Ασκηση 1

α $C\binom{n}{k} = \dfrac{k!}{(k-k)!\,n!}$

β) Εφόσον ~~ολα~~ τα διαγωνισματα μπορουν να μπουν την ιδια μερα υπάρχει επανάληψη. Οπως επισης υπάρχει και επαναθεση. Αρα χρησιμοποιούμε τον τυπο n^k

$5^3 = 125$

Αν δεν υπάρχει επανάθεση τότε $P(5,3) = \dfrac{5!}{2!} = 5\cdot4\cdot3 = 60$

γ) Για τους ιδιους λογους με το β είναι:

24^4

Και οταν δεν υπάρχει επανάθεση $P(24,4) = \dfrac{24!}{(24-4)!} =$

$24\cdot23\cdot22\cdot21$

δ) Εχουμε 6 αριθμούς και τέσσερις θέσεις μας νοιάζει η διαταξη αλλα οχι η επαναθεση είναι:

$P(6,4) = \dfrac{6!}{2!} = 6\cdot5\cdot4\cdot3$

Ασκηση 2

α) Εχουμε 6 ατομα διαφορετικα οποτε μας νοιάζει η διαταξη ούτε υπάρχει επανάθεση αρα

$P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{6!}{1} = 6!$

Scanned with CamScanner

β) Άρα κάθονται όλα τα κορίτσια και τα αγόρια σε ομάδες μας νοιάζει μόνο η διάταξη μεταξύ κοριτσιών και αγοριών άρα:
Μόνο για την διάταξη των αγοριών έχουμε 3! διαφορετικές άρα και για κορίτσια 3! οπότε
$2 \cdot 3! \cdot 3! = 2(3!)^2$ διαφορετικές διατάξεις.

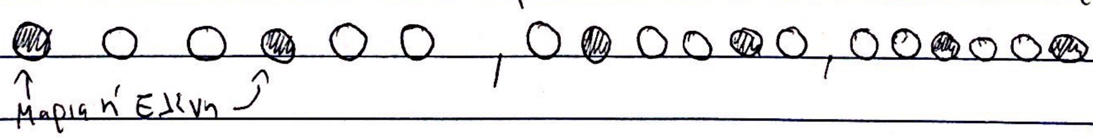
γ) Μας νοιάζει τα κορίτσια να κάτσουν μαζί.
Αν έχουμε 6 θέσεις τότε θα κάτσουν στην
1,2,3 ή 2,3,4 ή 3,4,5 ή 4,5,6 $\Rightarrow$
$3! + 3! + 3! + 3! = 4\cdot(3!)$ και τα αγόρια θα κάτσουν σε 3! διαφορετικούς συνδυασμούς:

$$4\cdot(3!)\cdot 3! = 4\cdot(3!)^2$$

δ) Το να κάτσει στην πρώτη θέση αγόρι είναι 3 συνδυασμοί αφού έχουμε 3 αγόρια το ίδιο και για τα κορίτσια για την δεύτερη θέση. Στη τρίτη είναι 2 συνδυασμοί και στην τέταρτη 2 για τα κορίτσια
Άρα η πιθανότητα είναι:

$$(3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1) + (3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1) =$$
$$(3!)^2 + (3!)^2 = 2\cdot(3!)^2$$

ε) Έχουμε 6 θέσεις και ξέρουμε ότι η Μαρία και η Ελένη έχουν μεταξύ τους δύο άτομα



3 συνδυασμοί και μεταξύ των άλλων ατόμων οι συνδυασμοί είναι 4!. Επίσης είναι $2\cdot 4!$ καθώς η Μαρία αλλάζει θέση με την Ελένη.

Άρα οι συνδυασμοί $3\cdot(2\cdot 4!) = 6\cdot 4!$

Άσκηση 3

α) Θα είναι $\frac{100!}{90!\cdot 10!}$ αν δεν μας νοιάζει η διάταξη

β) Θα είναι $\frac{40!}{(40-5)!\cdot 5!}\cdot\frac{60!}{(60-5)!\cdot 5!}$

γ) $\frac{40!}{(40-6)!\cdot 6!}\cdot\frac{60!}{(60-4)!4!} + \frac{40!}{(40-4)!4!}\cdot\frac{60!}{(60-6)!\cdot 6!}$

6 αγόρια και 4 κορίτσια ή 4 αγόρια και 6 κορίτσια

Άσκηση 4

α) Για τις κόκκινες η πιθανότητα να τραβήξουμε κόκκινη είναι $\frac{5}{19}$ και ξανά κόκκινη $\frac{4}{19}$ και ξανά $\frac{3}{19}$

Άρα να τραβήξουμε 3 κόκκινες είναι $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{19^3}$

Οπότε η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{19\cdot 18\cdot 17} + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{19\cdot 18\cdot 17} + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{19\cdot 18\cdot 17}$$

3 κόκκινες ή 3 μπλε ή 3 πράσινες

β) Γενικά οι περιπτώσεις θα είναι 8 όμως μπορούμε να τις ~~[illegible]~~ συμπτήξουμε σε 3. Ένα να έχουμε πράσινη πρώτη μπάλα και η κόκκινη ή μπλε. Το ίδιο για τις άλλες δύο περιπτώσεις. Η πιθανότητα να τραβήξουμε την πρώτη μπάλα είναι ο αριθμός από μπάλες ίδιου χρώματος δια συνολικές μπάλες
Έστω τραβάμε πράσινη, μπλε, κόκκινη η πιθανότητα

$$\frac{8}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 5}{19 \cdot 18 \cdot 17}$$

Αν τραβούσαμε μπλε, κόκκινη, πράσινη

$$\frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{8}{19} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 5}{19 \cdot 18 \cdot 17}$$

Άρα σε όλες τις περιπτώσεις είναι ίδια η πιθανότητα.

γ) Αφού υπάρχει επανάθεση και μας νοιάζει η διάταξη έχουμε ότι οι συνδυασμοί είναι n^k

$$\frac{6^3 + 5^3 + 8^3}{19^3}$$

δ) $$\frac{6 \cdot 5 \cdot 8}{19^3}$$

Άσκηση 5

α) $\binom{n}{k} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \iff$

$$\frac{n!}{(n-\cancel{k})!\cdot \cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{m!}}{(m-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{\cancel{(n-k)!}k!} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{(n-\cancel{k}-m+\cancel{k})!(m-k)!} \iff$$

$$\frac{n!}{(n-m)!\cdot(m-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{k!(n-m)!\cdot(m-k)!}$$ Ισχύει

β) Έστω έχουμε 40 μπάλες η κάθε μια διαφορετικού χρώματος. Πόσους συνδυασμούς μπορούμε να φτιάξουμε αν τραβήξουν 7 από αυτές και μετά οι επτά από αυτές πόσους συνδυασμούς φτιάχνουν αν από αυτές πάρουμε 3 κάθε φορά.

Άσκηση 6.

$\sum_{x=-2}^{2} P_X(x) = \frac{2}{c} + \frac{1}{c} + 0 + \frac{1}{c} + \frac{2}{c} = \frac{6}{c}$ το οποίο ξέρουμε ότι είναι ίσο με 1. Άρα $\frac{6}{c} = 1 \iff c = 6$

β) $E[X] = \sum_{x=-2}^{2} x \cdot \frac{|x|}{c} = -2 \cdot \frac{2}{c} - 1 \cdot \frac{1}{c} + 0 + \frac{1}{c} + 2 \cdot \frac{2}{c} = 0$

Scanned with CamScanner

γ) Πρεπει να δημιουργησουμε πινακα για τιμες του Z για X.

X	-2	-1	0	1	2
$P_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
$Z/X=x$	2	1	0	1	2

$$P_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} & Z=1 \\ \frac{2}{3} & Z=2 \\ 0 & , \text{αλλιως} \end{cases}$$

Αρα για:

$$Var(X) = E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Ασκηση 7

Η πιθανότητα η μπάλα 3 να βρισκεται στο καπέλο είναι $\frac{2}{4}$ καθώς τραβάμε δυο μπάλες

Οπου και η δυο εχουν πιθανότητα $\frac{1}{4}$ να είναι η 3.

β) $P(3), P(4), P(6), P(7) = \dfrac{\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \dfrac{1}{6}$

$$P(5) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1} + \binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , x = 3,4,6,7 \\ \frac{1}{3} & , x = 5 \\ 0 & , \text{aJJlws} \end{cases}$$

$$E(x) = \sum_{x=3}^{7} x \cdot P_X(x) = 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 7 \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3+4+6+7+10}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Scanned with CamScanner