Soluzione esercizio 2

E' dato un portafoglio con valuta di riferimento chf. Il vostro universo titoli comprende UBS, $BASF$ ed un conto corrente in euro. Il portafoglio è costituito da una posizione azionaria in chf, diciamo $1'000$ chf in UBS ed una posizione cash di $1'000$ Euro ad interesse 0. Il prezzo di UBS oggi è di chf $100.-$, quello di $BASF$ (in euro) è di $55.-$ ed infine il cambio euro franco è pari a 1.55.

1. Quanti sono i fattori di rischio di questo portafoglio e perché?

   I fattori di rischio presenti al momento nel portafoglio sono solo 2. In particolare, la posizione cash essendo in euro è soggetta al rischio di cambio.

2. Calcolate il valore del portafoglio in chf e le posizioni percentuali investite nei tre strumenti.

   $V_0 = 1000 + 1000 * 1.55 = 2550$ chf.

$$w = \begin{bmatrix} UBS & 1000/2550 \\ BASF & 0 \\ EUR & 1550/2550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UBS & 39\% \\ BASF & 0 \\ EUR & 61\% \end{bmatrix}$$

3. Avete a disposizione la seguente matrice di covarianza, stimata utilizzando i rendimenti logaritmici giornalieri e poi *annualizzata*:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} & UBS & BASF & EUR \\ UBS & 0.02643 & 0.00966 & 0.00057 \\ BASF & & 0.02486 & 0.00018 \\ EUR & & & 0.00081 \end{bmatrix}$$

   Allo stesso modo il vettore dei rendimenti logaritmici attesi è dato da

$$\mu = \begin{bmatrix} UBS & 5\% \\ BASF & 8\% \\ EUR & 1\% \end{bmatrix}.$$

   Si noti che per quanto riguarda $BASF$ si tratta di rendimenti in valuta locale, cioé in *euro*!

   (a) Calcolate il vettore dei rendimenti logaritmici attesi in moneta di riferimento, cioé in chf.

Dalla relazione

$$P^{chf}_{BASF} = P^{eur}_{BASF} * e$$

si ricava semplicemente applicando la definizione di rendimento logaritmico e la proprietà della funzione ln che

$$r^{chf}_{BASF} = r^{eur}_{BASF} + r_e. \tag{1}$$

Avremo quindi che

$$\mu^{chf} = \begin{bmatrix} UBS & 5\% \\ BASF & 8\% + 1\% \\ EUR & 1\% \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UBS & 5\% \\ BASF & 9\% \\ EUR & 1\% \end{bmatrix}.$$

(b) Calcolate la matrice delle covarianze dei rendimenti logaritmici in chf.

Dalla (1) abbiamo:

$$\begin{aligned}
V(r^{chf}_{BASF}) &= V(r^{eur}_{BASF}) + V(r_e) + 2Cov(r^{eur}_{BASF}, r_e) \\
&= 0.02486 + 0.00081 + 0.00018 \\
&= 0.02585 \\
Cov(r^{chf}_{BASF}, r_e) &= Cov(r^{eur}_{BASF}, r_e) + Cov(r_e, r_e) \\
&= Cov(r^{eur}_{BASF}, r_e) + V(r_e) \\
&= 0.00018 + 0.00081 \\
&= 0.00099 \\
Cov(r^{chf}_{BASF}, r_{UBS}) &= Cov(r^{eur}_{BASF}, r_{UBS}) + Cov(r_e, r_{UBS}) \\
&= 0.00966 + 0.00057 \\
&= 0.01023
\end{aligned}$$

La matrice di covarianza in chf è pertanto uguale a

$$\Sigma^{chf} = \begin{bmatrix} & UBS & BASF & EUR \\ UBS & 0.02643 & 0.01023 & 0.00057 \\ BASF & & 0.02585 & 0.00099 \\ EUR & & & 0.00081 \end{bmatrix}$$

(c) Calcolate il vettore delle volatilità annue.

$$\sigma^{chf} = \sqrt{diag(\Sigma^{chf})} = \begin{bmatrix} UBS & 16.25\% \\ BASF & 16.07\% \\ EUR & 2.84\% \end{bmatrix}$$

Supponiamo ora un random walk geometrico con drift quale modello generatore dei rendimenti ed un orizzonte temporale per il calcolo de VaR pari ad 1 mese.

4. Calcolate il rendimento atteso e la varianza a un mese del portafoglio attuale.

   Vedete calcolo foglio excel allegato per il calcolo del rendimento atteso e la varianza.

5. Calcolate il VaR a 1 mese del portafoglio attuale ad un livello di confidenza del 5%.

   Il $VaR(5\%, 1m)$ sarà dato da meno il 5%-quantile di una variabile aleatoria $N(\mu_{1m}, \sigma^2_{1m})$ cioè

$$\begin{aligned} VaR(5\%, 1Mese) &= -\left(\mu_{1mese} + \sigma_{1mese} * q_{5\%}\right) \\ &= 2.49\% \end{aligned}$$

   (per il calcolo si veda foglio excel)

   Quindi con una probabilità del 5% sull'arco del prossimo mese il portafoglio potrà perdere 2.49% (63.50 chf) o più.

6. Avete a disposizione i sequenti rendimenti logaritmici storici *giornalieri* e desiderate calcolare il VaR:

	UBS	$BASF$	EUR
$t = 1$	0.009	0.022	0.001
$t = 2$	0.011	−0.012	0.002
$t = 3$	−0.002	−0.003	0.015

   (a) Eseguite un solo campionamento utilizzando la tecnica di simulazione storica scegliendo una qualsiasi delle tre date.

   Abbiamo a disposizione dati giornalieri dai quali abbiamo stimato il rendimento atteso e la varianza (le covarianze non ci interessano in questo caso) utilizzando il modello random walk con drift che nella sua generalità è scritto come

$$r_{t+\Delta t} = \Delta t \mu + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t+\Delta t}, \; con \varepsilon_{t+\Delta t} \sim N(0, 1) \tag{2}$$

   Scegliendo quindi $t = giorni$ e $\Delta t = 1$ otteniamo

$$r_{t+1} = \mu_{1g} + \sigma_{1g} \varepsilon_{t+1} \tag{3}$$

e risolvendo rispetto a ε_{t+1} si ottiene

$$\varepsilon_{t+1} = \frac{r_{t+1} - \mu_{1g}}{\sigma_{1g}}.$$

Avendo a disposizione una stima di μ e σ, diciamo $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\sigma}$, possiamo calcolare l'errore stimato $\widehat{\varepsilon}_{t+1}$:

$$\widehat{\varepsilon}_{t+1} = \frac{r_{t+1} - \widehat{\mu}_{1g}}{\widehat{\sigma}_{1g}}.$$

Possiamo in questo modo, utilizzando i rendimenti giornalieri ed i parametri stimati $\widehat{\mu}_{1g}$ e $\widehat{\sigma}_{1g}$, ottenere una serie di innovazioni $\widehat{\varepsilon}_t,\ t = 1, \ldots N$ estratte da una $N(0,1)$. Queste realizzazioni verranno utilizzate nel modesimo modello con $t = mesi$. Infatti, sappiamo che se scegliamo $t = mesi$ e $\Delta t = 1$, avremo l'analogo dell'equazione (3), e cioè

$$r_{t+1} = \mu_{1m} + \sigma_{1m}\varepsilon_{t+1},\ \varepsilon_{t+1} \sim N(0,1) \tag{4}$$

Ora, scalando propriamente il rendimento atteso e la varianza stimati possiamo simulare rendimenti mensili utilizzando l'equazione (4) e le innovazioni $\widehat{\varepsilon}_t$ stimate su dati giornalieri. La procedura è la seguente:

i. Campioniamo casualmente un numero compreso fra 1 ed N, nel nostro caso $N = 3$. Supponiamo d'aver ottenuto 2.

ii. Calcoliamo una simulazione mensile di r_{1m}, notata $\widetilde{r}_{1m}$ utilizzando la (4), cioè

$$\widetilde{r}_{1m} = \widehat{\mu}_{1m} + \widehat{\sigma}_{1m}\widehat{\varepsilon}_2$$

iii. Conoscendo il valore attuale dello strumento P_0 e sapendo che $r_{1m} = \ln(P_{1m}/P_0)$ otteniamo che

$$\widetilde{P}_{1m} = P_0 \exp(\widetilde{r}_{1m}) \tag{5}$$

Questa tuttavia non è la formula finale. Partendo dalla (5) possiamo scrivere $\widetilde{P}_{1m}$ in funzione di $\widehat{\mu}_{1m},\ \widehat{\sigma}_{1m},\ \mu_{1g},\ \sigma_{1g}$ ed il rendimento giornaliero r_2 :

$$\widetilde{P}_{1m} \quad = \quad P_0 \exp(\widehat{\mu}_{1m} + \widehat{\sigma}_{1m}\widehat{\varepsilon}_2) = P_0 \exp\left(\widehat{\mu}_{1m} + \widehat{\sigma}_{1m}\frac{r_2 - \widehat{\mu}_{1g}}{\widehat{\sigma}_{1g}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= P_0 \exp\left(\widehat{\mu}_{1m} + \frac{\widehat{\sigma}_{1m}}{\widehat{\sigma}_{1g}}\left(r_2 - \widehat{\mu}_{1g}\right)\right) \\
&= P_0 \exp\left(\widehat{\mu}_{1m} + \sqrt{21}\left(r_2 - \widehat{\mu}_{1g}\right)\right) \\
&= P_0 \exp\left(\widehat{\mu}_{1m} - \sqrt{21}\widehat{\mu}_{1g} + \sqrt{21} r_2\right) \\
&= P_0 \exp\left(\sqrt{21}\widehat{\mu}_{1g}(\sqrt{21} - 1) + \sqrt{21} r_2\right) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

L'ultima equazione, equazione (6) è la formula finale. Da questa formula si nota che al lato pratico non è necessario calcolare $\widehat{\varepsilon}_2$ per eseguire la simulazione storica. Noi l'abbiamo calcolato a fini didattici, cioè per meglio comprendere l'ideona sottostante e in ultima analisi perché e come si giunge all'equazione (6). Come vedete, non è necessario calcolare le covarianze fra rendimenti di strumenti diversi. Tuttavia sarà obbligatorio campionare per tutti gli strumenti rendimenti dello stesso istante, nel nostro esempio cioè con $t = 2$. Un'ultima osservazione: su orizzonti brevi, cioè 1 giorno, 1 o 2 settimane è possibile porre $\widehat{\mu}_{1g} = 0$ così da ottenere la semplice espressione

$$\widetilde{P}_{1m} = P_0 \exp\left(\sqrt{21} r_t\right).$$

iv. Avendo ricalcolato tutti i prezzi dei fattori di rischio rivalutate il portafoglio così da ottenere un valore simulato $\widetilde{V}_{1m}$.

v. Ripetete il tutto 1000 volte ed utilizzate la distribuzione empirica delle simulazioni per calcolare il quantile.

(b) Secondo quale distribuzione discreta devono essere campionate le date?

Le date devono essere estratte casualmente campionando in maniera uniforme.