

---

# Моделирование лавинно-стримерного перехода в воздухе

---

**Автор:**  
Пек Борис

# Постановка задачи

- Создать в пакете Comsol модель для расчета лавинно-стримерного перехода в воздухе, используя дрейфово-диффузионное приближение.
- Сравнить результаты расчета с аналогичной моделью для аргона. Выявить отличия, связанные с добавлением отрицательных ионов.
- Сравнить результаты моделирования лавинно-стримерного перехода в воздухе в пакетах Comsol и CFD-ACE. Используются разные приближения, поэтому сравнивать надо по общим параметрам: поле  $E$ , объемная плотность заряда, скорость и диаметр головки стримера.
- Для сравнения будут использованы модели катодонаправленного стримера в слабонеоднородном поле.

# Дрейфово-диффузионное приближение

- Модель не учитывает:
  - распределение электронов по энергии
  - процессы, связанные с изменением энергии частиц без изменения заряда, например: возбуждение электронно-колебательных уровней, диссоциация молекул.
- Концентрации заряженных частиц (электронов, положительных и отрицательных ионов) описываются уравнением Нернста-Планка.
- Реакции ионизации, прилипания и рекомбинации задаются через функцию источника.

## Коэффициенты ионизации и прилипания

Аппроксимации экспериментальных данных приведены для атмосферного давления.

$$b_e = (2.7e-2 + 0.113/(1 + \text{norm}E_{\text{es}}/1e5)^{0.498})$$

подвижность электронов [м<sup>2</sup>/В·с] [1]

$$b_p = 1.5e-4 \quad \text{подвижность положительных ионов [м<sup>2</sup>/В·с]} \quad [2]$$

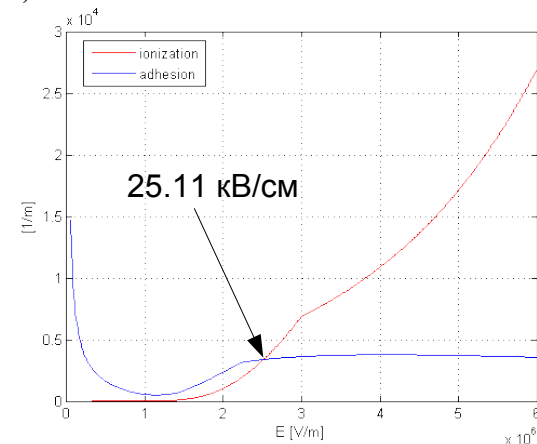
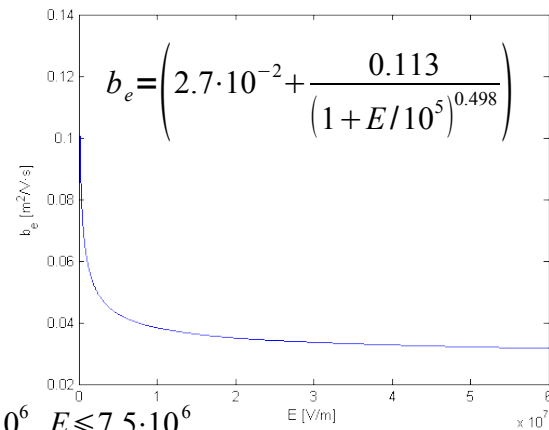
$$b_m = 1.5e-4 \quad \text{подвижность отрицательных ионов [м<sup>2</sup>/В·с]} \quad [2]$$

$$A_2 = \begin{cases} 9.54 \cdot 10^9 \frac{\exp\left(\frac{-7.32 \cdot 10^6}{E}\right)}{b_e E}, & E \leq 2.2 \cdot 10^6 \\ 1.54 \cdot 10^9 \frac{\exp\left(\frac{-3.28 \cdot 10^6}{E}\right)}{b_e E}, & E > 2.2 \cdot 10^6 \end{cases} \quad [4]$$

$$[ionization] = \begin{cases} 8 \cdot 10^{10} \frac{\exp\left(\frac{-13.2 \cdot 10^6}{E}\right)}{b_e E}, & E \leq 3 \cdot 10^6 \\ 0.045392 \exp\left(8.8396 + \frac{(E - 3 \cdot 10^6)}{10^5}\right), & E > 3 \cdot 10^6, E \leq 7.5 \cdot 10^6 \\ 10^6 \exp\left(\frac{-22 \cdot 10^6}{E}\right), & E > 7.5 \cdot 10^6 \end{cases} \quad [3]$$

$$A_3 = \begin{cases} 9.06 \cdot 10^7 \frac{(1 - 6.9 \cdot 10^{-7} E)}{b_e E}, & E \leq 1.4 \cdot 10^6 \\ 0, & E > 1.4 \cdot 10^6 \end{cases} \quad [4]$$

$A_2$  – коэффициент прилипания в парных столкновениях [м<sup>-1</sup>]  
 $A_3$  – коэффициент прилипания в тройных столкновениях [м<sup>-1</sup>]  
 $[adhesion] = A_2 + A_3$



[1] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука. 1992; с.42, рис.3.2

[2] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука. 1992; формула 3.28 на с.55 и таблица 2.2 на с.27

[3] Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Искровой разряд. М: изд-во МФТИ. 1997; с.29-30

[4] Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты. М.: Физматлит. 2001; с.51-52

# Система уравнений (начало)

## Уравнение Нернста-Планка без электронейтральности для положительных ионов (1)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(-D \nabla c - z u_m F c \nabla V) = R - \mathbf{u} \cdot \nabla c \quad R = [\text{ionization}] b_e E c_2 - \alpha c c_2 - \beta c c_3$$

$\alpha = 1\text{e-}13$  коэффициент объемной электрон-ионной рекомбинации [м³/моль с] <sup>[1]</sup>  
 $\beta = 1\text{e-}13$  коэффициент объемной ион-ионной рекомбинации [м³/моль с] <sup>[2]</sup>

$D = D_p$  коэффициент диффузии (изотропный) [м²/с]  
 $R = (t > 0) * (\text{ionization} * b_e * \text{normE\_es} * c_2 - \alpha * c * c_2 - \beta * c * c_3)$   
 $u_m = b_p / 1\text{e}5$  скорость реакции [моль/(м³ с)]  
 $Z = 1$  подвижность [с моль/кг]  
 $u = 0, v = 0$  заряд частиц (относительно заряда электрона)  
 $V = V$  компоненты вектора  $\mathbf{u}$  [м/с]  
потенциал [В] (рассчитывается в третьем уравнении)

## Уравнение Нернста-Планка без электронейтральности для электронов (2)

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + \nabla(-D \nabla c_2 - z u_m F c_2 \nabla V) = R - \mathbf{u} \cdot \nabla c_2 \quad R = [\text{ionization}] b_e E c_2 - \alpha c c_2 - [\text{adhesion}] b_e E c_2$$

$D = D_e$  коэффициент диффузии (изотропный) [м²/с]  
 $R = (t > 0) * (\text{ionization} * b_e * \text{normE\_es} * c_2 - \alpha * c * c_2 - \text{adhesion} * b_e * \text{normE\_es} * c_2)$   
 $u_m = b_e / 1\text{e}5$  скорость реакции [моль/(м³ с)]  
 $Z = -1$  подвижность [с моль/кг]  
 $u = 0, v = 0$  заряд частиц (относительно заряда электрона)  
 $V = V$  компоненты вектора  $\mathbf{u}$  [м/с]  
потенциал [В] (рассчитывается в третьем уравнении)

[1] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука. 1992; с.77-78

[2] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука. 1992; с.79, таблица 4.4

# Система уравнений (продолжение)

## Уравнение Нернста-Планка без электронейтральности для отрицательных ионов (3)

$$\frac{\partial c_3}{\partial t} + \nabla(-D \nabla c_3 - z u_m F c_3 \nabla V) = R - \mathbf{u} \cdot \nabla c_3 \quad R = [\text{adhesion}] b_e E c_2 - \beta c c_3$$

$D = De$  коэффициент диффузии (изотропный) [м²/с]  
 $R = (t > 0) * (\text{adhesion} * b_e * \text{normE\_es} * c_2 - \beta * c * c_3)$   
 $u_m = bm / 1e5$  скорость реакции [моль/(м³ с)]  
 $Z = -1$  подвижность [с моль/кг]  
 $u = 0, v = 0$  заряд частиц (относительно заряда электрона)  
 $V = V$  компоненты вектора  $\mathbf{u}$  [м/с]  
потенциал [В] (рассчитывается в третьем уравнении)

## Уравнение Пуассона (модуль электростатики) (4)

$$-\nabla \cdot \varepsilon_0 \varepsilon \nabla V = \rho \quad \rho = F (z_1 c + z_2 c_2 + z_3 c_3) \quad \text{Постоянная Фарадея: } F = e N_a \approx 96485 \text{ [Кл/моль]}$$

$\varepsilon = 1$  диэлектрическая проницаемость  
 $\rho = \text{electr} * (c - c_2 - c_3)$  объемная плотность заряда [Кл/м³]

### Global expressions:

```
RR = sqrt(R^2 + Z^2)
VOLT = -V_0 * 1E-3 * (1/0.001 - 1/RR)
be = (2.7e-2 + 0.113 / (1 + normE_es / 1e5))^0.498
ionization_1 = (normE_es <= 3e6) * (8e10 * exp(-13.2e6 / normE_es) / (be * (normE_es + 1)))
ionization_2 = (normE_es > 3e6) * (normE_es <= 7.5e6) * (exp(8.8396 + (normE_es - 3e6) / 1e5 * 0.045392))
ionization_3 = (normE_es > 7.5e6) * (1e6 * exp(-22e6 / normE_es))
ionization = ionization_1 + ionization_2 + ionization_3
adhesion_1 = (normE_es <= 2.2e6) * (9.54e9 * exp(-7.32e6 / normE_es) / (be * (normE_es + 1))) +
(normE_es > 2.2e6) * (1.54e9 * exp(-3.28e6 / normE_es) / (be * (normE_es + 1)))
adhesion_2 = (normE_es <= 14e5) * (9.06e7 * (1 - 6.9e-7 * normE_es) / (be * (normE_es + 1)))
adhesion = adhesion_1 + adhesion_2
```

### Constants:

```
bp = 1.5e-4
Dp = 25e-3 * bp * 100
alpha = 1e-13
electr = 1.6e-19
bm = 1.5e-4
De = 0.35
qq0 = 1e16
V_0 = 10000
Dm = 25e-3 * bm * 100
beta = 1e-13
```

# Граничные условия, начальные условия

Изоляция:  $n \cdot N = 0$

Поток:  $-n \cdot N = N_0$

$$N = -D \nabla c - z u_m F c \nabla V + c u$$

ntflux\_c\_chekf – полный поток

Состоит из трех слагаемых:

- электрофоретическое
- диффузионное
- конвекционное

(1)  $n \cdot N = 0$  (изоляция)

(2)  $N_0 = -\text{ntflux\_c2\_chekf2}$  (поток)

(3)  $N_0 = -\text{ntflux\_c3\_chekf3}$  (поток)

(4)  $\varphi = 0$

Активен только модуль электростатики

$$(4) \varphi(x, y) = V_0 \cdot \left( \frac{R_1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - 1 \right)$$

Размеры:

$R_1 = 1 \text{ мм}$

$R_2 = 2.01 \text{ мм}$

Ось симметрии

(1)  $n \cdot N = 0$  (изоляция)

(2)  $n \cdot N = 0$  (изоляция)

(3)  $n \cdot N = 0$  (изоляция)

$V_0 = 10 \text{ кВ}$

Катод

$$(4) \varphi = V_0 \cdot \left( \frac{R_1}{R_2} - 1 \right)$$

(1)  $N_0 = -\text{ntflux\_c\_chekf}$  (поток)

(2)  $n \cdot N = 0$  (изоляция)

(3)  $n \cdot N = 0$  (изоляция)

Начальная концентрация электронов:

$qq0 = 1e16 \text{ моль/м}^3$

В остальной части модели начальная концентрация электронов нулевая.

# Настройки решателя

Solver: Time dependent segregated

Times: [0:0.1e-9:2.6e-9,2.6e-9+0.02e-9:0.02e-9:5e-9]

Relative tolerance: 5e-4

Absolute tolerance: c 5e2 c2 5e2 c3 5e2 V 5e-1

Порядок расчета переменных: V, c, c2, c3

Linear solver: GMRES

Maximum number of iterations: 10000

Number of iterations before restart: 300

Preconditioner: SSOR

Number of iterations: 2

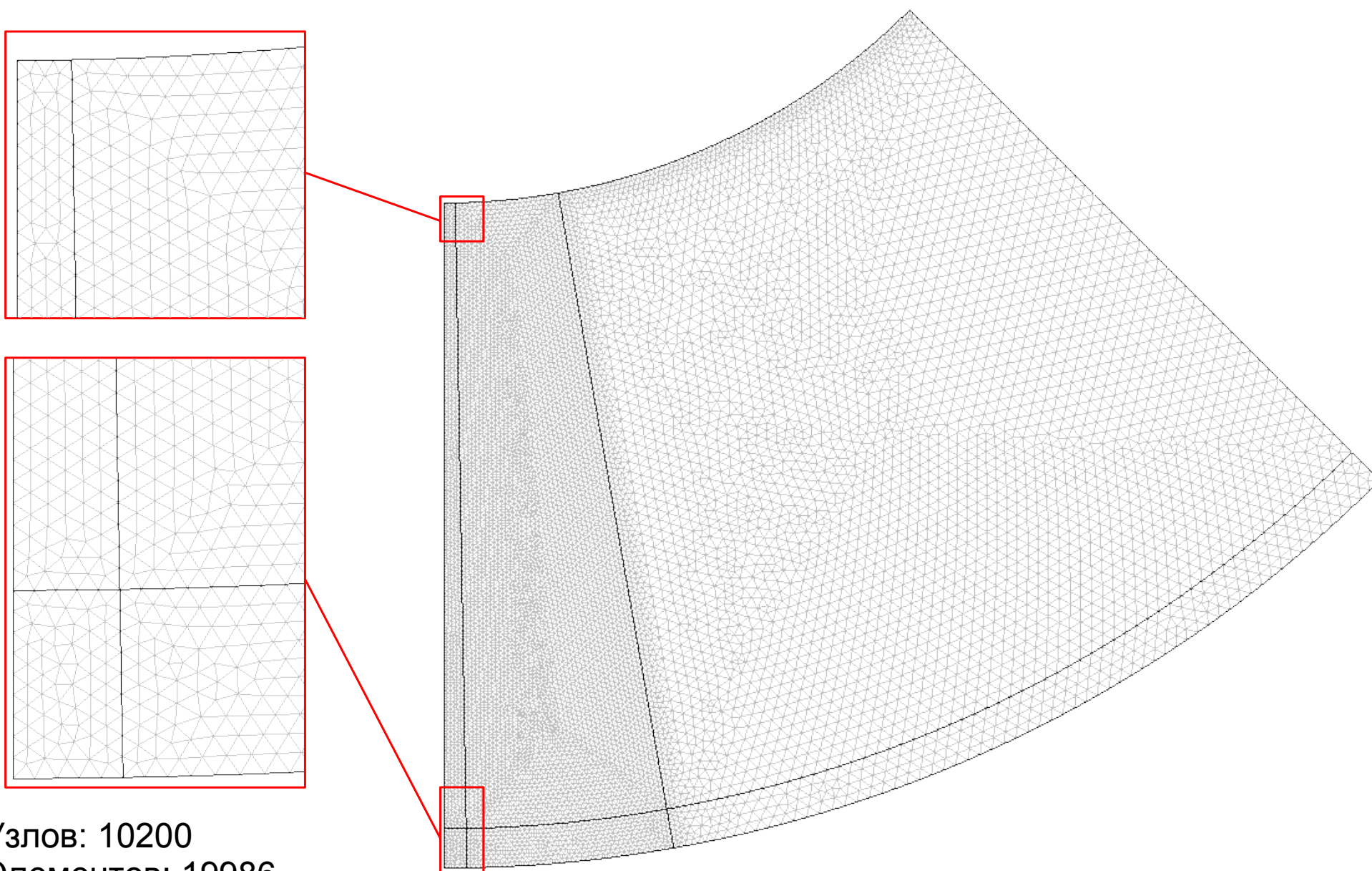
Time steps taken by solver: Intermediate

Maximum time step: 1e-11

В отличие от решателя UMFPACK, который используется по умолчанию, итерационный решатель требует меньше оперативной памяти при расчетах, что позволяет решать модели с большим количеством элементов.



# Конечноэлементная сетка

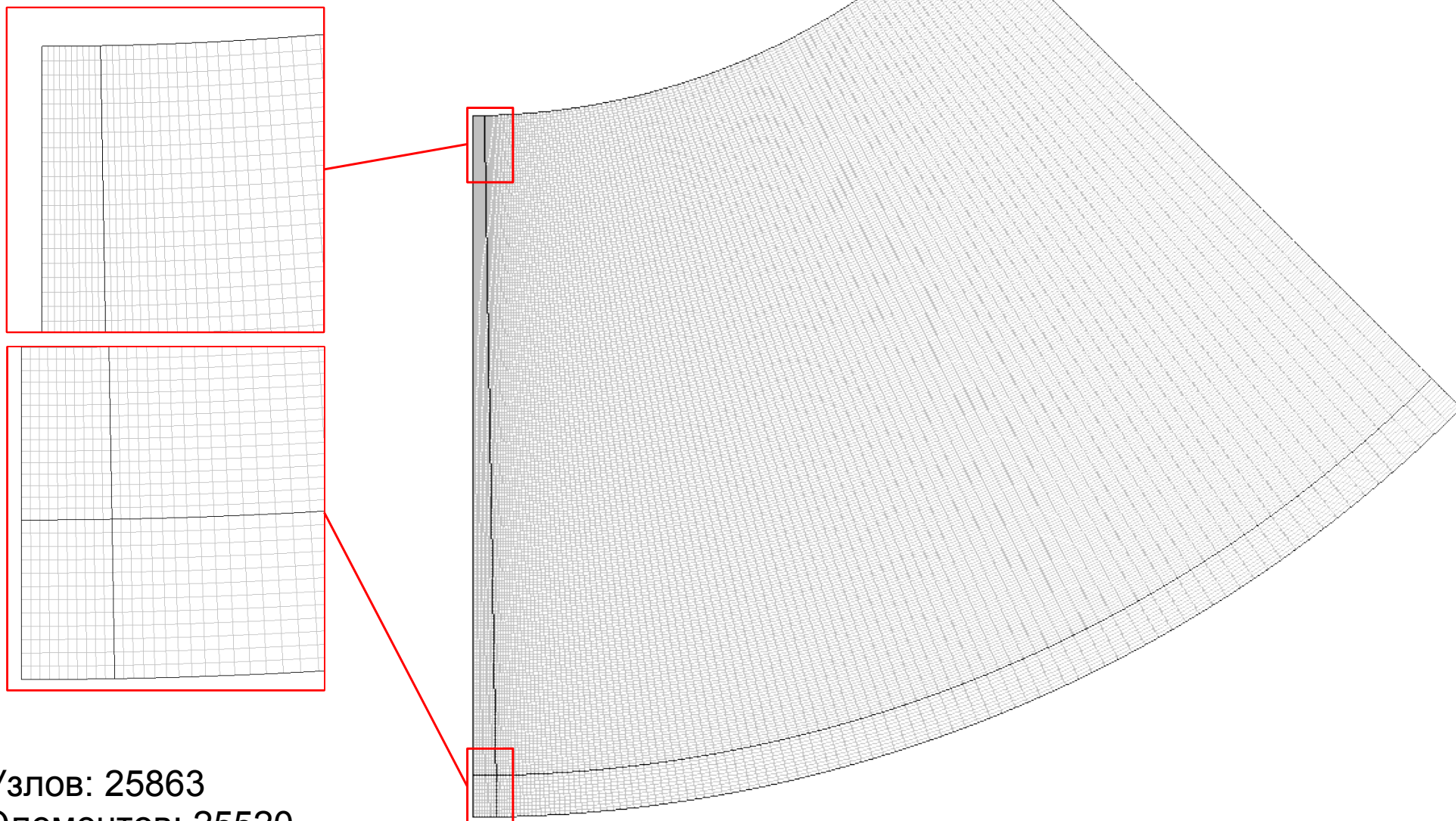


Узлов: 10200  
Элементов: 19986  
Степеней свободы: 161540

Модель для воздуха в пакете Comsol



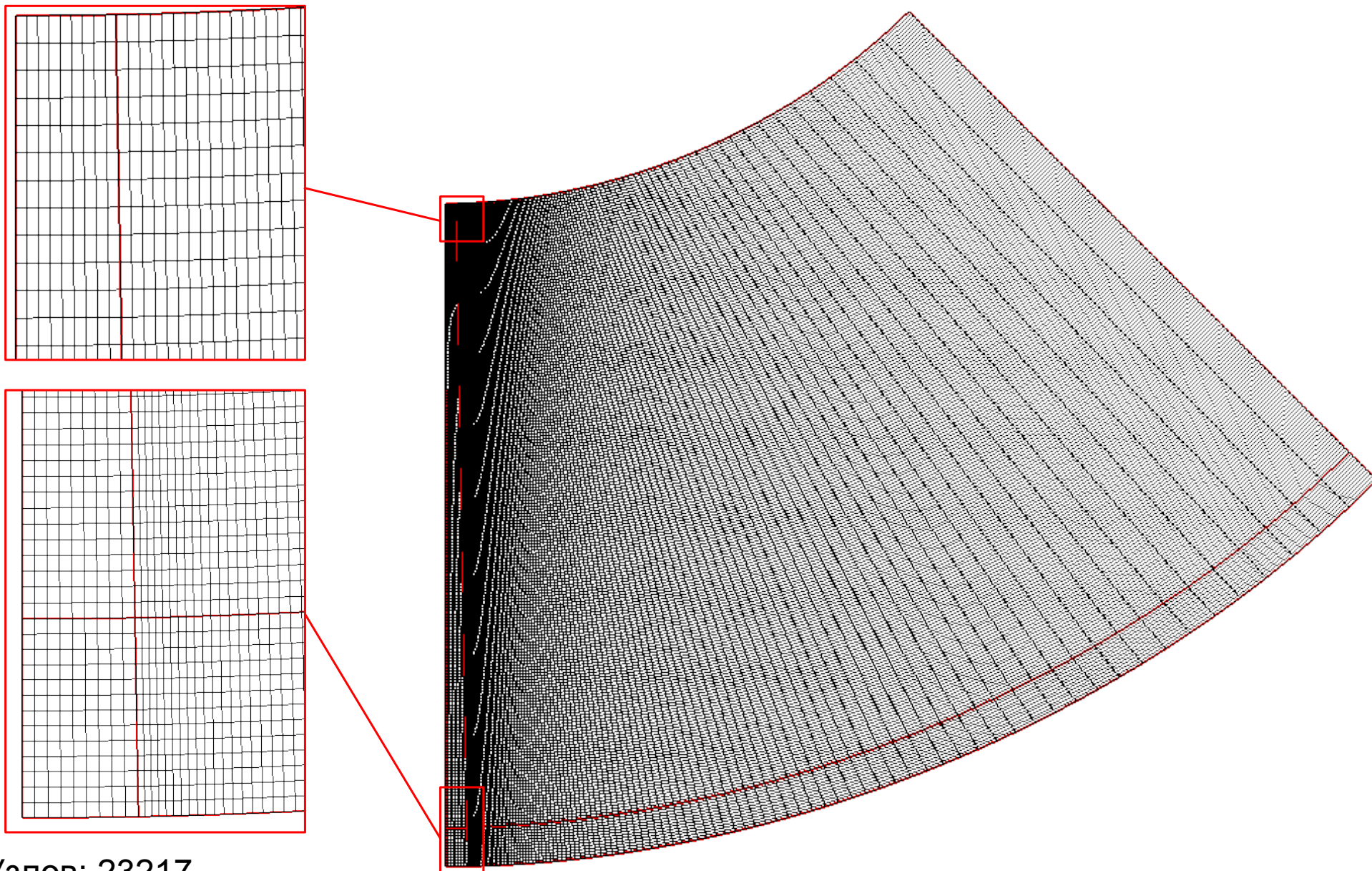
# Конечноэлементная сетка



Узлов: 25863  
Элементов: 25520  
Степеней свободы: 308295

Модель для аргона в пакете Comsol

# Конечноэлементная сетка



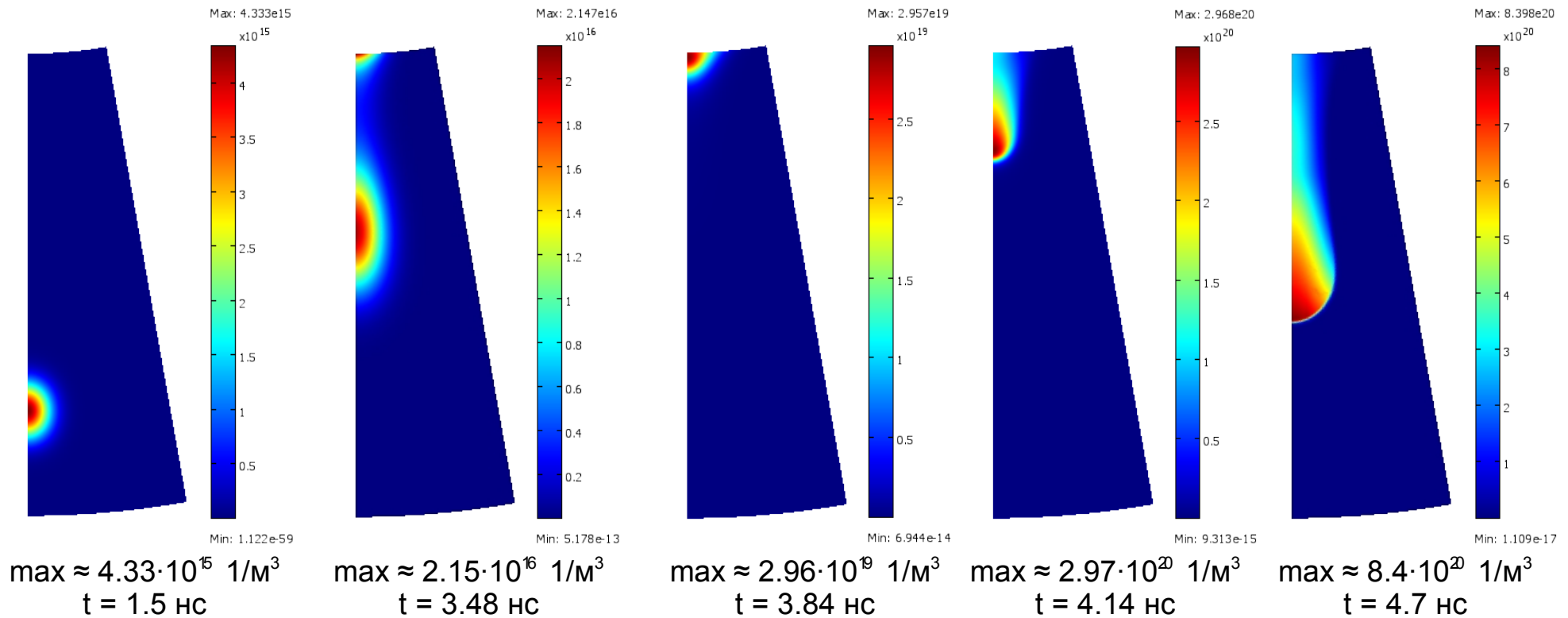
Узлов: 23217

Элементов: 22896

Модель для воздуха в пакете CFD-ACE

# Концентрация электронов [ $1/\text{м}^3$ ]

воздух (Comsol)

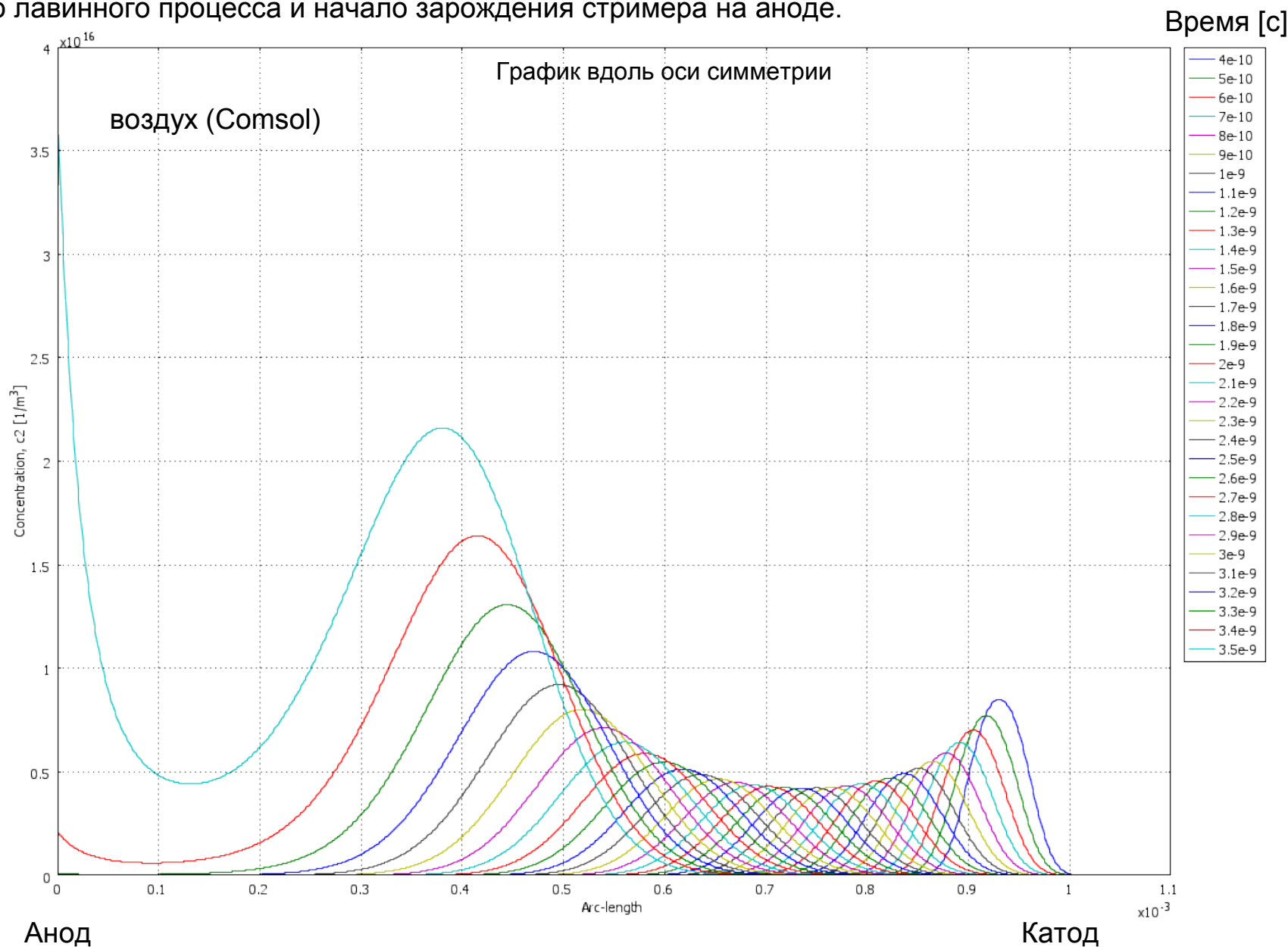


Затравочный пакет электронов движется во внешнем электрическом поле; начинается лавинный процесс, быстрые электроны движутся к аноду, а медленные положительные ионы плавно дрейфуют к катоду, происходит разделение объемного заряда; первые свободные электроны, достигнув анода, инициируют процесс ионизации в приэлектродной области; поскольку внешнее поле вблизи анода максимально, то интенсивность ионизации там выше чем в лавине, которая вдали от него; на аноде задано условие гибели отрицательного заряда и изоляции для положительного, поэтому вблизи анода начинает накапливаться положительный заряд; объемная плотность заряда начинает создавать собственное поле, сравнимое с внешним; от анода начинает прорасти катодонаправленный (положительный) стример; стример (он в разы быстрее лавины) прорастает навстречу лавине и оставшимся после нее свободным электронам; вначале стример ускоряется, затем его скорость становится почти постоянной, а затем он начинает тормозиться из-за резкого уменьшения количества свободных электронов перед головкой стримера; расчет остановлен, т.к. дальнейший рост стримера невозможен, для него нужен дополнительный источник свободных электронов, например: фотоионизация перед головкой, автоэмиссия с катода, фотоэлектронная эмиссия с катода, космическое излучение и/или вторичная эмиссия с катода. Последние два источника слишком малы и ими можно пренебречь.



# Концентрация электронов в лавине $[1/\text{м}^3]$

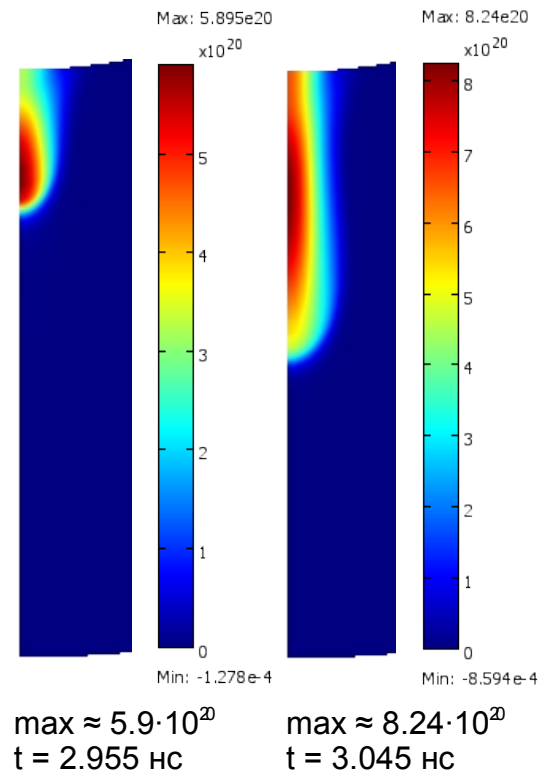
На графике показано распространение начального пакета электронов от катода к аноду, начало лавинного процесса и начало зарождения стримера на аноде.



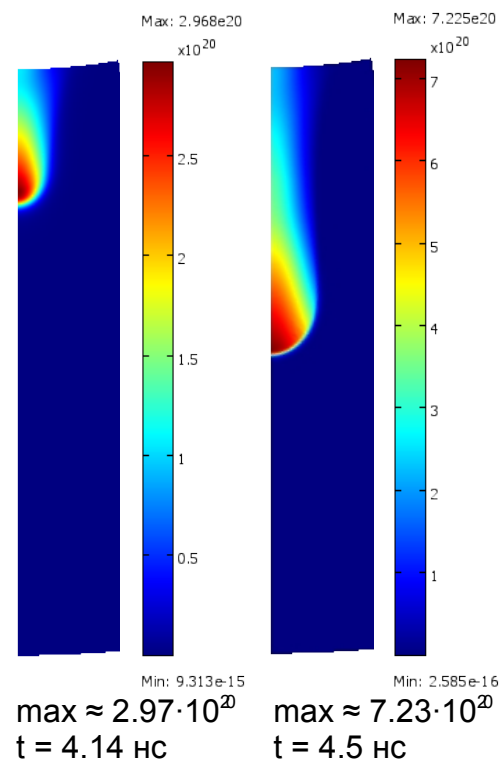
# Концентрация электронов [ $1/\text{м}^3$ ]

Сравнивать контурные графики для различных моделей будем только для стримерной стадии процесса в два момента времени, когда длина стримеров примерно одинакова.

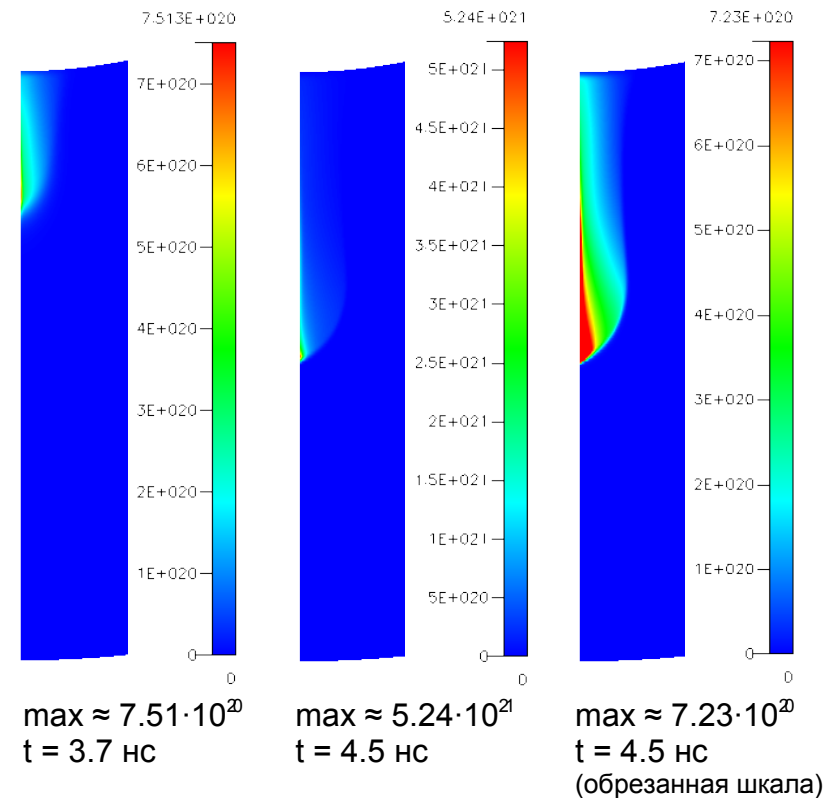
аргон (Comsol)



воздух (Comsol)



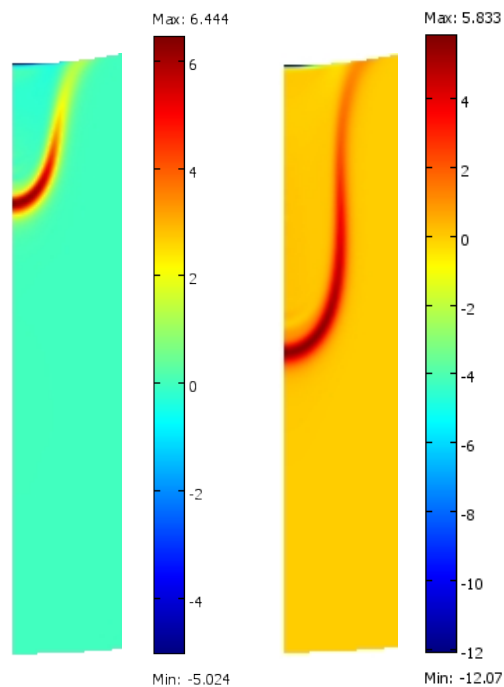
воздух (CFD-ACE)



Видно, что в модели с аргонем максимум концентрации электронов находится не на фронте головке, как в моделях с воздухом, и плазменный канал в аргоне содержит больше свободных электронов, т.к. в нем нет реакции прилипания. В CFD-ACE модели возле оси симметрии возникла какая-то особенность численного счета, несмотря на хорошую сетку, но в остальном структура рассчитанного стримера похожа на результаты расчета в Comsol.

# Объемная плотность заряда [Кл/м<sup>3</sup>]

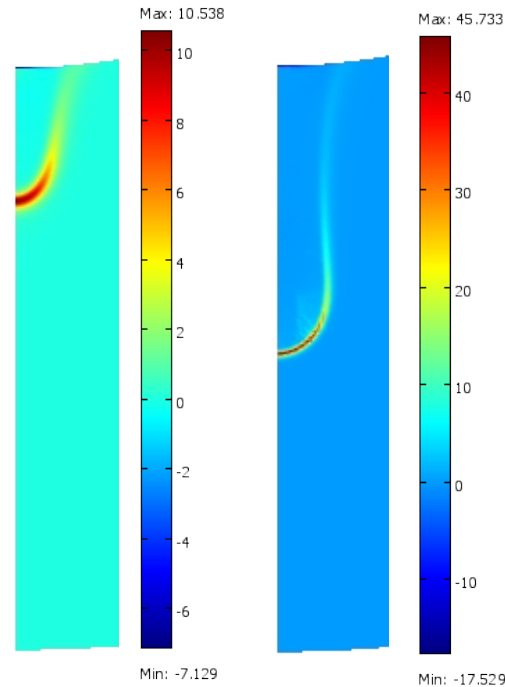
аргон (Comsol)



min  $\approx -5.0$  Кл  
max  $\approx 6.4$  Кл  
t = 2.955 нс

min  $\approx -12.1$  Кл  
max  $\approx 5.8$  Кл  
t = 3.045 нс

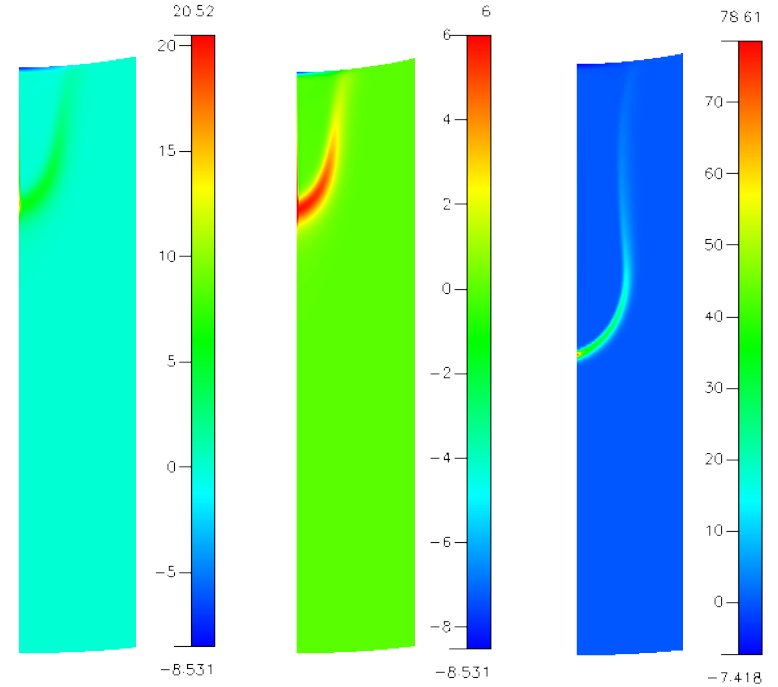
воздух (Comsol)



min  $\approx -7.1$  Кл  
max  $\approx 10.5$  Кл  
t = 4.14 нс

min  $\approx -17.5$  Кл  
Max  $\approx 45.7$  Кл  
t = 4.5 нс

воздух (CFD-ACE)



min  $\approx -8.5$  Кл  
max  $\approx 20.5$  Кл  
t = 3.7 нс

min  $\approx -8.5$  Кл  
max  $\approx 6$  Кл  
t = 3.7 нс

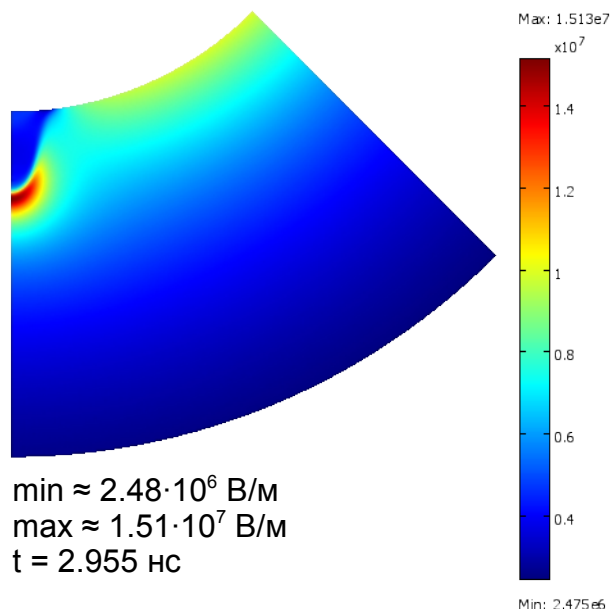
(обрезанная шкала)

min  $\approx -7.4$  Кл  
max  $\approx 78.6$  Кл  
t = 4.5 нс

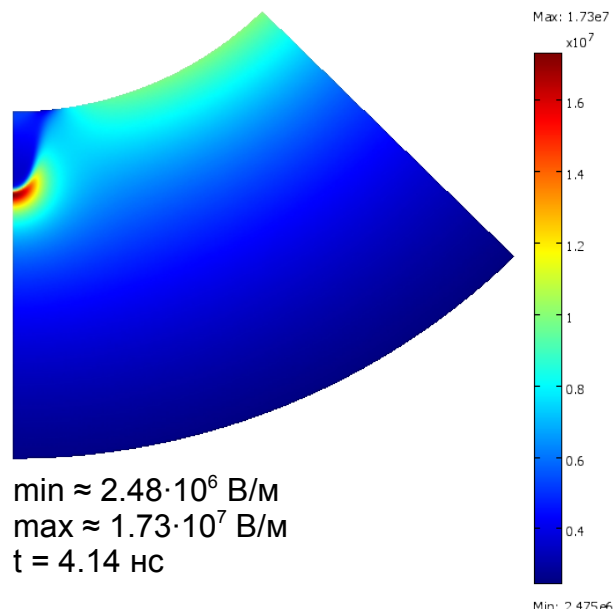
Положительный заряд (суммарный) сосредоточен в области головки стримера и на границе плазменной области. Также виден максимум отрицательного заряда в узкой прианодной области. В плазменном канале стримера суммарный заряд равен нулю.

# Напряженность электрического поля [В/м]

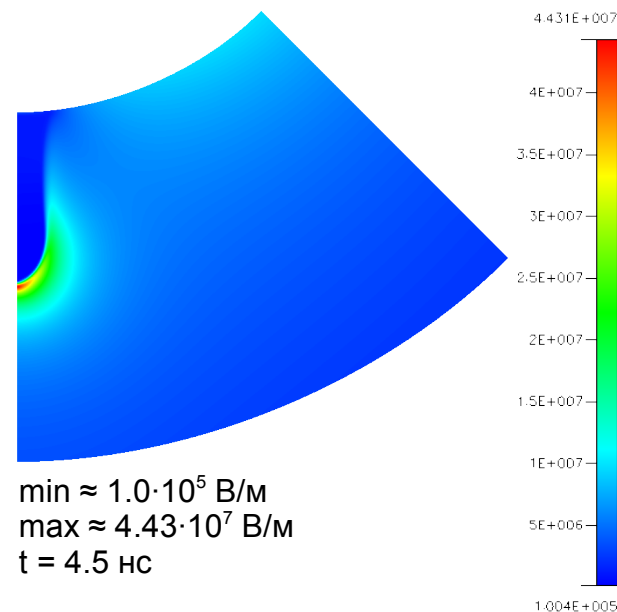
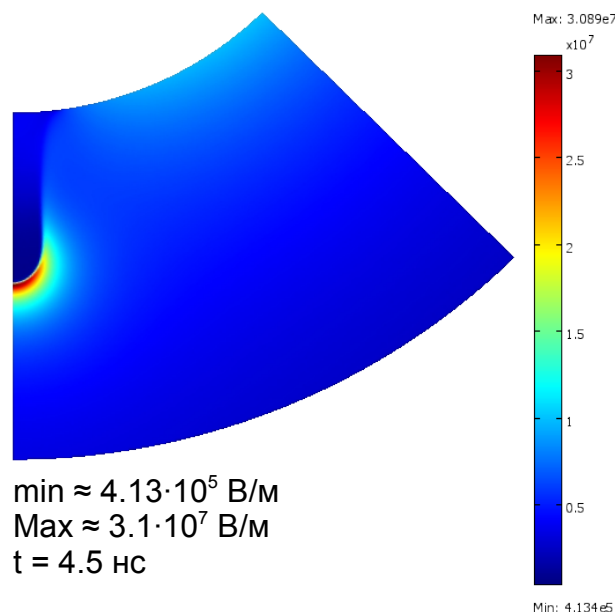
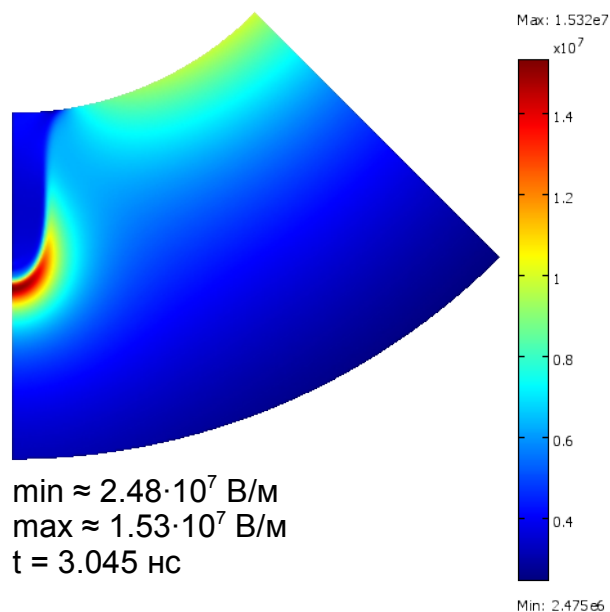
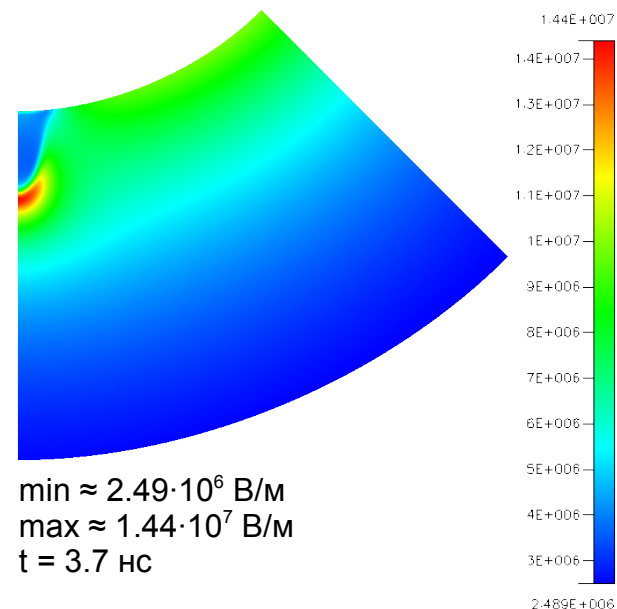
аргон (Comsol)



воздух (Comsol)



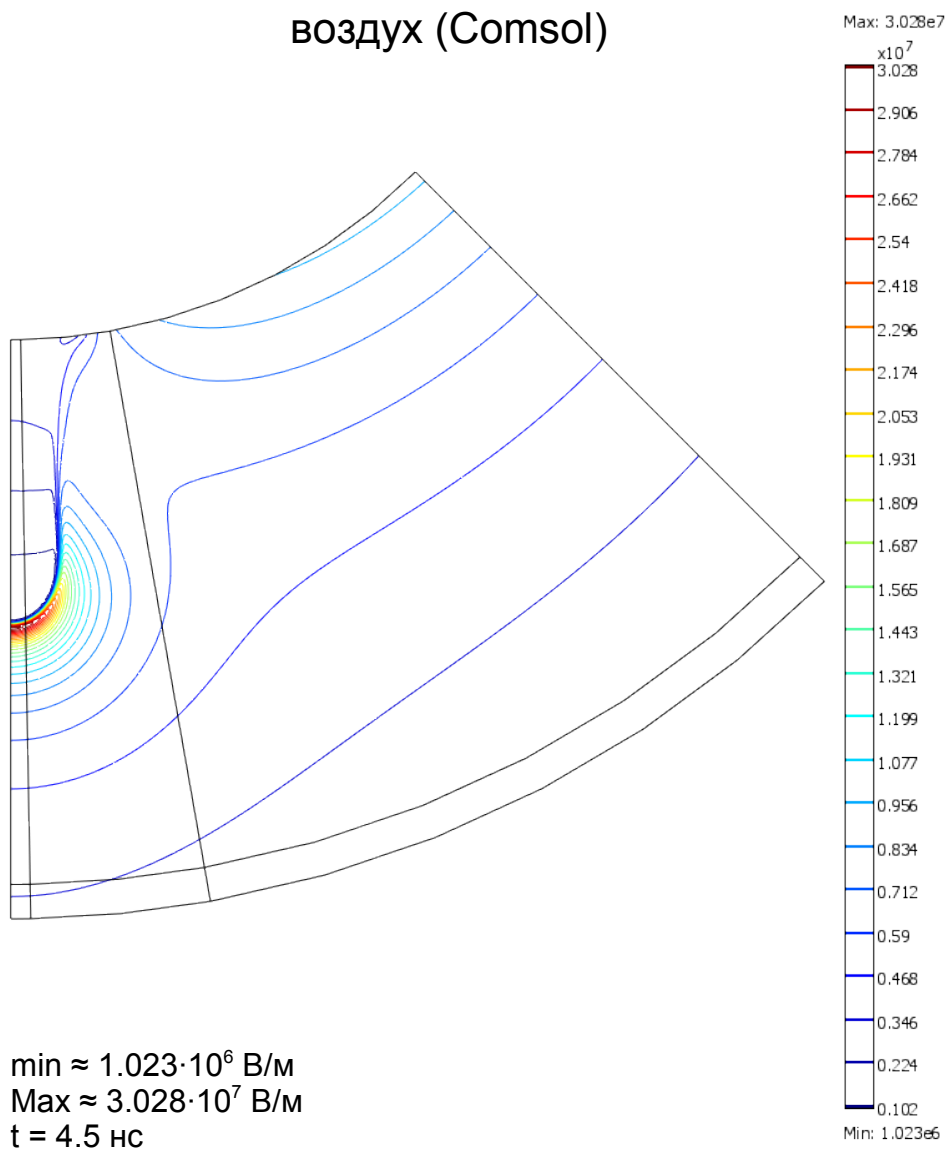
воздух (CFD-ACE)



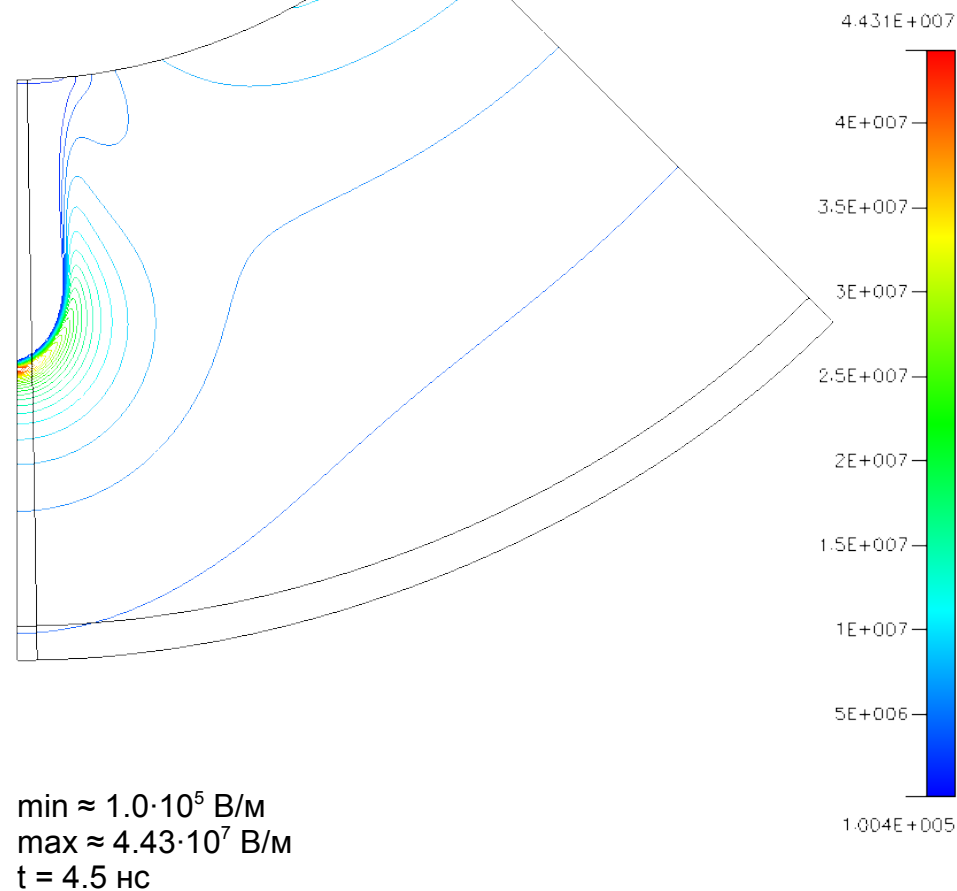


# Напряженность электрического поля [В/м]

воздух (Comsol)



воздух (CFD-ACE)



# Проверка условия однородности структуры поля в плазме

Дебаевский радиус:

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_e}{e^2 n_e}}$$

В данной модели:

$$\frac{k T_e}{e} = 1 [B]$$

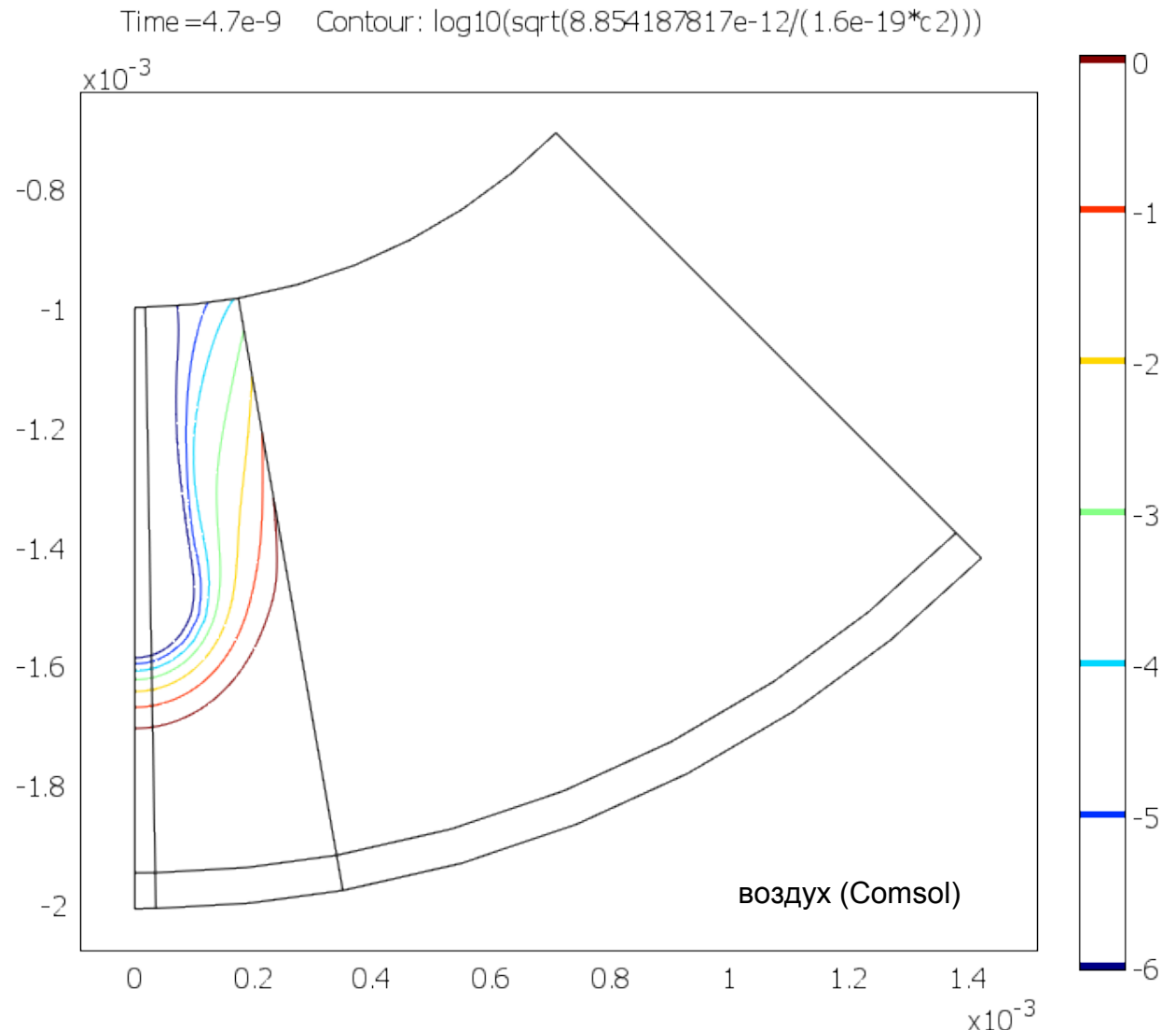
Условие:

Радиус Дебая ( $d$ ) в плазменной области должен быть существенно меньше радиуса плазменного канала ( $R_p$ )

Итог:

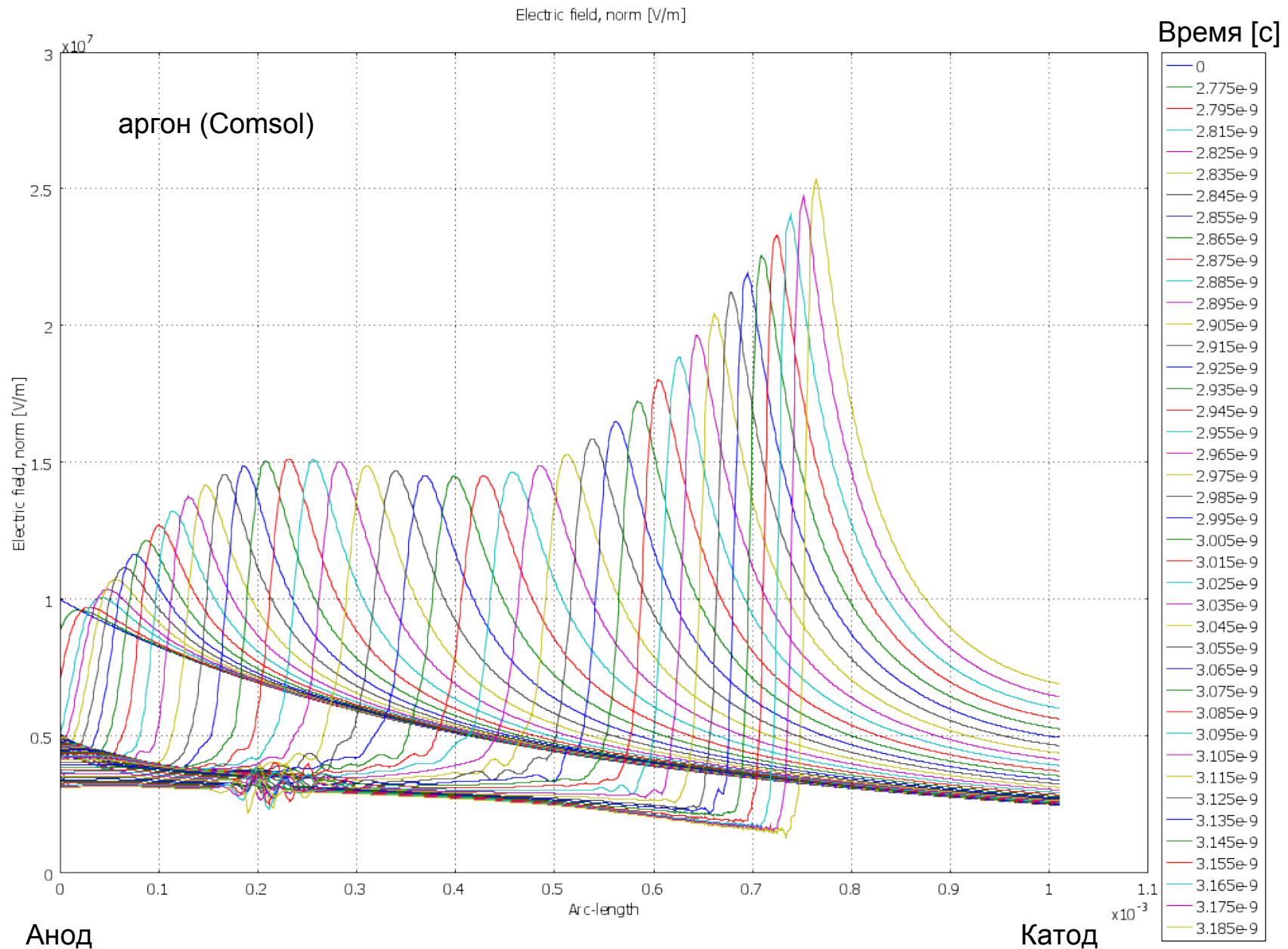
$$d \leq 1 \text{ мкм}$$
$$R_p \approx 100 \text{ мкм}$$

Контурный график десятичного логарифма от радиуса Дебая



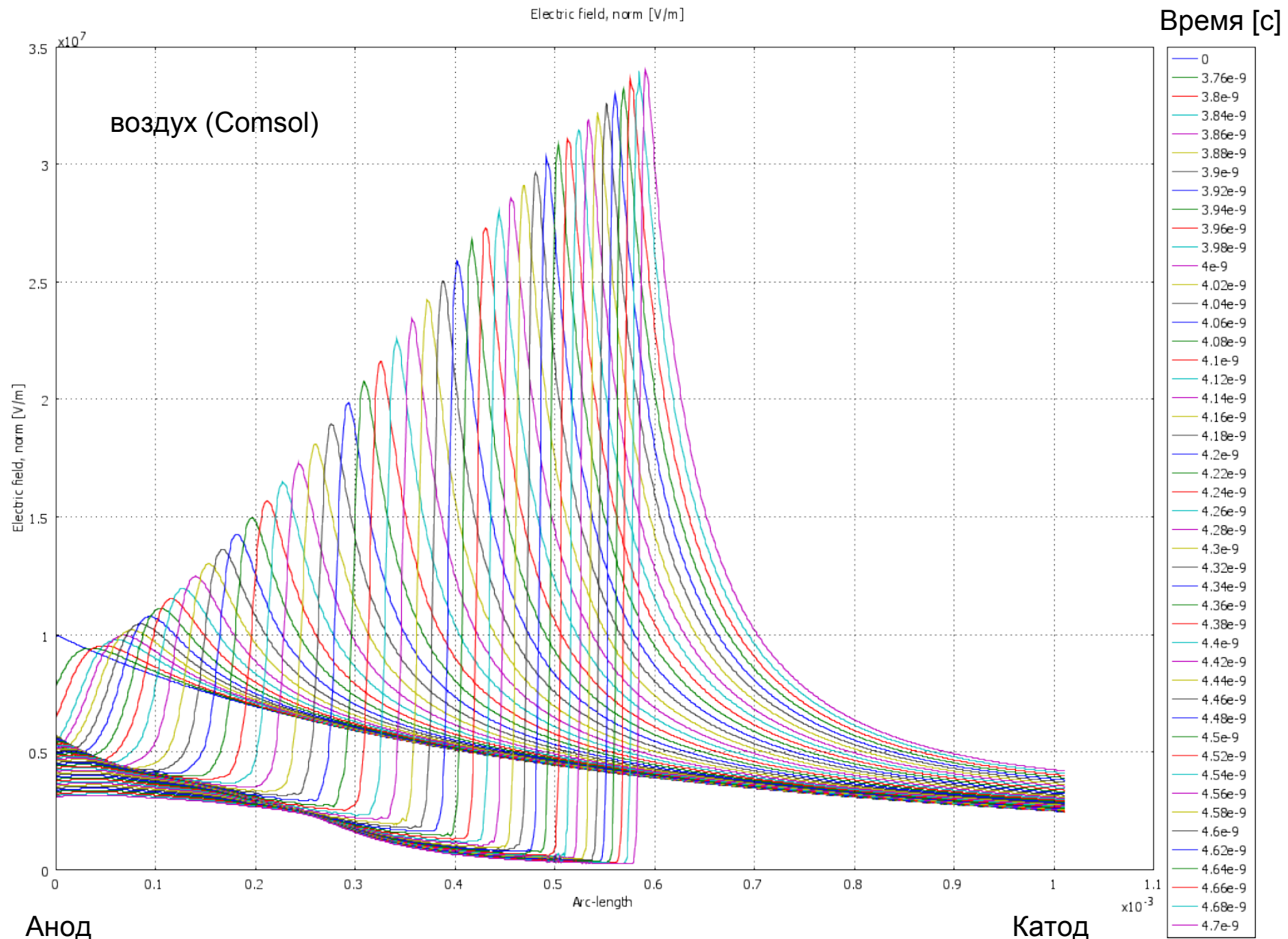
# Напряженность электрического поля вдоль оси симметрии [В/м]

На графике показано прорастание стримера от анода к катоду.



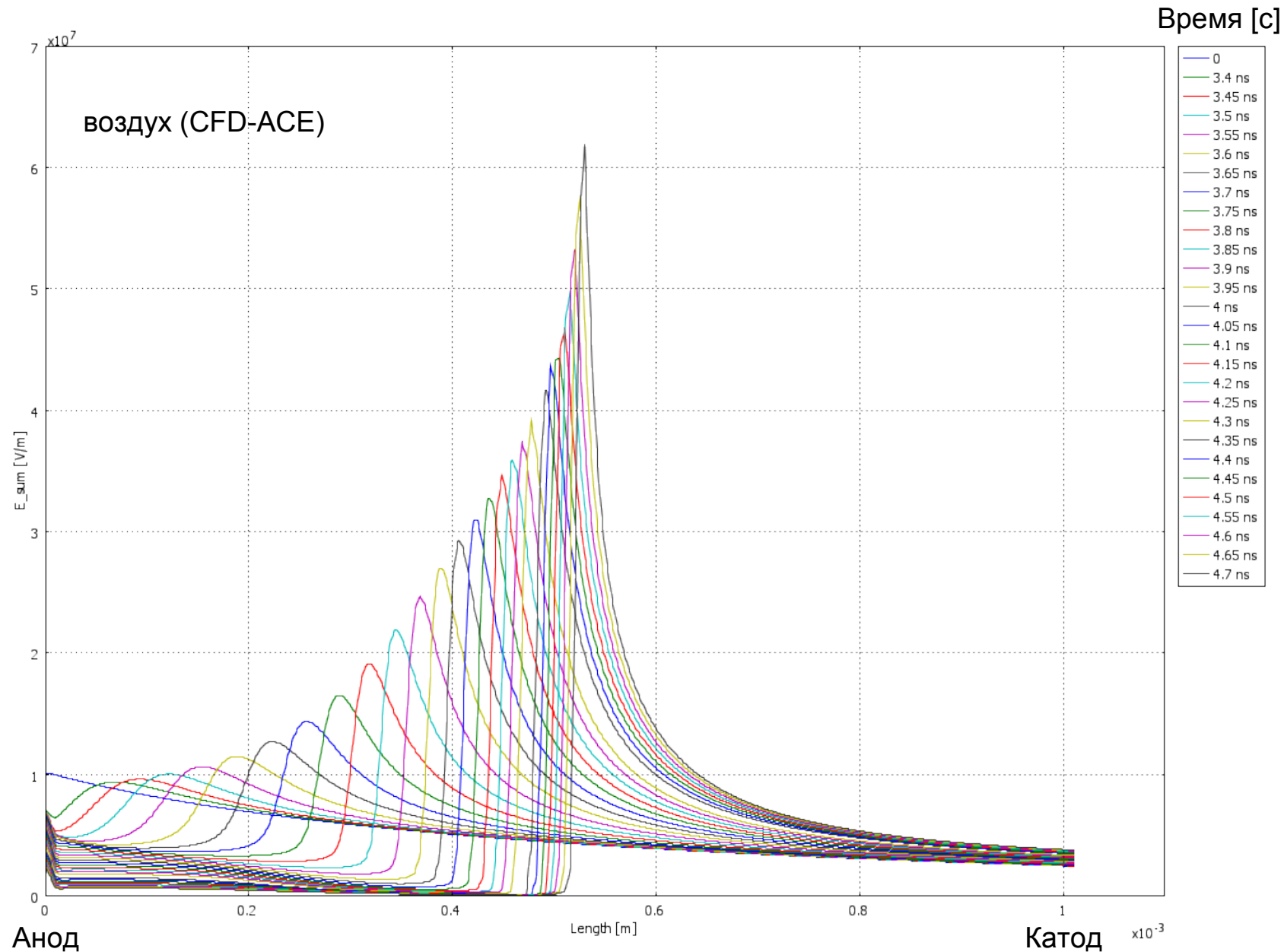
# Напряженность электрического поля вдоль оси симметрии [В/м]

На графике показано прорастание стримера от анода к катоду.

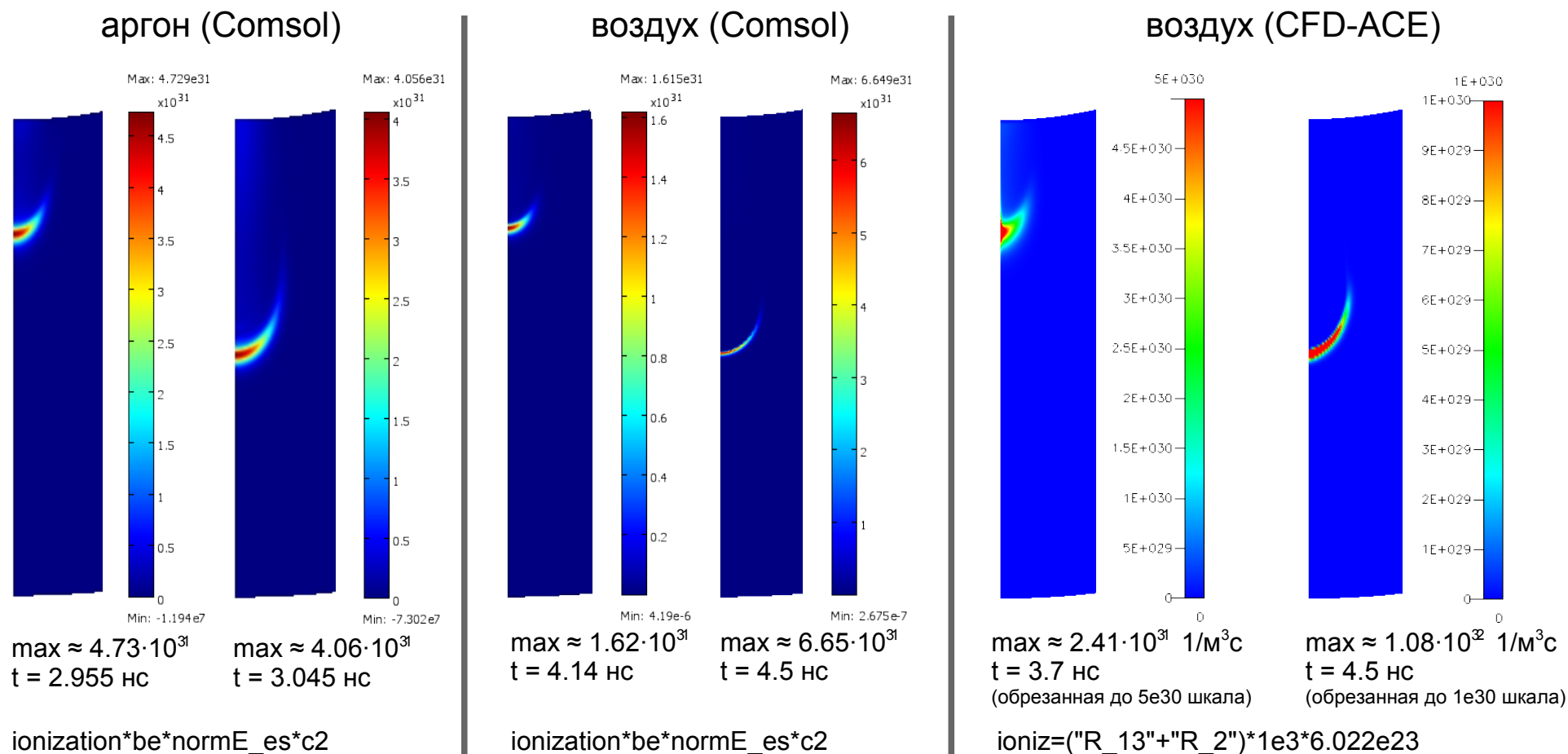


# Напряженность электрического поля вдоль оси симметрии [В/м]

На графике показано прорастание стримера от анода к катоду.



# Интенсивность ионизации [ $1/\text{м}^3\text{с}$ ]

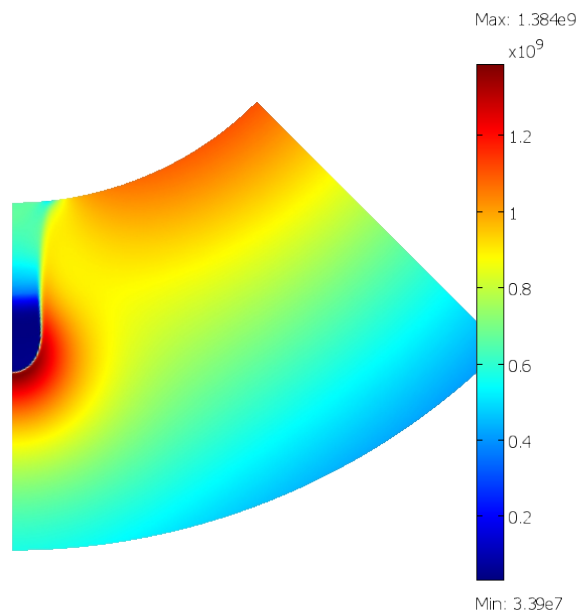


Максимальная частота ионизации (ionization\*be\*normE\_es) в момент времени t = 4.5 нс в Comsol модели для воздуха получилась примерно  $5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует периоду 2 пс. Это минимальное время между актами ионизации перед головкой стримера.

# Интенсивность прилипания $[1/\text{м}^3\text{с}]$

воздух (Comsol)

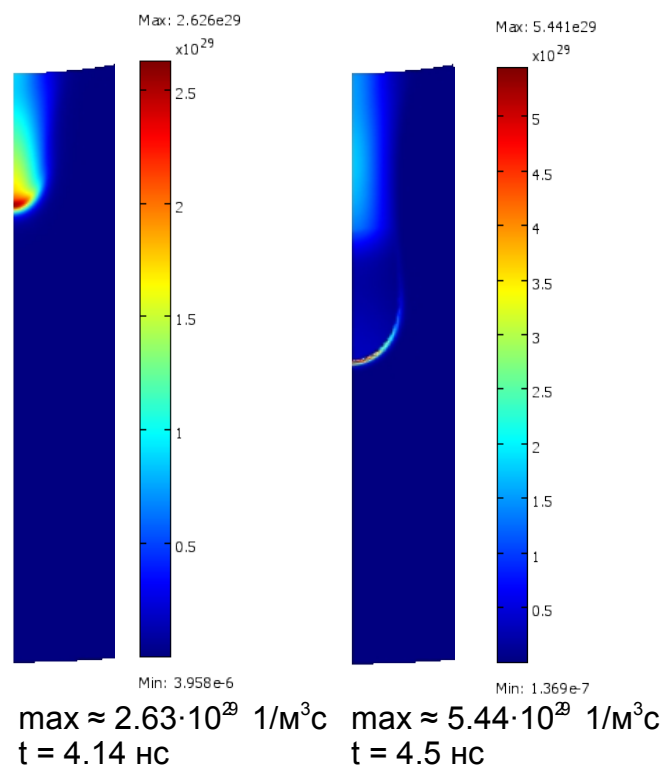
Частота прилипания



$t = 4.5 \text{ нс}$

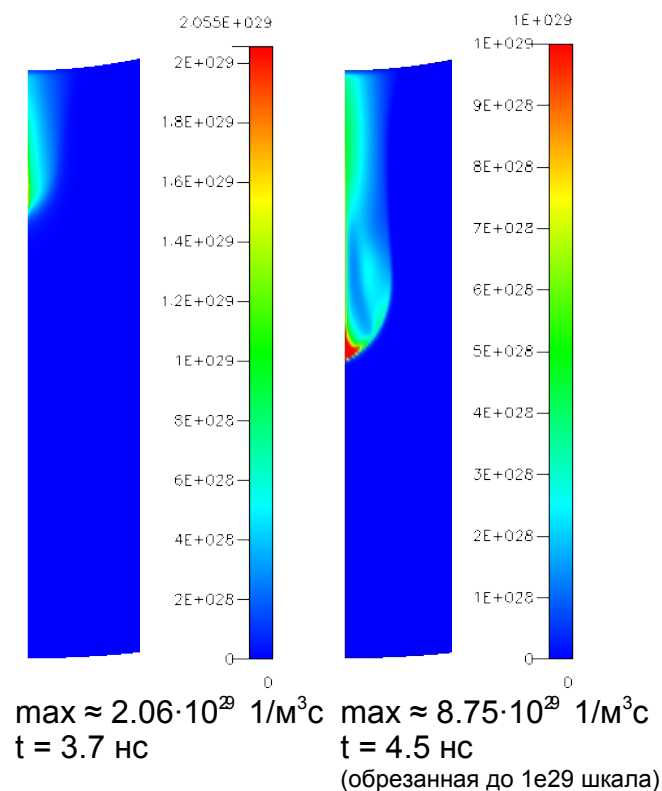
$\text{adhesion} * \text{be} * \text{normE\_es}$

воздух (Comsol)



$\text{adhesion} * \text{be} * \text{normE\_es} * c2$

воздух (CFD-ACE)



$\text{adhes} = ("R\_9" + "R\_6" + "R\_42") * 1 \times 10^{29} * 6.022 \times 10^{23}$

В момент времени  $t = 4.5 \text{ нс}$  частота прилипания в Comsol модели для воздуха:

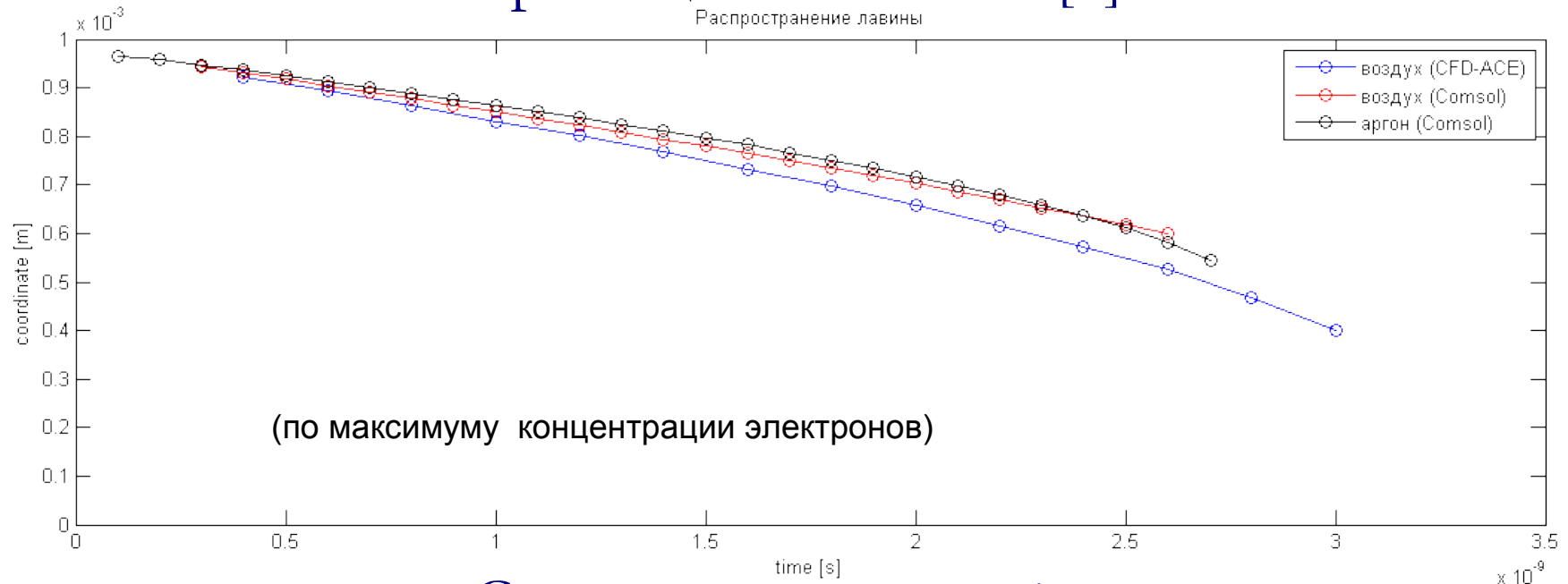
- максимальная  $\approx 1.38 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1} \rightarrow$  период  $\approx 0.72 \text{ нс}$  – это минимальное время жизни свободного электрона
- минимальная  $\approx 3.39 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1} \rightarrow$  период  $\approx 29 \text{ нс}$  – это максимальное время жизни свободного электрона

Т.о. среднее время жизни свободного электрона в воздухе для этой модели получилось около 15 нс.

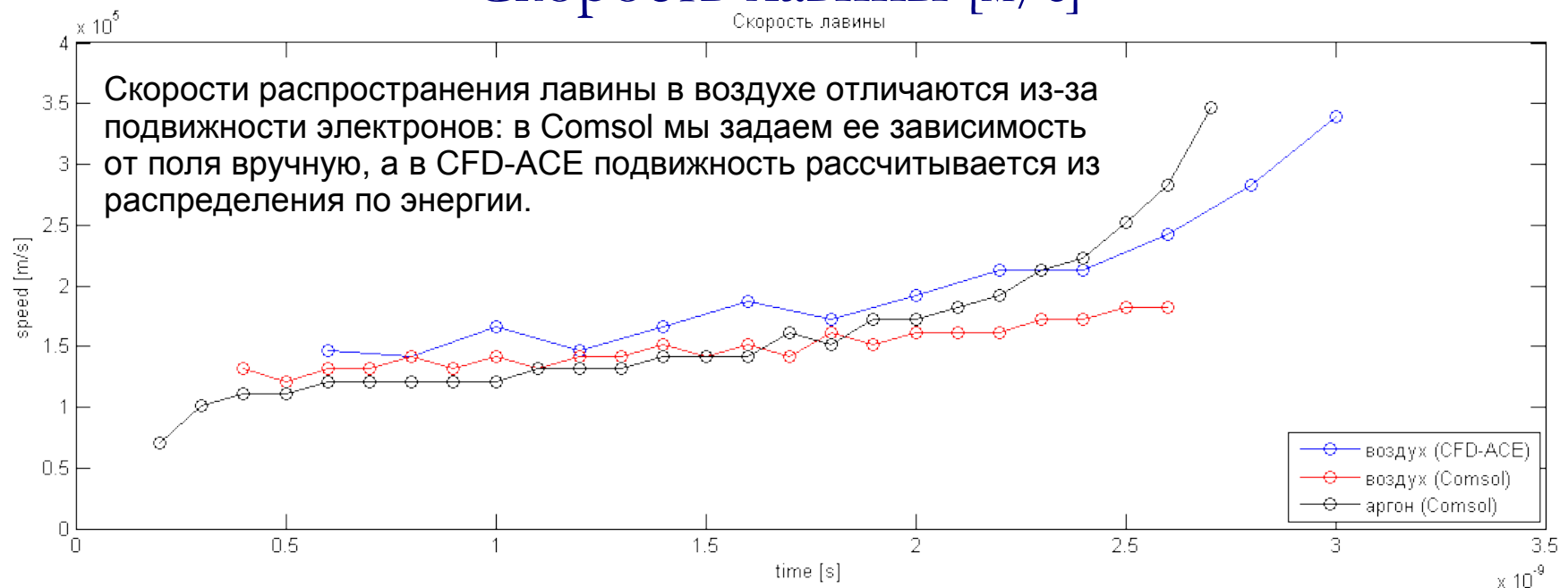
Интенсивности электрон-ионной и ион-ионной рекомбинации соответственно на порядок и на два ниже, чем интенсивность прилипания и здесь приведены не будут.



# Перемещение лавины [м]

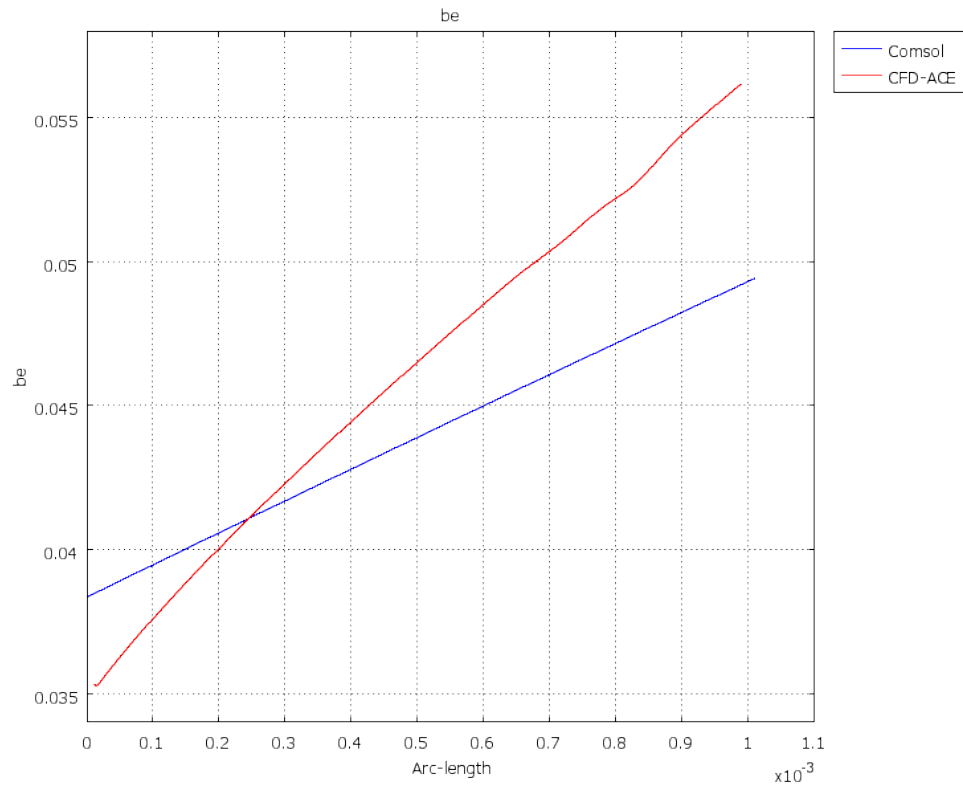


# Скорость лавины [м/с]

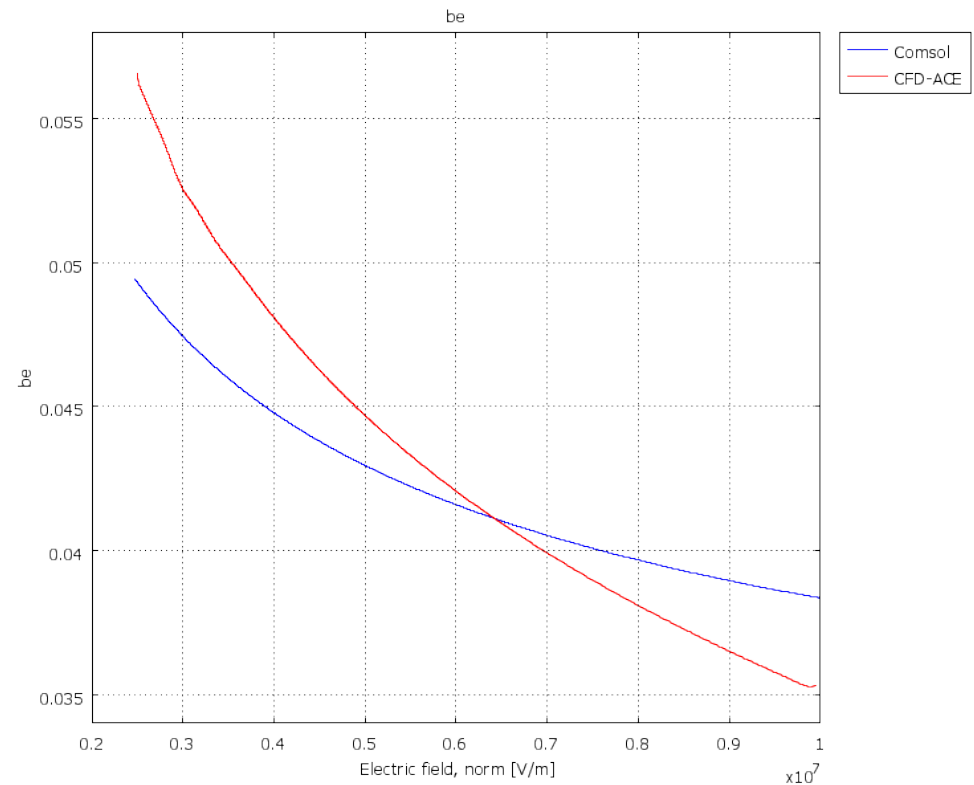


# Подвижность электронов в воздухе [ $\text{м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ ]

Подвижность вдоль оси симметрии на лавинной стадии (нет влияния объемного заряда)

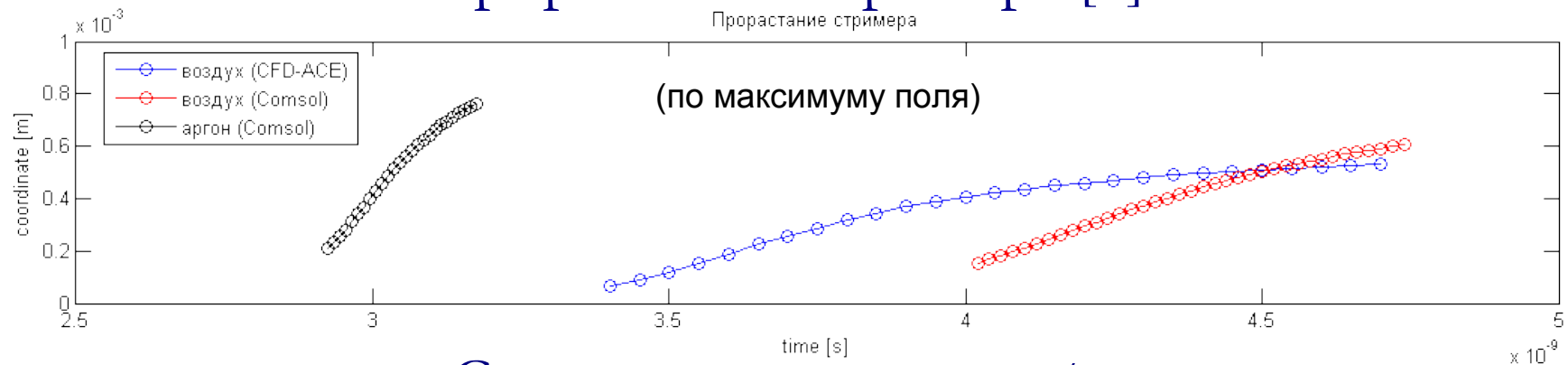


Параметрический график зависимости  $b_e(E)$ , в роли параметра – длина пути вдоль оси симметрии

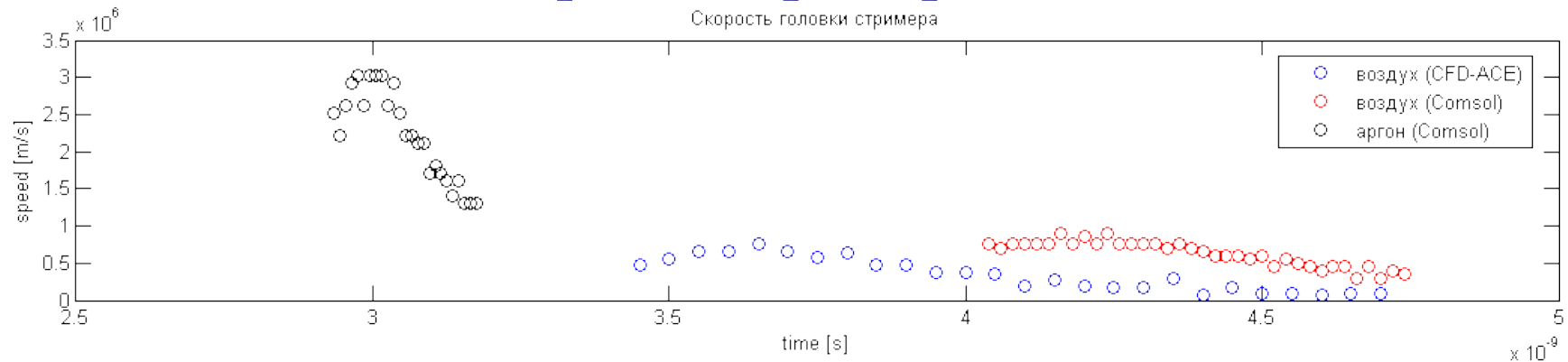


В модели для аргона подвижность задавалась постоянной величиной:  $b_e = 4.3 \times 10^{-2} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$

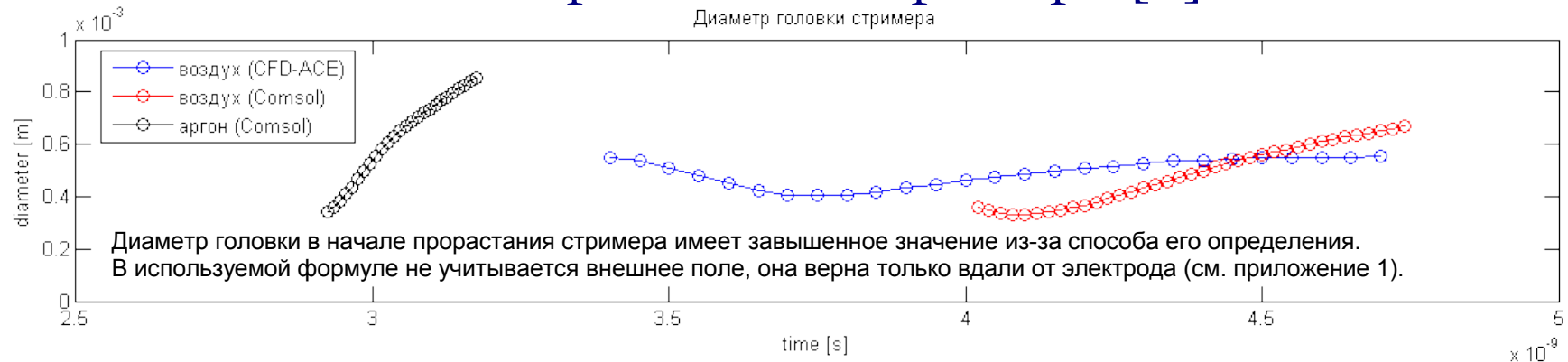
# Проращение стримера [м]



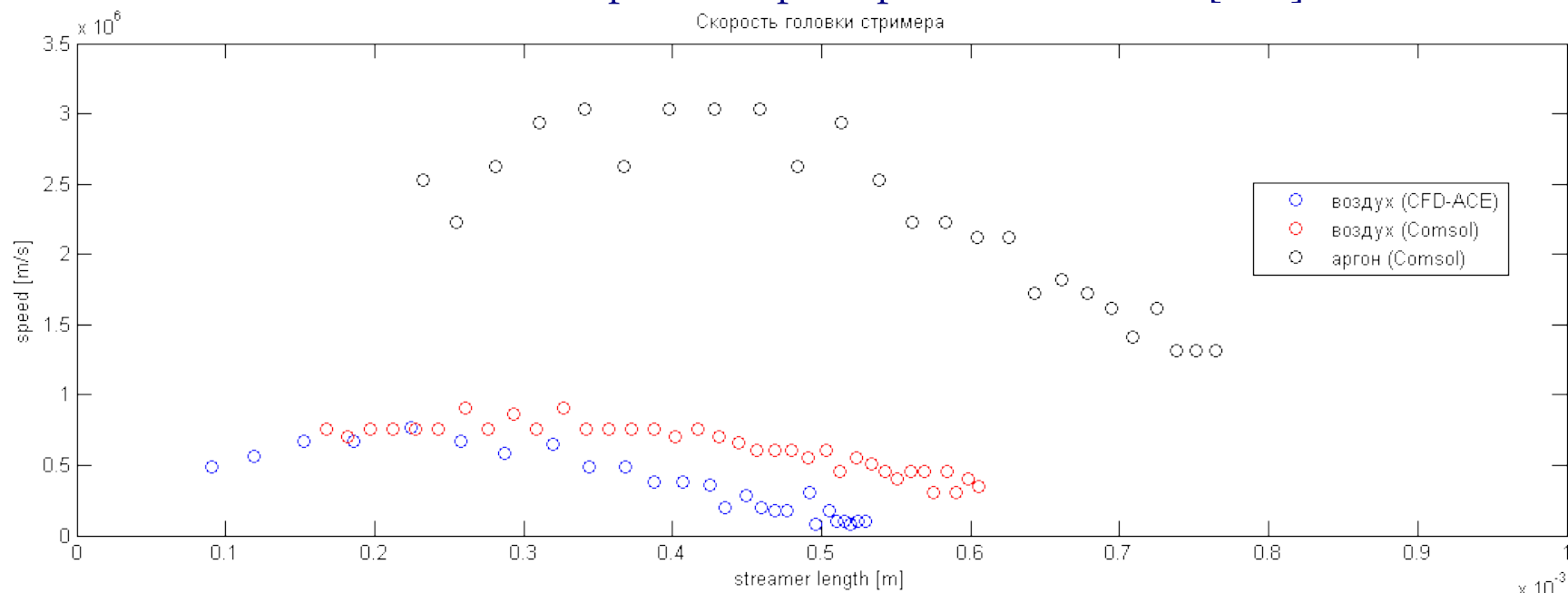
# Скорость стримера [м/с]



# Диаметр головки стримера [м]



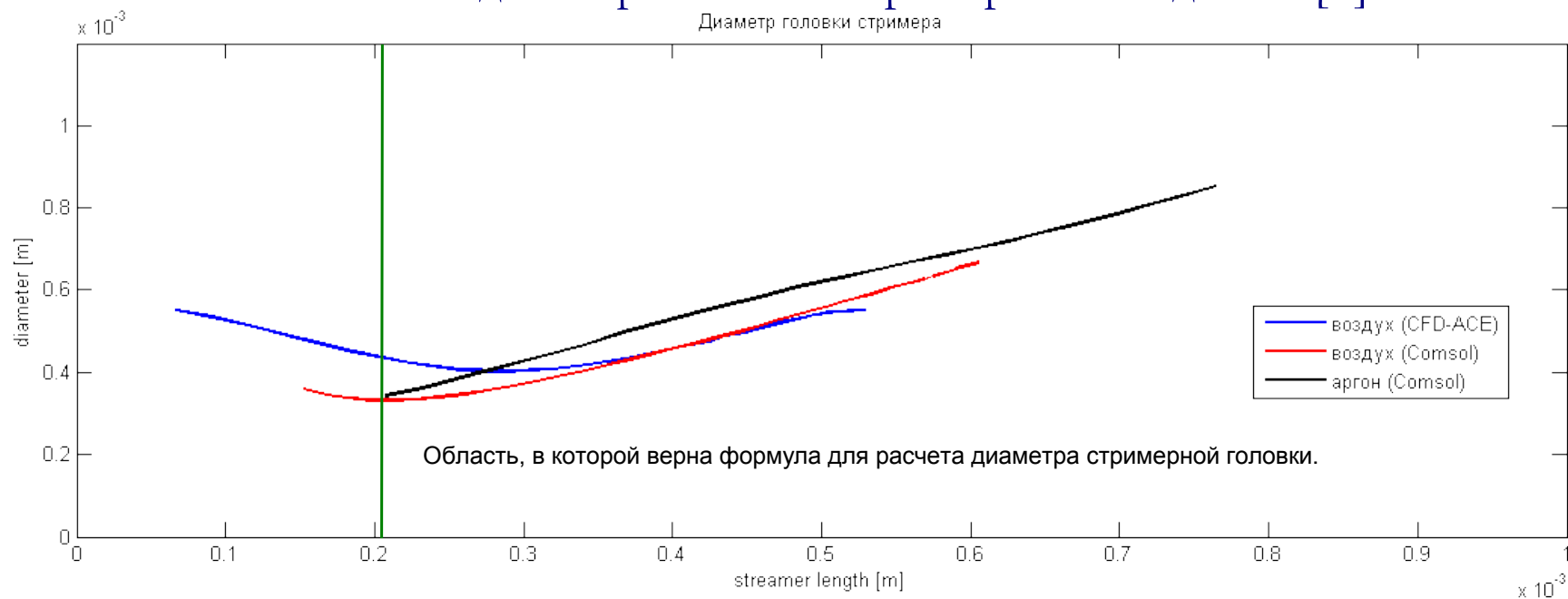
## Зависимости скорости стримера от его длины [м/с]



Анод

## Зависимости диаметра головки стримера от его длины [м]

Катод



# Выводы

- В пакете Comsol создана простая модель, позволяющая рассчитать процесс лавинно-стримерного перехода в сухом воздухе (азот-кислородная газовая смесь). Общая расчетная система состоит всего из четырех уравнений: уравнения Пуассона и трех транспортных уравнений (для электронов, положительных и отрицательных ионов).
- Основным достоинством данной модели является сокращение времени счета, благодаря уменьшению количества уравнений. Это так же позволяет решать модели с большим количеством элементов за разумное время. Для сравнения:
  - Для расчета 4.5 наносекунд модели лавинно-стримерного перехода в воздухе (в пакете CFD-ACE) с грубой сеткой (1584 узла, 1491 элемент) требуется около двух суток процессорного времени. (В этом документе результаты не показаны)
  - Для расчета 4.7 наносекунд той же модели с хорошей сеткой (23217 узлов, 22896 элементов) требуется около 7 недель процессорного времени.
  - Для расчета 3.2 наносекунд модели в Comsol, использующей дрейфово-диффузионное приближение, для газа аргона с хорошей сеткой (25863 узла, 25520 элементов) потребовалось около половины дня.
  - Для расчета 4.7 наносекунд модели в Comsol, использующей дрейфово-диффузионное приближение, для воздуха с хорошей сеткой (25863 узла, 25520 элементов) потребовалось чуть больше суток.
- Рассчитанная скорость прорастания стримера в воздухе составила около 300-900 км/с, что хорошо согласуется с экспериментом (100-1000 км/с), несмотря на отличия в длине стримера (смоделировано только начало), в давлении воздуха (большой разброс в экспериментах), разности потенциалов на электродах и структуре поля.
- В дальнейшем планируется создание специальной модели для сравнения с экспериментом.
- Также в модель будут добавлены дополнительные источники свободных электронов: фотоионизация перед головкой положительного стримера, фотоэмиссия и автоэмиссия с катода. Будет произведена оценка их влияния на процессы в стримере.

# Приложение 1. Определение диаметра головки стримера

Диаметр головки считаем равным 4\*расстояние, на котором поле перед головкой стримера спадает в 2.25 раза, т.к. при аппроксимации используется следующая зависимость:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{UR}{r^2} \cdot K$$

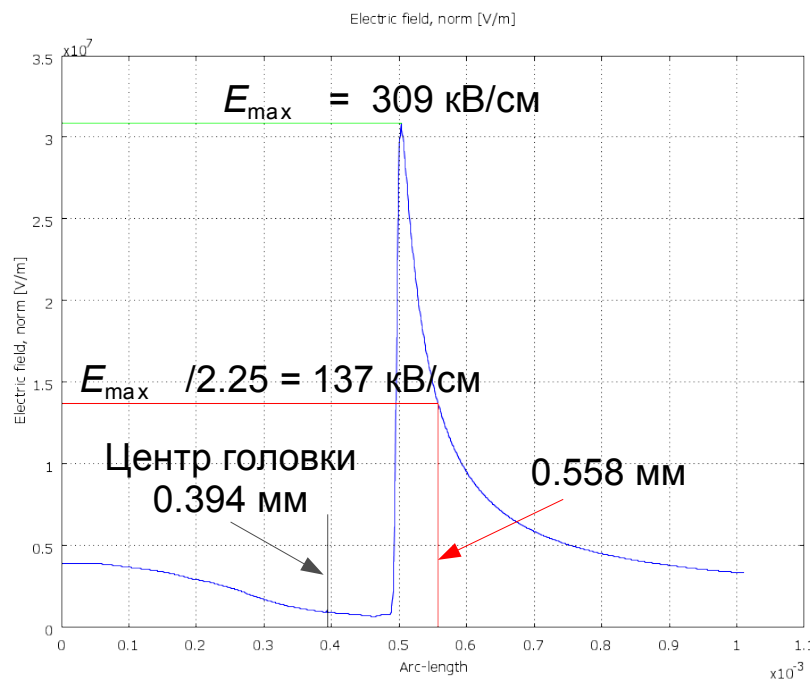
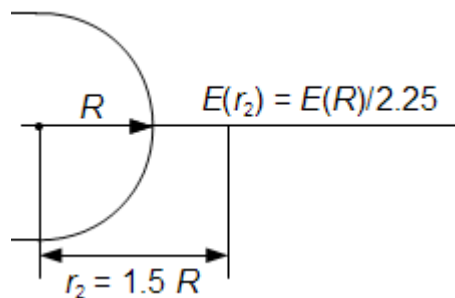
Формула для поля  $E$  на оси цилиндрического канала со сферическим окончанием (перед стримерной головкой)

Э.М.Базелян, Ю.П.Райзер "Физика молнии и молниезащиты", Москва "Физматлит", 2001

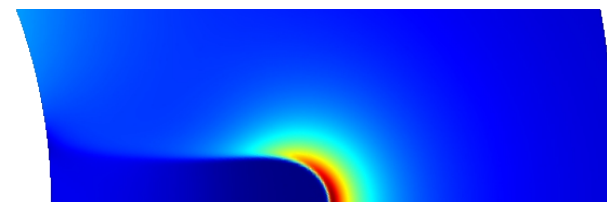
$$\text{Пусть } \frac{E(R)}{E(r_2)} = 2.25 \rightarrow E(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{UR}{r_2^2} \cdot K = \frac{1}{2.25} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{U}{R} \cdot K \rightarrow \left(\frac{R}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{2.25} \rightarrow R = \frac{r_2}{1.5}$$

Где  $R$  – радиус головки,  $r_2$  – точка на оси, в которой поле в 2.25 раза меньше максимального.

Соответственно мы легко можем измерить на линейных графика поля  $E$  расстояние  $(R - r_2)$ , откуда и получим диаметр головки.



Контурный график поля  $E$   
( $t = 4.5$  нс)



Центр головки

$D = 0.218$  мм