Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Innlevering 4

1 Hvilke matriser representerer projeksjoner?

For å finne ut om en matrise representerer en projeksjon, må jeg sjekke om matrisen ganget med seg selv er den samme matrisen. Jeg gjør dette i alle deloppgavene i denne oppgaven.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja, denne matrisen representerer en projeksjon.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja, denne matrisen representerer en projeksjon

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja, denne matrisen representerer en projeksjon

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nei, denne matrisen representerer ikke en projeksjon.

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nei, denne matrisen representerer ikke en projeksjon.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja, denne matrisen representerer en projeksjon.

$\boxed{2}$ Hvilke av vektorene er ortogonale med hverandre?

I disse deloppgavene må jeg ta prikkproduktet mellom vektorene og sjekke om de er lik 0.

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ Prikkproduktet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} &= 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 0 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Nei, disse vektorene er ikke ortogonale.

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ Her må jeg sjekke to og to:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 1 + 0 + -1 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 1 + 0 + -1 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} &= 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot -\sqrt{2} + 1 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ja, disse vektorene er ortogonale.

c) $\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$

Her må jeg også sjekke to og to. Samtidig, når en skal ta prikkproduktet til komplekse vektorer, må en adjungere den ene:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -i \cdot i + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\
&= 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Nei, disse vektorene er ikke ortogonale.

$\boxed{3}$ Bruk Gram-Schmidts metode for å finne en ortogonal basis med utgangspunkt i:

a) Vektorene oppgitt i oppgave 2a:

Starter med å sette $\underline{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finner $\underline{u_2}$:

$$\begin{aligned}
\underline{u_2} &= \underline{v_2} - \frac{< \underline{u_2}, \underline{v_2} >}{< \underline{u_1}, \underline{u_1} >} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - -\frac{8}{30} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{8}{15} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{15} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{23}{15} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{15} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sjekker at de er ortogonale:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{23}{15} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{15} \end{bmatrix} &= 2 \cdot \frac{23}{15} + -5 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{4}{15} \\
&= 0
\end{aligned}$$

En ortogonal basis for vektorene i oppgave 2a er $Sp \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{23}{15} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{15} \end{bmatrix} \right\}$

b) Vektorene oppgitt i oppgave 2b.

Disse vektorene er allere ortogonale. De er allere en ortogonal basis.

c) Vektorene oppgitt i oppgave 2c.

Starter med $\underline{u_1} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finner $\underline{u_2}$:

$$\underline{u_2} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}}{2} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \frac{-i}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{-i}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} - \underline{0} - \underline{0}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$$

En ortogonal basis for vektorene i oppgave 2c er $Sp \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} \right\}$

$\boxed{4}$ Hva blir den ortogonale projeksjonen av

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ned på vektorene gitt i 2a?

Jeg finner den ortogonale projeksjonen ved:
$P_u\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = P_{v_1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) + P_{v_2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. Jeg har basisen jeg fant i forrige

oppgave (den ene vektoren skalert med 15 for å bli kvitt brøk.):

$$P_u = \frac{\begin{bmatrix}23\\10\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}23\\10\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}23\\10\\4\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}23\\10\\4\end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2\\-5\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\-5\\5\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{23+20+12}{23^2+10^2+4^2} \cdot \begin{bmatrix}23\\10\\4\end{bmatrix} + \frac{2-10+3}{2^2+(-5)^2+1^2} \cdot \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{11}{129} \cdot \begin{bmatrix}23\\10\\4\end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{70}{43}\\\frac{145}{86}\\\frac{15}{86}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}140\\145\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}28\\29\\3\end{bmatrix}$$

Den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ ned på vektorene i 2a er $\begin{bmatrix}28\\29\\3\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2\\\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}$ ned på vektorene gitt i 2b?

Har basisen $Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}\right\}$ fra oppgave 2b. Jeg finner projeksjonen $P_u\left(\begin{bmatrix}2\\\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}\right)$:

$$P_u\left(\begin{bmatrix}2\\\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{0}{2} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{2+2+2}{1+2+1} \cdot \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} + \frac{2-2+2}{1+2+1} \cdot \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}$$

Den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ ned på vektorene i 2b er $\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}$ ned på vektorene i 2c?

Har basisen $Sp\left\{\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}\right\}$. Finner $P_u\left(\begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}\right)$:

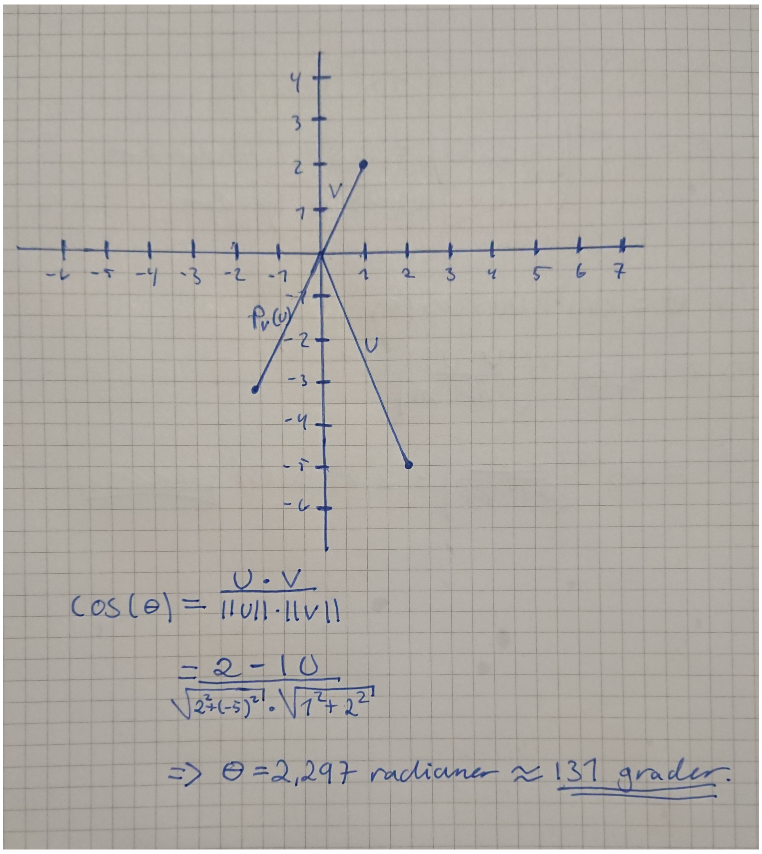
$$
\begin{aligned}
P_u\left(\begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}\right) &= \frac{\begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -i & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&+ \frac{\begin{bmatrix} 1 & -i & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -i & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1+i}{2} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1+2i-i}{6} \cdot \begin{bmatrix} i \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{i+1+1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}$ ned på vektorene i 2c er $\begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}$

$\boxed{5}$ La $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ og $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Finn den ortogonale projeksjonen av $\underline{u}$ på $\underline{v}$. Tegn $\underline{u}$, $\underline{v}$ og projeksjonen i samme koordinatsystem. Hva er vinkelen mellom vektorene?

Finner $P_v(u)$:

$$
\begin{aligned}
P_v(u) &= \frac{2 \ \cdot 1 + 2 \cdot -5}{1^2 + 2^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{16}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$



Figur 1: Oppgave 5

$\boxed{6}$ Beregn $P_u(v)$ og $v - P_u(v)$ når

a) $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P_{\underline{u}}(\underline{v}) = \frac{2 \ \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{2^2 + 2^2 + 1^1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{11}{9} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{9} \\ \frac{22}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} - P_{\underline{u}}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{22}{9} \\ \frac{22}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

b) $\underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P_{\underline{u}}(\underline{v}) = \frac{-1\ \ +6-1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{4}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} - P_{\underline{u}}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

c) $\underline{u} = \begin{bmatrix} i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P_{\underline{u}}(\underline{v}) = \frac{-i-i+1}{-i^2-i^2+1} \cdot \begin{bmatrix} i \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{-2i}{3} \cdot \begin{bmatrix} i \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i+2}{3} \\ \frac{i+2}{3} \\ \frac{2i+1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} - P_{\underline{u}}(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{i+2}{3} \\ \frac{i+2}{3} \\ \frac{2i+1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{3} \\ \frac{1-i}{3} \\ \frac{2-2i}{3} \end{bmatrix}$$

d) Hva er $P_{\underline{u}}(\underline{v}) \cdot (\underline{v} - P_{\underline{u}}(\underline{v}))idela) - c)$?

1. $\frac{22}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{22}{9} \cdot -\frac{4}{9} + \frac{11}{9} \cdot -\frac{2}{9} = 0$
2. $-\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{3} + \frac{8}{6} \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \cdot -\frac{4}{6} = 0$
3. $\frac{i+1+2-2i+i+1+2-2i+4i+3-2i}{3} = \frac{0}{3} = 0$

$\boxed{7}$ La $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Beregn den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\underline{v}$.

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

b) Finn standardmatrisen $[P_{\underline{v}}]$ til $P_{\underline{v}}$:

$$[P_{\underline{v}}] = [P_{\underline{e_1}} P_{\underline{e_2}} P_{\underline{e_3}}]$$

$$P_{\underline{e_1}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{\underline{e_2}} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{\underline{e_3}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies [P_{\underline{v}}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Gi et geometrisk argument til å avgjøre om $P_{\underline{v}}$ er surjektiv og/eller injektiv.
Idk

d) Gi et geometrisk argument til å bestemme dimensjonen til ker $P_{\underline{v}}$, Null$[P_{\underline{v}}]$, im$P_{\underline{v}}$ og Col$[P_{\underline{v}}]$
Alså, klarer ikke gi et geometrisk argument for det, men kan regne det ut tror jeg :p :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \text{Null}[P_{\underline{v}}] = Sp \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{Col}[P_{\underline{v}}] = Sp \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ker $P_{\underline{v}}$ =Null$[P\underline{v}]$ og Im $P_{\underline{v}}$ =Col$[P_{\underline{v}}]$. Som vil si dimensjonen til Ker $P_{\underline{v}}$ =dimensjonen til Null$[P_{\underline{v}}] = 2$ og dimensjonen til Im$P_{\underline{v}}$ =dimensjonen til Col$[P_{\underline{v}}] = 1$.

$\boxed{8}$ La $W = Sp\{\underline{u}, \underline{v}\}$ hvor $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\underline{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) Finn en ortogonal basis for W.
Bruker Gramschmidt:

$$\underline{u_1} = \underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\underline{u_2} &= \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2 \cdot 4 + (-5) \cdot (-4) + 2 \cdot 1}{2^2 + (-5)^2 + 1^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ .5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

b) Regn ut standardmatrisen $[P_W]$ til den ortogonale projeksjonen $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ned på W.

$$P_{\underline{e_1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$P_{\underline{e_2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{\underline{e_3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{30} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\implies [P_W] = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Finnes det en 3x2-matrise A slik at $[P_W]A\underline{x} = A\underline{x}$ for alle $\underline{x}$ i $\mathbb{R}^2$?

Ja, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{9}$ Vi set på indreproduktrommet av stykkevis kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$.

a) Regn ut vinkelen mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken vinkel er minst?
Vinkel mellom funksjoner er gitt ved $\cos\theta = \frac{<f,g>}{||f|| \cdot ||g||}$, hvor $< f, g >= \frac{1}{b-a} \int_a^b f \cdot gdx$.

Starter med $f = x$ og $g = \cos x$:

$$< f, g > = \frac{1}{1}\int_0^1 x \ \cdot \cos x dx = -1 + \cos(1) + \sin(1)$$

$$||f|| = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$||g|| = \sqrt{\int_0^1 \cos x \cdot \cos x dx} = \sqrt{\frac{\sin(1)\cos(1)}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{-1 + \cos(1) + \sin(1)}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{\sin(1)\cos(1)}{2} + \frac{1}{2}}} = 0.9091$$
$$\implies \theta = 0.4295 \approx 1.12\text{grader}$$

Setter nå $f = x$ og $g = \sin x$: $||f||$ er det samme som i forrige oppgave $= \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$< f, g > = \frac{1}{1}\int_0^1 x \cdot \sin x dx = -\cos(1) + \sin(1)$$

$$||g|| = \sqrt{\int_0^1 \sin x \cdot \sin x dx} = \sqrt{-\frac{\sin(1)\cos(1)}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{-\cos(1) + \sin(1)}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{-\frac{\sin(1)\cos(1)}{2} + \frac{1}{2}}} = 0.999$$
$$\implies \theta = 0.0456 \approx 2.613\text{grader}$$

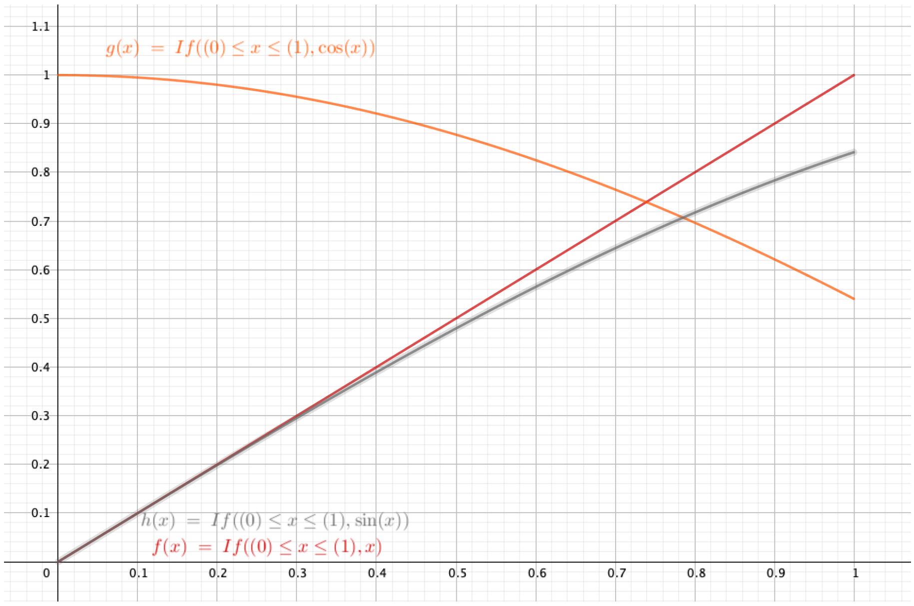
Vinkelen mellom x og $\sin x$ er størst.

b) Regn ut avstanden mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken avstand er minst?
Samme som i forrige oppgave, setter først $f = x$ og $g = \cos x$:

$$||f - g|| = \sqrt{< f - g, f - g >} = \sqrt{\int_0^1 (x - \cos x)(x - \cos x)dx}$$
$$= \sqrt{-2\sin(1) - 2\cos(1) + \frac{\cos^2(1)}{2} + \frac{\sin(1)\cos(1)}{2} + \frac{\sin^2(1)}{2} + \frac{7}{3}}$$
$$\approx 0.5450$$

$$||f - g|| = \sqrt{\int_0^1 (x - \sin x)(x - \sin x)}$$
$$= \sqrt{-2\sin(1) - \frac{\sin(1)\cos(1)}{2} + \frac{\cos^2(1)}{2} + \frac{1}{3} + \frac{\sin^2(1)}{2} + 2\cos(1)}$$
$$\approx 0.0606$$

Avstanden mellom x og $\cos x$ er størst.



Figur 2: Plot av x, cos(x) og sin(x)

c) Ser at tallene jeg fikk i a)-b) ikke stemmer overens med plottet, og dette er fordi indreprodukt av funksjoner ikke opererer i det "vanlige" $\mathbb{R}^2$ vi er kjent med, men har et eget, fiktivt rom.

$\boxed{10}$ Anta at $\underline{u_1}, \ldots, \underline{u_n}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Vis at den inverse matrisen til $A = [\underline{u_1} \ldots \underline{u_n}]$ er gitt ved $A^{-1} = A^T$.

Vet allerede at $A^{-1} \cdot A = I_n$. Observerer at:

$$
\begin{aligned}
A \cdot A^T &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot a_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot a_{2i} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot a_{ni} \\ \sum_{i=i}^n a_{2i} \cdot a_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot a_{2i} & \ldots & \sum_{i=i}^n a_{2i} \cdot a_{ni} \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} \cdot a_{1i} & \sum_{i=1}^n a_{ni} \cdot a_{2i} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{ni} \cdot a_{ni} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

I en ortonormal basis er prikkproduktet mellom to ulike vektorer lik 0, og prikkproduktet mellom samme vektor (størrelsen på en vektor) lik 1. Jeg ser at diagonalen i $A \cdot A^T$ er lengden av vektorer, som vil si diagonalen blir kun 1ere, mens alle andre blir 0. Jeg har da at $A \cdot A^T = I_n = A \cdot A^{-1} \implies A^{-1} = A^T$.