Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppgaver til kapittel 10

1 Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

For hver av deloppgavene kommer jeg til å løse likningen $\det(A - \lambda I_n) = 0$ for å finne egenverdier og $(A - \lambda I_n) = 0$ for å finne egenvektorer (der λ er de forskjellige egenverdiene jeg fant først.)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Egenverdier:

$$\begin{aligned} A - \lambda I_2 &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ \det(A - \lambda I_2) &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 2 \\ &= 1^2 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ &\implies \lambda = [-1,\ 3] \end{aligned}$$

Jeg har nå at egenverdiene til matrisen A er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$. Bruker dette til å finne egenvektorene:

$$\begin{aligned} (A + I_2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Egenvektor for } \lambda = -1 \text{ er } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A - 3I_2) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Egenvektor for } \lambda = 3 \text{ er } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Finner egenverdier:

$$
\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\
det(A - \lambda I_3) &= (1-\lambda)((1-\lambda)\cdot -\lambda - 0\cdot 0) - 2(2\cdot -\lambda - 0 \cdot 0) + 0 \\
&= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda \\
&\implies \lambda = [-1,\ 0,\ 3]
\end{aligned}
$$

Jeg har nå at egenverdiene til matrisen A er $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ og $\lambda_3 = 3$. Bruker dette til å finne egenvektorene:

$$
\begin{aligned}
A - 0I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 161 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Egenvektor for } \lambda = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
A + I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Egenvektor for }\ \lambda = -1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Egenvektor for } \ \lambda = 3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$det(A - \lambda I_2) = (-\lambda \cdot -\lambda) = \lambda^2$$
$$\Longrightarrow \lambda = 0$$

Har at egenverdiene λ_1 og $\lambda_2 = 0$, finner egenvektoren(e)

$$A - 0I_2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Egenvektor for } \lambda = 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Finner egenverdiene:

$$det(A - \lambda I_3) = det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 2 & 4 & 9-\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$= (4-\lambda)((1-\lambda)(9-\lambda) - (-2)\cdot 4) - 2(-1(9-\lambda) - (-3)\cdot 2) + 3(-1\cdot 4 - (1-\lambda)\cdot 2)$$
$$= (4-\lambda)(9 - \lambda - 9\lambda + \lambda^2 + 12) - 2(-9 + \lambda + 6) + 3(-4 - 2 + 2\lambda)$$
$$= 4\lambda^2 - 40\lambda + 84 - \lambda^3 + 10\lambda^2 - 21\lambda - 2\lambda + 6 + 6\lambda - 18$$
$$= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 57\lambda + 72$$

Prøvde meg frem (som hintet sa) med $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$. Fant at $\lambda = 3$ gir 0, som vil si $\lambda = 3$ er en egenverdi. Deretter polynomdividerte jeg $\frac{-\lambda^3+14\lambda^2-57\lambda+72}{\lambda-3}$ og fikk at dette er lik $-\lambda^2+11\lambda-24$. Løser jeg denne ligningen får jeg $\lambda = [3,\ 8]$. Egenverdiene for A er dermed $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ og $\lambda_3 = 8$.

Finner egenvektorene:

Starter med å finne egenvektorer for $\lambda = 3$

$$A - 3\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finner nå egenvektor for $\lambda = 8$

$$A - 8\lambda = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies \underline{v_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ **a)** Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ikke har noen reelle egenverdier.
Finner igjen egenverdiene med formelen $det(A - \lambda I_n) = 0$:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_2) &= (-\lambda)(-\lambda) - (1 \cdot (-1)) \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

Ser at for at $\lambda^2 + 1 = 0$ må λ^2 være et negativt tall, som ikke er mulig, og jeg får da komplekse verdier. En annen måte å se det er å se at "det under rottegnet" i abc-formelen blir negativt ($\sqrt{0^2 - 4 \cdot 1} = \sqrt{-4} = \pm 2i$).

b) Gi en geometrisk forklaring på del **a)**
Denne matrisen er det samme som å rotere vektorer med -90 grader. Det er derfor vi ikke får noen reelle egenverdier, for dersom de hadde vært reelle ville ikke vektorene blitt rotert, men skalert. (pga $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$).

$\boxed{3}$ **a)** Finn vektorene som svarer til at

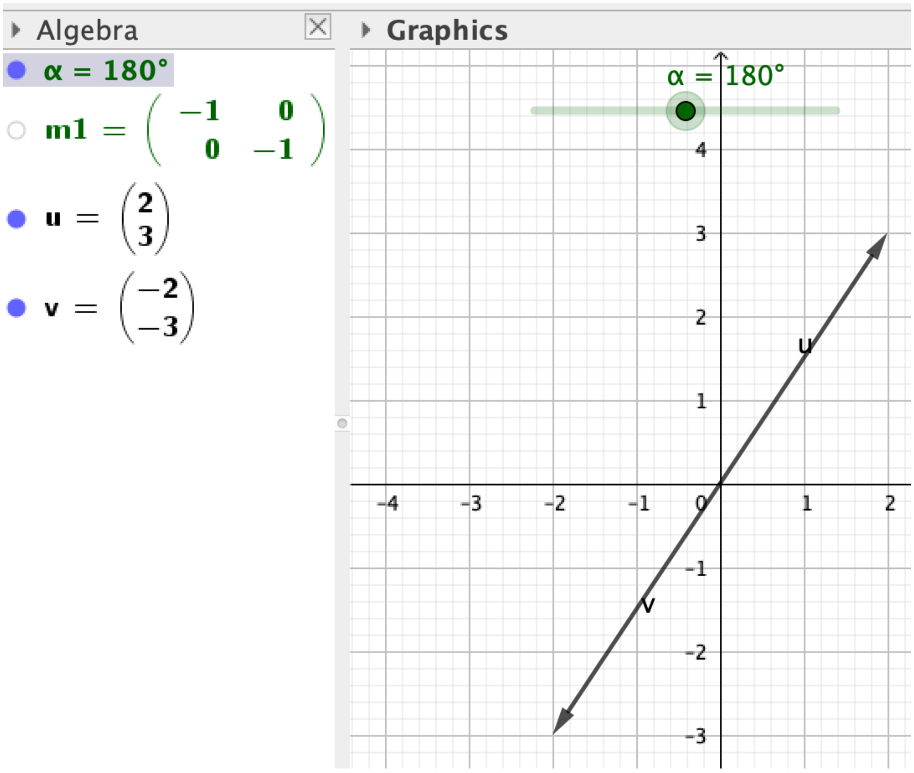
$$\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \underline{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

blir rotert med θ radianer.
Vektoren $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$ roterer $\underline{e_1}$ og vektoren $\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ roterer $\underline{e_2}$.

b) Utled formelen for 2x2-matrisen T_θ som roterer en vektor θ radianer mot klokken ved multiplikasjon.

$$T_\theta(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \underline{x}$$

Et bilde som illustrerer at dette faktisk er rett:



Figur 1: Bilde som illustrerer at matrisen er korrekt

Her er $m1$ rotasjonsmatrisen, u er en vektor og v er $m1 \cdot u$. α er gitt som en slider, slik at når jeg slider den vil v roteres.

c) For hvilke verdier av θ har T_θ reelle egenverdier?
Setter opp en ligning for egenverdiene til rotasjonsmatrisen:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_2) &= (\cos\theta - \lambda)^2 - (-\sin\theta \sin\theta) \\ &= \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ &= \lambda^2 - 2\cos\theta + 1 \end{aligned}$$

For at det skal være reelle egenverdier, må "det under rottegnet" vvære ≥ 0, som vil si $(-2\cos\theta)^2 - 4 \geq 0$:

$$\begin{aligned} (-2\cos\theta)^2 - 4 &\geq 0 \\ 4\cos^2\theta &\geq 4 \\ \cos^2\theta &\geq 1 \\ \text{Som vil si} \\ \cos\theta \leq -1 \text{ eller } \cos\theta &\geq 1 \end{aligned}$$

Vet at $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, så $\cos\theta = -1$ eller $\cos\theta = 1$, som vil si $\theta = \pi \cdot n$, hvor $n \in \mathbb{Z}$

Den geometriske forklaringen her er litt det samme som forrige oppgave egentlig. Vi får reelle egenverdier når vi roterer med 180 grader, 360 grader, 540 grader osv, fordi dette er det samme som å skalere med -1 eller 1. Alle andre rotasjoner er ikke skaleringer og vi har derfor ikke reelle egenverdier.

$\boxed{4}$ **a)** Regn ut egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 \end{bmatrix}$$

Bruker samme metode som tidligere oppgaver

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_4) &= (1-\lambda)\left(det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 77-\lambda \end{bmatrix}\right)\right) - 2\left(det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 77-\lambda \end{bmatrix}\right)\right) \\ &+ 3\left(det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 77-\lambda \end{bmatrix}\right)\right) - 4\left(det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= (1-\lambda)\left((2-\lambda)det\left(\begin{bmatrix} -5-\lambda & 0 \\ 0 & 77-\lambda \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)((-5-\lambda)(77-\lambda))) \end{aligned}$$

Gadd ikke skrive opp alt som ble til 0 når ganget. Håper det er greit. Ser ihvertfall nå at egenverdiene til A er 1, 2, -5 og 77.

b) Finn egenrommene til de ulike egenverdiene.

Finner disse ved å sette inn egenverdiene i ligningen $A - \lambda I_n = 0$ og finne nullrommet til denne. Finner først for $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 76 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Finner så for $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 2I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Finner så for $\lambda = -5$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 82 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & \frac{15}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{14} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A + 5I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{5}{14} \\ -\frac{3}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Finner så for $\lambda = 77$:

$$\begin{bmatrix} -76 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -75 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{38} & -\frac{3}{76} & -\frac{1}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{25} & -\frac{4}{75} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{77}{1900} & -\frac{77}{1425} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{75} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{77}{1425} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{75} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 77I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{77}{1425} \\ \frac{4}{75} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) A er en 4 x 4-matrise. Er det alltid enkelt å finne egenverdiene til en 4 x 4-matrise? Mer generelt, er det alltid enkelt å finne egenverdiene til n x n-matriser?

Føler dette er et litt subjektivt spørsmål. Jeg selv synes det ikke er kjempe *vanskelig* å finne egenverdiene (til en 4 x 4-matrise), det er bare tungvindt og mye jobb. Blir jo egentlig bare veldig mye mer jobb å finne for større matriser, da du må finne determinanten deres. Det er jo "lett" å finne determinanten, blir bare stygge og lange uttrykk etterhvert som matrisene blir større. Vi kan jo ende opp med et $n$te grads polynom, som ikke er så lett å løse for hånd, men datamaskiner klarer det jo fint. I denne oppgaven var vi heldige (:)) og fikk en matrise som hadde masse 0 i seg, så mange ledd gikk vekk, men slik er det jo ikke alltid.

$\boxed{5}$ La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 30 & -20 & -2 \\ 6 & 40 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & 20 & -6 \\ 2 & 20 & -30 & 32 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke av vetorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A?

En vektor $\underline{v}$ er egenvektor for en matrise A dersom $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$, der $\underline{v} \neq \underline{0}$. Jeg kan derfor utelukke $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sjekker for resten ved å gange med A og se om jeg får at $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix} = 20 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ Ja, denne vektoren er en egenvektor for } A$$

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 \\ 74 \\ 66 \\ 18 \end{bmatrix} \text{ Nei, denne vektoren er ikke en egenvektor for } A$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ Nei, denne vektoren er ikke en egenvektor for } A$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix} = 20 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ Ja, denne vektoren er en egenvektor for } A$$

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 40 \\ 80 \end{bmatrix} = 40 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ Ja, denne vektoren er en egenvektor for } A$$

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 120 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix} = 40 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Ja, denne vektoren er en egenvektor for } A$$

b) Finn alle egenverdiene til A, og de tilhørende egenrommene.

Egenverdiene fant jeg allerede i oppgave a. De er 20, 20, 40 og 40. Egenrommene finner jeg på samme måte som før, starter med $\lambda = 20$

$$\begin{bmatrix} 8 & 30 & -20 & -2 \\ 6 & 20 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & 0 & -6 \\ 2 & 20 & -30 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & -15 & 6 \\ 0 & -40 & 80 & -40 \\ 0 & -30 & 60 & -30 \\ 0 & -50 & 100 & -50 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & -15 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 20I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Finner så for $\lambda = 40$

$$\begin{bmatrix} -12 & 30 & -20 & -2 \\ 6 & 0 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & -20 & -6 \\ 2 & 20 & -30 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & -15 & -4 \\ 6 & 0 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & -20 & -6 \\ -12 & 30 & -20 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & -15 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 40I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\boxed{6}$ La A være en nxn matrise slik at $A^2 = A$. Hva kan du da si om egenverdiene til A?

Jeg kan da si at egenverdiene til A er enten 0 eller 1. Bevis:

$$\begin{aligned} &A\underline{v} = \lambda\underline{v} = A^2\underline{v} \\ &\implies A^2\underline{v} = A(\lambda\underline{v}) \text{ (Fordi } A^2 = AA\underline{v} \text{ og } A\underline{v} = \lambda\underline{v}) \\ &\implies \lambda A\underline{v} = \lambda^2\underline{v} \text{ (Fordi } A\underline{v} = \lambda\underline{v}) \end{aligned}$$

Hvis jeg nå skal ha at $\lambda\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$ må $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$ (må egt ha $\lambda = \lambda^2$ og eneste løsninger av dette er 0 og 1).

$\boxed{7}$ Vis at dersom en matrise har egenverdien 0, er den ikke inverterbar.

En matrise A er inverterbar dersom $A\underline{v} = 0$ har en triviell løsning. Hvis vi har at 0 er en egenverdi for A har vi også $A\underline{v} = 0\underline{v}$, der $\underline{v} \neq \underline{0}$, som vil si $A\underline{v} = \underline{0}$. Men denne har ingen triviell løsning da $\underline{v}$ ikke kan være nullvektroen. Derfor er ikke A inverterbar. I tillegg kan vi si at dersom A er inverterbar har vi at $A^{-1}A\underline{v} = \underline{0} \implies I\underline{v} = \underline{0} \implies \underline{v} = \underline{0}$, som ikke er mulig.

Oppgaver til kapittel 11

$\boxed{8}$ Finn matrisenes egenvektorer og egenverdier, og avgjør om matrisene er diagonaliserbare.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_3) &= (3-\lambda)((-1-\lambda)(-2-\lambda) - 6 \cdot 2) + 3(-2-\lambda) - 6 \ \cdot -2 \\ &+ 2(3 \cdot 2 - (-1-\lambda)(-2)) \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda - 16 \\ &\implies \lambda = [-4,\ 2,\ 2] \end{aligned}$$

Finner egenvekorene, starter med $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 2I_3) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

For $\lambda = -4$:

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A + 4I_3) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Teorem 11.4 lyder:

> En n x n-matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n egenverdier og dimensjonen til egenrommet til hver egenverdi λ er lik den algebraiske multiplisiteten til λ.

Den algebraiske multiplisiteten til $\lambda = 2$ er 2 og dimensjonen til egenrommet er 2. Den algebraiske multiplisiteten til $\lambda = -4$ er 1 og dimensjonen til egenrommet er 1. A er derfor diagonaliserbar.

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Løser $det(A - \lambda I_4) = 0$:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_4) &= -\lambda(-\lambda((3-\lambda) \cdot -\lambda)) + (3-\lambda) \cdot -\lambda \\ &= \lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda \\ &\implies \lambda = [0,\ 3,\ -i,\ i] \end{aligned}$$

Her brukte jeg polynomdivisjon (fant at $\lambda = 0$ er en rot) og fant at $\frac{\lambda^4 - 3\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda}{\lambda} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3$. Prøvde meg frem og fant at $\lambda = 3$ er en rot og deretter polynomdividerte igjen: $\frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3}{\lambda - 3} = \lambda^2 + 1 \implies \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$
Finner nå egenvektorene, starter med $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 0\lambda I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Som og vil si geometrisk multiplisitet (dimensjon) = 1.

Finner for $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -10 & 7 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -10 & \frac{113}{4} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{39}{40} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{113}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 3\lambda I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{39}{40} \\ \frac{113}{40} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Som og vil si geometrisk multiplisitet $= 1$.
Finner nå for $\lambda = i$:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -i & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5+3i}{1+2i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - i\lambda I_4) = \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Som og vil si geometrisk multiplisitet $= 1$. Jeg trenger ikke regne ut egenvektor for $\lambda = -i$, da jeg vet at denne kommer til å være den konjungerte av egenvektoren til $\lambda = i$, som er $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, som og har geometrisk multiplisitet $= 1$. Ser at for alle λ er geometrisk multiplisitet lik algebraisk multiplisitet, og matrisen A er diagonaliserbar.

$\boxed{9}$ Finn P og D slik at $A = PDP^{-1}$ for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$$

Finner egenverdier:

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I_2) &= (1-\lambda)(-1-\lambda)-((1-i)(1+i)) \\ &= -1-\lambda+\lambda+\lambda^2-(1+i-i+1) \\ &= \lambda^2-3 \implies \lambda=\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Finner egenvektorer, starter med $\lambda=\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} & 1-i \\ 1+i & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} & 1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-i}{1-\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\implies Null(A-\sqrt{3}I_2) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{1-\sqrt{3}} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Finner nå for $\lambda=-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-i \\ 1+i & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-i}{1+\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\implies Null(A+\sqrt{3}I_2) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{1+\sqrt{3}} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Jeg har nå at $D=\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ og $P=\begin{bmatrix} \frac{-1+i}{1+\sqrt{3}} & \frac{-1+i}{1-\sqrt{3}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, da gjenstår det å finne P^{-1}:

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i-\sqrt{3}}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \frac{1-i}{1-\sqrt{3}} \\ -1 & \frac{-1+i}{1+\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})} \\ \frac{\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{10}$ La $A=\begin{bmatrix} r_1 & z \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ være en 2 x 2-matrise med $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$. Utled en formel for egenverdiene til A. Vis at egenverdiene er reelle.

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I_2) &= (r_1-\lambda)(r_2-\lambda)-z\bar{z} \\ &= r_1r_2-r_1\lambda-r_2\lambda+\lambda^2-a^2-b^2 \\ &= \lambda^2+\lambda(-r_1-r_2)-a^2-b^2+r_1r_2 \end{aligned}$$

Har nå $a = 1$, $b = (-r_1 - r_2)$ og $c = -a^2 - b^2 - r_1 r_2$ (i abc-formelen). For reelle egenverdier må jeg ha $(-r_1 - r_2)^2 - 4(-a^2 - b^2 + r_1 r_2) \geq 0$:

$$\begin{aligned}(-r_1 - r_2)^2 - 4(-a^2 - b^2 + r_1 r_2) &= r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 + 4a^2 + 4b^2 - 4r_1 r_2 \\ &= (r_1 - r_2)^2 + 4(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

$(r_1 - r_2)^2 + 4(a^2 + b^2)$ er alltid større enn eller lik 0 og vi vil alltid få reelle egenverdier. En formel for egenverdiene blir $\frac{(r_1+r_2)\pm\sqrt{(r_1-r_2)^2+4(a^2+b^2)}}{2}$

$\boxed{11}$ La $a \neq b$ være to reelle tall ulik null, og la

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

Finner egenverdiene:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_3) &= (a - b - \lambda)((a - \lambda)^2 - b^2) \\ \implies \lambda &= [a - b, a - b, a + b] \end{aligned}$$

Finner egenvektorer og ser om geometrisk multiplisitet = algebraisk multiplisitet. Starter med $\lambda = a - b$ som har algebraisk multiplisitet = 2:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a-(a-b) & b & 0 \\ b & a-(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)-(a-b) \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} b & b & 0 \\ b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \implies Null(A - (a-b)I_3) &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Finner nå for $\lambda = a + b$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a-(a+b) & b & 0 \\ b & a-(a+b) & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)-(a+b) \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} -b & b & 0 \\ b & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \implies Null(A - (a+b)I_3) &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ser at for alle λ er geometrisk multiplisitet = algebraisk multiplisitet, og A er derfor diagonaliserbar.

$\boxed{12}$ La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen mellom andregradspolynom gitt ved:

$$T(f) = (x+1)f'(x) + f(x)$$

a) Finn matrisen A til T med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$
Matrisen A er gitt ved $\begin{bmatrix} T(1) & T(x) & T(x^2) \end{bmatrix}$
Finner disse:

$$\begin{aligned} T(1) &= (x+1)\cdot 0 + 1 = 1 \\ T(x) &= (x+1)\cdot 1 + x = 2x+1 \\ T(x^2) &= (x+1)\cdot 2x + x^2 = 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

$$\implies A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

For å sjekke at dette faktisk stemmer kan jeg teste med et andregradspolynom, f.eks $4x^2 + 2x + 1$:

$$\begin{aligned} T(4x^2 + 2x + 1) &= (x+1)(8x+2) + 4x^2 + 2x + 1 \\ &= 12x^2 + 12x + 3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Prøver å gange A med $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ og ser om jeg får det samme.

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A. Er A diagonaliserbar?

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_3) &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \\ &\implies \lambda = [1, 2, 3] \end{aligned}$$

Finner egenvektorene, starter med $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - I_3) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Finner for $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 2I_3) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Finner for $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Null(A - 3I_3) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ser at for alle λ er algebraisk multiplisitet = geometrisk multiplisitet. Ja, A er diagonaliserbar.

$\boxed{13}$ Lineærtransformasjonen $T(\underline{x}) = A\underline{x}$, der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

som roterer vektorer i $\mathbb{R}^2$

a) Hva er rotasjonsvinkelen?
Jeg vet allerede at rotasjonsmatrisen er gitt ved

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

. Jeg kan derfor lett finne θ ved f.eks $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} = 30$ grader.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen.
Finner egenverdier:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_2) &= (\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda)^2 - (\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}) \\ &= \lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 \end{aligned}$$

Løser jeg denne får jeg at $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ og $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.
Finner egenvektorene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies Null(A - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})I_2) = \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Egenvektor for λ_2 blir den konjugerte av egenvektoren for λ_1 som er $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Egenvektorene $\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$ danner en basis for $\mathbb{C}^2$. Hvilken matrise representerer T med hensyn til denne basisen?

Dersom jeg forstod spørsmålet så tror jeg at jeg må finne standardmatrisen til $T(\underline{x})$ gitt $\underline{v_1}$ og $\underline{v_2}$. Isåfall gjøres dette ved $A = \begin{bmatrix} T(\underline{v_1}) & T(\underline{v_2}) \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} T(\underline{v_1}) &= A \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\underline{v_2}) &= A \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$