Avsluttende eksamen i TDT4120 Algoritmer og datastrukturer

Eksamensdato	10. august, 2007
Eksamenstid	0900–1300
Sensurdato	31. august
Språk/målform	Bokmål
Kontakt under eksamen	Magnus Lie Hetland (tlf. 91851949)
Tillatte hjelpemidler	Alle trykte/håndskrevne; bestemt, enkel kalkulator

Vennligst les hele oppgavesettet før du begynner, disponer tiden og forbered evt. spørsmål til faglærer kommer til eksamenslokalet. Gjør antagelser der det er nødvendig. Skriv kort og konsist. Lange forklaringer og utledninger som ikke direkte besvarer oppgaven tillegges liten eller ingen vekt. Skriv fortrinnsvis på anvist plass (dvs. uten å legge ved ark).

Oppgave 1

For hvert av delspørsmålene nedenfor, kryss av for «Ja» eller «Nei», og gi en kort begrunnelse for svaret ditt.

a. Man kan forbedre HEAPIFY slik at den får en bedre *best-case*-kjøretid for tilfeller der tabellen allerede (tilfeldigvis) tilfredsstiller haug-egenskapen.

Ja [ ] Nei [ ]

Kort begrunnelse
Nei, siden dette da må sjekkes, og kjøretiden alt er $O(n)$.

b. Anta et sett med n uniformt fordelte reelle tall fra og med 0 til og med 256. Kjøretiden for å sortere disse vil i *average-case* være $\Omega(n \lg n)$.

Ja [ ] Nei [ ]

Kort begrunnelse
Nei, man kan f.eks. bruke *bucket sort* for å få en *average-case* på $O(n)$.

c. Et binærtre kan traverseres i lineær tid uten bruk av rekursjon.

Ja [ ] Nei [ ]

Kort begrunnelse
Ja, man kan f.eks. simulere rekursjon med en stack.

d. Et problem som kan løses med dynamisk programmering kan alltid reduseres i lineær tid til et som kan løses med grådighet.

Ja [ ] Nei [ ]

Kort begrunnelse
Nei. Et enkelt moteksempel er å finne korteste vei i en graf.

e. I uvektede grafer er det bedre å bruke bredde-først-søk enn dybde-først-søk for å finne én-til-alle korteste vei.

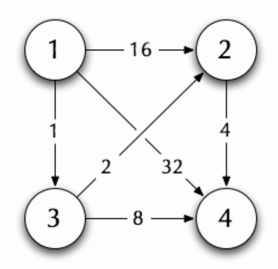
Ja [ ] Nei [ ]

Kort begrunnelse
Ja, fordi dybde-først-søk antagelig vil gi galt svar.

f. Prims algoritme kan i enkelte tilfeller være asymptotisk bedre enn Kruskals algoritme.

Ja [ ] Nei [ ]

Kort begrunnelse
Ja, hvis man bruker en Fibonacci-haug og man har mange kanter.



Figur 1: Grafen $G = (V, E)$

Oppgave 2

a. Utfør FLOYD-WARSHALL på grafen G (vist i Figur 1). For hvert trinn i algoritmen, oppgi avstanden fra node 1 til node 4 nedenfor.

$d^{(0)}{}_{1,4} = 32$, $d^{(1)}{}_{1,4} =$ ____ , $d^{(2)}{}_{1,4} =$ ____ , $d^{(3)}{}_{1,4} =$ ____ , $d^{(4)}{}_{1,4} =$ ____ .

Svar: 32, 20, 7, 7.

b. Betrakt følgende algoritme, ALPHA. Anta at argumentene *beta* og *gamma* er to heltallstabeller av lengde *zeta* som inneholder tallene 1…*zeta* i en eller annen rekkefølge. (De to kan gjerne ha forskjellig rekkefølge.) Hva gjør algoritmen ALPHA? Begrunn svaret kort. (Vi er altså ute etter hva den beregner, hvilket resultat den frembringer eller hva som er *hensikten* med algoritmen. En ren gjenfortelling av algoritmens fremgangsmåte, trinn for trinn, vil gi liten eller ingen uttelling.)

```
ALPHA(beta, gamma)
for eta = 1...zeta
    for theta = 1...zeta
        delta, epsilon ← eta, beta[theta]
        if epsilon < delta:
            delta, epsilon ← epsilon, delta
        if gamma[delta] > gamma[epsilon]
            gamma[delta], gamma[epsilon] ← gamma[epsilon], gamma[delta]
```

Svar: Den sorterer *gamma* in-place. For hver posisjon i *gamma* sammenlignes elementet med alle andre posisjoner (vha. permutasjonen *beta*), og elementene byttes om nødvendig. Merk: Feil i oppgaven (0-indeksering) opplyst under eksamen.

Oppgave 3

Dr Albatross har et problem: Han har ansatt mange assistenter innen forskjellige avdelinger og trenger å sette sammen grupper (én gruppe fra hver avdeling) til å hjelpe ham med viktige eksperimenter. Dessverre viser det seg at mange av assistentene misliker flere av de andre på det sterkeste, og Dr Albatross vil helst unngå å ha to personer med i samme gruppe hvis (minst) én av dem misliker den andre. Han trenger din hjelp til å finne en algoritme for å velge ut grupper som blir størst mulig og som tilfredsstiller dette kravet.

Doktoren har gravd frem et teorem fra en gammel matematikkbok, men husker ikke helt hva han skulle med det – han mistenker likevel at du kan ha nytte av det:

Kőnig's teorem: I enhver bipartitt graf vil antall kanter i en maksimal matching være lik antall noder i et minimalt nodedekke (*vertex cover*). □

(Anta at hvis du finner en maksimal matching i en bipartitt graf så kan du i lineær tid også finne et minimalt nodedekke.)

Han fisker også frem en lapp der han har notert seg følgende: «Komplementet til et nodedekke er en uavhengig mengde (*independent set*)».

Før dere besøker noen av avdelingene lurer Dr Albatross på om du har en oppfatning av problemet helt generelt.

a. Gi en kort forklaring på hvorfor du ikke på noe enkelt vis kan løse problemet hans generelt.

Svar: Dette er Independent Set-problemet. Direkte reduksjon fra MAX-CLIQUE (se Problem 34-1, side 1018 i Cormen).

Dr Albatross tar deg først med til månerakettavdelingen, der han vil velge ut assistenter til en ostesmakingsgruppe. Han forklarer at innen denne avdelingen har assistentene fordelt seg i to leire: «Camembert forever» og «Brie FTW». Ingen av assistentene misliker noen i sin egen leir. Det er selvfølgelig ingenting i veien for å ta med folk fra begge leire i ostesmakingsgruppen, så lenge ingen av dem misliker hverandre.

b. Beskriv kort en effektiv algoritme som løser problemet for månerakettavdelingen. Oppgi kjøretid (begrunn) og vis korrekthet.

Svar: Bruk flyt til å finne en perfekt matching i $O(VE)$ tid, og bruk denne til å finne et minimalt nodedekke (i lineær tid, ihht. oppg.). Komplementet vil da være en maksimal uavhengig mengde (ihht. Kőnigs teorem). Totalt kjøretid $O(VE)$.

Dr Albatross er imponert over algoritmen for romrakettavdelingen og lurer på om resultatet kan brukes i andre avdelinger. Han ønsker nå – som et lite sidespor – at du skal finne en algoritme som kan avgjøre om assistentene i en gitt avdeling kan deles inn i to leire, slik at ingen misliker noen i sin egen leir.

c. Beskriv kort en effektiv algoritme som avgjør om assistentene i en avdeling kan deles opp slik Albatross ber om. Oppgi kjøretid (begrunn) og vis korrekthet.

Svar: Dette er rett og slett tofargbarhet. Løses lett ved traversering av grafen. Korrekthet kan vises med enkelt induksjonsbevis, for eksempel. Kjøretid $O(V+E)$.

Propagandaavdelingen til Dr Albatross er organisert hierarkisk, så alle bortsett fra lederen har én direkte overordnet, og muligens flere underordnede og indirekte overordnede. Det skal plukkes ut personer fra denne avdelingen til en plakatmalingsgruppe. En delmengde av personene i avdelingen er vurdert som kompetente til å sitte i denne plakatmalingsgruppen. Anta at det er n personer totalt i avdelingen og k personer i delmengden. Ideelt skulle alle disse k ha sittet i gruppen, men igjen har vi problemet at folk misliker hverandre, denne gangen langs kommandolinjene: Det må ikke finnes to personer i gruppen der den ene er den andres overordnede (direkte eller indirekte). Oppgaven blir nå å sette sammen en så stor lovlig plakatmalingsgruppe som mulig, bestående kun av medlemmer av propagandaavdelingen som er funnet kompetente.

d. Beskriv kort en så effektiv som mulig algoritme som løser problemet. Oppgi kjøretiden i Θ-notasjon. Gi et kort bevis for at algoritmen er korrekt.

Svar: Vi kan bruke en grådig algoritme (det kreves ikke at studentene påpeker at det dreier seg om grådighet). Gå gjennom alle de k kandidatene, og fjern deres overordnede (stopp evt. når du kommer til en som alt er fjernet). Dette kan gjøres i $\Theta(k \lg n)$ tid. Utfordringen ligger i å vise at dette er korrekt. Her kan man lage et grundig bevis, men det holder egentlig med en relativt kort forklaring: Hvis to kandidater ligger på samme sti fra rota i treet kan bare én av dem være med – men begge er lovlige. En som er nærmere rota vil blokkere flere kandidater enn en som er lenger ned (et supersett), så det vil alltid lønne seg å velge den som er lengst ned.