

Oppgavestillere:
Magnus Lie Hetland
Jon Marius Venstad

Kvalitetskontroll:
Magnar Nedland



Faglig kontakt under eksamen:
Magnus Lie Hetland (918 51 949)

Eksamen i
TDT4120 ALGORITMER OG DATASTRUKTURER

Torsdag 16. desember 2010
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 17. januar 2011

Hjelpemidler: Ingen trykte/håndskrevne; bestemt, enkel kalkulator

Språk/målform: Bokmål

Les alle oppgavene før du begynner, disponer tiden og forbered spørsmål til faglærer ankommer lokalet. Gjør antagelser der det er nødvendig. Skriv kort og konsist. Lange forklaringer og utledninger som ikke direkte besvarer oppgaven tillegges liten eller ingen vekt.

Du kan beskrive algoritmer med tekst, pseudokode eller programkode, etter eget ønske, så lenge det klart fremgår hvordan den beskrevne algoritmen fungerer. Korte, abstrakte forklaringer kan være vel så gode som utførlig pseudokode, så lenge de er presise nok. Kjøretider oppgis med asymptotisk notasjon, så presist som mulig.

Oppgave 1

- a) (6 %) DIJKSTRA og BELLMAN–FORD løser to ulike spesialtilfeller av samme problem. Hva er forskjellen mellom disse spesialtilfellene?
- b) (5 %) Hvilke krav må stilles til en rettet graf for at den skal kunne sorteres topologisk?
- c) (6 %) Er det mulig å beskrive *worst-case*-kjøretid med Ω -notasjon? Begrunn svaret.
- d) (5 %) Hva er *linear probing*? Svar kort.
- e) (6 %) Hva er Hamilton-sykler? Hvorfor er det ingen algoritmer i pensum for å finne dem?
- f) (5 %) En flertrådsberegning (*multithreaded computation*) kan ses som en asyklisk, rettet graf (*computation dag*), $G = (V, E)$. Hvilke egenskaper ved G representerer T_1 og T_∞ ? (Anta at hver deltråd, eller *strand*, tar 1 tidsenhet å utføre.)
- g) (6 %) HEAPSORT er optimal, men RADIX-SORT har bedre asymptotisk kjøretid. Forklar svært kort hvordan dette henger sammen.
- h) (6 %) Hvorfor er det ikke alltid nyttig å bruke memoisering i rekursive algoritmer?

Oppgave 2

- a) (5 %) Hvordan blir maks-haugen (*max-heap*-en) $[21, 14, 16, 0, 2, 15, 13]$ dersom vi setter inn 15, og deretter tar ut største element?
- b) (6 %) Hvis du skal flette sammen flere sorterte lister med varierende lengde, og du kun kan flette to lister om gangen (i lineær tid), hvordan vil du minimere det totale arbeidet som trengs for alle flettingene? (Du skal altså sitte igjen med én sortert liste som består av elementene fra alle de opprinnelige listene.)
- c) (5 %) Hvordan vil du reversere en sekvens Q (med lengde n) ved hjelp av en annen sekvens S i $O(n)$ tid hvis sekvensene kun kan aksesseres i endene? De kan brukes både som LIFO-køer (med PUSH og POP) og som FIFO-køer (med ENQUEUE og DEQUEUE). Hver av kø-operasjonene tar konstant tid. Til slutt skal elementene ligge (i reversert rekkefølge) i Q , mens S skal være tom.

Oppgave 3 Tenk deg at du står overfor tre beslutningsproblemer, FOO, BAR og BAZ. Alle tre problemer ligger i klassen NP. Du vet at FOO ligger i NPC og at BAZ ligger i P. Du ønsker å prøve å konstruere polynomiske reduksjoner mellom noen av disse for å komme frem til ulike konklusjoner.

Merk: Det er snakk om hva du vil gjøre for å *prøve* å komme frem til de ulike konklusjonene. Hvis, for eksempel, problemet BAR *ikke* er i P så vil det jo være umulig å bevise at det *er* i P.

- a) (3 %) Hvilket problem vil du redusere til hvilket for å vise at $\text{BAR} \in \text{P}$? Forklar kort.
- b) (3 %) Hvilket problem vil du redusere til hvilket for å vise at $\text{BAR} \in \text{NPC}$? Forklar kort.
- c) (3 %) Hvilket problem vil du redusere til hvilket for å vise at $\text{P} = \text{NP}$? Forklar kort.

Oppgave 4

- a) (5 %) Løs rekurrensen $T(n) = 3T(n/2) + n^2$ (asymptotisk). Begrunn svaret kort.
- b) (4 %) Løs rekurrensen $T(n) = 16T(n/4) + n$ (asymptotisk). Begrunn svaret kort.

Oppgave 5

- a) (6 %) La $G = (V, E)$ være en komplett, urettet graf, der $V = \{0, \dots, 9\}$. La kantvektene til G være gitt ved følgende (symmetriske) matrise, W :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	[0, 4, 7, 9, 5, 3, 6, 6, 5, 0],									
1	[4, 0, 8, 9, 6, 9, 0, 3, 3, 9],									
2	[7, 8, 0, 1, 0, 3, 3, 2, 3, 0],									
3	[9, 9, 1, 0, 8, 2, 8, 3, 3, 0],									
4	[5, 6, 0, 8, 0, 5, 2, 3, 6, 6],									
5	[3, 9, 3, 2, 5, 0, 8, 9, 7, 1],									
6	[6, 0, 3, 8, 2, 8, 0, 6, 3, 1],									
7	[6, 3, 2, 3, 3, 9, 6, 0, 6, 3],									
8	[5, 3, 3, 3, 6, 7, 3, 6, 0, 2],									
9	[0, 9, 0, 0, 6, 1, 1, 3, 2, 0]]									

Med andre ord er $w_{0,3} = 9$, $w_{4,1} = 6$ og $w_{4,2} = 0$ for eksempel. (Det er ikke noe spesielt med en vekt på 0 her; det betyr for eksempel *ikke* at kanten mangler.)

Finn det minimale spennetreet T for grafen G , og angi (som en sekvens med noder) stien fra node 1 til node 4 i treet T . (Som svar skal du kun oppgi denne stien, og *ikke* hele spennetreet.)

Hint: Går du systematisk til verks, inspirert av en av algoritmene i pensum, krever denne oppgaven atskillig mindre arbeid enn det kan se ut til. Vurder valg av algoritme nøye.

- b) (5 %) La $G = (V, E)$ være en uvektet, rettet graf med noder $V = \{1, \dots, n\}$. La X være en éndimensjonal heltallstabell som kan indekseres med nodenummerne. La $X[1] = 0$, og la $X[x] = n$ for $x = 2 \dots n$. Hva gjør da følgende algoritme?

(Referer gjerne til lignende eller beslektede algoritmer i pensum.)

```
for  $x \in V$ 
  for  $(y, z) \in E$ 
     $X[z] = \min\{X[z], X[y] + 1\}$ 
```

Oppgave 6 Du skal fordele fag på forelesere for neste semester. Du har en liste med fag som skal foreleses, og et sett med forelesere å ta av. For hver foreleser har du en liste med fag som denne er kompetent til å forelese. Foreleserne har også ulik arbeidskapasitet, og du har oppgitt hvor mange fag hver foreleser orker å forelese i løpet av et semester. Målet er å sørge for at alle fagene foreleses uten at noen må forelese noe de ikke kan, og uten at noen må forelese flere fag enn de orker.

- a) (5 %) Beskriv hvordan problemet kan løses som et flytproblem.

Du oppdager nå at det er kollisjoner mellom enkelte av fagene (det vil si, de skal foreleses på samme tidspunkt). Du vil unngå å gi en faglærer to (eller flere) fag som kolliderer. (Dersom to fag kolliderer har de eksakt samme forelesningstidspunkt og varighet. Du kan dermed anta at om fag A kolliderer med fag B og B kolliderer med fag C så kolliderer også A med C .)

- b) (5 %) Beskriv hvordan du kan håndtere kollisjonene og fortsatt løse problemet som et flytproblem.