מתמטיקה בדידה

2019ג

מתמטיקה בדידה

2019ג

תוכן העניינים

מבוא ללוגיקה

פסוק - טענה שיש לה ערך אמת, ז"א טענה שאפשר לקבוע האם
היא נכונה (אמת T)
או לא נכונה (שקר F)

*נסמן פסוק ע"י אות קטנה p, q וכו'

לדוגמא:

13-5	לא פסוק (לא ניתן לטעון אמת או שקר)
4+4=8	פסוק אמת
4-1=0	פסוק שקר

קשרים לוגיים

שלילה $\neg p$

הסימן $\neg$ מסמן את השלילה

לדוגמא:

מה השלילה של הפסוק: היום יום שני $= p$

תשובה: היום לא יום שני $= \neg p$

לוח אמת

p	$\neg p$
T	F
F	T

וגם $\wedge$

הסימן $\wedge$ מסמן את וגם

לדוגמה: היום יום ראשון

וגם לא יורד גשם

שני הפסוקים חייבים להיות אמת

לוח אמת

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

או $\vee$

לדוגמה: היום יום ראשון

או היום יום שני

מספיק שרק פסוק אחד יהיה אמת

לוח אמת

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

אם-אז $\rightarrow$

"אם p אז q"

לדוגמה: אם אנצח בבחירות $= p$

אז ירדו המיסים $= q$

נקבל פסוק שקר רק כאשר p אמת ! q שקר

לוח אמת

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

אם ורק אם - אמ"מ $\leftrightarrow$

נקבל פסוק אמת רק כאשר שני הפסוקים זהים.

לוח אמת

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

טאוטולוגיה - פסוק שכל הצבה בו תתן ערך אמת T

לדוגמה: $\neg$ק $\vee$ ק   עכשיו יורד גשם או שלא

סתירה - פסוק שכל הצבה בו תתן ערך אמת F

לדוגמה: $\neg$ק $\wedge$ ק   היום יום ראשון וגם לא יום ראשון

גורר

כאשר פסוק α גורר פסוק β

אם בכל מקרה בו α מקבל ערך T, גם β מקבל ערך T.

במקרה כזה אפשר לומר כי β נובע מ- α

* רשימה של משפטים יפים בעמ' 44 (מבוא מהיר ללוגיקה)

כמתים

$\forall$ "לכל"

לדוגמא $\forall x\ (x^2 \geq 0)$

"לכל x מתקיים x^2 גדול או שווה ל-0"

$\exists$ "קיים"

לדוגמא: $\exists x\ (x < 0)$

"קיים x כך ש x קטן מ-0"

תזכורת - כללי דה מורגן

$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

השלילה של גם p וגם q שקולה לשלילה של p, או לשלילה של q

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

השלילה של p או q שקולה לשלילה של p וגם לשלילה של q

* השלילה של "לכל" היא "קיים"

פרק 1 - מושגי יסוד

קבוצה - אוסף של איברים

* קבוצה יכולה להיות סופית או אין סופית
* סדר האיברים בקבוצה לא חשוב.
* הקבוצה הריקה תסומן ב- $\emptyset$
* האיברים בקבוצה לא חייבים להיות מספריים.
לדוג' גם קבוצות יכולות להיות איברים בקבוצות אחרות.
* את מספר האיברים בקבוצה סופית A אנו מסמנים $|A|$

שייכות $\in$

$a \in A$ אם a הוא איבר של הקבוצה A
הסימן $\in$ מבטא את השייכות.

חלקית ל (הכלה) $\subseteq$

יהיו B,A קבוצות. נאמר ש A חלקית ל B אם כל איבר של A הוא איבר של B

נסמן זאת בצורה הבאה: $A \subseteq B$, פירושו הוא $\forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B)$

הערה: כל קבוצה חלקית לעצמה.

להפך אם $A = B$ אז $A \subseteq B$

* הקבוצה הריקה חלקית לכל קבוצה $\emptyset \subseteq A$

חלקית ממש $\subset$

במידה ו- $A \subseteq B$ וקיים איבר ב- B שלא קיים ב- A,

נאמר ש A חלקית ממש ל B או ש A תת קבוצה ממש של B

$$A \subset B$$

קבוצות של מספרים

הטבעיים	$\mathbb{N}$	$\{0,1,2,3,\ldots\}$
השלמים	$\mathbb{Z}$	$\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
הרציונליים	$\mathbb{Q}$	$\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\right\}$
הממשיים	$\mathbb{R}$	{רציונליים ואי רציונליים}

קבוצת החזקה $P(A)$

נסמן ב- $P(A)$ את קבוצת כל תתי קבוצות של A.

$P(A)$ נקראת קבוצת החזקה של A.

אם A קבוצה סופית וב A יש n איברים, ב $P(A)$ יש 2^n איברים.

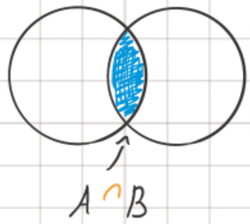
$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

פעולות בין קבוצות

חיתוך

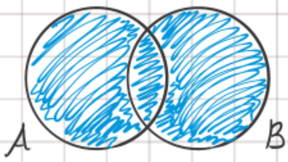
$A \cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$

דיאגרמת וון



איחוד (חלופית וקיבוצית)

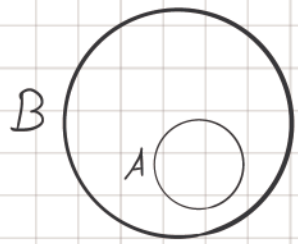
$A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$



הערות

אם $A\subseteq B$ אז: $A\cap B = A$

$A\cup B = B$

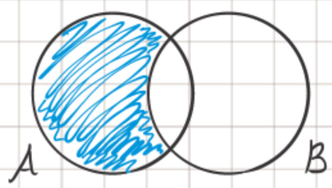


לכל קבוצה A אז: $A\cap\emptyset=\emptyset$

$A\cup\emptyset = A$

קבוצת הפרש

$A\setminus B = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

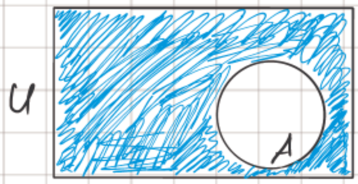


קבוצת המשלים

נסמן ב- U את הקבוצה האוניברסלית ("העולם")

$A^c = U\setminus A = \{x \mid x\notin A\}$

A^c - כל האיברים שלא נמצאים בקבוצה A



אלגברה של קבוצות

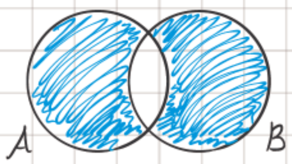
$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\setminus B = A\cap B^c$

הפרש סימטרי

$A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$



אלגברה של קבוצות

שאלה 21 - לכל A,B $A\cap(A\cup B)=A$

שאלה 26 -
* $A\setminus B\subseteq A$
* A זרה ל B אמ"מ $A\setminus B=A$
* $A\subseteq B$ אמ"מ $A\setminus B=\emptyset$
* $A\setminus B=B\setminus A$ אמ"מ $A=B$

שאלה 27 -
* לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$
* אם $B\subseteq A$ אז $A\setminus(A\setminus B)=B$
* $A\setminus(A\setminus B)=B$ אמ"מ $B\subseteq A$

שאלה 28 - לכל שתי קבוצות A,B מתקיים:
* $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$
* $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$
* אם $B\subseteq A$, אז $B\cup(A\setminus B)=A$
* $A\cap(B\setminus A)=\emptyset$

שאלה 30 - לכל שתי קבוצות A,B: $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

שאלה 31 -
* $A\triangle A=\emptyset$
* $A\triangle\emptyset=A$

שאלה 33 - $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

משפט 1.23 - לכל A מתקיים:
* $A\cup A^c=U$
* $A\cap A^c=\emptyset$
* $(A^c)^c=A$

משפט 1.25 - $A\subseteq B$ אמ"מ $B^c\subseteq A^c$

שאלה 36 - $A\cap B=\emptyset$ אמ"מ $A\subseteq B^c$

שאלה 37 - $B=A^c$ אמ"מ $A\cap B=\emptyset \wedge A^c\cap B^c=\emptyset$

שאלה 38 - * $A \triangle A^c = U$ * $A \triangle U = A^c$

משפט 1.26 - כללי דה מורגן: * $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ * $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

שאלה 41 - * $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

שאלה 42 - $A \setminus B = B^c \setminus A^c$

שאלה 43 - $(A \triangle B)^c = A \triangle B^c = A^c \triangle B$

משפט 1.28 - תהי B קבוצה לא ריקה של קבוצות ותהי $A_0 \in B$

* $A_0 \subseteq \bigcup_{A \in B} A$ * $\bigcup_{A \in B} A \subseteq A_0$

משפט 1.29 - * $B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (B \cap A_\alpha)$

* $B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \cup A_\alpha)$

משפט 1.30 - * $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

* $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

שאלה 51 - תהי A קבוצה לא ריקה. לכל $a \in A$ תהי $A_a = A \setminus \{a\}$

$\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha = \emptyset$

פרק ב - יחסים

מכפלה קרטזית

קבוצה של זוגות סדורים.

אם A ו B קבוצות, נגדיר:

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$$

לדוגמה: $B=\{1,2\}$ $A=\{5,6\}$

$$A\times B = \{(5,1),(6,1),(5,2),(6,2)\}$$

ב A n איברים וב B m איברים,

כלומר ב $A\times B$ יהיו $n\cdot m$ איברים.

רלציה (=יחס)

יחס שרובנו מכירים הינו "קטן מ-" שסימנו $<$. אנו יודעים ש-1 קטן מ-5 ומסמנים עובדה זו בביטוי $1<5$.
כלומר יחס הוא בעצם סינון כלשהו שמתאר תנאי מסוים.

כל תת-קבוצה של $A\times B$ נקראת רלציה (יחס)

סימון - אם R רלציה מ-A ל-B $(a,b)\in R$

אפשר גם לסמן כך: $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\in R$, aRb

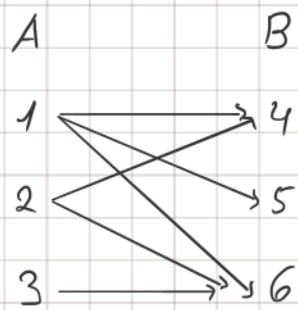
לדוגמה: $S=\{(1,5),(2,4),(2,6),(3,6),(1,4),(1,6)\}$

$$S=\begin{bmatrix}1&1&1&2&2&3\\4&5&6&4&6&6\end{bmatrix}$$

טבלה

	4	5	6
1	1	1	1
2	1		1
3			1

גרפית



$A\times B \neq B\times A$ *

*רק אם $A=B$ אז $A\times B=B\times A$

תכונות של רלציות

יחס נקרא רפלקסיבי אם מתקיים $I_A \subseteq R$

כלומר, לכל $a\in A$ מתקיים aRa, ז"א $\forall a\ (a,a)\in R$

למשל $A=\{1,2,3,4\}$, בכדי שהיחס יהיה רפלקסיבי

חייבים להופיע הזוגות הבאים: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$

יחס נקרא אנטי רפלקסיבי אם $R\cap I_A=\emptyset$

ז"א $\forall a\ (a,a)\notin R$

למשל $A=\{1,2,3,4\}$, בכדי שהיחס יהיה אנטי רפלקסיבי

אסור על הזוגות הללו להופיע: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$

יחס נקרא סימטרי אם מתקיים $R=R^{-1}$

במילים אחרות R הוא סימטרי כאשר מתקיים $aRb \Leftrightarrow bRa$

בכדי שהיחס יהיה סימטרי נחפש אחד משני סוגי זוגות

(a,a) והסוג השני אשר משלים אחד את השני $(a,b),(b,a)$

למשל: $R=\{(3,1),(2,2),(1,3),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

יחס נקרא אנטי סימטרי אם $R\cap R^{-1}=\emptyset$

כלומר R הוא אנטי סימטרי כאשר מתקיים $aRb \to \neg(bRa)$

במילים אחרות, אם (a,b) קיים ביחס אז (b,a) לא יכול להתקיים ביחס.

בנוסף (a,a) לא יכול להתקיים ביחס

*אנטי סימטרי במובן הרחב יכול לכלול את (a,a)

יחס נקרא **טרנזיטיבי** אם מתקיים $R^2 \subseteq R$

כלומר, אם הוא מקיים $aRb \wedge bRc \longrightarrow aRc$

למשל: $R=\{(1,2),(2,3),(1,3),(3,4),(2,4),(1,4)\}$

$$R^2=\{(1,3),(2,4),(1,4)\}$$

כמו שניתן לראות R^2 מוכל ב R, $R^2 \subseteq R$ ולכן היחס **טרנזיטיבי**

יחס שמקיים רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות נקרא **יחס שקילות**

למשל:

עבור $A=\{1,2,3,4\}$

יחס השקילות הקטן ביותר הוא: $E_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

דוגמה נוספת: $E_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1),(1,2),(2,1)\}$

כיצד נראה סוגי יחסים בטבלה

1				
	1	1	1	
	1	1	1	
	1	1	1	
				1

רפלקסיבי - יהיו אחדים על כל האלכסון הראשי

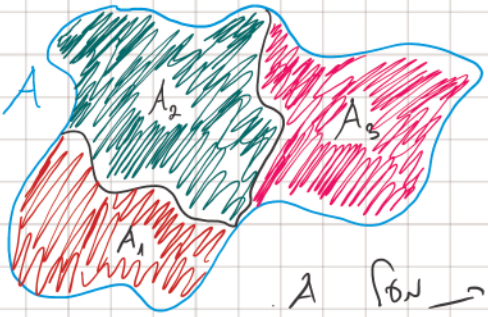
סימטרי - סימטרי לגבי האלכסון הראשי

טרנזיטיבי - אין דרך נוחה לראות

חלוקה

עבור קבוצה A, **חלוקה** של A היא קבוצה של תת קבוצות של A שמקיימות:

* חיתוך של שני קבוצות הוא ריק $\emptyset$
* איחוד כל הקבוצות הוא A



<u>טענה</u>: כל יחס שקילות מעל A משרה חלוקה של A

להפך כל חלוקה של A מגדיר יחס שקילות מעל A.

חלוקה מושרית ע"י יחס שקילות

אם R יחס שקילות מעל A אז R משרה חלוקה על איברי A המוגדרת כך:

a,b באותה חלקה $\iff (a,b)\in R$

קבוצת המנה

עבור קבוצה A ויחס שקילות E מעל A.
קבוצת המנה מסומנת A/E היא קבוצת מחלקות השקילות על היחס E.

דוגמא: עבור $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

$$A/R=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$$

$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3),(1,4),(4,1)\}$$

$$A/R_2=\{\{1,3,4\},\{2\}\}$$

הערה: כל חלוקה משרה יחס שקילות.

דוגמא: מהו יחס השקילות שמתאים לחלוקה הבאה על $A=\{1,2,3,4\}$

$$A/R=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

הגדרות

$$R \subseteq A \times B$$

$$\text{Domain } R = \{a \in A \mid \exists y \in B \ (a,y) \in R\}$$

$$\text{Range } R = \{b \in B \mid \exists x \in A \ (x,b) \in R\}$$

יחס מעל A

כאשר $R \subseteq A \times A$ נאמר כי R הוא יחס מעל A

יחס השיוויון הוא היחס I_A המוגדר כך: $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$

לדוגמה אם $A = \{1,2,3\}$, אז: $I_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

אם ב- A n איברים, ב I_A יהיו n איברים.

רלציה הופכית

אם $R \subseteq A \times B$ רלציה מ A ל B אז $R^{-1} \subseteq B \times A$

היא הרלציה ההופכית ל- R שמוגדרת כך:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

ריבוע היחס

עבור יחס R מעל A, היחס R^2 הוא היחס המוגדר כך:

$$R^2 = \{(a,b) \mid \exists c \in A \ (aRc \wedge cRb)\}$$

למשל עבור הקבוצה

$$R = \{(2,1),(3,1),(1,4),(4,3)\}$$

ריבוע היחס יהיה כך:

$$R^2 = \{(2,4),(3,4),(1,3),(4,1)\}$$

התבנית שאנו מחפשים כדי ליצור את הקבוצה החדשה

היא כזו: $(a,c),(c,b)$

במידה ומצאנו, ניצור את הזוג החדש (a,b)

יחס סדר $\prec$

יחס נקרא **יחס סדר חלקי** אם הוא: אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

יחס נקרא **יחס סדר מלא** אם הוא:

אנטי רפלקסיבי, טרנזיטיבי ומשווה בין כל שני איברים ב A.

כ"א $\forall a,b\in A \quad a\neq b \to ((a,b)\in\prec \lor (b,a)\in\prec)$

ובמילים אחרות, לכל $a,b\in A$ שונים יהיה קיים בדיוק אחד מהצורות הבאות: (a,b) או (b,a)

כל יחס סדר מלא הוא גם יחס סדר חלקי

דיאגרמת הסה

כל יחס סדר חלקי מאופיין ע"י דיאגרמת הסה שלו.

כל איברי A מופיעים בדרך. יש מסלול בין a ל b $\Longleftrightarrow$ (a,b) שייך ליחס.

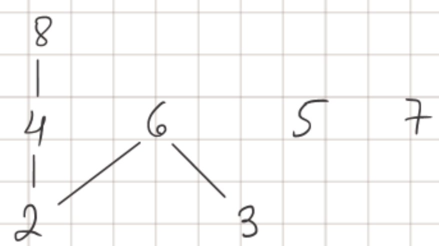
יש קו שמחבר בין a ל b אם b מכסה את a. (כ"א אין איברים בינהם)

אם הזוג (a,b) שייך ליחס אז b יופיע מעל a.

דוגמא: $A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

נגדיר יחס כך: $a\prec b \Longleftrightarrow a\neq b$ וגם $a|b$ (כ"א b מתחלק ב a ללא שארית)

נצייר דיאגרמת הסה מתאימה



$\prec=\{(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(4,8)\}$

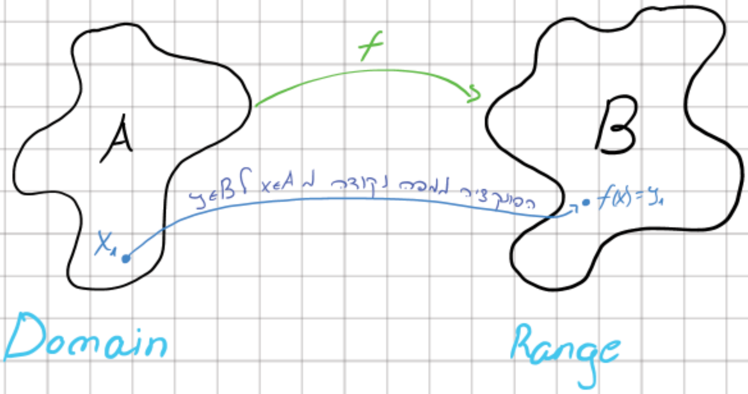
פרק 3 - פונקציות

פונקציה היא שלשה סדורה (A,B,g)

כאשר A,B הן קבוצות, g היא תת קבוצה של $A\times B$, כלומר רלציה

המקיימת שלכל $x\in A$ יש y **יחיד** ב-B כך ש- $(x,y)\in g$

סימון - נסמן $f:A\to B$ ונאמר כי f היא פונקציה מ-A ל-B.



$D(f)$ A נקרא תחום הפונקציה (Domain)

$Ra(f)$ B נקרא טווח הפונקציה (Range)

$G(f)$ g נקרא גרף הפונקציה, אוסף הזוגות $(x,f(x))$

פונקציות הן שוות אמ"מ יש שוויון של כל אחד משלושת הרכיבים: תחום, טווח וגרף.

עבור פונ' $f=\langle A,B,g\rangle$

את קב' הרכיבים הימניים ב-g נסמן כך, $Im(f)$ (Image) (הרכיב הימני, הרכיב השמאלי)

ונקרא להם התמונה של הפונקציה

התמונה חלקית לטווח וברור שהיא נקבעת ע"י הגרף.

למשל עבור הדמויות והמקורות הבאים: $(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)$

התמונה של הפונקציה תהיה כך: $Im(f)=\{2,4,6,8\}$

הדמות של המקור

(x, y)

אם מתקיים $y=f(x)$ אז y הוא הדמות של x
x הוא המקור של y
כלומר $(x,y)\in g$

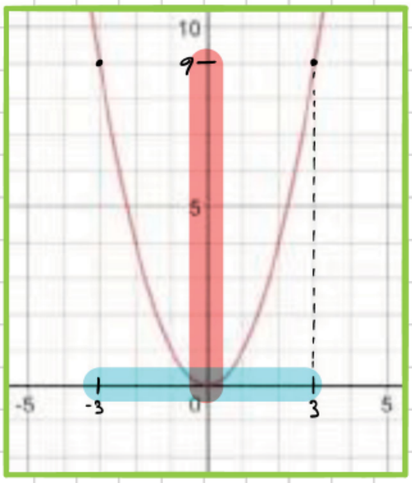
כאשר $f:A\to B$ ו $C\subseteq A$ התמונה של C, $f[C]$
היא קבוצת כל הדמויות (ערכי הy) של האיברים ב C.

$$f[C]=\{f(x)\mid x\in C\}$$

כאשר $f:A\to B$ ו $D\subseteq B$ התמונה ההפוכה של D, $f^{-1}[D]$
היא קבוצת המקורות (ערכי ה x) של איברי D.

$$f^{-1}[D]=\{x\in A\mid f(x)\in D\}$$

$f(x)=x^2$



למשל: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$

עבור הקבוצה $C=[0,3]$ (כל המספרים מ-0 עד 3)

התמונה של C תהיה $f[C]=[0,9]$
כלומר, ערכי הy שמתקבלים מהצבת ערכי ה x
בפונקציה

ועבור הקבוצה $D=[0,9]$ (כל המספרים מ-0 עד 9)

התמונה ההפוכה של D תהיה $f^{-1}[D]=[-3,3]$
כלומר, ערכי ה-x שמהם קיבלנו את ערכי ה-y
הללו לאחר הצבה בפונקציה

הערה: $f[A]=Im(f)$

פונקציה על

פונקציה נקראת **על B** אם היא מקיימת:
$$\forall b \in B \left(\exists a \in A \left((a,b) \in g\right)\right)$$
כלומר, לכל איבר ב B יש מקור אחד לפחות ב- A.
לכל איבר בטווח של הפונקציה יש מקור.

פונקציה חד-חד ערכית (חח"ע)

פונקציה נקראת **חד-חד-ערכית (חח"ע)** אם היא מקיימת:
$$X_1 \neq X_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
כלומר, למקורות שונים יש תמונות שונות.
פונקציה שלכל איבר בטווח שלה יש מקור אחד, לכל היותר

משפט - עבור $f: A \rightarrow B$, הטענות הבאות שקולות:
1) f היא חח"ע
2) לכל $C_1, C_2 \subseteq A$ מתקיים $f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$
3) לכל $C \subseteq A$ מתקיים $f[C^c] = f[C]^c$
4) לכל $C_1, C_2 \subseteq A$ מתקיים $f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$
5) לכל $C \subseteq A$ מתקיים $f^{-1}[f[C]] = C$

משפט: $f: A \rightarrow B$ היא על B אמ"מ לכל $D \subseteq B$ מתקיים $f[f^{-1}[D]] = D$

משפט נוסף: אם A ו B קבוצות סופיות
(מס' האיברים שווה בגודלה) $|A| = |B|$ אמ"מ יש פונ' חח"ע מ A על B.
$|A| \leq |B|$ אמ"מ יש פונ' חח"ע מ A ל B
$|A| \leq |B|$ אמ"מ יש פונ' מ B על A

קשר בין פונקציה ויחס שקילות

א. עבור $f: A\to B$ נגדיר יחס $\equiv_f$ כך: $\forall x,a\in A \quad x\equiv_f a \iff f(x)=f(a)$

טענה: * מחלקות השקילות הן בדיוק $f^{-1}[\{c\}]$ עבור כל $c\in Im(f)$

* f הוא חח"ע אמ"מ בכל מחלקת שקילות יש איבר יחיד.

ב. לכל יחס שקילות על A ניתן להגדיר פונ' $f: A\to B$ כך שיחס השקילות הוא בדיוק $\equiv_f$.

דוגמה I

$A=\{1,2,3,4\}$

$f: P(A)\to P(A)$

$$f(X)=\begin{cases} A\setminus X & |X|\le 2\\ X & |X|\ge 3\end{cases}$$

א. האם הפונקציה חח"ע? האם היא על $P(A)$?

ב. נגדיר יחס R כך: $(X_1,X_2)\in R \iff f(X_1)=f(X_2)$

הוכח כי R יחס שקילות.

כמה מחלקות שקילות יש? מהן?

פתרון

א. לא חח"ע. $f(\{4\})=\{1,2,3\}$

$f(\{1,2,3\})=\{1,2,3\}$

לא על $P(A)$, מספר האיברים ב $f(X)$ הוא תמיד לפחות 2 ולכן $\emptyset$ לא התקבל.

ב. נרשום את מחלקות השקילות:

I $\{4\},\{1,2,3\}$

II $\{3\},\{1,2,4\}$

III $\{2\},\{1,3,4\}$

IV $\{1\},\{2,3,4\}$

V $\emptyset, A$

VI $\{1,2\}\ \{3,4\}$

VII $\{1,3\}\ \{2,4\}$

VIII $\{1,4\}\ \{2,3\}$

דוגמה II

נתונה הפונקציה $f: \mathbb{Z}\to \mathbb{Z}$ $\quad f(x)=x^2$

$\equiv_f$ יחס השקילות המוגדר כך $x_1\equiv x_2 \iff f(x_1)=f(x_2)$

מהן מחלקות השקילות?

פתרון

$\{0\},\{1,-1\},\{2,-2\},\{3,-3\},\dots$

פונקציות מיוחדות

* **פונקציה קבועה** - כל איברי A עוברים לאותו איבר ב- B.
  לדוגמא: $y=5$

* **פונקציית זהות** - כל איבר עובר לעצמו.
  למשל: $y=x$

* **פונקציית הטלה** - ניקח רק את האיבר הראשון.
  למשל: $f(m,n)=m$

* **פונקציה אופיינית** - פונקציה שהדמויות שלה מוגדרות בעזרת 1 ו 0.
  לכל $A\subseteq U$ נגדיר פונ' כך: $\chi_A : U \to \{1,0\}$

$$\chi_A(x)=\begin{cases} 0 & : x\notin A \\ 1 & : x\in A \end{cases}$$

דוגמא I

$U=\{1,2,3,4,5\}$
$A=\{2,4,5\}$

$\chi_A(1)=0$
$\chi_A(2)=1$
$\chi_A(3)=0$
$\chi_A(4)=1$
$\chi_A(5)=1$

דוגמא II

$U=\{1,2,3,4,5\}$

$\chi_B(1)=1$
$\chi_B(2)=0$
$\chi_B(3)=0$
$\chi_B(4)=1$
$\chi_B(5)=0$

מתוצאות הפונקציה נוכל לדעת כי הקבוצה B, היא: $B=\{1,4\}$

הרכבת פונקציות

אם $g: A \to B$ $f: B \to C$ פונקציות

נגדיר את הפונ' $f \circ g: A \to C$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

משפט 3.21 - אם f ו g חח"ע אז גם $f \circ g$ חח"ע.
אם f ו g פונ' על אז גם $f \circ g$ פונ' על.

משפט 3.22 - אם $f \circ g$ חח"ע אז גם g חח"ע.
אם $f \circ g$ פונ' על אז גם f פונ' על.

דוגמה

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $g(x) = |x|$

מהי $f \circ g$?

$f \circ g$ פונקציה ✓
חח"ע ✗
על ✗

$f \circ g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{|x|}$

פונקציה הופכית (עמ' 162)

אם $f: A \to B$ חח"ע ועל

אז $f^{-1}: B \to A$ היא הפונקציה ההופכית

מתקיים אם $y = f(x)$

אז $x = f^{-1}(y)$

משפט - אם f חח"ע ועל

אז גם f^{-1} חח"ע ועל ומתקיים

$$(f^{-1})^{-1} = f$$
$$f \circ f^{-1} = I_B$$
$$f^{-1} \circ f = I_A$$

דוגמא I

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 5$

$f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f^{-1}(x) = x - 5$

דוגמה II

מה ההופכית של:

$f: [0,1] \to [0,2]$, $f(x) = 2x$

$f^{-1}: [0,2] \to [0,1]$, $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

פרק 4 - עוצמות של קבוצות

* **תזכורת** - ראינו שעבור קבוצות סופיות A, B מתקיים:
$|A|=|B|$ אמ"מ קיימת פונקציה חח"ע ועל בין A ו-B.

עוצמה - מספר האיברים בקבוצה

הגדרה - יהיו A ו-B קבוצות אם קיימת פונקציה חח"ע מ A על B, נאמר ש-A שקולה ל-B
והסימון יהיה $A \sim B$ או $|A|=|B|$. נאמר גם ש-A **שוות-עוצמה** ל-B.

דוגמאות

I. $A = \mathbb{N}$, $B =$ טבעיים זוגיים
$f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$
$f(x) = 2x$

II. $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$, $B = \{(x,y) \mid x^2+y^2<4\}$
$f: A \to B$
$f(x,y) = (2x, 2y)$

III. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0<x<1\}$
$f: A \to B$
$f(x) = \frac{1}{x}$

קבוצה בת-מניה - כל קבוצה שהיא סופית או שקולה ל $\mathbb{N}$.
- * כל קבוצה סופית כמובן בת-מניה.
- * $\mathbb{N}$ כמובן בת מניה.
- * הטבעיים הזוגיים (דוגמא I) היא בת מניה.
- * עבור A בת-מניה, גם $A \times A$ בת-מניה.

דוגמא I

מצאו פונ' חח"ע ועל בין $\mathbb{N}$ ל $\mathbb{Z}$

פתרון: נתחיל לספור את $\mathbb{Z}$

......	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	......
	9	7	5	3	1	0	2	4	6	8	10	

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ זוגי} \\ -\frac{n+1}{2} & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

מסקנה - $\mathbb{Z}$ בת-מניה

סימון - נסמן את העוצמה של $\mathbb{N}$ כ- $\aleph_0$ (אָלֶף-אֶפֶס)
כל קבוצה בת-מניה ואינסופית שקולה ל-$\mathbb{N}$, צ"א עוצמתה $\aleph_0$.

טענות

(4.4) * $\mathbb{Q}$ היא בת-מניה

(4.5) * כל קבוצה שחלקית לקבוצה בת-מניה, היא עצמה בת-מניה.

(4.6) * לכל קבוצה אינסופית יש תת-קבוצה בת-מניה.

* עבור A בת-מניה ואינסופית, מתקיים: $|\underbrace{A\times A\times \dots \times A}_{n \text{ פעמים}}| = \aleph_0$

* איחוד של 2 קבוצות בנות מניה היא קבוצת בת-מניה.

* אם לכל i מתקיים $|A_i| = \aleph_0$ ו- $\aleph_0 = |I|$ אז $\bigcup_{i\in I} A_i$ בת-מניה.

שאלה: האם כל קבוצה אינסופית היא בת-מניה?

משפט: קבוצת המספרים הממשיים בין 0 ו-1, אינה בת-מניה.
נקרא לעוצמה של הקבוצה הזאת עוצמת הרצף, נסמן אותה ב- $\aleph$

טענה (4.7): $|\mathbb{R}| = \aleph$

* כל קטע (בלתי מנוון) שקול ל-$\mathbb{R}$.

קטעים

$a < x < b$	(a,b)	לא כולל קצוות
$a \le x \le b$	$[a,b]$	כולל קצוות
$a < x \le b$	$(a,b]$	
$a \ne b$ $a < b$		קטע לא מנוון

תרגיל I

נתונות 100 קבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$

שכולן חלקיות לקבוצת הממשיים $\mathbb{R}$.

נתון שלכל i המשלים של A_i ב- $\mathbb{R}$ הוא קבוצה בת-מניה.

נסמן $A = \bigcap_{1\le i\le 100} A_i$

ונסמן ב- B את המשלים של A ב $\mathbb{R}$.

מהי עוצמת B?

א) 0

ב) מספר טבעי כלשהו שאינו 0

ג) $\aleph_0$

ד) $\aleph$

ה) התשובה תלויה בבחירתה של הקבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$

פתרון:

$$A^c = \left(\bigcap_{1\le i\le 100} A_i\right)^c \underset{\text{עפ"י חוקי דה מורגן}}{=} \bigcup_{i=1}^{100} A_i^{\,c} = \text{איחוד של קבוצות בנות מניה} \longrightarrow \text{קבוצה בת-מניה אינסופית}$$

תרגיל II

מצאו את עוצמת הקבוצות הרשומות. הוכיחו.

א) $K = \{x \in \mathbb{R} \mid 0.17+3x \in \mathbb{Z}\}$

ב) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 4x-y=5\}$

ג) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+y \in \mathbb{Z} \wedge 4x-y=5\}$

פתרון:

א) $f: K \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 0.17+3x$ — מכיוון שהפונ' חח"ע ועל העוצמה היא: $|K| = \aleph_0$

ב) $f: \mathbb{R} \to L$, $f(x) = (x, 4x-5)$ — מכיוון שהפונ' חח"ע ועל העוצמה היא: $|L| = \aleph_0$

ג) $f: M \to \mathbb{Z}$, $f(x,y) = x+y$

$$M = \{(x,y) \mid x+y \in \mathbb{Z} \wedge 4x-y=5\} = \{(x,4x-5) \mid x+4x-5 \in \mathbb{Z}\} =$$
$$\{(x,4x-5) \mid 5x-5 \in \mathbb{Z}\} = \{(x,4x-5) \mid 5x \in \mathbb{Z}\}$$

הוכחת חח"ע

$M = \{(x,4x-5) \mid 5x \in \mathbb{Z}\}$

$f(x_1, 4x_1-5) = 5x_1-5$

$f(x_2, 4x_2-5) = 5x_2-5$

ניקח שני איברים שונים ב ולאחר שנראה שהם שווים נוכיח חח"ע

$5x_1-5 = 5x_2-5$

$\Downarrow$

$x_1 = x_2$

מ.ש.ל חח"ע

הוכחת על

יהי $m \in \mathbb{Z}$, ניקח $x = \frac{m+5}{5}$

$m = 5x-5$

נוכיח כי $(x,4x-5) \in M$

$x+4x-5 = 5x-5 = m \in \mathbb{Z}$

ולכן הנקודה $(x,4x-5)$ אכן שייכת ל M.

נחשב את $f((x,4x-5))$

$f((x,4x-5)) = x+4x+5 = m$

מ.ש.ל על

תשובה לג

מכיוון שהפונ' חח"ע ועל העוצמה היא: $|M| = \aleph_0$

סדר בין עוצמות

הערה: עבור קבוצות סופיות מתקיים:
$|A|<|B| \iff A$ שוות עוצמה לקבוצה חלקית ממש של B.

נגדיר לקבוצות כלשהן (אינסופיות וסופיות)
$|A| \le |B| \iff A$ שוות עוצמה לקבוצה חלקית של B.

* ברור שאם $A \subseteq B$ אז $|A| \le |B|$

ועוד נגדיר: $|A| < |B| \iff |A| \le |B|$ וגם $|A| \ne |B|$

שאלה: איזו עוצמה גדולה יותר $\aleph_0$ או $\aleph$?
תשובה: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \Leftarrow \mathbb{N} \le \mathbb{R}$
מסקנה $\aleph_0 \le \aleph$, הוכחנו בעבר כי $\aleph_0 \ne \aleph$
כלומר, $\aleph_0 < \aleph$ מ.ש.ל

* $\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר.

משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין (ק-ש-ב, 4.26)
עבור m, k עוצמות:
אם $m \le k$ וגם $m \ge k$ אז $k = m$

לדוגמא: אם רוצים להוכיח כי $|A|=|B|$, מספיק למצוא פונ' חח"ע $f: A \to B$
כדי להסיק כי $|B| \ge |A|$ ואז נקבל שיוויון לפי משפט ק-ש-ב

משפט קנטור - לכל קבוצה A מתקיים $|A| < |P(A)|$
מסקנה - קיימות אינסוף עוצמות אינסופיות
נימוק:
$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < \dots$$

כלל הסנדוויץ' (מסקנה ממשפט ק-ש-ב)
אם $A \subseteq B \subseteq C$ ו- $|A| = |C|$
אז $|B| = |A|$ (וגם $|B| = |C|$)

פעולות על עוצמות

חיבור - בהינתן עוצמות כלשהן k,m , נבחר קבוצות נציגים A,B כך ש $|A|=k$ $|B|=m$ ו $A\cap B=\emptyset$
נחשב את העוצמה של קבוצת האיחוד ונגדיר:

$$k+m=|A\cup B|$$

דוגמא:

נחשב את $\aleph_0+\aleph_0$:

נבחר קבוצות נציגים: A = קבוצת המספרים הזוגיים.
B = קבוצת המספרים האי-זוגיים.

ראינו כבר כי $\aleph_0=|A|$
קל לראות גם ש $\aleph_0=|B|$
וכמובן שהקבוצות זרות
מהו $A\cup B$? $A\cup B=\mathbb{N}$ ולכן $|A\cup B|=\aleph_0$

מסקנה: $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

תרגיל I

חשב את $n+\aleph_0$ עבור n מספר טבעי כלשהו.

$|A|=n$ $\quad A=\{1,2,\dots,n\}$

$|B|=\aleph_0$ $\quad B=\{n+1,n+2,\dots\}$

פתרון

$A\cap B=\emptyset \qquad A\cup B=\{1,2,\dots\}=\mathbb{N}\setminus\{0\}\Rightarrow|A\cup B|=\aleph_0$

$\aleph_0+n=\aleph_0$

תרגיל II

חשב את $\aleph_0+\aleph$ (ע"פ ההגדרה)

$A=\mathbb{N}$

$B=\{0<x<1 \mid x\in\mathbb{R}\}$

$(0,1)\subseteq A\cup B\subseteq\mathbb{R} \qquad |\mathbb{R}|=\aleph \qquad |(0,1)|=\aleph \quad \xRightarrow{\text{ע"פ כלל הסנדוויץ'}} \quad |A\cup B|=\aleph$

$\aleph_0+\aleph=\aleph$

תרגיל III

חשב את $\aleph+\aleph$

$A=(0,1]$ $\quad |A|=\aleph$

$B=(1,2)$ $\quad |B|=\aleph$

$A\cap B=\emptyset$

$A\cup B=(0,2)$

$|A\cup B|=\aleph \Rightarrow \aleph+\aleph=\aleph$

כפל - בהינתן עוצמות m,k נבחר קבוצות A,B כך ש $|A|=k$ $|B|=m$.
נחשב את העוצמה של $A\times B$ ונגדיר

$$k\cdot m = |A\times B|$$

* ההגדרה מתאימה גם לקבוצות סופיות

דוגמא

חשב את $\aleph_0\cdot\aleph_0$.

נבחר $A=\mathbb{N}$

$B=\mathbb{N}$

ונחשב את $|A\times B| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph$

מסקנה: $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

* תכונות הכפל הרגילות חלות גם על כפל עוצמות: חוק החילוף, חוק הפילוג וחוק הקיבוץ.

תרגיל I

חשב את $2\cdot\aleph_0$ בשתי דרכים.

1) ישירות ע"פ ההגדרה.

2) ע"פ חוקי עוצמות.

פתרון

1) $A=\{1,2\}$ $\quad$ $B=\mathbb{N}$

$$A\times B = \overbrace{\{(1,n) \mid n\in\mathbb{N}\} \cup \{(2,n) \mid n\in\mathbb{N}\}}^{\text{איחוד שני קבוצות } \aleph_0 \text{, כלומר } \aleph_0+\aleph_0}$$

$|A\times B| = \aleph_0$

2) $2\cdot\aleph_0 = (1+1)\aleph_0 = \aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0$

הגדרה A^B (פעולה על קבוצות) - בהינתן קבוצות A ו B נגדיר את הקבוצה A^B כך:

$A^B = \{f : B \to A \mid \text{פונקציה } f\}$

במילים: A^B היא קבוצת כל הפונ מ B ל A

דוגמא: מהי $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

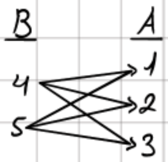
תשובה: סדרות של מספרים ממשיים.

שאלה: אם A ו B קבוצות סופיות, $|A|=m$, $|B|=n$, כמה איברים יש ב $|A^B|$? m^n

פתרון לדוגמה:

ניקח $A=\{1,2,3\}$ $B=\{4,5\}$

אז A^B היא קבוצת כל הפונ מ B ל A, כלומר



$3\cdot 3 = 9$

$3^2 = 9$

$\Longleftarrow$ $|A^B| = |A|^{|B|}$

תזכורת - בהינתן עוצמות k,m נבחר קבוצות A ו B כך ש $|A|=k$ $|B|=m$
נחשב את העוצמה של A^B ונגדיר:

$k^m = |A^B|$

משפט: עבור כל קבוצה מתקיים $|P(A)| = 2^{|A|}$

מסקנה: לכל עוצמה k מתקיים $k < 2^k$

משפט: $|P(\mathbb{N})| = \aleph$

תכונות חזקה
(עבור k_1,k_2,k_3 עוצמות)

$(k_1 k_2)^{k_3} = k_1^{k_3} k_2^{k_3}$

$k_1^{k_2} k_1^{k_3} = k_1^{k_2+k_3}$

$k_1^{k_2 k_3} = (k_1^{k_2})^{k_3}$

תרגיל I
חשב כמה שווה $2^{\aleph_0}$?

$2^{\aleph_0} = \aleph$

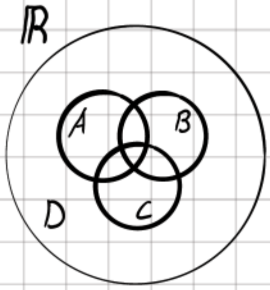
תרגיל II
חשב את $\aleph^{\aleph_0}$.

$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

תרגיל III

נתון כי A,B,C הן קבוצות אינסופיות בנות מניה, החלקיות ל $\mathbb{R}$.
נסמן $D=A^c\cap B^c\cap C^c$
מהי עוצמת D?

א) 0
ב) מספר טבעי שאינו 0
ג) $\aleph_0$
ד) $\aleph$
ה) התשובה תלויה בבחירת הקבוצות A,B,C



$$D=A^c\cap B^c\cap C^c=(\underbrace{A\cup B\cup C}_{\aleph_0})^c$$

$$D\cup D^c=\mathbb{R}$$

ראינו קודם כי

$$\aleph_0+\aleph=\aleph$$

$$|D|=\aleph$$

תרגיל IV

א) מהי עוצמת הרלציות מעל $\mathbb{N}$?
ב) מהי עוצמת הרלציות <u>הסימטריות</u> מעל $\mathbb{N}$?

<u>פתרון:</u>

א) כל רלציה היא תת קבוצה של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, לכן קבוצת <u>כל הרלציות</u> מעל $\mathbb{N}$
היא הקבוצה של כל התת-קבוצות של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, צ"א $P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

$$P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})=2^{|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|}=2^{\aleph_0}=\aleph$$

ב) נסמן ב-S את קבוצת הרלציות הסימטריות וב-A את קבוצת כל הרלציות
$S\subseteq A$
נסמן ב I את קבוצת הרלציות מהצורה I_X כאשר $X\subseteq\mathbb{N}$, צ"א $I_X=\{(n,n)\mid n\in X\}$
$I\subseteq S\subseteq A$

$$|I|=|P(\mathbb{N})|=\aleph$$

$\Downarrow$ עפ"י כלל הסנדוויץ'

$$|S|=\aleph$$

קומבינטוריקה

עקרון החיבור

אם אפשר לבחור "משהו" אחד נסמנו a_1 ב-n_1 אופנים
ומשהו "אחר" שנסמנו a_2 ב-n_2 אופנים,
הרי לבחירת אחד מן השניים (או a_1 או a_2) יש n_1+n_2 אופנים.

לדוגמא:

אם בקבוצה A_1 יש 5 איברים ובקבוצה A_2 יש 8 איברים
והקבוצות A_1 ו-A_2 זרות זו לזו, אזי בקבוצה $A_1 \cup A_2$ יש לנו $5+8$ איברים, כלומר 13.

עקרון הכפל

אם אפשר לבחור את האיבר a_1 ב-n_1 אופנים
ולאחר כל בחירה כזו אפשר לבחור את האיבר a_2 ב-n_2 אופנים, אזי לבחירת שניהם
בסדר הנ"ל (a_1 ולאחריו a_2) יש $n_1 \cdot n_2$ אפשרויות

שאלה לדוגמא:
מתוך 10 ספרי אלגברה ו-6 ספרי גיאומטריה יש לבחור שני ספרים,
אחד לכל מקצוע. כמה זוגות שונים כאלה אפשר לבחור?

תשובה: אנו צריכים לבחור ספר אלגברה ונוכל לעשות זאת ב-10 אופנים
ולאחר מכן ספר גיאומטריה ונוכל לעשות זאת ב-6 אופנים
ולכן יש לנו $6 \cdot 10$ אפשרויות לבחירה, כלומר 60

חליפה

חליפה היא סידור של k איברים שונים מתוך n איברים (כאשר יש משמעות לסדר האיברים)

חליפה היא בעצם הרכב גרפי אשר מכניס איברים מתוך n למעין "קבוצה".
כאשר אומרים חליפה של שלושה איברים, זו הכוונה (a_1,a_2,a_3) כלומר "קבוצה" שמכילה שלושה מתוך n איברים.

שני חליפות שוות זו לזו, אם ורק אם $a_i=b_i$ לכל $1\le i\le k$.

את מספר החליפות של k איברים מתוך n נסמן ב- $p(n,k)$:

$p(n,1)=n$ $\qquad$ $p(n,k)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\ldots\cdot(n-k+1)$

למשל, ניקח את ה א-ים הבאה $\{1,2,3,\ldots\ldots,30\}$
ונבקש לקבל את החליפות של 3 איברים מתוך ה-30, כלומר $p(30,3)=30\cdot29\cdot28=24{,}360$

בעצם ניתן להרכיב 24,360 שלישיות שונות, או במילים אחרות 24,360 חליפות.

תמורה

חליפה של n איברים מתוך n איברים, נקראת תמורה של n איברים.

תמורה של n איברים שונים היא סידור של n האיברים, כלומר $n!$

את התמורה נסמן כך: $p(n)$

לדוגמא: עבור 123 כל התמורות הן: 123, 132, 213, 231, 312, 321

חליפות ותמורות עם חזרות

מס' החליפות עם חזרות של k איברים מתוך n הוא: $\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\ldots\cdot n}_{k\text{ פעמים}}=n^k$

וכאשר מדובר בתמורות עם חזרות,
מספר התמורות של n איברים מתוך n תמיד יהיה n^n

צירופים

$C(n,k)$ - מס׳ האפשרויות לבחור k איברים שונים מתוך n איברים ללא חשיבות לסדר ללא חזרות. במילים אחרות, מס׳ תתי קבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n.

לדוגמא: מספר הדרכים לפזר k כדורים **שונים** ב n תאים

$$C(n,k)=\frac{P(n,k)}{k!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{k}$$

"n מעל k"

צירופים עם חזרות

בחירה של k_1 עצמים מסוג 1, k_2 עצמים מסוג 2, ..., k_n עצמים מסוג n.
כאשר $k_1+k_2+\ldots\ldots+k_n=k$

לדוגמא: מספר הדרכים לפזר k כדורים **זהים** ב n תאים הוא כמו מספר הפתרונות בשלמים למשוואה:

$$x_1+\ldots\ldots+x_n=k$$

$$D(n,k)=\frac{(n-1+k)!}{k!\,(n-1)!}=\binom{(n-1)+k}{k}=\binom{(n-1)+k}{n-1}$$

טבלת סיכום

		בלי חזרות	עם חזרות
יש חשיבות לסדר	חליפות - בחירת k עצמים מתוך n	$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
יש חשיבות לסדר	תמורות - סידור n עצמים שונים בשורה	$P(n)=n!$	$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots\ldots k_n!}$
אין חשיבות לסדר	צירופים - בחירת k עצמים מתוך n	$C(n,k)$ $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$	$D(n,k)$ $\binom{n-1+k}{k}=\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!}$

הבינום של ניוטון

נוסחת הבינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

הפיתוח של הנוסחה הגיע מכאן:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{n פעמים}}(a+b) = a^n + n\cdot a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots + b^n$$

למשל:

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^3$$

נוכל לשים לב לחוקיות מסוימת לגבי המקדמים, אלה הם המקדמים הבינומיים.

ניתן לחשב את המקדמים ע"י משולש פסקל:

n= 0	1
n= 1	1 1
n= 2	1 2 1
n= 3	1 3 3 1
n= 4	1 4 6 4 1
n= 5	1 5 10 10 5 1
n= 6	1 6 15 20 15 6 1
n= 7	1 7 21 35 35 21 7 1
n= 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
n= 9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
n= 10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

כמו שניתן לראות כל ערך מורכב מהערכים שמעליו (ימין+שמאל).
1 1
2

בעזרת המשולש ניתן לבנות את המשוואה בקלות.

תכונות של המקדמים הבינומיים

* סכום המקדמים הבינומיים בפיתוח $(x+a)^n$ יהיה 2^n.

* סכום המקדמים הבינומיים שבמקומות האי-זוגיים שווה לסכום המקדמים במקומות הזוגיים
למשל, $n=5$

1 5 10 10 5 1 $1+10+5 = 5+10+1$

עקרון ההכלה וההפרדה

ישנם מקרים בהם בכדי להגיע לפתרון נצטרך לעבוד בשלבים.

לדוגמה: כמה מספרים בין 1 ל-3000 אינם מתחלקים לא ב-3, לא ב-5 ולא ב-7?

בכדי לחשב זאת, נחלק אותם לשלושה קבוצות,
המספרים שמתחלקים ב-3 $|A_1| = 1000$
המספרים שמתחלקים ב-5 $|A_2| = 600$
המספרים שמתחלקים ב-7 $|A_3| = 428$
ולאחר מכן חישוב של חיתוך הקבוצות המספרים שמתחלקים ב-3 וב-5 (15) $|A_1 \cap A_2| = 200$
המספרים שמתחלקים ב-3 וב-7 (21) $|A_1 \cap A_3| = 142$
המספרים שמתחלקים ב-5 וב-7 (35) $|A_2 \cap A_3| = 85$
והמספרים שמתחלקים ב-3, ב-5 וב-7 (105) $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$

כעת נוכל לחשב את סה"כ המספרים בין 1 ל-3000 שלא מתחלקים ב-3, 5 ו-7:

$$3000 - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$1000 - 600 - 428 + 200 + 142 + 85 - 28 = 1371$$

עבור ניסוח המשפט נשתמש בסימנים הבאים:

סכום מספרי האיברים בכל n הקבוצות $S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

סכום מספרי האיברים בכל $\binom{n}{2}$ חיתוכים של שתי קבוצות מתוך ה-n $S_2 = \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j|$

סכום מספרי האיברים בכל $\binom{n}{3}$ חיתוכים של שלוש קבוצות מתוך ה-n $S_3 = \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$

מספר האיברים בחיתוך כל n הקבוצות $S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

משפט ההכלה וההפרדה

נתונות n קבוצות סופיות $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$
מספר איברי קבוצת האיחוד $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ הוא:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots + (-1)^{n-1} S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i$$

אי סדר מלא

תמורה של n מספרים $1,2,\dots,n$, נקראת אי-סדר מלא, אם אף מספר אינו נמצא במקומו.

למשל:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&5&3&2&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&2&4\end{pmatrix}$$

אך התמורה הבאה לא מקיימת אי-סדר מלא מכיוון ש-3 נמצא במקומו

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&5&2&1\end{pmatrix}$$

דוגמה לאי סדר מלא

נבדוק את 1 2 3 4, נכתוב ידנית את המקרים התקינים.

2 1 4 3	3 1 4 2	4 3 2 1
2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
2 3 4 1	3 4 2 1	4 1 2 3

כעת נפתור זאת בצורה קומבינטורית:

נגדיר $1\le j\le 4$! $|U|=4!$ $\quad A_i=$ מספר אחד חוזר על עצמו

במקרה הראשון, נבדוק את האפשרויות כאשר מספר אחד נמצא במקום:

$$S_1=\sum_{i=1}^{4}|A_i|=\binom{4}{1}\cdot 3!$$

מקרה שני, כאשר שני איברים נמצאים במקום שלהם:

$$S_2=\sum_{i=1}^{4}|A_i|=\binom{4}{2}\cdot 2!$$

מקרה שלישי, כאשר שלושה איברים נמצאים במקום שלהם:

$$S_3=\sum_{i=1}^{4}|A_i|=\binom{4}{3}\cdot 1!$$

והמקרה האחרון, כאשר כל ארבעת האיברים במקומם וכמובן שנקבל 1:

$$S_4=\binom{4}{4}=1$$

כעת נחשב את סה"כ התמורות שבהם אין איברים שמופיעים במקומם:

$$|U|-S_1+S_2-S_3+S_4=4!-\frac{4!}{1!(4-1)!}\cdot 3!+\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot 2!-\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot 1!+1=4!-4\cdot 3!+6\cdot 2!-4\cdot 1!+1=9$$

ונקבל את אותה תשובה כמו בספירה הידנית.

עקרון שובך היונים

הגדרה

אם יש n שובכים ו-m יונים אז קיים לפחות שובך אחד שיש בו לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים

ובמילים אחרות: אם יש יותר יונים משובכים אז קיים לפחות שובך אחד שיש בו יותר מיונה אחת

דוגמא I

נתונים 7 מספרים טבעיים.
הוכיחו שקיים מביניהם זוג שההפרש ביניהם מתחלק ב-6 ללא שארית

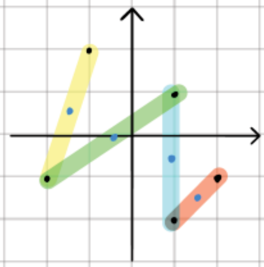
פתרון

נתונים 7 מספרים - היונים, השאריות בחלוקה ב6 - השובכים.
$\lceil \frac{7}{6} \rceil = 2$, כלומר לפי עקרון שובך היונים יש שני מספרים שיש להם אותה שארית חלוקה ב-6
ההפרש בין המספרים האלה נתחלק ב-6 (ללא שארית)

דוגמא II

נתונות 5 נקודות במישור ששייכות ל $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\{(x,y) \mid x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}\}$
הוכיחו שקיים זוג מביניהם שאמצע הקטע שמחבר אותם
גם הוא נקודה ב $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

נוסחת אמצע קטע $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$



פתרון

ראשית נגדיר את השובכים (אפשרויות):

$N_1 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid$ x זוגי y זוגי $\}$

$N_2 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid$ x זוגי y אי זוגי $\}$

$N_3 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid$ x אי זוגי y אי זוגי $\}$

$N_4 = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid$ x אי זוגי y זוגי $\}$

היונים הם 5 הנקודות הנתונות

לפי עקרון השובך - יש שובך אחד שיש בו (לפחות) שני יונים.
ז"א אומרת נקודות (x_1,y_1) ו (x_2,y_2) כך של x_1,x_2 אותה זוגיות ו y_1,y_2 אותה זוגיות
ולכן x_1+x_2 זוגי ו y_1+y_2 זוגי.

ולכן $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

מ.ש.ל

רקורסיה

הגדרה רקורסיבית

* תנאי התחלה

איברים אחדים מוגדרים בצורה מפורשת.

* יחס נסיגה

האיברים הנותרים מוגדרים באמצעות איברים שכבר הוגדרו.

אחת הדוגמאות המפורסמות של רקורסיה היא סדרת פיבונאצ'י:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_{n-1} + a_{n-2}$$

שמונת האיברים הראשונים של הסדרה יהיו:

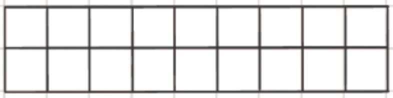
0 1 1 2 3 5 8 13

ניתן לראות בעצם שיש לנו שני איברים מוגדרים 0,1
וכל האיברים שמגיעים לאחר מכן הם סכום שני האיברים שקודמים להם.

דוגמא כמו הבא

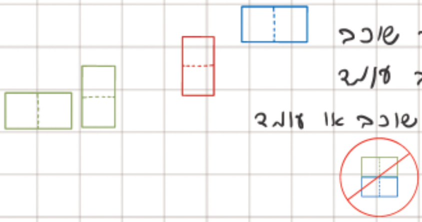
<u>דוגמא</u>

בידנו מספר בלתי מוגבל של בלוקים בגודל 2x1 
בלוק יכול להיות באחד משלושה צבעים: ירוק, כחול או אדום
עלינו לרצף מלבן שמימדיו 2xn בלי לחרוג מגבולות המלבן.



(דוגמא עבור $n=9$)

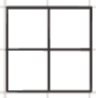
בלוק כחול אפשר להניח רק במצב שוכב
בלוק אדום אפשר להניח רק במצב עומד
ובלוק ירוק אפשר להניח במצב שוכב או עומד
<u>אסור</u> להניח בלוק ירוק מעל כחול

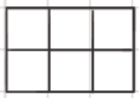


נסמן ב a_n את מספר הריצופים האפשריים.
1) חשבו במפורש את a_1, a_2, a_3
2) רשמו יחס נסיגה עבור a_n, עם תנאי התחלה מספיקים.

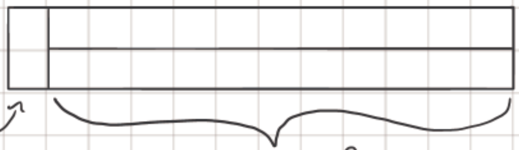
<u>פתרון</u>
1)

a_1: 
$a_1 = 2$ (יש רק 2 אפשרויות לבלוקים עומדים)

a_2: 
$a_2 = \underset{(עומדים)}{2\cdot 2} + \underset{(שוכבים)}{3} = 7$

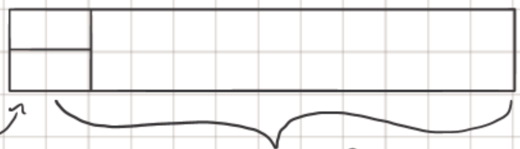
a_3: 
$a_3 = \underset{(משמאל יש עומד)}{2\cdot 7} + \underset{(משמאל יש שוכבים)}{3\cdot 2} = 20$

2) קיימות שני אופציות להתחלת הבלוק:

a_n: 
בהתחלה בלוק עומד
מלבן באורך $n-1$

$2\cdot a_{n-1}$

<u>או</u>

a_n: 
בהתחלה בלוקים שוכבים
מלבן באורך $n-2$

$3\cdot a_{n-2}$

<u>תנאי התחלה</u>
$a_0 = 1$
$a_1 = 2$

<u>יחס נסיגה</u>
$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

פתרון נוסחא רקורסיבית

דוגמא בעזרת סדרת פיבונאצ'י

$a_0 = 0$
$a_1 = 1$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

נניח כי הפתרון הוא מהצורה $a_n = x^n$
אז נקבל:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \quad / \frac{1}{x^{n-2}}$$

$$x^2 = x + 1$$ המשוואה האופיינית

לאחר שנפתור את המשוואה נקבל:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

כעת נשכלל את הפתרון ונרשום:

$$a_n = A \cdot x_1^n + B \cdot x_2^n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

זהו הפתרון של יחס הנסיגה, כאשר A ו B נקבעים לפי תנאי ההתחלה, כפי שד"מ ונקבל:

$$a_0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A + B$$

(1) $A + B = 0$

$$a_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

(2) $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$

מפתרון מערכת המשוואות נקבל:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

לאחר מכן, נציב ונקבל!

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

קיבלנו את המשוואה לחישוב איבר ספציפי בסדרה הרקורסיבית של פיבונאצ'י

דוגמה נוספת לפתרון נוסחה רקורסיבית

$a_0 = 1$

$a_1 = 6$

$a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$

נניח שהפתרון הוא $a_n = x^n$

$$x^n = 8x^{n-1} - 15x^{n-2} \quad / \frac{1}{x^{n-2}}$$

$$x^2 = 8x - 15$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 3$$

כעת נשכלל את הפתרון ונרשום:

$$a_n = A \cdot x_1^n + B \cdot x_2^n = A \cdot 3^n + B \cdot 8^n$$

הצבה מול תנאי ההתחלה

$$a_0 = A \cdot 5^0 + B \cdot 3^0 = A + B$$

$$a_1 = A \cdot 5^1 + B \cdot 3^1 = 5A + 3B$$

(1) $A + B = 1$

(2) $5A + 3B = 6$

נפתור את מערכת המשוואות:

(1) $A = 1 - B$

(2) $5(1-B) + 3B = 6$

$5 - 5B + 3B = 6$

$-2B = 1$

$B = -\frac{1}{2}$

(1) $A = 1 - (-\frac{1}{2})$

$A = 1\frac{1}{2}$

$$\boxed{a_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3^n}$$

פונקציות יוצרות

הגדרה

בהינתן סדרה $\{a_n\}$ נבנה טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ כך שהמקדם של x^n הוא a_n.

ובהינתן טור פורמלי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נאמר שהפונקציה $f(x)$ יוצרת את הסדרה $\{a_n\}$

לדוגמה:

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ יוצרת את הסדרה: $0,1,2,3,4,5,\dots$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ יוצרת את הסדרה: $1,1,1,1,1,\dots$

נוסחאות חשובות

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$ (טור גיאומטרי אינסופי)
2. $\sum_{n=0}^{m} x^n = 1+x+x^2+\dots+x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$ (סכום סופי של סדרה הנדסית)
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ (בינום)

   ונובע גם $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k = (1-x)^n$
4. $\left(\frac{1}{1-x}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} D(m,n)\cdot x^n$
5. $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum C_k x^k$ (כפל בין טורים)

   כאשר $C_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$

נוסחאות עזר

* המקדם של x^m בביטוי $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^k$ הוא מספר הפתרונות של $t_1+t_2+\dots+t_k=m$
  כלומר $D(k,m)$

דוגמה I

מהו המקדם של x^{27} בביטוי הבא:

$$\frac{x-2x^3+3x^9-4x^{15}+x^{17}-8x^{30}+2x^{33}}{1-x} = \left(\frac{1}{1-x}\right)(x-2x^3+3x^9-4x^{15}+x^{17}-8x^{30}+2x^{33})$$

כעת ע"פ נוסחה ②:

$$(1+x+x^2+\dots)(x-2x^3+3x^9-4x^{15}+x^{17}-8x^{30}+2x^{33})$$

נקבל x^{27} עבור כל אחד מהמחוברים (בסוגריים סימנים) שהחזקה שלו לא גדולה מ-27.
לכן המקדם שלו יהיה:

$$1-2+3-4+1=-1$$

דוגמה II

במחסן של חנות מחשבים נמצאים n מחשבים ישנים זהים.
בעל החנות מעמיס את המחשבים על שלושה רכבים שונים,
שבכל אחד מהם יש מקום ל-24 מחשבים לכל היותר.

א) רשמו פונקציה יוצרת עבור מספר הדרכים לחלק את n המחשבים בין שלושת הרכבים.
ב) אם מספר המחשבים הוא 70 חשבו את מספר הדרכים לחלק אותם בין המכוניות.

פתרון

א) מספר הדרכים לחלק n מחשבים בין שלושה רכבים
הוא המקדם של x^n בפונקציה:

$$f(x)=(1+x+x^2+\dots+x^{24})^3$$

ב) $n=70$. נמצא את המקדם של x^{70}.
נפשט את הביטוי מסעיף א' ע"י נוסחה ②:

$$\left(\frac{1-x^{25}}{1-x}\right)^3=\left(\frac{1}{1-x}\right)^3\cdot(1-x^{25})^3$$

ונפרק את הביטוי בעזרת נוסחה ④ ו ③:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D(3,n)x^n\cdot\sum_{n=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^k x^{25k}$$

קיבלנו:
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} D(3,n)x^n\cdot\sum_{n=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^k x^{25k}$$

צ"ל

$$D(3,70)\cdot\binom{3}{0}\cdot(-1)^0+D(3,45)\cdot\binom{3}{1}\cdot(-1)^1+D(3,20)\cdot\binom{3}{2}\cdot(-1)^2=$$

$$\binom{72}{70}\cdot1\cdot1+\binom{47}{45}\cdot3\cdot(-1)+\binom{22}{20}\cdot3\cdot1=$$

$$\frac{72\cdot71}{2!}-\frac{47\cdot46}{2!}\cdot3+\frac{22\cdot21}{2!}\cdot3 = 2556-3243+693 = 6$$

תורת הגרפים

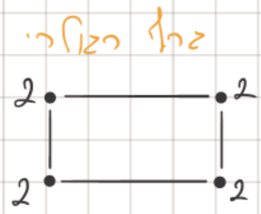
פרק 1 - מבוא ומושגים בסיסיים

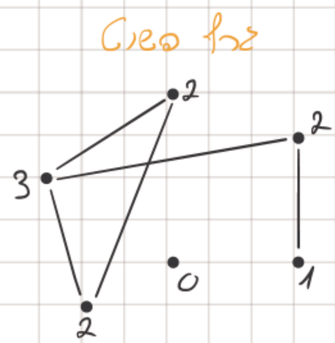
מושגים: * גרף - מורכב מקבוצה של צמתים, מסומנים ע"י נקודות
וקשתות שמחברות חלק מהצמתים

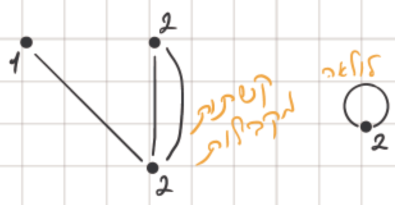
$G=(V,E)$ כאשר V קבוצת הצמתים
E קבוצת הקשתות

* צומת v, קשת e
* דרגה של צומת $deg(v)$ - כמות הקשתות שיוצאות מהצומת
* לולאה - קשת שיוצאת מצומת מסוימת וחוזרת אל אותה הצומת
* קשתות מקבילות - שני קשתות שמחברות שני צמתים זהים
* גרף פשוט - ללא לולאות וללא קשתות מקבילות
* גרף רגולרי - גרף שכל דרגות הצמתים שוות

דוגמאות של גרפים:





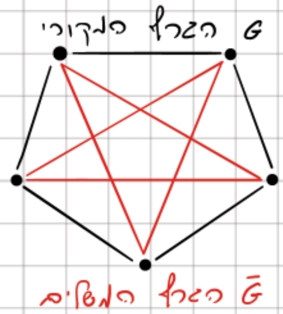


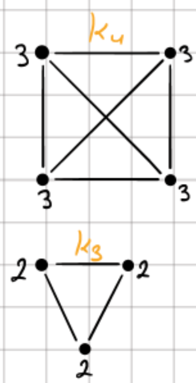
משפט: סכום הדרגות בגרף שווה לפעמיים מספר הקשתות $\sum_{v\in V} deg(v) = 2\cdot|E|$

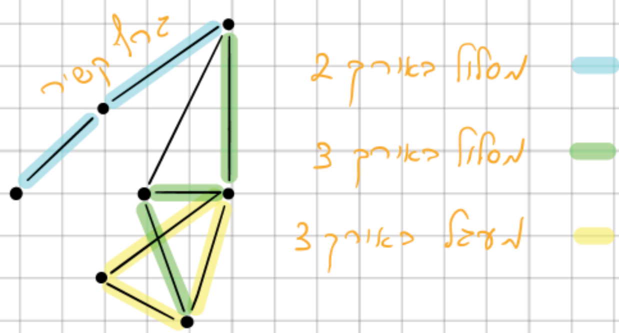
מסקנות:
* סכום הדרגות תמיד זוגי
* בכל גרף מספר הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית, הוא זוגי
* אם בגרף מספר הצמתים הוא אי-זוגי, אז יש בו לפחות צומת אחת עם דרגה זוגית.

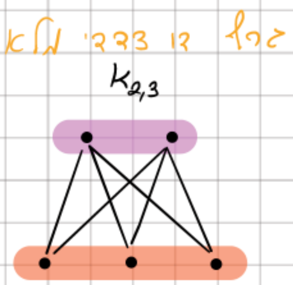
מושגים נוספים

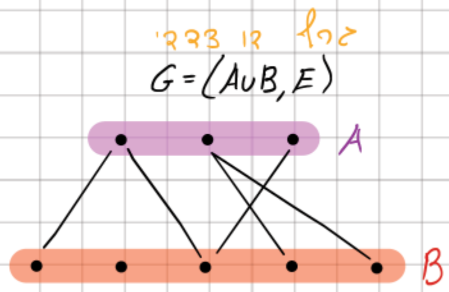
* **מסלול** - מחבר בין שני צמתים ע"י הקשתות בדרך.
  אורך מסלול נמדד ע"י מספר הקשתות.
* **מעגל** - מסלול שחוזר לאותה צומת ממנה הוא התחיל.
* **גרף קשיר** - בין כל שני צמתים יש מסלול.
* **רכיב קשירות** - מעין תת-גרף כאשר ניתן להעביר מסלול לכל הצמתים שבו
* **הגרף המלא K_n** - גרף פשוט עם n צמתים וכל הקשתות האפשריות.
* **גרף משלים $\bar{G}$** - הגרף שמשלים את הקשתות ל-K_n, כלומר $\bar{G} = K_n - G$
* **גרף דו-צדדי** - כאשר ניתן לחלק את קבוצת הצמתים לשני קבוצות (A ו B) כך שאין קשתות בתוך אותה קבוצה.
* **גרף דו-צדדי מלא $K_{p,q}$** - בדומה לגרף דו-צדדי רק כאשר קיימות בו כל הקשתות האפשריות (מלבד אלו שבתוך הקבוצה)
* **משפט** - גרף (שיש בו לפחות שני צמתים) הוא גרף דו-צדדי אמ"מ אין בו מעגל באורך אי-זוגי.

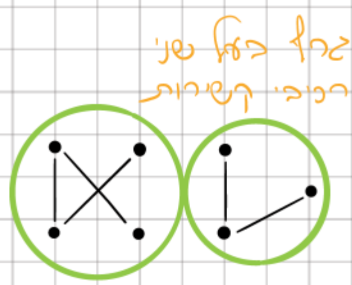










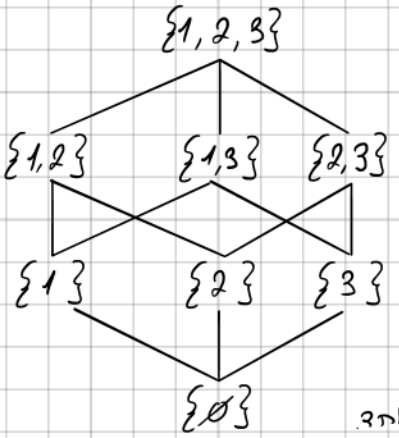


תרגיל I

הוכיחו כי בכל גרף פשוט (שיש בו לפחות שני צמתים)
יש לפחות שני צמתים בעלי אותה דרגה.

הוכחה: נסמן ב-n את מספר הצמתים בגרף.
הגרף הוא פשוט ולכן הדרגה של הצומת הוא לכל היותר $n-1$.
צ"א הדרגה של צומת הוא אחד מתוך $\{0,1,\dots,n-1\}$
אם יש צומת שהדרגה שלו היא 0 אז לא יתכן צומת עם דרגה $n-1$.
צ"א יש רק $n-1$ דרגות שונות אפשריות. יש n צמתים.
ולכן ע"פ עקרון שובך היונים יש לפחות שני צמתים בעלי אותה דרגה. מ.ש.ל

תרגיל II



כל תת קבוצה של $A=\{1,2,\dots,8\}$ הוא צומת בגרף
הקשתות הן הקווים של דיאגרמת הסה המתאימה ליחס ההכלה.
(א) הראו שהגרף הוא רגולרי
(ב) חשבו את מספר הקשתות בגרף
(ג) הוכיחו שהגרף הוא דו צדדי

פתרון:

(א) נחשב את הדרגה של צומת כלשהו.
יהי $X \subseteq A$ צומת בגרף. נניח $|X|=j$
הוא מחובר בקשת מעליו לכל התת קבוצות של A שמכילים את X ועוד איבר אחד.
יש מעליו $8-j$ קשתות. הוא מחובר בקשת מתחתיו לכל התת קבוצות שלו
שמתקבלות ע"י הורדת איבר אחד מ-X. יש מתחתיו בדיוק j קשתות.
(ניתן לראות בסרטוט משמאל את אותו מקרה עבור $A=\{1,2,3\}$)

(ב) מספר הקשתות הוא סכום הדרגות חלקי 2,
וסכום הדרגות בגרף רגולרי הוא מספר הצמתים כפול הדרגה.
במקרה שלנו, מספר הצמתים 2^8, הדרגה היא 8 ולכן מספר הקשתות

$$\frac{2^8 \cdot 8}{2} = 2^{10}$$

(ג) P = התת קבוצות עם מספר זוגי של איברים
Q = התת קבוצות עם מספר אי-זוגי של איברים

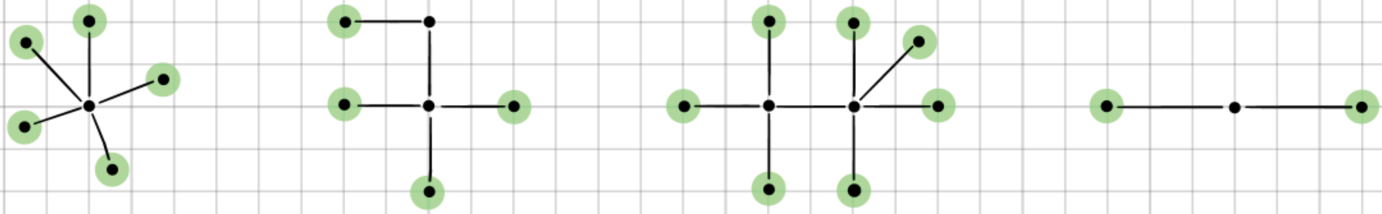
אם $|X|=i$ אז השכנים של X הם הקבוצות עם $i+1$ איברים מעליו או
עם $i-1$ איברים מתחתיו. בכל מקרה אין קשר בין תת-קבוצות עם עוצמות עם אותה זוגיות.

פרק 2 - עצים

מושגים

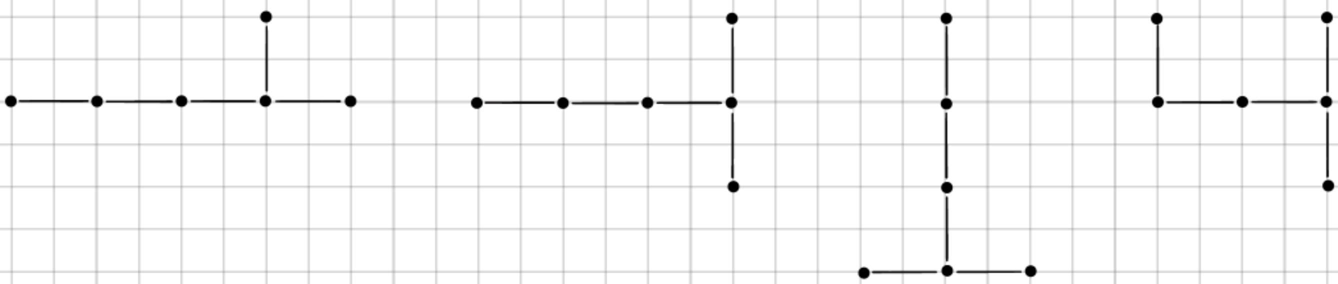
* עץ - גרף קשר ללא מעגלים
* יער - גרף שכל רכיב קשירות שלו הוא עץ
* כל עץ הוא בהכרח גם יער, אך לא כל יער הוא גם עץ
* עלה - צומת בעץ שהדירוג שלו היא 1

דוגמאות לעצים



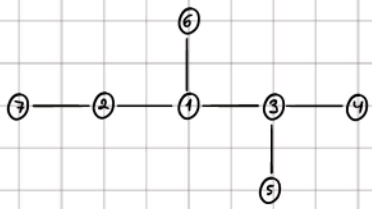
גרפים איזומורפיים

ציור אחר של אותו הגרף, כל הגרפים הבאים זהים לחלוטין, אך מוצגים בצורה שונה:

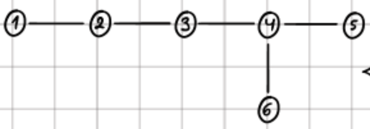


גרפים מתוייגים

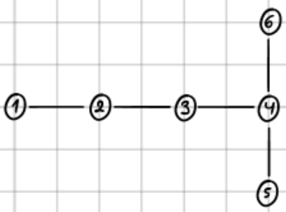
גרפים שיש "שמות" לצמתים



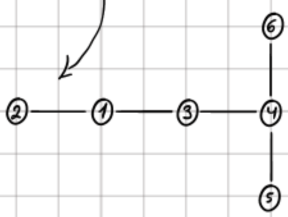
איזומורפיזם בגרפים מתוייגים



איזומורפי לגרף



אך לא לגרף הזה, מכיוון שמספר התיוג לא נכון



משפט

הטענות הבאות שקולות:

א) G הוא עץ (= גרף קשיר ללא מעגלים)

ב) בין כל שני צמתים ב-G יש מסלול יחיד.

ג) G הוא גרף קשיר מינימלי

ד) G הוא קשיר ומתקיים $|E| = |V| - 1$

ה) ב-G אין מעגל ומתקיים $|E| = |V| - 1$

ו) ב-G אין מעגל אבל אם נוסיף קשת כלשהי ייווצר מעגל.

עצים מתוייגים וסדרת פרופר

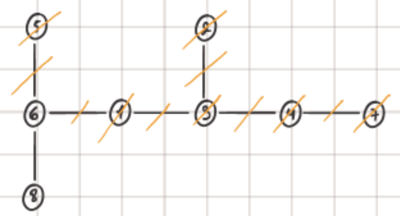
יצירת סדרת פרופר:

1) מוחקים את העלה עם המספר הקטן ביותר ורושמים את המספר של הצומת שהוא היה מחובר אליו

2) חוזרים על שלב 1 על העץ המעודכן עד שנשארים רק 2 צמתים.

הסדרה שהתקבלה היא סדרת פרופר

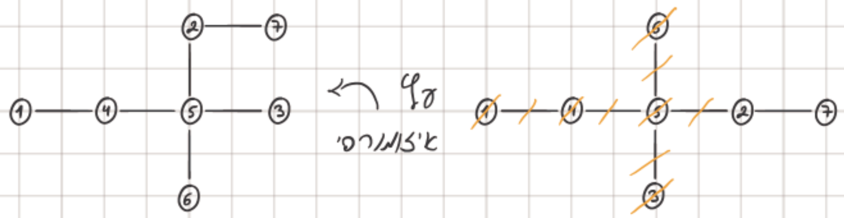
דוגמא I



הסדרה: 3 6 4 3 1 6

מחסן עלים
~~5~~,~~2~~,~~7~~,8
~~4~~ ~~3~~ ~~1~~

דוגמא II



הסדרה: 4 5 5 5 2

מחסן עלים
~~1~~,~~3~~,~~6~~,7
~~4~~ ~~5~~

תכונות של סדרות פרופר:

* אורך הסדרה $n-2$ (n - מספר הצמתים בעץ)
* העלים לא מופיעים בסדרה
* כל צומת (שאינו עלה) מופיע $d-1$ פעמים בסדרה (d - הדרגה)

בניית עץ מתוך סדרת פרופר

ניצור את העץ מהסדרה הבאה: $\cancel{4}\ \cancel{6}\ \cancel{6}\ \cancel{2}\ \cancel{1}$

מחסן עלים

$\cancel{3}, \cancel{5}, 7$

$\cancel{4}\ \cancel{6}\ \cancel{2}\ \cancel{1}$

1) נבדוק את הסדרה ונרשום בצד את מחסן העלים, המספרים שלא מופיעים בסדרה

2) נתחיל מהעלה הקטן ביותר,
במידה והיינו יוצרים את הסדרה, היינו מוחקים אותו ורושמים את המספר הראשון שמופיע בסדרה.
כלומר המספר הקטן ביותר במחסן הוא העלה של המספר הראשון בסדרה.
נמחק את האיבר מהסדרה ומהמחסן ונתייחס להבא בתור האיבר הראשון.

3) (א) כאשר מספר מופיע רק פעם אחת בסדרה, ניתן לדעת כי הוא הופך לעלה לאחר שנסיר את העלה שלו, נוסיף אותו למחסן ונחזור לשלב 2

(ב) כאשר המספר מופיע שוב, לא נרשום אותו במחסן ונחזור לשלב 2

4) ברגע שמחקנו את כל האיברים בסדרה, נותרנו עם שני עלים במחסן, נחבר אותם וכך סיימנו את העץ.

תרגיל

בשאלה זו נתייחס לעצים עם 7 צמתים מתויגים $1,2,\dots,7$

א) כמה עצים כאלה יש?

ב) מצאו את מספר העצים בהם העלים הם בדיוק $1,2,3$.

פתרון

א) מס' העצים = מס' סדרות פרופר מתאימות = סדרה באורך 5 מתוך הספרות $1,2,\dots,7$
כלומר, 7^5

ב) נחשב את כל הסדרות פרופר כאשר $1,2,3$ לא מופיעים בהם.
נשאר רק לחשב את מספר האפשרויות

$$4\cdot\binom{5}{2}\cdot 3! = \frac{5!}{3!2!}\cdot 4\cdot 3! = 240$$

מס' האיברים שיתן ויפיעו כפולים

האפשרויות לסדר מספר כשהוא פעמיים בתוך הסדרה

הכנסת שאר האיברים לסדרה

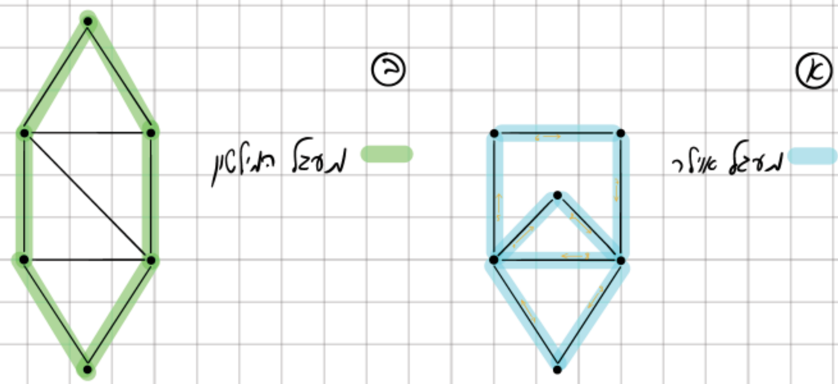
פרק 3 - מעגלי אוילר ומעגלי המילטון

מסלול אוילר בגרף G הוא מסלול בו כל קשת של G מופיעה בדיוק פעם אחת.

מעגל אוילר הוא מעגל שעובר על כל הקשתות של G. (כל מעגל אוילר הוא גם מסלול אוילר)

מסלול המילטון בגרף G הוא מסלול שעובר על כל הצמתים של G בדיוק פעם אחת.

מעגל המילטון הוא מעגל שעובר על כל הצמתים (חוץ מאחד) של G בדיוק פעם אחת.



* אם גרף קשיר מכיל שני צמתים בדרגה אי זוגית וכל השאר זוגיים, ניתן ליצור מסלול אוילר.

* גרף נקרא אוילרי אם יש בו מעגל אוילר.
  משפט 3.1 - גרף קשיר הוא אוילרי אם"ם דרגת כל צומת היא זוגית.

* גרף נקרא המילטוני אם יש בו מעגל המילטון.
  משפט אור - עבור גרף עם n צמתים ; $n \geq 3$:
  אם לכל שני צמתים שאינם שכנים מתקיים $deg(u)+deg(v) \geq n$
  אז G הוא המילטוני

משפט דירק - עבור גרף עם n צמתים ; $n \geq 3$
אם לכל צומת מתקיים $deg(v) \geq \frac{n}{2}$ אז G המילטוני.

תרגיל I

1) האם $K_{2,9}$ אוילרי? המילטוני?
2) האם $K_{6,2}$ אוילרי? המילטוני?

פתרון:
1) $K_{2,9}$ לא אוילרי, כי יש 2 צמתים עם דרגה 9 (אי-זוגית)
$K_{2,9}$ לא המילטוני, $2 \neq 9$

2) $K_{6,2}$ אוילרי, כי כל הדרגות זוגיות
לא המילטוני, $6 \neq 2$

תרגיל II (שאלה מבחינה)

נגדיר גרף G כך:

הצמתים הם תת-קבוצות בגודל 3 מתוך $\{1,2,\dots,7\}$

בין שני צמתים A ו B יש קשת אמ"מ $|A\cap B|=1$

א) כמה צמתים בגרף

ב) מהי הדרגה של כל צומת בגרף?

ג) הוכיחו כי הגרף קשיר.

ד) הוכיחו כי G אינו דו-צדדי

ה) האם G אוילרי?

ו) האם G המילטוני?

פתרון:

א) כמספר האפשרויות לבחור 3 מתוך 7. צ"א $\binom{7}{3}$

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=35$$

ב) לכל צומת בגרף $\{x,y,z\}$ ישנם 3 סוגים של שכנים:

① קבוצות שיש להם x ואין y ולא z

② קבוצות שיש להם y ואין x ולא z

③ קבוצות שיש להם z ואין x ולא y

לכל אחת מהאפשרויות יש $\binom{4}{2}$, כלומר $3\cdot\binom{4}{2}=3\cdot6=18$

מסקנה: לכל צומת בגרף יש 18 שכנים.

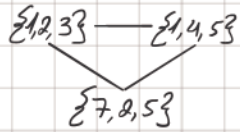
ג) נניח בשלילה שהגרף לא קשיר.

אז יש בו לפחות שני רכיבי קשירות. הקטן מביניהם לא יהיה בו יותר מ-18 צמתים.

סתירה לכך שהדרגה של כל צומת היא 18 (כולל הצומת עצמה יש 19 צמתים)

מסקנה - הגרף קשיר.

ד) נראה שיש מעגל באורך 3 (אי-זוגי)



ה) הגרף אוילרי כי כל הדרגות זוגיות

ו) הגרף הוא המילטוני כי הדרגה של כל צומת גדולה מ- $\frac{n}{2}$ (כאשר $n=35$)

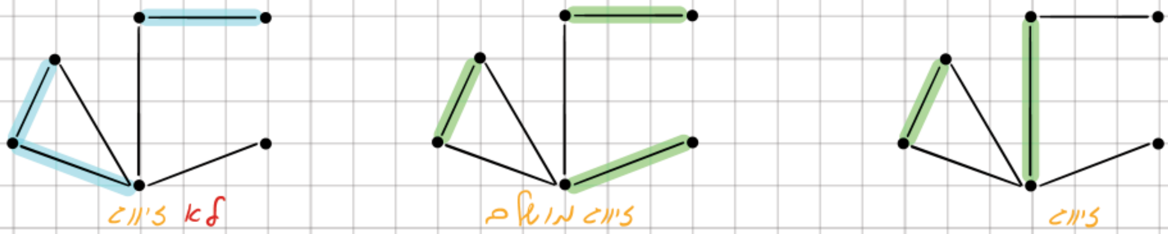
פרק 4 - זיווגים

זיווג - תת-קבוצה של קשתות בגרף שלא כוללת את אותה הצומת יותר מפעם אחת.

זיווג מושלם - זיווג שמזווג את כל הצמתים בגרף. $|M| = \frac{|V|}{2}$

משפט הול - בגרף דו צדדי $G=(A\cup B,E)$ יש זיווג מושלם אמ"ם לכל $X\subseteq A$ מתקיים $\Gamma_G(X)\ge|X|$

הגדרה: עבור X תת קבוצה של צמתים בגרף G, אז $\Gamma_G(X)$, קבוצת השכנים של X מוגדרת להיות כל הצמתים שמחוברים בקשת לאיזשהו צומת ב X.



תרגיל I

1) אם G אוילרי עם מספר זוגי של צמתים אז יש בו זיווג מושלם

לא נכון. דוגמה נגדית K_{26}.

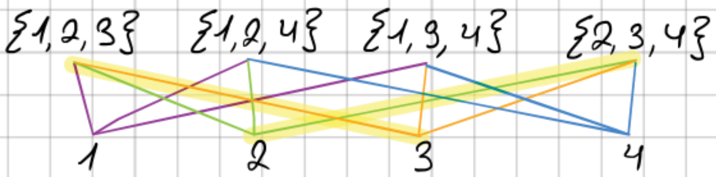
2) אם G המילטוני עם מספר זוגי של צמתים אז יש בו זיווג מושלם

נכון. הוכחה: G המילטוני, מכאן יש מעגל המילטוני. ז"א מסלול שעובר על כל הצמתים של הגרף. אם ניקח את הקשת הראשונה, השלישית וכן הלאה קיבלנו זיווג מושלם של כל הצמתים.

תרגיל II (מתוך בחינה)

תהי A קבוצת כל הקבוצות בנות שלושה איברים שחלקיות ל $B=\{1,2,3,4\}$.
נסמן ב $G=(A\cup B,E)$ גרף דו צדדי המוגדר כך:
לכל $S\in A$ יש קשת בין S לבין המספר הקטן ביותר של S.
וגם יש קשת בין S לבין המספר הגדול ביותר של S.
אין קשתות אחרות שיוצאות מ S.

תשובות:
1. קיים ב- G זיווג המזווג את כל צמתי A שבו $\{1,2,3\}$ מזווגת ל-1
2. קיים ב- G זיווג המזווג את כל צמתי A שבו $\{1,2,3\}$ מזווגת ל-3
3. יש רק דרך אחת לזווג את כל צמתי A.



פרק 5 - גרפים מישוריים

גרף מישורי - גרף שניתן לשרטט אותו כך שהקשתות לא חותכות זו את זו.

שיכון מישורי - שרטוט של גרף מישורי כך שהקשתות לא נחתכות.

פאה - אם נתון שיכון מישורי של גרף G אז הוא מחלק את המישור לחלקים. כל חלק כזה נקרא פאה.

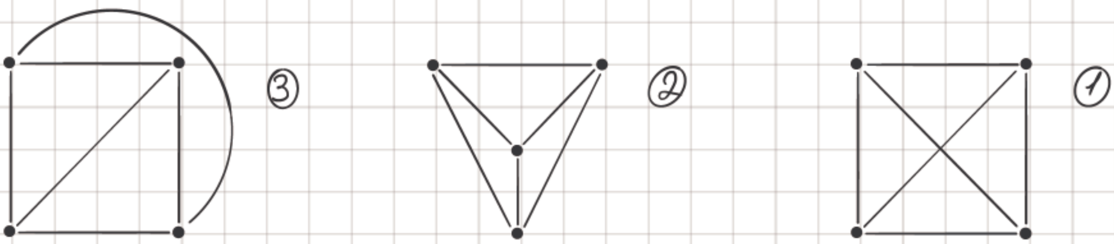
נוסחת אוילר - G גרף מישורי קשיר בעל n צמתים ו-m קשתות.
אז מספר הפאות בכל שיכון מישורי של G הוא: $f=m-n+2$

דוגמה של K_4

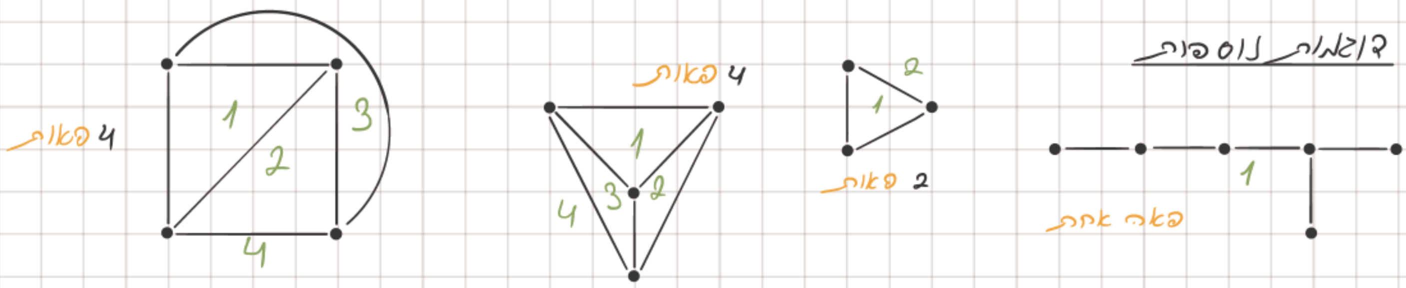
בשרטוט הראשון הקשתות נחתכות אך בשני ובשלישי לא ולכן K_4 גרף מישורי

②③ הם שני שיכונים מישוריים של K_4

① שרטוט של K_4 שאינו שיכון מישורי שלו



דוגמאות נוספות



מסקנות

* מספר הקשתות המקסימלי בגרף מישורי עם n צמתים הוא $3n-6$, כלומר $m \le 3n-6$
* בכל גרף מישורי פשוט יש צומת שדרגתו ≤ 5.
* מספר הקשתות המקסימלי בגרף מישורי דו-צדדי קשיר עם n צמתים הוא $2n-4$

תרגיל I

נתון כי G הוא גרף מישורי עם 11 צמתים.
הוכיחו שהגרף המשלים $\bar{G}$ אינו מישורי.

הוכחה: G הוא גרף מישורי עם 11 צמתים $(n=11)$
לכן $3n-6=33-6=27$ $m \le 27$
נחשב כמה קשתות יש ב $\bar{G}$, ב K_{11} יש $\frac{11\cdot10}{2}=55$ קשתות.
לכן ב- $\bar{G}$ יש לפחות $55-27=28$ קשתות. צ"א אומרת ש $\bar{G}$ אינו מישורי.
מ.ש.ל

תרגיל II

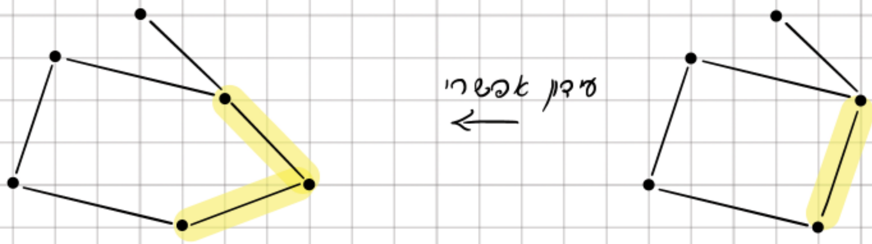
משפט: K_5 אינו מישורי.
הוכחה: בגרף מישורי עם 5 צמתים יש לכל היותר $3\cdot5-6=9$ קשתות
ואילו ב K_5 יש $\frac{5\cdot4}{2}=10$ קשתות. מסקנה K_5 אינו מישורי.
מ.ש.ל

תרגיל III

משפט: $K_{3,3}$ איננו מישורי
הוכחה: בגרף מישורי דו-צדדי עם 6 צמתים יש לכל היותר $2n-4$ צ"א 8 קשתות.
ואילו ב $K_{3,3}$ יש 9 קשתות. מסקנה $K_{3,3}$ איננו מישורי.
מ.ש.ל

עידון של גרף - החלפת קשת במסלול באורך 2.
טענה: גרף הוא מישורי $\Leftarrow\Rightarrow$ כל עידון שלו הוא מישורי.

משפט קורטובסקי - גרף הוא מישורי $\Leftarrow\Rightarrow$ הוא לא מכיל כתת-גרף עידון של K_5 או $K_{3,3}$



תרגיל IV

נגדיר גרף פשוט: צומת של G הינו סדרה באורך 4 שאיבריה לקוחים מתוך הקבוצה $\{0,1\}$.
בין שני צמתים יש קשת $\Leftarrow\Rightarrow$ הם נבדלים זה מזה בדיוק בשני מקומות.

א) כמה צמתים יש בגרף? כמס' הסדרות $2^4=16$ _ _ _ _
ב) מהי דרגת כל צומת? כמס' האפשרויות לבחור באילו 2 מקומות לעשות שינוי. צ"א $\binom{4}{2}=6$
ג) הוכיחו כי G אינו קשיר. בכל החלפה הזוגיות של מספר האפסים נשאר קבוע. ולכן אין מסלול בין 0000 ; 1000
ד) הוכיחו ש G אינו דו-צדדי. יש מעגל באורך 3.

$\{0000\}$
$\{1100\}$ — $\{1010\}$

ה) הוכיחו ש G אינו מישורי.
בגרף מישורי עם 16 צמתים יש לכל היותר $3\cdot16-6=42$ קשתות
ואילו בגרף G יש $\frac{16\cdot6}{2}=48$ קשתות.

פרק 6 - צביעת גרפים

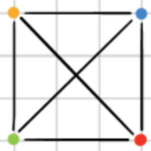
הגדרה: צביעה חוקית של גרף היא צביעה של הצמתים כך ששכנים צבועים בצבעים שונים.

$\chi(G)$ - מספר הצביעה של גרף, הוא מספר הצבעים המינימלי בצביעה חוקית של G.

k-צביע - גרף G נקרא כך אם $\chi(G)\le k$

$\chi(K_3)=3$

$\chi(K_4)=4$



משפט ארבעת הצבעים (6.3) - כל גרף מישורי הוא 4-צביע (כלומר, $\chi(G)\le 4$ לכל גרף מישורי G)

הערות חשובות

* $\chi(K_n)=n$
* $\chi(G)=2$ אמ"מ G הוא גרף דו-צדדי המכיל קשת אחת לפחות

תרגיל I

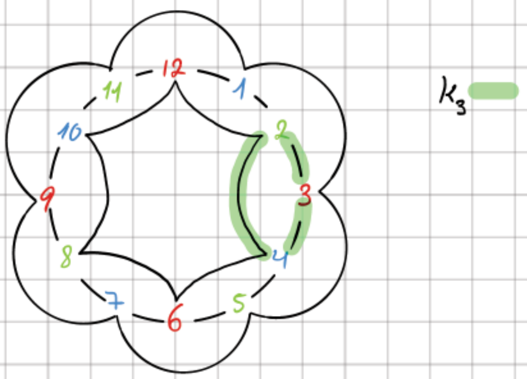
נגדיר גרף $G=(V,E)$ כאשר $V=\{1,2,\ldots,12\}$

יש קשת בין שני צמתים u,v אמ"מ $|u-v|\in\{1,2,10,11\}$

א) הוכיחו שהגרף מישורי (אפשר ע"י שרטוט)

ב) הוכיחו כי $\bar{G}$ אינו מישורי

ג) מהו $\chi(G)$?



פתרון:

א) ניתן לראות בשרטוט

ב) הדרגה של כל צומת ב-$\bar{G}$ היא $11-4=7$ ולכן איננו מישורי

ג) G מכיל את K_3 כתת גרף ולכן $\chi(G)\ge 3$

G ניתן לצביעה ב-3 צבעים כנ"ל, הוא 3-צביע

תרגיל II

יהי P גרף עם 10 צמתים שהוא מסלול פשוט: x,y הם הקצוות של P.

P:

נוסיף ל-P שני צמתים חדשים u ו-v.

נחבר בקשת כל אחד מהצמתים החדשים לכל 10 הצמתים של P. ונוסיף קשת בין u ל-v.

לגרף שהתקבל נקרא G

א) הראו שG הוא מישורי (ניתן ע"י שרטוט)

ב) נוסיף צומת חדש w. נחבר את w בקשתות לכל אחד מארבעת הצמתים x,y,u,v ונקרא לגרף הנוצר H

הוכיחו כי H אינו מישורי.

ג) מהו $\chi(P)$?

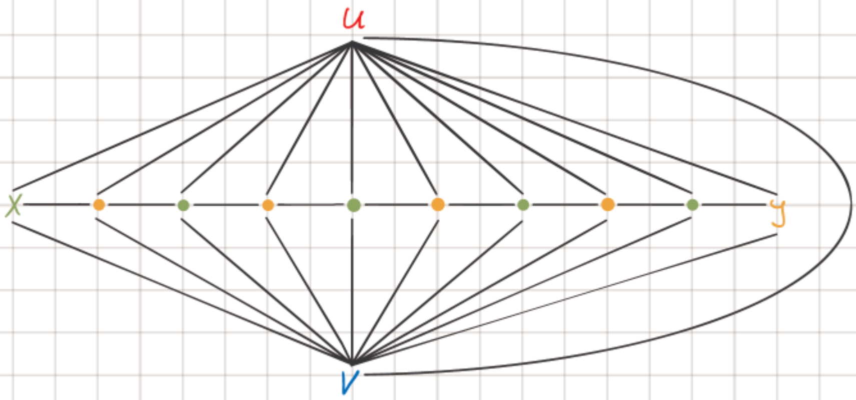
$\chi(G)$?

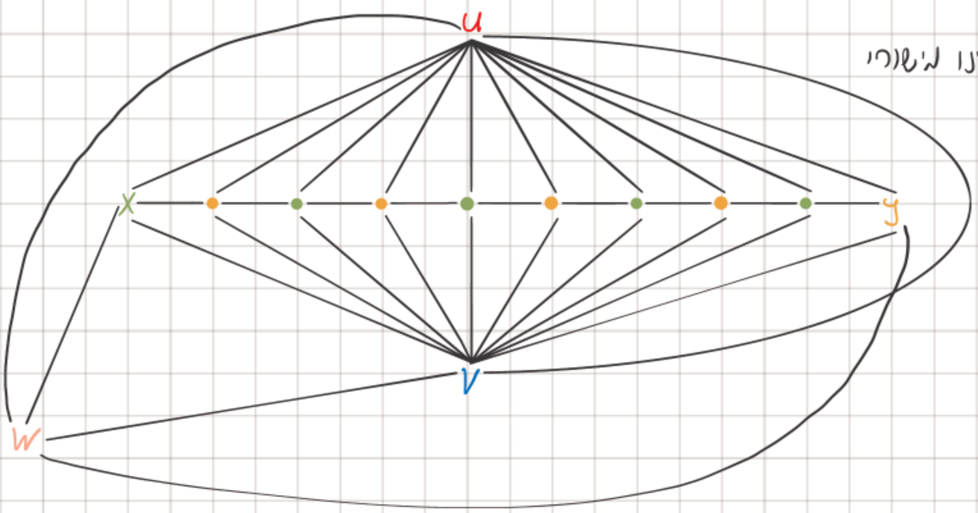
$\chi(H)$?

פתרון:

א)

G:





ב) H מכיל עידון של K_5 ולכן אינו מישורי

ג) $\chi(P)=2$

$\chi(G)=4$

$\chi(H)=5$