Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA 4110
Høsten 2019

Innlevering 6

$\boxed{1}$ Bruk minste kvadraters metode på det overbestemte systemet

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Må løse

$$A^*A\underline{x} = A^*\underline{b}$$

Jeg har

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \ A^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finner først $A^*A\underline{x}$:

$$\begin{aligned} A^*A\underline{x} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

Finner så $A^*\underline{b}$

$$A^*\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Løser nå $A^*A\underline{x} = A^*\underline{b}$

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 14 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 14 & -2 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & -11 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -\frac{11}{5} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{10} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Hvor jeg fant $\hat{x} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$

Jeg må nå finne $A\hat{x}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{11}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{33}{5} \\ \frac{21}{10} \end{bmatrix}$$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1-i \\ i & i & -1 & 1+i \\ 0 & i & 0 & i \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right]$

Finner igjen $A^*A\underline{x} = A^*\underline{b}$.
Jeg har

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & i & -1 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix},\ A^* = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \underline{b} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finner $A^*A\underline{x}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & i & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -i & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Finner $A^*\underline{b}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & -i & -i & -i \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 3-3i \\ 1-2i \end{bmatrix}$$

Løser nå $A^*A\underline{x} = A^*\underline{b}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-i \\ 1 & 4 & 1 & 3-3i \\ -i & 1 & 3 & 1-2i \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-i \\ 0 & 3 & 1-i & 2-2i \\ 0 & 1+i & 2 & 2-i \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-i \\ 0 & 1 & \frac{1-i}{3} & \frac{2-2i}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2-3i}{3} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-i \\ 0 & 1 & \frac{1-i}{3} & \frac{2-2i}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-3i}{4} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & i & 1-i \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-i}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-3i}{4} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & \frac{1-3i}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-i}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-3i}{4} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-2-5i}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-i}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-3i}{4} \end{array}\right]$$

Løser nå $A\underline{\hat{x}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i & i & -1 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2-5i}{4} \\ \frac{3-i}{3} \\ \frac{2-3i}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17-15i}{12} \\ \frac{13+15i}{12} \\ \frac{10-3i}{12} \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ Vi skal finne polynomer som passer til punktene

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$$

a) Det finnes et unikt fjerdegradspolynom som går gjennom alle punktene. Sett opp et ligningssystem for koeffisientene til dette polynomet, og finn koeffisientene.
Skal finne $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Setter opp ligningssystem for koeffisientene a_4, a_3, a_2, a_1 og a_0.

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 & = 2 \\ 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 & = 3 \\ 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 & = 5 \\ 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + a_0 & = 7 \end{cases}$$

Løser ligningssystemet ved hjelp av en matrise:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & 5 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Som vil si fjerdegradspolynomet som går igjennom alle punktene er $P(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{17}{12}x^2 + \frac{11}{6}x + 1$

b) Det finnes ingen andregradspolynomer som går gjennom alle punktene. Bruk minste kvadraters metode til å finne koeffisientene til det annengradspolynomet som passer best.

Må finne $A^*A\underline{x} = A^*\underline{b}$, der $\underline{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ og $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finner $A^*\underline{b}$

$$A^*\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 171 \\ 51 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Finner $A^*A\underline{x} = A\underline{b}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 354 & 100 & 30 & 171 \\ 100 & 30 & 10 & 51 \\ 30 & 10 & 5 & 18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{100}{354} & \frac{30}{354} & \frac{171}{354} \\ 100 & 30 & 10 & 51 \\ 30 & 10 & 5 & 18 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{100}{354} & \frac{30}{354} & \frac{171}{354} \\ 0 & \frac{310}{177} & \frac{90}{59} & \frac{159}{59} \\ 0 & \frac{90}{59} & \frac{145}{59} & \frac{207}{59} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{100}{354} & \frac{30}{354} & \frac{171}{354} \\ 0 & 1 & \frac{27}{31} & \frac{477}{310} \\ 0 & 1 & \frac{29}{18} & \frac{23}{10} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{100}{354} & \frac{30}{354} & \frac{171}{354} \\ 0 & 1 & \frac{27}{31} & \frac{477}{310} \\ 0 & 0 & \frac{413}{558} & \frac{118}{155} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{100}{354} & \frac{30}{354} & \frac{171}{354} \\ 0 & 1 & \frac{27}{31} & \frac{477}{310} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{36}{35} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{100}{354} & \frac{30}{354} & \frac{171}{354} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{36}{35} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{36}{35} \end{array}\right]$$

Andregradspolynomet som passer best er $P(x) = \frac{3}{14}x^2 + \frac{9}{14}x + \frac{36}{35}$

$\boxed{3}$ Finn likevektsvektorene til de stokastiske matrisene:

a) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$

Likevektsvektoren til en stokastisk matrise er egenvektoren til egenverdien $\lambda = 1$. Siden jeg vet at dette er en stokastisk matrise, vet jeg også at den har en egenverdi $\lambda = 1$ og jeg kan bare finne egenvektoren:

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies Null(A - I_2) = t \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden likevektsvektoren også skal være en sannynlighetsvektor, må jeg finne t slik at $t \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ er en sannsynlighetsvektor.

$$t(\frac{5}{2} + 1) = 1$$
$$\implies t = \frac{2}{7}$$
$$\implies q = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

Vet igjen at denne matrisen har en egenvedri $\lambda = 1$, finner egenvektoren til denne.

$$\begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 & -0.6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.4 \\ 0 & 0.8 & -0.4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$
$$\implies Null(A - I_3) = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finner igjen en t slik at elementene i q summerer opp til 1.

$$t(2 + 0.5 + 1) = 1$$
$$\implies t = \frac{2}{7}$$
$$\implies q = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ Er følgende stokastiske matriser regulære?

a) $P = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}$

Må finne en $k \geq 1$ slik at alle elementene i $M^k \geq 0$.

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{21}{25} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{25} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ja, denne matrisen er regulær.

b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$

Ser med en gang at denne ikke er regulær, da den har 0 i nedre hjørne. Hver gang en multipliserer denne matrisen med seg selv vil det alltid bli 0 i dette hjørnet.

$\boxed{5}$ Temperaturen i Bymarka i løpet av vintersesongen kan enten være over, lik, eller under 0° Celsius. Trondheims skiklubb observerte de følgende svingningene i temperatur fra den ene dagen til den neste:

- Når temperaturen har vært over 0, er det 70% sannsynlighet for at den vil være over og 10% sannsynlighet for at den vil være under 0° neste dag.
- Når temperaturen har vært lik 0°, er det 10% sannsynlighet for at den vil være over og 10% sannsynlighet for at den vil være under 0° neste dag.
- Når temperaturen har vært under 0°, er det 10% sannsynlighet for at den vil være over og 70% sannsynlighet for at den vil være under 0° neste dag.

Etter mange dager med dette mønsteret i vinter, for hvilken temperatur bør en skiløper forberede sine ski? (Gi sannsynlighetene for de tre mulige temperaturene.)

Setter opp dette som en tabell først:

Fra	Over	Under	Lik	Til
	0.7	0.1	0.1	Over
	0.1	0.7	0.1	Under
	0.2	0.2	0.8	Lik

Kan nå sette det opp som en matrise M:

$$M = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

For å finne de tre sannsynlighetene må jeg finne likevektsvektoren. Gjør dette ved å finne egenvektor til $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$\implies q = t \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Setter jeg $t = \frac{1}{2}$, får jeg $q = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Skiløperen må beregne at temperaturen er lik 0°

$\boxed{6}$ Vis at en regulær stokastisk 2x2 matrise

$$M = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix} \quad \text{med} \ \ 0 < a, b < 1$$

har en unik likevektsvektor.

Finner egenverdiene til matrisen M:

$$\begin{aligned} det(M - \lambda I_2) &= (1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - ab \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + a\lambda + b\lambda - a - b + 1 + ab - ab \\ &= \lambda^2 + \lambda(a+b-2) - a - b + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \lambda &= \frac{-a-b+2 \pm \sqrt{(a+b-2)^2 - 4\cdot(-a-b+1)}}{2} \\ &= \frac{-a-b+2 \pm \sqrt{a^2+2ab+b^2}}{2} \\ &= \frac{-a-b+2 \pm \sqrt{(a+b)^2}}{2} \end{aligned}$$
$$\implies \lambda_1 = \frac{-a-b+2-a-b}{2} = -a-b+1, \ \lambda_2 = \frac{-a-b+2+a+b}{2} = 1$$

Ser at matrisen har to egenverier, der den ene er 1. Denne egenverdien gir likevektsvetoren:

$$\begin{bmatrix} 1-a-1 & b \\ a & 1-b-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -a & b \\ a & -b \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies q = t \cdot \begin{bmatrix} \frac{b}{a} \\ 1 \end{bmatrix}$$

For at q faktisk skal være en likevektsvektor må elementene i vektoren summere til 1:

$$t(\frac{b}{a} + 1) = 1$$
$$\implies t = \frac{1}{\frac{b}{a} + 1}$$
$$\implies q = \begin{bmatrix} \frac{b}{b+a} \\ \frac{1}{\frac{b}{a}+1} \end{bmatrix}$$