Содержание

1 Общие сведения **2**

1.1 Игры . . . 2

1.2 Ходы . . . 3

1.3 Стратегии . . . 4

1.4 Матричная игра . . . 5

2 Следовая точка. Чистые стратегии **7**

2.1 Примеры . . . 7

Пример 1 . . . 7

Пример 2 . . . 8

3 Смешанные стратегии **9**

3.1 Игра 2×2 . . . 10

3.1.1 Примеры . . . 10

Пример 3 . . . 10

Пример 4 . . . 11

3.1.2 Геометрическая интерпретация . . . 12

3.2 Игры 2×n и m×2 . . . 16

Пример 5 . . . 16

1. Общие сведения из теории игр

1.1. Игры

Теория игр — это математическая теория конфликтных ситуаций, т.е. таких ситуаций, в которых сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих различные цели.

Игра — это конфликтная ситуация, регламентированная определенными правилами, в которых должны быть указаны:

- возможные варианты действий участников
- количественный результат игры или платеж (выигрыш, проигрыш), к которому приводит данная совокупность ходов
- объем информации каждой стороны о поведении другой.

Парная игра — игра в которой участвуют только две стороны (два игрока).

Парная игра с нулевой суммой — парная игра, в которой сумма платежей равна нулю, т.е. проигрыш одного игрока равен выигрышу второго.

В зависимости от отношения каждого из игроков к значению функции выигрыша парные игры подразделяются:

- Парная игра с нулевой суммой (антагонистическая) — парная игра, в которой сумма платежей равна нулю, т.е. проигрыш одного игрока равен выигрышу второго.
- Неантагонистическая игра — парная игра,в которой игроки преследуют разные, но не прямо противоположные цели.

1.2. Ходы

Ход —

- выбор одного из предусмотренных правилами игры действий
- осуществление этого выбора

Ходы бывают двух типов:

- Личный ход —
  + *сознательный* выбор одного из предусмотренных правилами игры действий
  + осуществление этого выбора
- Случайный ход — Случайным ходом называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора.

Ниже рассматриваются парные игры с нулевой суммой, содержащие только личные ходы. У каждой стороны отсутствует информация о поведении другой.

1.3. Стратегии

Стратегия игрока — совокупность правил, определяющих выбор действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на конечные и бесконечные.

- Бесконечная игра — игра, в которой хотя бы у одного одного из игроков имеется бесконечное число стратегий.
- Конечная игра — игра, в которой у каждого игрока имеется только конечное числостратегий. Число последовательных ходов у любого из игроков определяет подразделение игр на одноходовые и многоходовые, или позиционные.
  + В одноходовой игре каждый игрок делает только один выбор из возможных вариантов и после этого устанавливает исход игры.
  + Многоходовая, или позиционная , игра развивается во времени, представляя собой ряд последовательных этапов, каждый из которых наступает после хода одного из игроков и соответствующего изменения обстановки.

В одноходовой игре каждый игрок делает только один выбор из возможных вариантов и после этого устанавливает исход игры.

Оптимальная стратегия игрока — стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку *максимально возможный средний выигрыш* (или, что то же, минимально возможный средний проигрыш).

> В теории игр все рекомендации вырабатываются исходя из предположения о разумном поведении игроков. Просчеты и ошибки игроков, неизбежные в каждой конфликтной ситуации, а также элементы азарта и риска в теории игр не учитываются.

1.4. Матричная игра

Матричная игра — одноходовая конечная игра с нулевой суммой.Матричная игра является теоретико-игровой моделью конфликтной ситуации, в которой противники для достижения диаметрально противоположных целей делают по одному выбору (ходу) из конечного числа возможных способов действий.В соответствии с выбранными способами действий (стратегиями) определяется достигаемый результат. Рассмотрим на примере.

Пусть имеются два игрока A и B, один из которых может выбрать i-ю стратегию из m своих возможных стратегий $A_1, A_2, ...A_m$, а второй выбирает j-ю стратегию из своих возможных стратегий $B_1, B_2, ...B_m$. В результате первый игрок выигрывает величину a_{ij}, а второй проигрывает эту величину. Из чисел a_{ij}, составим матрицу

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ называется платежной матрицей или матрицей игры $m \times n$.

В этой матрице строки всегда для стратегий выигрывающего (максимизирующего) игрока A, то есть игрока, который стремится к максимизации своего выигрыша. Столбцы отводятся для стратегий проигрывающего игрока B, то есть игрока, который стремится к минимизации критерия эффективности.

> Нормализация игры — процесс сведения позиционной игры к матричной игре Игрой в нормальной форме — позиционная игра, сведенная к матричной игре Напомним, что, позиционная многоходовая игра является теоретико-игровой моделью конфликтной ситуации, в которой противники для достижения своих целей последовательно делают по одному выбору (ходу) из конечного числа возможных способов действий на каждом этапе развития этой ситуации.

Решение игры — нахождение оптимальных стратегий обоих игроков и определение цены игры

Цена игры — ожидаемый выигрыш (проигрыш) игроков.

Решение игры может быть найдено либо в чистых стратегиях — когда игрок должен следовать одной единственной стратегии, либо в смешанных , когда игрок должен с определенными вероятностями применять две чистые стратегии или более. Последние в этом случае называются активными .

Смешанная стратегия одного игрока — вектор, каждая из компонент которого показывает частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии.

Максимин *или* нижняя цена игры — число

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Максиминная стратегия (строка) — стратегия, которую выбрал игрок, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш.

Очевидно, что при выборе наиболее осторожной максиминной стратегии игрок A обеспечивает себе (независимо от поведения противника) гарантированный выигрыш не менее α.

Максимин *или* верхняя цена игры — число

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Минимаксная стратегия (столбец) — стратегия, которую выбрал игрок, чтобы минимизировать свой максимальный проигрыш.

Очевидно, что при выборе наиболее осторожной минимаксной стратегии игрок B не дает возможности ни при каких обстоятельствах игроку A выиграть больше, чем β.

Нижняя цена игры всегда не превосходит верхней цены игры

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \leqslant \min_j \max_i a_{ij} = \beta$$

Теорема 1 (основная теорема теории матричных игр)**.** *Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно, в области смешанных стратегий.*

2. Игры с седловой точкой. Решение в чистых стратегиях

Игра с седловой точкой — игра, для которой

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \beta$$

Для игр с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе максиминной и минимаксной стратегий, которые являются оптимальными.,

Чистая цена игры — общее значение нижней и верхней цены игры

$$\alpha = \beta = \nu$$

2.1. Примеры

Пример 1

Найти решение в чистых стратегиях игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение: определим верхнюю и нижнюю цену игры. Для этого найдем минимальное из чисел a_{ij} в i-й строке

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

и максимальное из чисел a_{ij} в j-м столбце

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

Числа α_i (минимумы строк) выпишем рядом с платежной матрицей справа в виде добавочного столбца. Числа β_i (максимумы столбцов) выпишем под матрицей в виде добавочной строки:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \alpha_i \\ & 8 & 4 & 7 & 4 \\ & 6 & 5 & 9 & 5 \\ & 7 & 7 & 8 & \mathbf{7} \\ \hline \beta_j & 8 & \mathbf{7} & 9 & \end{array}$$

Находим максимальное из чисел α_i

$$\alpha = \max_i \alpha_i = 7$$

и минимальное из чисел β_j

$$\beta = \min_j \beta_j = 7$$

$\alpha = \beta$ — игра имеет седловую точку. Оптимальной стратегией для игрока является стратегия A_3, а для игрока B — стратегия B_2, чистая цена игры $\nu = 7$

Пример 2

Задана платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти решение игры в чистых стратегиях.

Решение:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \beta_j & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & \end{array}$$

$\alpha = \beta = 1$. Игра имеет шесть седловых точек. Оптимальными стратегиями будут:

- A_1 и B_3 или B_4
- A_3 и B_3 или B_4
- A_4 и B_3 или B_4

3. Решение игры в смешанных стратегиях

При $\alpha \neq \beta$. случае, когда при выборе своих стратегий оба игрока не имеют информации о выборе другого, игра имеет решение в смешанных стратегиях.

- $S_A = (p_1, p_2, ..., p_m)$ — смешанная стратегия игрока A , в которой стратегии $A_1, A_2, ..., A_m$ применяются о вероятностями

$$p_1, p_2, ..., p_m, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_i \geqslant 0, i = \overline{1, m}$$

- $S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$ — смешанная стратегия игрока B , в которой стратегии $B_1, B_2, ..., B_m$ применяются о вероятностями

$$q_1, q_2, ..., q_m, \sum_{i=1}^{n} q_i = 1, \quad q_i \geqslant 0, i = \overline{1, n}$$

Если:

- S_A^* — оптимальная стратегия игрока A ,
- S_B^* — - оптимальная стратегия игрока B ,

то цена игры —

$$\nu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i^* \cdot q_i^*$$

Следующая теорема дает ответ на вопрос, как найти решение для игр 2×2, $2 \times n$, $m \times 2$

Теорема 2 (как найти решение для игр 2×2, $2 \times n$, $m \times 2$)**.** *Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры ν вне зависимости от того, с какими вероятностями будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную (в том числе и чистые стратегии).*

3.1. Игра 2×2

Рассмотрим игру 2×2 о матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Пусть игра не имеет решения в чистых стратегиях. Найдем оптимальные стратегии S_A^* и S_B^*. Сначала определим стратегию $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$. Согласно теореме, если сторона A будет придерживаться стратегии ν, то независимо от образа действий стороны B выигрыш будет оставаться равным цене игры ν. Следовательно, если сторона A придерживается оптимальной стратегии $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$, то сторона B может, не меняя выигрыша, применять любую из своих стратегий. Тогда при применении игроком B чистой стратегии B_1 или B_2 игроке получит средний выигрыш равный цене игры:

$$\begin{aligned} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* &= \nu \quad \leftarrow \text{при стратегии } B_1 \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* &= \nu \quad \leftarrow \text{при стратегии } B_2 \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $p_1^* + p_2^* = 1$:

$$\begin{aligned} p_1^* &= \tfrac{a_2 2 - a_2 1}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ p_2^* &= \tfrac{a_1 1 - a_1 2}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{aligned}$$

Цена игры:

$$\nu = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Аналогично находится оптимальная стратегия игрока B: $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$.
Принимая во внимание, что $q_1^* + q_2^* = 1$:

$$\begin{aligned} q_1^* &= \tfrac{a_2 2 - a_1 2}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ q_2^* &= \tfrac{a_1 1 - a_2 1}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{aligned}$$

3.1.1. Примеры

Пример 3

Найти решение игры с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение: игра не имеет седловой точки, так как α= -1, β = 1, $\alpha \neq \beta$. Ищем решение в смешанных стратегиях. По формулам для p^* и q^* получаем $p_1^* = p_2^* = 0.5$ и $q_1^* = q_2^* = 0.5$, $\nu = 0$ Таким образом,

$$\begin{aligned} S_A^* &= (0.5, 0.5) \\ S_B^* &= (0.5, 0.5) \end{aligned}$$

Пример 4

Найти решение игры с матрицей

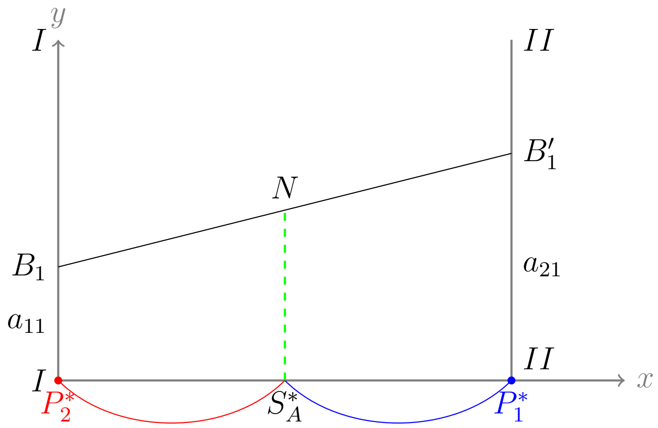
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение: игра не имеет седловой точки, так как α= 4, β = 5, $\alpha \neq \beta$. Ищем решение в смешанных стратегиях. По формулам для p^* и q^* получаем $p_1^* = 0.4$, $p_2^* = 0.6$ и $q_1^* = 0.2$ $q_2^* = 0.8$, $\nu = 4.4$ Таким образом,

$$\begin{aligned} S_A^* &= (0.4, 0.6) \\ S_B^* &= (0.2, 0.8) \end{aligned}$$

3.1.2. Геометрическая интерпретация

Игре 2×2 можно дать простую геометрическую интерпретацию. Возьмем единичный участок оси абсцисс, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию $S = (p_1, p_2) = (p_1, 1 - p_1)$ причем вероятность p_1 стратегии A_1 будет равна расстоянию от точки S_A до правого конца участка, а вероятность p_2, стратегии A_2 — расстоянию до левого конца.



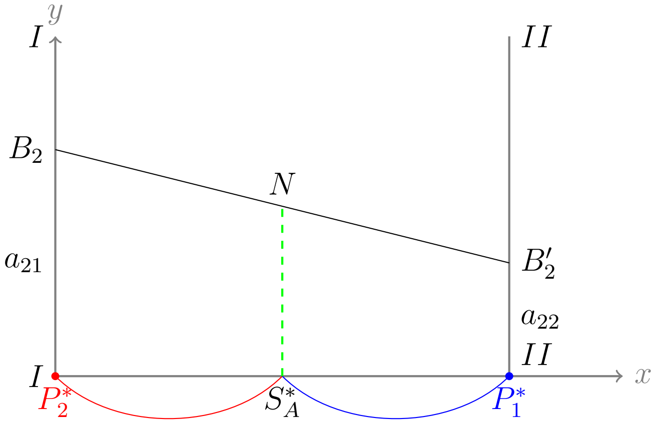
В частности, левый конец участка (точка с абсциссой $= 0$) отвечает стратегии A_1 , правый конец участка ($x = 1$) — стратегии A_2

На концах участка восстанавливаются два перпендикуляра к оси абсцисс:

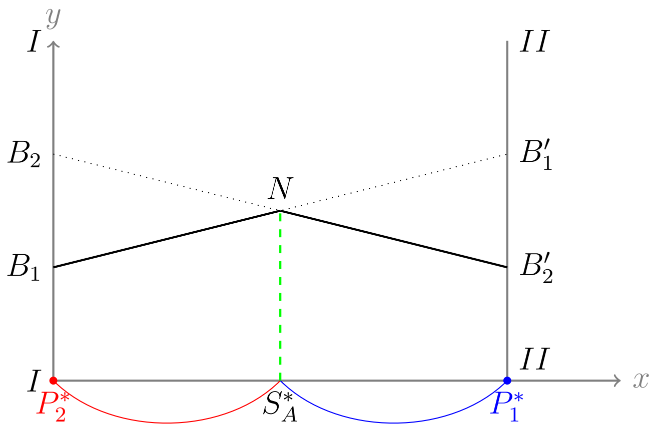
- ось $I - I$ — откладывается выигрыш при стратегии A_1
- ось $II - II$ — откладывается выигрыш при стратегии A_2

Пусть игрок B применяет стратегию B_1; она дает на осях $I - I$ и $II - II$ соответственно точки с ординатами a_{11} и a_{21}. Проводим через эти точки прямую $B_1 - B_1'$. При любой смешанной стратегии $S_A = (p_1, p_2)$ выигрыш игрока определяется точкой N на прямой $B_1 - B_1'$, соответствующей точке S_A на оси абсцисс, делящей отрезок в отношении $p_2 : p_1$.

Очевидно, точно таким же способом может быть построена и прямая $B_2 - B_2'$, определяющая выигрыш при стратегии B_2.

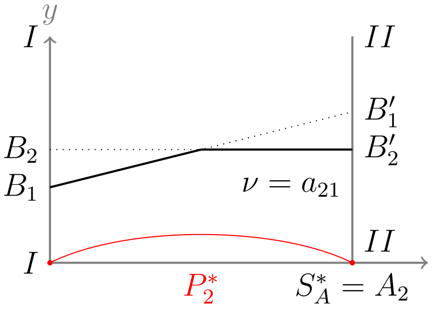


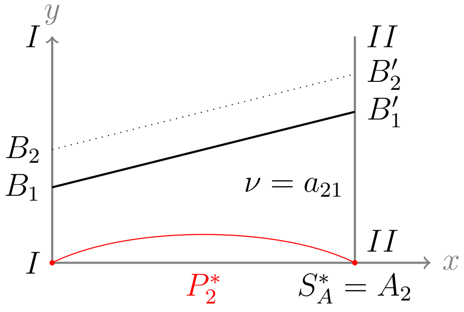
Необходимо найти оптимальную стратегию S_A^*, т.е. такую, при которой минимальный выигрыш игрока A (при наихудшем для него поведении игрока B) обращался бы в максимум. Для этого строиться нижняя граница выигрыша игрока A при стратегиях B_1, B_2, т.е. ломаная $B_1 N B_2'$;. На этой границе будет лежать минимальный выигрыш игрока A при любой его смешанной стратегии, точка N, в которой этот выигрыш достигает максимума и определяет решение и цену игры.



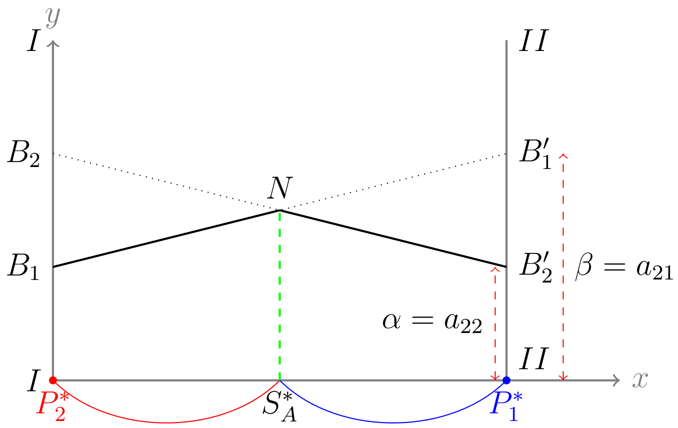
Ордината точки N есть не что иное, как цена игры ν, ее абсцисса равна ${}^*_2$, а расстояние до правого конца отрезка равно ${}^*_1$, т.е. расстояние от точки S_A^* до концов отрезка равны вероятностям ${}^*_2$ и ${}^*_1$ стратегий A_2 и A_1 оптимальной смешанной стратегии игрока A. в данном случае решение игры определялось точкой пересечения стратегий B_1 и B_2.

Ниже показан случай, когда оптимальной стратегией игрока является чистая стратегия A_2. Здесь стратегия A_2 (при любой стратегии противника) выгоднее стратегии A_1,

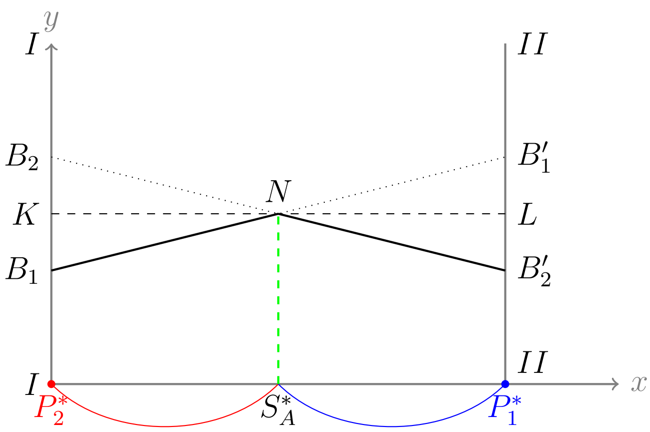




Правее показан случай, когда заведомо невыгодная стратегия имеется у игрока B. Геометрическая интерпретация дает возможность наглядно изобразить также нижнюю цену игры α и верхнюю β



На том же графике можно дать и геометрическую интерпретацию оптимальных стратегий игрока B . Нетрудно убедиться, что доля q_1^*стратегии B_1 оптимальной смешанной стратегии $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$ равна отношению длины, отрезка KB_2 к сумме длин отрезков KB_1 и KB_2 на оси $I - I$:

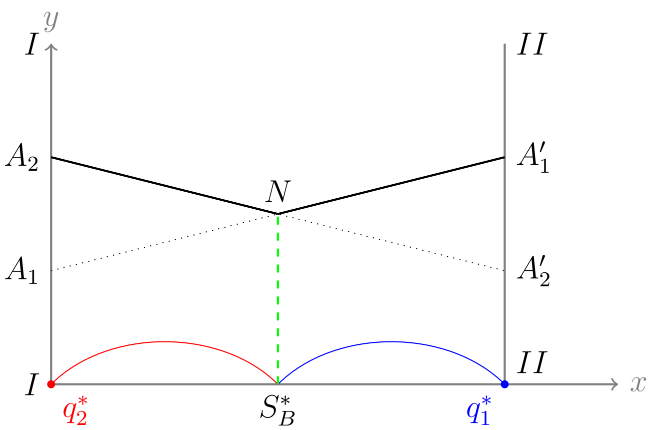


$$q_1^* = \frac{KB_2}{KB_2 + KB_1}$$

или

$$q_1^* = \frac{LB_2'}{LB_2' + LB_1'}$$

Оптимальную стратегию $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$ можно найти и другим способом, если поменять местами игроков B и B, а вместо максимума нижней границы выигрыша рассмотреть минимум верхней границы.



3.2. Игры $2 \times n$ и $m \times 2$

Решение игр $2 \times n$ и $m \times 2$ основывается на следующей теореме.

Теорема 3. *У любой конечной игры $m \times n$ существует решение, в котором число активных стратегий каждой стороны не превосходит наименьшего из чис->ел m и n.*

Согласно этой теореме у игры $2 \times n$ всегда имеется решение, в котором каждый игрок имеет не более двух активных стратегий. Стоит только найти эти стратегии, и игра $2 \times n$ превращается в игру 2×2, которая решается элементарно. Нахождение активных стратегий может выполняться графическим способом:

1) строится графическая интерпретация;

2) определяется нижняя граница выигрыша;

3) выделяются на нижней границе выигрыша две стратегии второго игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с максимальной ординатой (если в ней пересекаются более двух прямых, берется любая пара) — эти стратегий представляют собой активные стратегии игрока B.

Таким образом, игра $2 \times n$ сведена к игре 2×2.

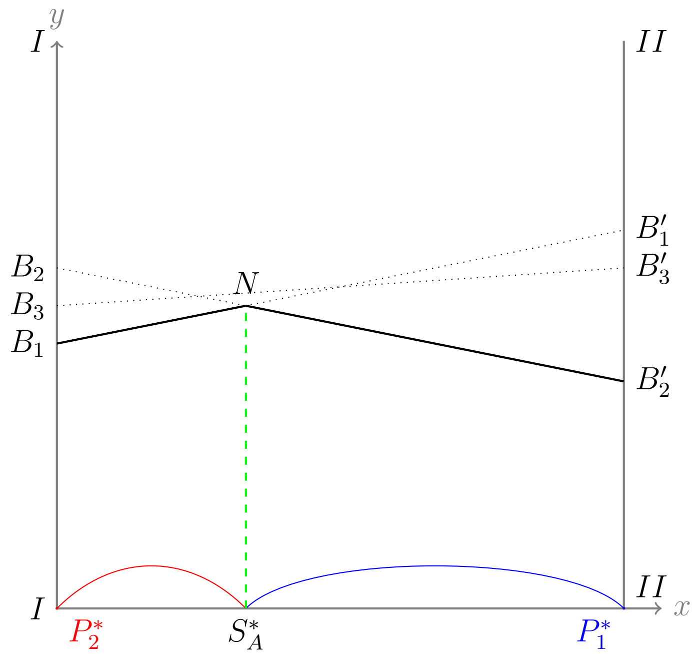
Также может быть решена игра $m \times 2$, с той разницей, что строится не нижняя, а верхняя граница выигрыша и на ней ищется не максимум, а минимум.

Пример 5

Найти решение игры

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение: используя геометрический метод, выделяем активные стратегии. Прямые $B_1 - B_1'$, $B_2 - B_2'$ и $B_3 - B_3'$ соответствуют стратегиям B_1, B_2, B_3. Ломаная $B_1 N B_2$— нижняя граница выигрыша игрока . Игра имеет решение $S{*}_A = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}); S{*}_B = (0.5; 0.5; 0); v = 8$.



y
I
II
B_2
B_3
B_1
N
B_1'
B_3'
B_2'
I
II
x
P_2^*
S_A^*
P_1^*

Предметный указатель

игра, 2
- 2×2, 10
- 2×2, 9
  - геометрия, 12
  - примеры, 10
- $2 \times n$, 9, 16
- $m \times 2$, 9, 16
- бесконечная, 4
- в нормальной форме, 5
- конечная, 4
  - многоходовая, 4
  - одноходовая, 4
- матричная, 5
- парная, 2
  - с нулевой суммой, 2
  - антагонистическая, 2
  - неантагонистическая, 2
- решение, 5
  - в смешанных стратегиях, 5, 9
  - в чистых стратегиях, 5
- с седловой точкой, 7
- цена, 5
  - верхняя, 6
  - нижняя, 6
  - чистая, 7

максимин, 6

матрица
- игры, 5
- платежная, 5

минимакс, 6

нормализация игры, 5

стратегия, 4
- максиминная, 6
- минимаксная, 6
- оптимальная, 4
- смешанная, 5

теория игр, 2

ход, 3
- личный, 3
- случайный, 3

чистая цена игры, 7