q,p}) = \alpha^* = \beta_{q,zc(p)}.$$

Quindi, riprendendo l'equazione (4.18) essa può essere riscritta come

$$E[r_q] = \beta_{q,p} E[r_p] + \beta_{q,zc(p)} E[r_{zc(p)}] \tag{4.20}$$

Le relazioni (4.18), (4.19) e (4.20) sono tutte equivalenti fra loro.

4.2.8 Asset non rischioso

Assumiamo ora che esista un asset non rischioso il cui rendimento è certo. Notiamo con p un portafoglio frontiera degli $N + 1$ asset e con $\underset{N\times 1}{w_p}$ il vettore dei pesi di p negli investimenti a rischio. w_p sarà dunque la soluzione al seguente problema di minimizzazione vincolato:

$$\min \frac{1}{2} w' V w$$

sotto i vincoli

$$w'e + (1 - w'S) r_f = E[r_p] \tag{4.21}$$

Come in precedenza formiamo il lagrangiano $\mathcal{L}$: w_p sarà soluzione del seguente problema

$$\min_{\{w,\lambda\}} \frac{1}{2} w' V w + \lambda \left(E[r_p] - w'e - (1 - w'S) r_f \right)$$

Le condizioni di primo ordine saranno

$$\begin{aligned} V w_p &= \lambda (e - r_f S) && (4.22) \\ r_f + w_p'(e - r_f S) &= E[r_p] && (4.23) \\ \text{da cui} \qquad w_p &= \lambda V^{-1} (e - r_f S) && (4.24) \end{aligned}$$

Premoltiplicando (4.24) per $(e - S r_f)'$ e risolvendo su λ

$$\lambda = \left[\underbrace{(e - r_f S)' V^{-1} (e - r_f S)}_{H} \right]^{-1} (E[r_p] - r_f)$$

da cui segue che

$$w_p = V^{-1} (e - r_f S) \frac{E[r_p] - r_f}{H} \tag{4.25}$$

[3] Per un qualsiasi portafoglio frontiera k vale: $E[\widetilde{r}_q] = \beta_{q,k} E[\widetilde{r}_k] + (1 - \beta_{q,k}) E[\widetilde{r}_{zc(k)}]$.

La varianza di r_p:

$$\sigma_p^2 = w_p' V w_p = \frac{(E[r_p] - r_f)^2}{H} \tag{4.26}$$

o equivalentemente

$$\sigma_p = \begin{cases} \frac{E[r_p]-r_f}{\sqrt{H}} & \text{se } E[r_p] \geq r_f \\ -\frac{E[r_p]-r_f}{\sqrt{H}} & \text{se } E[r_p] < r_f \end{cases}$$

Grafico

La frontiera di tutti gli asset è composta da due semirette originate in $(0, r_f)$ con pendenza $\sqrt{H}$ e $-\sqrt{H}$. Tre i casi possibili:

1. $r_f < \frac{A}{C}$

   T è il punto di tangenza fra la semiretta $r_f + \sqrt{H}\sigma$ e la frontiera.

   - Portafogli situati sul segmento $\overline{r_f T}$ consistono in una combinazione lineare convessa tra r_f ed il portafoglio T.
   - Portafogli situati sulla parte $\overline{r_f T}^c$ utilizzano una posizione negativa (short selling) di risk free.
   - Posizioni sulla semiretta $r_f - \sqrt{H}\sigma$ sono costituite tramite posizioni negative (short) in T.

2. $r_f > \frac{A}{C}$

   Situazione "simmetrica" rispetto alla precedente.

3. $r_f = \frac{A}{C}$

   In questo caso

$$\begin{aligned} H &= (e - Sr_f)'V^{-1}(e - Sr_f) \\ &= e'V^{-1}e - r_f e'V^{-1}S - r_f S'V^{-1}e + r_f^2 S'V^{-1}S \\ &= B - 2r_f A + r_f^2 C \\ &= \frac{BC - A^2}{C} = \frac{D}{C} > 0 \end{aligned}$$

dove A, B e C sono definiti come in precedenza. Otteniamo dunque che $H = \frac{D}{C}$ e
$$E[r_p] = \frac{A}{C} \pm \sqrt{D/C}\sigma.$$
Ma questi sono esattamente gli asintoti della parabola definita nel piano $(\sigma, E[r])$ già incontrati nel paragrafi precedenti. Abbiamo quindi la seguente situazione:

Grafico

La frontiera di tutti gli asset non è generata da una combinazione tra il riskless asset ed un portafoglio di asset rischiosi. Infatti, sostituendo nella (4.25) $r_f = \frac{A}{C}$ e premoltiplicando w_p per S'

$$\begin{aligned} S'w_p &= S'V^{-1}(e - \frac{A}{C}S)\frac{E[r_p] - r_f}{H} \\ &= (A - \frac{A}{C}C)\frac{E[r_p] - r_f}{H} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quindi un qualsiasi portafoglio sulla frontiera di tutti gli asset è costruito investendo tutto nel risk free asset e tenendo un cosìddetto "arbitrage portfolio": un portafoglio i cui pesi sommano a zero.

4.2.9 La Security market line rivista

Sia q un qualsiasi portafoglio e w_q i rispettivi pesi delle componenti a rischio. Sia p un portafolio frontiera. Assumiamo che $E[r_p] \neq r_f$. Allora[4]

$$Cov(r_q, r_p) = w_q'Vw_p = \frac{(E[r_q] - r_f)(E[r_p] - r_f)}{H}$$

[4]In quanto per la 4.25 $w_p = V^{-1}(e - r_fS)\frac{E[r_p]-r_f}{H}$ e quindi

$$Cov(r_q, r_p) = w_q'VV^{-1}(e - r_fS)\frac{E[r_p] - r_f}{H}.$$

Terminate utilizzando la 4.21.

Utilizzando ora la (4.26), cioè $\sigma_p^2 = \frac{(E[r_p]-r_f)^2}{H}$ otteniamo

$$\begin{aligned} Cov(r_q, r_p) &= \frac{(E[r_q]-r_f)(E[r_p]-r_f)}{H} \qquad |: \sigma_p^2 \\ \frac{Cov(r_q, r_p)}{\sigma_p^2} &= \frac{(E[r_q]-r_f)}{(E[r_p]-r_f)} \end{aligned}$$

da cui è immediato ottenere

$$E[r_q] = r_f + \beta_{qp}(E[r_p]-r_f) \tag{4.27}$$

Questa relazione è indipendente dal segno di $\frac{A}{C} - r_f$. Inoltre vale la seguente relazione

$$r_q = r_f + \beta_{qp}(r_p - r_f) + \widetilde{\epsilon}_{qp}$$

dove $\widetilde{\epsilon}_{qp} := r_q - r_f - \beta_{qp}(r_p - r_f)$. È immediato verificare che per qualsiasi portafoglio frontiera p diverso r_f vale che $Cov(\widetilde{\epsilon}_{qp}, r_p) = E(\widetilde{\epsilon}_{qp}) = 0$.

4.2.10 CAPM

Vogliamo derivare le conclusioni del Capital Asset Pricing Model che postula una relazione d'equilibrio di tipo lineare fra i rendimenti attesi di mercato. Definiamo il portafoglio di mercato, ovvero l'insieme degli asset trattati in un'economia. Sia W_i il patrimonio dell'$i-$esimo individuo, $i = 1, ..., I$ mentre w_{ij} la percentuale del suo patrimonio investita nel $j-$esimo asset, $j = 1, ..., N$. La sostanza totale nell'economia è dunque

$$W := \sum_{i=1}^{I} W_i$$

Definiamo ora w_j^m come la percentuale del valore dell'asset j sul totale della sostanza W. Esemplificando, supponiamo che gli unici assets siano quelli trattati nell'indice Swiss Market Index[5]. W sarà quindi la capitalizzazione totale dell'indice mentre w_{ubs}^m sarà il valore totale delle azioni *ubs* divise per la capitalizzazione dell'indice. È chiaro che $\sum_j w_j^m = 1$. I pesi w_j^m sono chiamati i pesi del portafoglio di mercato. Affinché il mercato sia in equilibrio dovrà essere

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I} W_i w_{ij}}_{\text{domanda aggregata } j-esimo \text{ asset}} = \underbrace{w_j^m W}_{\text{capitaliz. } j-esimo \text{ asset}} \tag{4.28}$$

Dividendo entrambi i lati per W otteniamo

$$\sum_{i=1}^{I} \underbrace{\frac{W_i}{W}}_{c_i \,=\, \%\ \text{sostanza i-esimo individuo}} w_{ij} = w_j^m \tag{4.29}$$

Notiamo che $c_i = \frac{W_i}{W} \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{I} c_i = 1$. Inoltre, poiché questa relazione vale per tutti gli asset j, essa può essere riformulata in termini vettoriali. Definendo

[5] Si veda a tal proposito quanto discusso nell'Esercizio 2 .

w_i e w^m rispettivamente come il vettore dei pesi del portafoglio dell'$i-$esimo individuo ed il vettore dei pesi del portafoglio di mercato, la condizione d'equilibrio 4.29 può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{i=1}^{I} \underset{(1\times1)}{c_i} \underset{(N\times1)}{w_i} = \underset{(N\times1)}{w_m} . \tag{4.30}$$

Quest'ultima equazione esprime la condizione d'equilibrio fra domanda ed offerta di titoli ed afferma che, in equilibrio, il portafoglio di mercato (lato destro della 4.30) è una combinazione lineare convessa dei portafogli dei singoli individui. Ora, se ogni individuo ha un portafoglio efficiente, per le proprietà viste negli esercizi 9 e 10 anche il portafoglio di mercato sarà sulla frontiera nonché efficiente. In particolare, esso sarà il portafoglio di tangenza T visto nel paragrafo precedente.

Grafico

Capitolo 5

The Lognormal Distribution

5.1 Introduzione: il cammino dei prezzi azionari

In questo capitolo ci proponiamo di modellare la dinamica nel tempo del prezzo di un'azione. È evidente che il prezzo futuro di un'azione (fra un giorno, un mese, un anno, o anche solo fra un minuto) è aleatorio, esso non è determinabile con assoluta certezza. Il modello quindi non potrà essere deterministico.

Quali sono le proprietà desiderabili per un modello aleatorio del prezzo di un'azione? Se utilizzassimo un modello di probabilità, quali caratteristiche dovrebbe avere la distribuzione del prezzo al tempo t? Inoltre, come evolve il prezzo nel tempo e quindi come cambia la sua distribuzione?

Analizzando i prezzi osservabili sui vari mercati finanziari possiamo identificare alcune caratteristiche che li contraddistinguono e che il modello probabilistico dovrebbe riuscire a descrivere.

1. I prezzi cambiano con continuità: tanto più piccolo è l'arco di tempo fra un'osservazione e l'altra e tanto minore sarà la variazione nel prezzo dell'azione.

2. Il prezzo non è mai negativo (può essere 0 in caso di fallimento della ditta ma in tal caso non è più osservato).

3. Il rendimento atteso di un investimento azionario tende a crescere tanto più il titolo è tenuto in portafoglio.

4. L'incertezza associata al rendimento di un investimento azionario tende a crescere all'aumentare della durata dell'investimento stesso. La varianza del prezzo aumenta nel tempo!

Possiamo disegnare il grafico a frequenza giornaliera dei prezzi di ADECCO. Questo grafico è anche chiamato "the stock price path". Esso rappresenta il cammino effettivamente realizzato fra gli infiniti cammini che, ex-ante, avrebbero potuto realizzarsi.

È bene osservare quanto segue: in realtà quando costruiamo il grafico dei prezzi di una qualsiasi azione noi stiamo rappresentando le realizzazioni di n variabili aleatorie, dove n rappresenta il numero di giorni osservati. Infatti, ad ogni data t noi osserviamo la realizzazione di P_t, la cui distribuzione non necessariamente sarà uguale alla distribuzione di P_{t-1} o P_{t+1}. A dipendenza del modello probabilistico utilizzato per descrivere la dinamica temporale dei prezzi le distribuzioni di P_t e P_{t+1} potranno variare. Inoltre, talvolta è necessario calcolare la distribuzione congiunta di due o più prezzi a date differenti, come ad esempio P_t e P_{t+20}.

Supponiamo di avere a disposizione un modello probabilistico ed essere in grado di simulare i cammini del processo dei prezzi $\{P_t\}_{t=1}^n$. Potremmo allora, quale esercizio, simulare $M = 1000$ cammini $\{P_t^s\}_{t=1}^n$, $s = 1, ..., M$ indipendenti l'uno dall'altro ed in seguito, per una qualsiasi data $\widetilde{t}$, stimare valore atteso e varianza di $P_{\widetilde{t}}$ utilizzando le M realizzazioni simulate disponibili per quella data. Dalla teoria asintotica sappiamo che al crescere di M la media $\frac{1}{M}\sum_{s=1}^M P_{\widetilde{t}}^s$ convergerà ad $E(P_{\widetilde{t}})$ e la varianza stimata convergerà alla varianza $Var(P_{\widetilde{t}})$.

In realtà l'economia genera un solo ed unico cammino, cioè $M = 1$. La vita non permette di tornare indietro nel tempo e ripetere l'esperimento. Per tale motivo non è possibile stimare il valore atteso del prezzo o la volatilità del rendimento di una qualsiasi data $\widetilde{t}$ facendo una media di osservazioni: alla data $\widetilde{t}$ abbiamo un'unica osservazione! Sarà necessario appoggiarsi alle proprietà del modello di probabilità che noi supponiamo generi le osservazioni. In un primo passo, utilizzando i dati a disposizione, si stimeranno i parametri del modello dai quali, in una seconda fase, si dedurranno le informazioni cercate.

5.2 Flashback: Funzione di ripartizione, di densità, quantile

A una variabile aleatoria X (continua o dicreta) è sempre associata un distribuzione (o legge) di probabilità P, ovvero una funzione che assegna la probabilità che X assuma singoli valori (nel caso discreto) oppure che cada in singoli intervalli di valori (nel caso continuo).

Esempio 5. La legge di probabilità di Poisson si indica con $P(\lambda)$ e per qualsiasi evento $A \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$ è data dall'espressione:

$$P_X(A) = \sum_{k \in A} \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!} \ .$$

□

Tramite la legge di probabilità P possiamo definire la cosiddetta funzione di ripartizione, notata F_X.

Definizione 6. La funzione di ripartizione della variabile aleatoria X è la funzione

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = P\left(X \in (-\infty, x]\right) \ .$$

Osservazione 13. Quando è chiaro a quale variabile aleatoria ci si riferisce si può semplicemente scrivere F anziché F_X.

Definizione 7. Una funzione di ripartizione F è detta assolutamente continua se esite una funzione non negativa f tale che

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \ .$$

La funzione f è chiamata funzione di densità di F.

Esempio 6. Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. La funzione di densità è uguale a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \ .$$

□

Variabili aleatorie aventi una funzione di ripartizione assolutamente continua presentano alcuni vantaggi pratici per quanto riguarda il calcolo delle probabilità. Infatti, dato un qualsiasi intervallo $A = [a, b]$

$$P\left(X \in A\right) = \int_{a}^{b} f(y)dy \ .$$

Notate che non sempre è possibile ottenere una soluzione in forma analitica dell'integrale precedente. In taluni casi, come ad esempio con la distribuzione normale, il valore dell'integrale deve essere approssimato tramite procedure numeriche.

Definizione 8. Per semplicità consideriamo variabili aleatore le cui funzioni di ripartizione F sono assolutamente continue e *strettamente* crescenti[1]. Per tali *V.A.* la funzione quantile è definita per $\alpha \in (0, 1)$ come

$$q_\alpha = F^{-1}(\alpha) \ .$$

Data la variabile aleatoria X varrà quindi che q_α soddisfa la seguente identità:

$$P(X \leq q_\alpha) = \alpha$$

Esempio 7. La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X distribuita secondo la legge esponenziale è uguale a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \end{cases}$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro detto intensità. La funzione quantile è uguale a

$$q_\alpha = F^{-1}(\alpha) = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda} \ .$$

□

[1]Se F possiede dei punti di discontinuità o non è strettamente crescente occorre modificare la definizione di quantile nel modo seguente:

$$q_\alpha = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq F(x)\right\} .$$

Teorema 4. Densità di funzioni di *V.A.*. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con funzione di densità f_X. Definiamo la nuova variabile aleatoria

$$Y = g(X)$$

dove g è una funzione biiettiva, derivabile e con funzione inversa g^{-1}. Allora Y è variabile aleatoria assolutamente continua con funzione di densità

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \ \mid \left(g^{-1}\right)'(y) \mid \ .$$

5.3 La distribuzione lognormale

Definizione: Una variabile casuale X ha distribuzione lognormale, con parametri a e b^2, se $\ln(X)$ ha distribuzione normale con media a e varianza b^2. Equivalentemente $X = \exp(Y)$ dove $Y \sim N(a, b^2)$.

- Funzione di densità:

  La distribuzione lognormale ha densità uguale a

  $$f(x) = \exp\{-\frac{(ln(x) - a)^2}{2b^2}\}/\left(x\sqrt{2\pi}b\right) \text{ per } x > 0.$$

- Funzione di ripartizione:

  E' possibile dimostrare (vedi Esercizio 11) che la sua funzione di ripartizione è data da

  $$F(x) = G\{[-a + ln(x)]/b\} \text{ per } x > 0,$$

  dove G rappresenta la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard, cioè $N(0, 1)$.

- Funzione quantile:

  La funzione quantile di una variabile aleatoria lognormale è data da

  $$F^{-1}(\alpha) = exp\left[a + bG^{-1}(\alpha)\right] \text{ per } 0 < \alpha < 1.$$

- Valore atteso e varianza in funzione dei parametri a e b^2

  - Il valore atteso di una variabile aleatoria lognormale è uguale a

    $$E(X) = exp(a + b^2/2).$$

  - La varianza è uguale a

    $$V(X) = exp[2(a + b^2)] - exp(2a + b^2).$$

Esercizio 11. Distribuzione lognormale. Utilizzando il Teorema 4:

1. Derivate la funzione di densità di $Y = \exp(X)$ dove $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

2. Mostrate che la funzione di ripartizione di Y può essere scritta come

$$F(y) = G\{[-\mu + ln(y)]/\sigma\} \text{ per } y > 0,$$

dove G rappresenta la funzione di ripartizione della distribuzione normale *standard*.

Suggerimento: Sappiamo che $F(y) = P(Y \leq y) = P(\exp(X) \leq y) \ldots$

3. Ricavate la funzione quantile di Y

$$q_\alpha = F^{-1}(\alpha) = exp\left[\mu + \sigma G^{-1}(\alpha)\right] \text{ per } 0 < \alpha < 1.$$

□

5.4 Simulazione di variabili aleatorie

La funzione *rand()* di MS Excel permette di generare un numero aleatorio estratto da una distribuzione uniforme $[0, 1]$. Per la precisione, leggendo la pagina d'aiuto della funzione stessa si scopre che i numeri generati saranno compresi nell'intervallo $[0, 1)$. Per generare N variabili uniformi indipendenti sarà dunque sufficiente applicare la funzione *rand()* ad N celle.

Una seconda possibilità per generare numeri aleatori in Excel è quella di utilizzare il comando del menu **"Tools | Data Analysis..."** e poi **"Random Number Generation"**. Questo comando permette di simulare matrici di variabili aleatore campionando non solo dalla distribuzione uniforme $[0, 1)$ ma da tutta una serie di distribuzioni discrete e non. Di particolare interesse è la casella **"Random seed"**. Il valore in essa contenuto serve ad inizializzare il generatore di numeri aleatori (in realtà si tratta di una funzione deterministica ...). In pratica, due simulazioni aventi il medesimo Random seed saranno identiche. Se la casella Random seed viene lasciata vuota si otterranno simulazioni diverse.

5.4.0.1 Una procedura generale

E' possibile generare numeri aleatori campionati dalla distribuzione desiderata utilizzando la funzione quantile corrispondente abbinata ad un generatore $U[0, 1]$. L'idea, molto semplice, è la seguente:

- Dapprima simuliamo un'osservazione da $U[0, 1]$: $X \sim U[0, 1]$
- In un secondo tempo calcoliamo $Y = F^{-1}(X)$, dove F^{-1} è la funzione quantile della distribuzione desiderata.

La variabile aleatoria $Y = F^{-1}(X)$ ha dunque quale funzione di distribuzione F. Per dimostrare questo basta notare che

$$P(Y \leq c) \underset{(1)}{=} P(F^{-1}(X) \leq c) \underset{(2)}{=} P(X \leq F(c)) \underset{(3)}{=} F(c)$$

Il primo uguale si ottiene inserendo la definizione di Y, il secondo applicando F ad entrambi i lati della disuguaglianza e l'ultimo è una semplice conseguenza del fatto che X è una variabile aleatoria uniforme $[0, 1]$.

5.5 The Geometric random walk with drift

Indichiamo come d'abitudine il prezzo al tempo t di un'azione con P_t (poiché consideriamo una sola azione evitiamo l'uso dell'indice i). Sia invece Δt un intervallo di tempo, ad esempio un giorno, espresso nell'unità di misura di t. Supponiamo che il prezzo P_t segua un processo del tipo

$$P_{t+\Delta t} = P_t \exp(\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t+\Delta t}), \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.\ N(0,1),\ \sigma > 0. \tag{5.1}$$

I parametri μ e σ sono chiamati rispettivamente termine di *drift* e termine di *diffusione* (o di volatilità). Come osservato in Benninga, se ponessimo il termine di diffusione uguale a 0 il modello si ridurrebbe ad un'equazione deterministica:

$$P_{t+\Delta t} = P_t \exp(\mu\Delta t),$$

il prezzo dell'azione crescerebbe in modo esponenziale ad un tasso composto continuamente μ. Il rendimento logaritmico fra t e $t+\Delta t$ è appunto pari a $\ln(P_{t+\Delta t}/P_t) = \mu\Delta t$. Quando $\sigma > 0$ il rendimento è aleatorio: $P_{t+\Delta t}/P_t$ ha distribuzione lognormale e la sua varianza dipende da Δt e da σ.

Esercizio 12. Dimostrate che se i prezzi sono generati dall'equazione 5.1, condizionatamente a P_t il prezzo $P_{t+\Delta t}$ è distribuito secondo la legge lognormale.

L'intervallo temporale Δt può essere interpretato come la distanza di tempo fra un'osservazione e l'altra (intervallo di campionamento) e (5.1) è l'equazione che descrive la dinamica dei prezzi osservati a tali istanti temporali. Gli indici temporali dei prezzi osservati saranno nell'insieme $(\ldots,\ t-\Delta t,\ t,\ t+\Delta t,\ t+2\Delta t, \ldots)$. E' questa una notazione un po' insolita in quanto generalmente $\Delta t = 1$. In realtà si tratta solo di un modo diverso e più generale di indicizzare le osservazioni.

5.5.1 Caratteristiche del modello

Il modello (5.1) presenta alcune interessanti proprietà che vogliamo analizzare. Innanzi tutto osserviamo che, applicando il logaritmo naturale ad entrambi i lati della (5.1), il modello può essere scritto come

$$\ln(P_{t+\Delta t}) = \ln(P_t) + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t+\Delta t}$$

e ridefinendo appropriatamente i termini otteniamo

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \widetilde{\mu} + \widetilde{\varepsilon}_{t+\Delta t}. \tag{5.2}$$

Si tratta di un caso particolare del famoso modello $AR(1)$ già incontrato nella parte comune di questo corso. In questo caso il coefficiente della variabile ritardata è uguale a 1. In letteratura questo modello prende il nome di *random walk con drift*. Il termine random walk (cammino aleatorio) deriva dal fatto che la dinamica di questo modello è puramente casuale. La costante $\widetilde{\mu}$, detta appunto drift, genera in X una tendenza a crescere (quando $\widetilde{\mu} > 0$ ovviamente).
Utilizzando la (5.2), sviluppiamo in modo ricorsivo

$$\begin{aligned}
X_{t+\Delta t} &= X_t + \widetilde{\mu} + \widetilde{\varepsilon}_{t+\Delta t}, \\
X_{t+2\Delta t} &= X_{t+\Delta t} + \widetilde{\mu} + \widetilde{\varepsilon}_{t+2\Delta t} = X_t + 2\widetilde{\mu} + \widetilde{\varepsilon}_{t+2\Delta t} + \widetilde{\varepsilon}_{t+\Delta t}, \\
X_{t+3\Delta t} &= X_{t+2\Delta t} + \widetilde{\mu} + \widetilde{\varepsilon}_{t+3\Delta t} = X_t + 3\widetilde{\mu} + \widetilde{\varepsilon}_{t+3\Delta t} + \widetilde{\varepsilon}_{t+2\Delta t} + \widetilde{\varepsilon}_{t+\Delta t},
\end{aligned}$$

e in questo modo dopo n passi avremo che

$$X_{t+n\Delta t} = X_t + n\widetilde{\mu} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varepsilon}_{t+i\Delta t} \tag{5.3}$$

$X_{t+n\Delta t}$ è dunque composto da tre termini:

- X_t: il valore del processo al tempo t che sarà aleatorio se non osservato o deterministico (conosciuto) se osservato
- $n\widetilde{\mu}$: la costante deterministica $n\widetilde{\mu}$
- $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varepsilon}_{t+i\Delta t}$: un ultimo termine aleatorio composto dalla somma degli errori degli ultimi n periodi.

Supponiamo che X_t sia conosciuto e quindi deterministico. Sarà allora semplice calcolare il valore atteso di $X_{t+n\Delta t}$ e vedere che

- esso non è costante nel tempo ma aumenta linearmente in n,
- la varianza di $X_{t+n\Delta t}$ non è costante nel tempo. Essa è uguale a $n\left(\sigma^2 \Delta t\right)$ e in maniera simile al valore atteso aumenta linearmente in n.

Se invece X_t fosse anch'esso aleatorio potremmo calcolare media e varianza di

$$\underbrace{X_{t+n\Delta t} - X_t}_{\ln(P_{t+n\Delta t}/P_t)} = n\widetilde{\mu} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varepsilon}_{t+i\Delta t}$$

Il rendimento logaritmico quale funzione di n possiede quindi le medesime proprietà di $X_{t+n\Delta t}$ quando X_t è osservato. Infine, il termine "geometric" random walk, deriva dal fatto che sono i logaritmi del prezzo a seguire un random walk e non il prezzo stesso (come abbiamo visto ne deriva una crescita esponenziale).

Tornando al modello iniziale è immediato vedere che il modello presuppone rendimenti logaritmici normali:

$$r_{t,t+\Delta t} = \ln(P_{t+\Delta t}/P_t) = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{t+\Delta t},$$

e quindi

$$r_{t,t+\Delta t} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t).$$

Considerando invece il rendimento su un orizzonte di n periodi, sulla base dei calcoli svolti in precedenza abbiamo che

$$r_{t,t+n\Delta t} = \ln(P_{t+n\Delta t}/P_t) = n\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{t+i\Delta t} \tag{5.4}$$

e quindi

$$r_{t,t+n\Delta t} \sim N(n\mu\Delta t, n\sigma^2\Delta t).$$

Quando $n\Delta t = 1$ dalla (5.4) segue semplicemente che $r_{t,t+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$. μ e σ sono quindi il valore atteso e la volatilità del rendimento logaritmico su un periodo pari all'unità di misura prescelta, l'anno ad esempio.

Esercizio 13. Rispetto alle proprietà d'aggregazione temporale dei rendimenti logaritmici viste nei precedenti capitoli, quali sono le nuove conclusioni a cui il modello "geometric random walk" permette di giungere?

Esercizio 14. Simulazione del modello "geometric random walk"
Supponiamo che t indichi il tempo in anni. Noi desideriamo simulare a frequenza giornaliera. Poiché in un anno ci sono (circa) 250 giorni lavorativi, dobbiamo scegliere $\Delta t = 1/250$. Supponiamo che valore atteso e volatilità annui del rendimento logaritmico siano rispettivamente uguali al 10% e 20% e che il prezzo iniziale dell'azione sia di \$25. Simulate un anno di osservazioni giornaliere.

Capitolo 6

Value at Risk - VaR

6.1 Introduzione

Nell'ambito della gestione del rischio finanziario possiamo identificare i seguenti tipi di rischi

1. Market risk

   Rischio causato da movimenti inattesi ed avversi di prezzi, tassi d'interesse e tassi di cambio.

2. Credit risk

   Rischio generato da un possibile fallimento della controparte relativamente ad un contratto finanziario (per esempio obbligazioni Parmalat).

3. Liquidity risk

   Rischio dovuto alla poca liquidità dell'asset ed alla conseguente impossibilità d'acquisto/vendita sul mercato in caso di necessità.

4. Operational risk

   Rischio causato da errori nell'esecuzioni di ordini d'acquisto/vendita, frodi, ecc.

Il Value at Risk (VaR) è attualmente la più utilizzata misura di rischio di mercato. Il VaR di un portafoglio di assets (non necessariamente di sole azioni) è una stima dell'$(1-\alpha)-$quantile della distribuzione della perdita di valore del portafoglio (in termini assoluti o percentuali) su di un orizzonte temporale di T periodi.

Nel calcolo del VaR abbiamo quindi due "gradi di libertà", ovvero possiamo decidere il livello di significatività α e l'orizzonte temporale T per cui stimare la distribuzione del valore (rendimento) del portafoglio ed in seguito l'$(1-\alpha)-$quantile. La scelta di α e di T dipendono dall'uso che si desidera fare del VaR. Ad esempio, il comitato[1] di Basilea II situato presso la Bank for

[1] "The Committee does not possess any formal supranational supervisory authority, and its conclusions do not, and were never intended to, have legal force. Rather, it formulates broad supervisory standards and guidelines and recommends statements of best practice in the expectation that individual authorities will take steps to implement them through detailed arrangements ...".

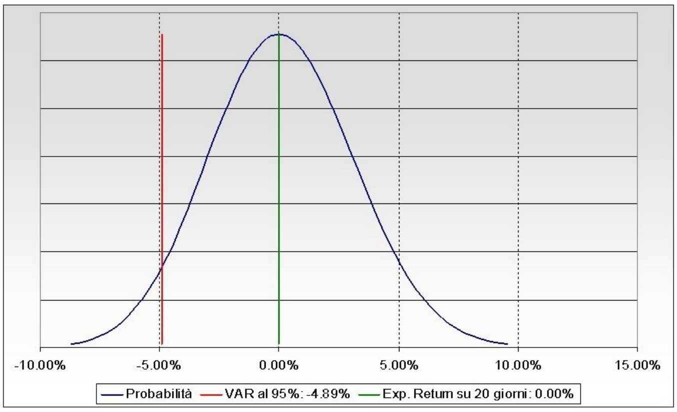

Figura 6.1:

international settlements (http://www.bis.org/bcbs/aboutbcbs.htm) suggerisce $T = 5 - 10$ giorni ed $\alpha = 99\%$ al fine di definire i margini di capitale necessari alle banche quale garanzia sui rischi derivanti dalle loro attività di trading. Per un gestore patrimoniale o una cassa pensione invece, T potrebbe essere pari ad un anno ed $\alpha = 95\%$.

Ci sono almeno tre modi per stimare il VaR:

1. Assumere un modello parametrico dei rendimenti, stimarne i parametri ed infine calcolare il VaR.
2. Utilizzare la simulazione di Monte Carlo.
3. Utilizzare tecniche non parametriche.

Abbiamo visto il modello lognormale dei rendimenti azionari, ed è questo il modello che vogliamo ora analizzare in relazione al VaR.

6.2 VaR con rendimenti lognormali

Partendo dalla definizione di una variabile aleatoria lognormale X è evidente che per caratterizzare la sua distribuzione è necessario specificare unicamente valore atteso μ e varianza σ^2 di $\ln(X)$ (che appunto sappiamo essere normale). Di conseguenza, poiché μ e σ^2 determinano in maniera univoca e completa la distribuzione di X essi ne determineranno anche il rischio, e di conseguenza il VaR.

Supponiamo quindi che l'azione S_T abbia una distribuzione lognormale con parametri annuali ($T = 1$) pari a (μ, σ^2). Questo significa che, indicando con S_0 il valore iniziale[2], $\ln(S_T) = \ln(S_0) + T\mu + \sigma\sqrt{T}U$, con $U \sim N(0,1)$. $\ln(S_T)$ ha quindi valore atteso $\ln(S_0) + T\mu$ e varianza $\sigma^2 T$. Utilizzando la formula per il calcolo del valore atteso di una v.a. lognormale otteniamo che

$$E(S_T) = \exp\left(\ln(S_0) + T\mu + \frac{\sigma^2 T}{2}\right) = S_0 \exp\left((\mu + \frac{\sigma^2}{2})T\right).$$

[2]Utilizzate la notazione dell'equazione (5.4) per dedurre che $T = n\Delta t$.

Notate che $E(S_T) \neq S_0 \exp(\mu T) = \exp(E[\ln(S_T)])$!

Per quanto riguarda il calcolo del VaR di quest'azione con un orizzonte di T anni ad un livello di confidenza del 99%:

$$q_{1\%} = \exp\left(\ln(S_0) + T\mu + \sigma\sqrt{T}G^{-1}(1\%)\right) = S_0 \exp(T\mu + \sigma\sqrt{T}G^{-1}(1\%)).$$

Per un'azione $S_0 = 80$ con $\mu = 10\%$, $\sigma = 30\%$ ed un orizzonte temporale pari a $T = 1$ avremo un $q_{1\%} = 44$ e quindi un $VaR(T; 99\%) = -(44 - 80) = 36$. In percentuale $VaR(T; 99\%) = 45\%$. Notate che il segno è stato cambiato in quanto siamo interessati alla coda sinistra (negativa) della distribuzione. L'interpretazione è che 1 anno su 100 la *perdita* sarà superiore a 36 fr (superiore al 45%).

Avremmo pure potuto calcolare il quantile $q_{1\%}$ del rendimento e non del valore dell'azione. Infatti, sapendo che

$$\ln(S_T/S_0) = T\mu + \sigma\sqrt{T}U,$$

sempre con $\mu = 10\%$, $\sigma = 30\%$ e $T = 1$:

$$q_{1\%} = T\mu + \sigma\sqrt{T}G^{-1}(1\%) = 10\% + 30\% \cdot (-2.326) = -0.5979 .$$

Con una probabilità del 1% il rendimento lognormale sarà inferiore o uguale a -0.5979. Ora, essendo $S_T = S_0 \exp(r_T)$ otteniamo $S_T = 80 \exp(-0.5979) = 44$, che corrisponde ad un VaR del 45% calcolato come $-100\frac{44-80}{80}$.

6.3 A Three-Asset Problem

Nel caso che il portafoglio consista in due o più azioni abbiamo visto nell'esercizio 2 della serie 4 che il rendimento logaritmico di un portafoglio, $\ln(V_T/V_0)$, è diverso dalla somma pesata dei rendimenti logaritmici sulle singole posizioni. Tuttavia, sempre nella serie 4, avete dimostrato che

$$(V_T - V_0)/V_0 = \sum_{i=1}^{N} w_{i,0} \frac{P_{i,T} - P_{i,0}}{P_{i,0}} \tag{6.1}$$

Facendo uso della (6.1) e del fatto che[3]

$$\frac{P_{i,T} - P_{i,0}}{P_{i,0}} \simeq \ln\left(1 + \frac{P_{i,T} - P_{i,0}}{P_{i,0}}\right) = \ln(P_{i,T}/P_{i.0}) \sim N\left(T\mu_i, \sigma_i^2 T\right)$$

approssimiamo la distribuzione multivariata dei rendimenti percentuali $r_{0,T}$ con la distribuzione normale multivariata dei rendimenti logaritmici $\ln(P_T/P_0)$.

6.4 Historical simulation

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come calcolare il VaR utilizzando il modello parametrico lognormale. Tuttavia quando è necessario calcolare il VaR di

[3]Per x prossimi allo 0 vale infatti che $\ln(1 + x) \simeq x$.

portafogli composti da numerosi strumenti finanziari quali ad esempio bonds, derivati, swaps, futures ecc. è necessario rivedere l'approccio in quanto, ad esempio, la relazione fra i rendimenti su un call e rendimenti sul relativo sottostante non è più lineare. Semplificazioni ed ipotesi aggiuntive sono quindi necessarie.

Abbiamo precedentemente visto come simulare variabili aleatorie indipendenti aventi la distribuzione desiderata. Una prima possibilità sarebbe quindi quella di utilizzare il modello parametrico per simulare la distribuzione futura dei prezzi alla data desiderata. In pratica si procederebbe a tappe:

1. Utilizzando le osservazioni a disposizione, stimate i parametri del modello parametrico
2. $i = 1$;
3. Utilizzando il modello parametrico e le stime ottenute simula un *rendimento* all'orizzonte desiderato.
4. Tramite il rendimento simulato calcola il prezzo corrispondente.
5. Calcola il valore totale del portafoglio.
6. Se $i = 1000$ termina, altrimenti $i = i + 1$ e torna la punto 3.

Utilizzando la distribuzione empirica delle 1000 simulazioni calcola il quantile desiderato.

Questa metodologia chiamata **simulazione di Monte Carlo** dipende dalla validità del modello parametrico utilizzato.

La simulazione storica (historical simulation) tende a staccarsi da un modello parametrico ed utilizza esclusivamente la distribuzione empirica dei rendimenti (logaritmici). E' consuetudine utilizzare rendimenti giornalieri per eseguire la seguente variante dell'algoritmo descritto in precedenza. Supponiamo di avere $N + 1$ osservazioni giornaliere di prezzi, tassi d'interesse, tassi di cambio ... . Allora:

1. $i = 1$;
2. Estraete a caso una delle N date per le quale potete calcolare i rendimenti giornalieri.
3. Prendete tutti i rendimenti corrispondenti alla data estratta e moltiplicateli per $\sqrt{T}$, dove T corrisponde alla lunghezza in giorni dell'orizzonte temporale per il quale desiderate calcolare il VaR.
4. Con i rendimenti scalati calcolate i prezzi degli strumenti in portafoglio.
5. Calcolate il valore totale del portafoglio.
6. Se $i = 1000$ termina, altrimenti $i = i + 1$ e torna la punto 2.

Utilizzando la distribuzione empirica delle 1000 simulazioni calcolate il quantile desiderato.

Osservazione:

1. Ad ogni ripetizione i è *fondamentale* che tutti i rendimenti appartengano alla medesima data. Questo per mantenere la struttura di correlazione *cross-section* fra i rendimenti stessi. Se immaginiamo di avere i dati in formato tabulare, dove le colonne della tabella corrispondono a tutti i rendimenti del medesimo strumento mentre le righe della tabella corrispondono ai rendimenti di tutti gli strumenti ad una certa data, ecco allora che l'algoritmo appena descritto seleziona a caso una riga prendendo l'intero blocco di rendimenti.

2. Questa metodologia è chiamata col nome di historical simulation.