

1) $\{(Q \wedge P) \vee (R \wedge P)\} / (Q \vee R) \wedge P$

(1) $(Q \wedge P) \vee (R \wedge P)$ (υπόθεση υπαγωγής)

(2) Υποπαράγωγη

(2.1) $Q \wedge P$ (υπόθεση υποπαράγωγής)

(2.2) Q (αναδοίχη συζευξης, 2.1)

(2.3) $Q \vee R$ (εισαγωγή διαζευξης, 2.2)

(2.4) P (αναδοίχη συζευξης, 2.1)

(2.5) $(Q \vee R) \wedge P$ (εισαγωγή συζευξης, 2.3, 2.4)

(3) $Q \wedge P \rightarrow (Q \vee R) \wedge P$ (εισαγωγή συνεπαγωγής, 2.1, 2.5)

(4) Υποπαράγωγη

(4.1) $R \wedge P$ (υπόθεση υποπαράγωγής)

(4.2) R (αναδοίχη συζευξης, 4.1)

(4.3) $Q \vee R$ (εισαγωγή διαζευξης, 4.2)

(4.4) P (αναδοίχη συζευξης, 4.1)

(4.5) $(Q \vee R) \wedge P$ (εισαγωγή συζευξης, 4.3, 4.4)

(5) $R \wedge P \rightarrow (Q \vee R) \wedge P$ (εισαγωγή συνεπαγωγής, 4.1, 4.5)

(6) $(Q \vee R) \wedge P$ (αναδοίχη διαζευξης, 1, 3, 5)

2)

$\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

(1) $\neg P$ (υποθεση παραγωγης)

(2) Υποπαραγωγη

(2.1) P (υποθεση υποπαραγωγης)

(2.2) $\neg P$ (επαναληψη 1)

(2.3) Q (αντινομια 2.1, 2.2)

(3) $P \rightarrow Q$ (εισαγωγη συνεπαγωγης 2.1, 2.3)

(4) $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (εισαγωγη συνεπαγωγης, 1, 3)

3)

$P \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

(1) P (υποθεση παραγωγης)

(2) Υποπαραγωγη

(2.1) $\neg Q$ (υποθεση υποπαραγωγης)

(2.1.1) $P \rightarrow Q$ (υποθεση υποπαραγωγης)

(2.1.2) Q (απαλοιφη συνεπαγωγης, 1, 2.1.1)

(2.1.3) $\neg Q$ (επαναληψη 2.1)

(2.2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \wedge \neg Q$ (εισαγωγη συνεπαγωγης 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3)

(2.3) $\neg(P \rightarrow Q)$ (εισαγωγη αρνησης 2.2)

(3) $\neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$ (εισαγωγη συνεπαγωγης 2.1, 2.3)

ΑΣΚΗΣΗ 2

α)

$$C_0 = \{ \{ P \rightarrow Q, \neg(\neg P \rightarrow \neg Q) \} \} \quad \neg \rightarrow$$

$$C_1 = \{ \{ P \rightarrow Q, \neg P, Q \} \} \quad \rightarrow$$

$$C_2 = \{ \{ \neg P, \neg P, Q \}, \{ Q, \neg P, Q \} \}$$

$$C_3 = \{ \{ \neg P, Q \}, \{ Q, \neg P \} \}$$

Δεν μπορούμε να αποδομήσουμε ~~ακόμα~~ πρέπει πρώτα και η
εξαγωγή συμπερασματος δεν είναι εγκυρη.

B)

$$C_0 = \{ \{ P \rightarrow \neg Q, P \rightarrow \neg R, (P \rightarrow \neg(Q \vee R)) \rightarrow S \wedge W, \neg((S \wedge W) \vee Y) \} \rightarrow$$

$$C_1 = \{ \underbrace{\{ P \rightarrow \neg Q, P \rightarrow \neg R, \neg(P \rightarrow \neg(Q \vee R)) \}}_{(I)}, \underbrace{\{ \neg((S \wedge W) \vee Y) \}}_{(II)}, \{ P \rightarrow \neg Q, P \rightarrow \neg R, S \wedge W, \neg((S \wedge W) \vee Y) \} \neg \rightarrow$$

$$C_2 = \{ \{ (I), P, Q \vee R, \neg(S \wedge W), \neg Y \}, \{ (II), S \wedge W, \neg(S \wedge W), \neg Y \} \} \text{ del, } \rightarrow$$

$$C_3 = \{ \{ \neg P, P \rightarrow \neg R, P, Q \vee R, \neg(S \wedge W), \neg Y \}, \{ \neg Q, P \rightarrow \neg R, P, Q \vee R, \neg(S \wedge W), \neg Y \} \} \text{ del, } \rightarrow$$

$$C_4 = \{ \{ \neg Q, \neg P, P, Q \vee R, \neg(S \wedge W), \neg Y \}, \{ \neg Q, \neg R, P, Q \vee R, \neg(S \wedge W), \neg Y \} \} \text{ del, } \vee$$

$$C_5 = \{ \{ \neg Q, \neg R, P, Q, \neg(S \wedge W), \neg Y \}, \{ \neg Q, \neg R, P, R, \neg(S \wedge W), \neg Y \} \} \text{ del}$$

$$C_6 = \{ \{ \}, \{ \} \}$$

αρα μη-ικανοποιησιτή αρα εσχυρή.

8)

$$C_0 = \{ \{ \neg((P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q)) \} \} \quad \neg \rightarrow$$

$$C_1 = \{ \{ (P \rightarrow Q), \neg((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \} \} \quad \neg \rightarrow$$

$$C_2 = \{ (P \rightarrow Q), (\neg P \rightarrow Q), \neg Q \} \rightarrow$$

$$C_3 = \{ \{ \neg P, (\neg P \rightarrow Q), \neg Q \}, \{ Q, (\neg P \rightarrow Q), \neg Q \} \} \quad \text{del}$$

$$C_4 = \{ \{ \neg P, (\neg P \rightarrow Q), \neg Q \} \} \rightarrow$$

$$C_5 = \{ \{ \neg P, P, \neg Q \}, \{ \neg P, Q, \neg Q \} \} \quad \text{del}$$

$$C_6 = \{ \{ \} , \{ \} \}$$

αρα ψη-ικανοποίηση αρα εγκύρη