Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap

Faglig kontakt under eksamen:
Magnus Lie Hetland (918 51 949)

EKSAMEN I ALGORITMER OG DATASTRUKTURER (IT1105)

Onsdag 8. juni 2005
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 30. juni 2005

Hjelpemidler:
Godkjent kalkulator. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler.

Les hele oppgavesettet før du begynner. Les oppgaveformuleringene grundig. For pensumspesifikk formelsamling, se side 7. Ikke bruk tid på å lese formelsamlingen; slå opp i den hvis du står fast.

Oppgavene teller like mye. Delspørsmålene teller like mye innen hver oppgave.

På flervalgsoppgavene skal det kun velges *ett* alternativ. På flervalgsoppgavene gis det full uttelling for riktig svar og 0 poeng for galt eller manglende svar. Hvis du er usikker på svaret lønner det seg altså å gjette heller enn å la en oppgave stå ubesvart. Sett et kryss i ruten ved det riktige alternativet.

På oppgave 4, vennligst skriv *kort*. Skriv på angitt sted og ikke legg ved ekstra ark om det ikke er strengt nødvendig.

Oppgave 1

a) For søking i etter et tilfeldig mønster med lengde m i en tilfeldig tekst med lengde n har naiv strengsøking (*brute-force string matching*) gjennomsnittlig (*average-case*) kjøretid...

☐ **A** $\Theta(m)$;
☐ **B** $\Theta(n)$;
☐ **C** $\Theta(m \log n)$;
☐ **D** $\Theta(n \log n)$;
☐ **E** $\Theta(nm)$.

b) Av en mengde med n punkter i planet kan du finne de to punktene som ligger nærmest hverandre med en kjøretid i verste tilfelle (*worst case*) på (velg beste mulighet)...

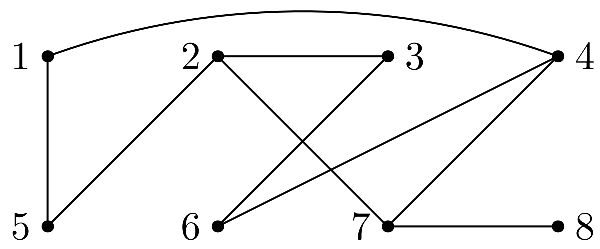
☐ **A** $\Theta(n \log n)$;
☐ **B** $\Theta(n\sqrt{n})$;
☐ **C** $\Theta(n)$;
☐ **D** $\Theta(n^2)$;
☐ **E** $\Theta(n^3)$.

c) Hvor lang tid tar det å sette n tall inn i et binært søketre i verste tilfelle (*worst-case*)?

☐ **A** $\Theta(n \log n)$;
☐ **B** $\Theta(n\sqrt{n})$;
☐ **C** $\Theta(n)$;
☐ **D** $\Theta(n^2)$;
☐ **E** $\Theta(n^3)$.

d) Vi kan sortere n elementer i $\Theta(n)$ tid i verste tilfelle (*worst-case*) under følgende omstendigheter:

☐ **A** Aldri, fordi sortering krever $\Omega(n \log n)$ tid;
☐ **B** Hvis elementene er heltall med opp til $\lfloor \log n \rfloor$ siffer;
☐ **C** Hvis elementene er 2^i for ulike heltall $i \leq n$;
☐ **D** Hvis elementene kan sammenlignes i konstant tid;
☐ **E** Hvis antall forskjellige elementverdier er $\Theta(1)$.



Figur 1: En urettet graf

e) Hvilket av de følgende begrepene er *ikke* knyttet til Kruskals algoritme?

☐ **A** *quick find*;
☐ **B** *union by rank*;
☐ **C** *path compression*;
☐ **D** *single-source*;
☐ **E** *makeset*.

Oppgave 2 Grafen $G = (V, E)$ er vist i figur 1. Den har en vektmatrise definert som følger:

$$w = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty & 4 & \infty & 7 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 13 & \infty \\ 3 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 13 & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty \end{bmatrix}, \tag{1}$$

der $w[i, j]$ (i er rad og j er kolonne) er vekten fra node i til node j.

a) Bruk Dijkstras algoritme på grafen, med node 1 som start-node. I hvilken av følgende rekkefølger vil nodene få beregnet sin korrekte avstand fra start-noden? (Hvis du kan velge vilkårlig mellom to noder, velg alltid den med lavest nummer.)

☐ **A** 1, 4, 5, 2, 3, 7, 6, 8;
☐ **B** 1, 4, 5, 2, 3, 6, 7, 8;
☐ **C** 1, 4, 5, 2, 6, 7, 3, 8;
☐ **D** 1, 4, 5, 6, 2, 7, 3, 8;
☐ **E** 1, 4, 5, 6, 3, 2, 7, 8.

b) Hvis du bruker Kruskals algoritme for å finne et minimalt spenntre over grafen G, hvilken av følgende kanter skal *ikke* være med med i spenntreet?

☐ **A** $(7, 8)$;
☐ **B** $(5, 2)$;
☐ **C** $(6, 4)$;
☐ **D** $(2, 7)$;
☐ **E** $(3, 6)$.

c) Anta at du har oppgitt følgende alfabet med tilhørende frekvensfordeling:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0.13	0.12	0.06	0.02	0.18	0.03	0.14	0.17	0.04	0.11

Hva blir høyden på et Huffman-tre konstruert over dette alfabetet med disse frekvensene?

☐ **A** 7;
☐ **B** 8;
☐ **C** 4;
☐ **D** 9;
☐ **E** 6.

d) *Traveling Salesman*-problemet er...

☐ **A** Ikke løsbart;
☐ **B** Ikke løsbart med negative kanter;
☐ **C** Ikke løsbart med negative sykler;
☐ **D** Å finne den korteste Euler-sykelen;
☐ **E** Å finne den korteste Hamilton-sykelen.

Oppgave 3

a) Hva blir løsningen på følgende rekurrens, uttrykt asymptotisk?

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 3T(\frac{n}{2}) + 1 \end{aligned}$$

☐ **A** $\Theta(n \log_2 n)$;
☐ **B** $\Theta(n^3)$;
☐ **C** $\Theta(3^{\log_3 n})$;
☐ **D** $\Theta(n^{\log_3 2})$;
☐ **E** $\Theta(n^{\log_2 3})$.

Betrakt følgende algoritme; s er en sekvens (tabell) og n er antall elementer i sekvensen:

```
RECURSIVE(s, n):
i ← n
while i ≥ 1 do
    s[i] = s[i] + 1
    i = i/2
if n ≥ 1 then
    RECURSIVE(s, n/2)
```

Funksjonen $C(n)$ beskriver hvor ofte sammenligningen $i \geq 1$ utføres i algoritmen RECURSIVE. Anta at n er en positiv heltallspotens av 2 og at tabellen s er 1-indeksert ($s[1]$ er første element).

b) Hvilken av følgende rekurrenser stemmer for $C(n)$?

☐ **A** $C(n) = C(n-1) + \log_2 n + 2$;
☐ **B** $C(n) = 2C(\frac{n}{2}) + \log_2 n - 2$;
☐ **C** $C(n) = 2C(\frac{n}{2}) + \log_2 n + 2$;
☐ **D** $C(n) = C(\frac{n}{2}) + \log_2 n - 2$;
☐ **E** $C(n) = C(\frac{n}{2}) + \log_2 n + 2$.

c) Hvilket av følgende uttrykk stemmer for $C(n)$?

☐ **A** $C(n) = (\log_2 n)^2 + \frac{(2-\log_2 n)\log_2 n}{2} + 3$;

☐ **B** $C(n) = (\log_2 n)^2 + \frac{(3-\log_2 n)\log_2 n}{2} + 3$;

☐ **C** $C(n) = (\log_2 n)^2 + \frac{(4-\log_2 n)\log_2 n}{2} + 3$;

☐ **D** $C(n) = (\log_2 n)^2 + \frac{(5-\log_2 n)\log_2 n}{2} + 3$;

☐ **E** $C(n) = (\log_2 n)^2 + \frac{(6-\log_2 n)\log_2 n}{2} + 3$.

d) Problemer i klassen NP er definert ved at de…

☐ **A** Kan løses i polynomisk tid ved gjetning;
☐ **B** Ikke kan løses i polynomisk tid;
☐ **C** Er minst like vanskelige som andre beregnbare problemer;
☐ **D** Kan reduseres til alle polynomiske problemer;
☐ **E** Kan brukes til å løse alle NP-komplette problemer.

Oppgave 4

a) Du har en tabell A med n Boolske verdier (*true* eller *false*). Beskriv en algoritme som sorterer verdiene i lineær ($O(n)$) tid i verste tilfelle (*worst case*), slik at alle *false*-verdier kommer før alle *true*-verdier, kun med bruk av en konstant ($O(1)$) mengde ekstra minne. *Merk*: Det er ikke tillatt å telle antallet *false*- eller *true*-verdier og så fylle ut tabellen på nytt, ettersom det kan være knyttet ekstra informasjon til de opprinnelige verdiene.

Algoritme:

b) Du har fått i oppgave å koble sammen et sett med n stasjoner i et kommunikasjonsnettverk. En potensiell kobling mellom to noder har en gitt båndbredde, som er oppgitt på forhånd. Med andre ord kan problemet modelleres som en graf $G = (V, E)$, der V er stasjonene og E er de mulige koblingene, og for en kant $e \in E$ er båndbredden gitt ved en vektfunksjon $w(e)$. Du ønsker å finne et sett med et *minimalt* antall kanter som skal være med i nettverket slik at alle nodene kan kommunisere med alle andre (det vil si, den resulterende grafen er sammenhengende), og samtidig ønsker du at den totale båndbredden skal være størst mulig. Beskriv kort en algoritme som løser problemet så effektivt som mulig, og angi kjøretiden til algoritmen i verste tilfelle (*worst case*), med Θ-notasjon.

Algoritme:

Kjøretid:

Tillegg: Formler

I det følgende finner du flere formler som kan være nyttige ved besvarelse av eksamen. Merk: Det er ikke sikkert du trenger alle (eller noen) av formlene.

Logaritmer

Logaritme-grunntallene antas å være større enn 1; x og y er vilkårlige positive tall.

$\log x^y = y \log x$

$\log xy = \log x + \log y$

$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

$\log_a x = \log_a b \log_b x$

$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$

Kombinatorikk

I det følgende står $n!$ for fakultetet til n, det vil si $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

Antall permutasjoner (rekkefølger) av en mengde med n elementer: $P(n) = n!$

Antall utvalg (kombinasjoner) av k elementer fra en mengde med n elementer: $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Antall delmengder av en mengde med n elementer: 2^n

Rekker

$\sum_{i=l}^{u} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{u-l+1 \text{ ganger}} = u - l + 1$ (u, l er heltallsgrenser, $l \leq u$); $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}n^2$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \frac{1}{3}n^3$

$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \approx \frac{1}{k+1}n^{k+1}$

$\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $(a \neq 1)$; $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{i+1} - 1$

$\sum_{i=1}^{n} i2^i = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \gamma$, hvor $\gamma \approx 0.5772\ldots$

$\sum_{i=1}^{n} \lg i \approx n \lg n$

$\sum_{i=l}^{u} ca_i = c \sum_{i=l}^{u} a_i$

$\sum_{i=l}^{u}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=l}^{u} a_i \pm \sum_{i=l}^{u} b_i$

$\sum_{i=l}^{u} a_i = \sum_{i=l}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{u} a_i$, hvor $l \leq m < u$

Avrunding

Et reelt tall x rundet nedover er definert som det største heltallet som ikke er større enn x, og skrives $\lfloor x \rfloor$. (For eksempel, $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.8 \rfloor = -4$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$.) Et reelt tall x rundet oppover er definert som det minste heltallet som ikke er mindre enn x, og skrives $\lceil x \rceil$. (For eksempel, $\lceil 3.8 \rceil = 4$, $\lceil -3.8 \rceil = -3$, $\lceil 3 \rceil = 3$.)

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ og $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ for reelle tall x og heltall n

$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$ for heltall n

$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$

Diverse

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ når $n \to \infty$ (Stirlings formel)

Rest-operatoren (modulus) er definert slik at $m \bmod p$ er resten man får når man deler m på p, der m er et heltall og p er et positivt heltall. (For eksempel, $3 \bmod 4 = 3$, $4 \bmod 4 = 0$, $5 \bmod 4 = 1$, $-3 \bmod 4 = 1$.)

I det følgende er n og m heltall og p er et positivt heltall.

$(n + m) \bmod p = ((n \bmod p) + (m \bmod p)) \bmod p$

$(n \cdot m) \bmod p = ((n \bmod p) \cdot (m \bmod p)) \bmod p$