Esercizio 1

Sono date due azioni A e B i cui prezzi alla data t sono notati con S_t^A rispettivamente S_t^B. Per quanto riguarda la dinamica dei prezzi azionari si assume per entrambe le azioni un modello di tipo random walk geometrico con drift, cioé

$$\ln S_{t+\Delta t}^A = \ln S_t^A + \mu^A \Delta t + \sigma^A \sqrt{\Delta t}\ \varepsilon_{t+\Delta t}^A \tag{1}$$
$$\ln S_{t+\Delta t}^B = \ln S_t^B + \mu^B \Delta t + \sigma^B \sqrt{\Delta t}\ \varepsilon_{t+\Delta t}^B \tag{2}$$

Riguardo alle proprietà stocastiche dei termini d'errore vale quanto segue:

- $\{\varepsilon_t^A\}$ i.i.d. $N(0,1)$.
- $\{\varepsilon_t^B\}$ i.i.d. $N(0,1)$.
- $cov(\varepsilon_t^A, \varepsilon_t^B) = \rho \ \forall \ t$, con $-1 \leq \rho \leq 1$.
- $cov(\varepsilon_t^A, \varepsilon_s^B) = 0, \ t \neq s$.

Notiamo che poiché la varianza degli errori è pari ad uno, ρ corrisponde al coefficiente di correlazione. Da esso dipende la covarianza fra i rendimenti di A e B.

1. La messa in piega del modello

   Riscriviamo le due equazioni precedenti in forma matriciale nel modo seguente:

   $$\ln S_{t+\Delta t} = \ln S_t + \Delta t\, \mu + \sqrt{\Delta t} D\ \varepsilon_{t+\Delta t} \tag{3}$$

   (a) Date dimensione e contenuto di ogni simbolo.

   (b) Calcolate la matrice di covarianza di $\varepsilon_{t+\Delta t}$, notata Ω.

2. Vettore dei rendimenti logaritmici

   Il vettore dei rendimenti logaritmici, notato $r_{t+\Delta t}$, è definito come

   $$r_{t+\Delta t} := \ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = \Delta t\, \mu + \sqrt{\Delta t} D\ \varepsilon_{t+\Delta t}. \tag{4}$$

   Notate che poiché $\ln S_{t+\Delta t}$ è un vettore, non ha più senso scrivere $\ln S_{t+\Delta t}/S_t$! $r_{t+\Delta t}$ corrisponde come nel caso univariato al rendimento logaritmico riferito ad un arco temporale di lunghezza[1] Δt.

[1] Ricordiamo che la scelta di Δt dipende dall'unità di misura di t. Se t fosse misurato in anni e Δt rappresentasse un giorno, allora $\Delta t = 1/252$ (in un anno ci sono approssimativamente $21 \times 12 = 252$ giorni lavorativi), mentre se Δt rappresentasse un mese, allora $\Delta t = 1/12$. Se invece scegliessimo quale unità di misura di t il giorno, allora un Δt di un mese sarebbe pari a $\Delta t = 21$.

(a) Si dia il significato di μ e di D.

3. La matrice di varianza covarianza

   (a) Utilizzando le proprietà di una trasformazione lineare di un vettore aleatorio calcolate valore atteso e matrice delle covarianze di $r_{t+\Delta t}$.

   (b) Dimostrate che valore atteso e varianza del rendimento su $n\,\Delta t$ periodi, $\ln S_{t+n\Delta t} - \ln S_t$, è pari a $n\,\Delta t\,\mu$ rispettivamente $n\,\Delta t D\Omega D$. Date esplicitamente il contenuto di $n\,\Delta t D\Omega D$ in funzione di Δt, σ^A, σ^B e ρ.

   (c) Avete stimato la matrice di covarianza utilizzando dati giornalieri dalla quale estraete $\widehat{cov}(r^A, r^B) = 1.4$. Date la covarianza fra i rendimenti mensili.