Løsningsforslag til eksamen i fag
SIF8010 Algoritmer og Datastrukturer
Tirsdag 14. Desember 1999, kl 0900-1500

Faglig kontakt under eksamen: Arne Halaas, tlf. 73 593442.
Hjelpemidler: Alle kalkulatortyper tillatt. Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Rubrikksvar: Alle svar skal avgis i angitte svar-ruter. Ikke legg ved ekstra ark som svar.
Krav: Det kreves "bestått" både på de ordinære og på de øvingsrelaterte spørsmål.
Husk: Fyll inn rubrikken "Student nr." øverst på alle ark.

Oppgave 1. (18%)

a) Er høyden på et 2-3–tre med n dataposter $\boldsymbol{\theta}(\log_3 n)$?

b) Er Dijkstras algoritme basert på Dynamisk Programmering?

c) Er Kruskals algoritme en grådighetsalgoritme som alltid gir beste løsning?

d) Er antallet ordninger ved topologisk sortering av en vilkårlig graf $G(V,E)$ $\mathbf{O}(|V|!)$?

e) Er antallet ordninger ved topologisk sortering av en vilkårlig graf $G(V,E)$ $\mathbf{O}(|E|!)$?

f) Er Quicksort $\boldsymbol{\Omega}(n \cdot \log n)$?

g) Bør "sortering ved innsetting" brukes i forbindelse med Quicksort ?

h) Kan maks-flyt-algoritmen brukes til å finne ut om en sammenhengende graf G har en bro?

i) Er Huffmans algoritme aktuell i forbindelse med fletting (Merge) av $m > 2$ sorterte lister?

Svar: (Stryk "Ja" eller "Nei". Begrunnelsen må fylles ut. Hvert delsvar teller 2%)

a) Ja/~~nei~~	Begrunnelse: Høyden er i intervallet $[\log_3 n, \log_2 n]$. Idet $\log_2 n = \text{konst} \cdot \log_3 n$, er høyden $\boldsymbol{\theta}(\log_3 n) = \boldsymbol{\theta}(\log_2 n) = \boldsymbol{\theta}(\log_q n)$
b) Ja/~~nei~~	Begrunnelse: {d[i]} forbedres rekursivt. Dijkstras algoritme bruker både dynamisk programmering og grådighet.
c) Ja/~~nei~~	Begrunnelse: Det henvises til bevis i kompendiet, basert på at "nei" gir selvmotsigelse.
d) Ja/~~nei~~	Begrunnelse: Antall mulige ordninger av $\|V\|$ noder er $\|V\|!$.
e) ~~Ja~~/nei	Begrunnelse (Moteksempel): I en graf med kun 1 avhengighet vil vi ha $\|E\|! = 1! = 1$, men dette tallet begrenser ikke de $\|V\|!$ mulige ordninger. (Antar at $\|V\|$ er mye større enn $\|E\|$.)

f) Ja/~~nei~~ Begrunnelse: Støttes av en generell sats: Alle sorteringsalgoritmer basert på sammenligninger er $\mathbf{\Omega}(n \cdot \log n)$.

g) Ja/~~nei~~ Begrunnelse: Alt bør sorteres ved innsetting når de sorterte intervallene er blitt korte (≤10±).

h) Ja/~~nei~~ Begrunnelse: Alle kanter gis flytkapasitet 1, og en kjører alle-til-alle–flytmaks for å dekke alle kilde-sluk–kombinasjoner. Maks flyt=1 ⇔ bro.

i) Ja/~~nei~~ Begrunnelse: De til enhver tid 2 korteste listene flettes. Fletterekkefølgen gis av Huffmans algoritme med "listelengde" som vekt.

Oppgave 2. (20%)

Vi definerer problemet P(A,n,k,b) slik: *Finn, om mulig, et utvalg av k (>1) verdier i $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ som er slik at summen av disse k verdiene er lik b. Alle verdiene er heltall.*

(a) Skisser en algoritme Q som løser problemet P(A,n,k,b) i $\mathbf{O}(n^{k-1} \log n)$ tid.

Svar: 4%
1. Sorter A
2. For hver av i alt $\mathbf{O}(n^{k-1})$ utvalg av k-1 a-verdier:
   Finn den k-te verdien ved binærsøk i sortert A

Totalt $\mathbf{O}(n \log n) + \mathbf{O}(n^{k-1}) \cdot \mathbf{O}(\log n) = \underline{\mathbf{O}(n^{k-1} \log n)}$

(b) Skisser en mer effektiv algoritme R som løser problemet P(A,n,k,b) i $\mathbf{O}(n^{k-1})$ tid når k>2.

Svar: 4%
1. Sorter A
2. For hver av i alt $\mathbf{O}(n^{k-2})$ utvalg av elementer av k-2 a-verdier:
   Finn de 2 siste verdiene ved å søke igjennom A lineært fra hver side (tidligere Eksamensoppgave) for, om mulig, å finne "restverdien" som en sum av disse to Verdiene.
   (Lineærsøk: Hvis summen er for stor – drop høyeste element; for liten – dropp minste.)

(Merknad: Total kompleksitet er $\mathbf{O}(n \log n) + \mathbf{O}(n^{k-2}) \cdot \mathbf{O}(n)$. For $k \leq 2$ blir dette $\mathbf{O}(n \log n)$.)

(c) Hvordan vil du løse problemet P(A,n,k,b) når $n > 100$ og $k = n-3$?

Svar: 5%
Beregn $S=\Sigma a_i$, og løs, dersom $b<S$, problemet P(A,n,3,S-b). Svaret blir da de andre verdiene (det vil si A-P). Dette problemet har (naturligvis) samme tidskompleksitet som P(A,n,3,b).

(d) For hvilke verdier av k vil du anta at P(A,n,k,b) krever mest tid for å bli løst? (Begrunn.)

Svar: 4%
$k = n/2$. Det henger sammen med at binomialkoeffisienten er "størst midt på," dvs. at "n over m" er størst når $m = \lceil n/2 \rceil$.

Vi definerer nå problemet P'(A,n,b) slik: *Finn, om mulig, et utvalg av inntil n verdier i* $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ *som er slik at summen av disse verdiene er lik b. Alle verdiene er heltall.*

(e) Hvilken metode vil du foreslå for å løse problemet P'? Angi metodens tidskompleksitet.

Svar: 3%
Dette er ryggsekkproblemet. Løst med dynamisk programmering er kjøretiden **O**(nb), ved utfylling av en $n \times b$-tabell.

Oppgave 3. (8%)

Student Lurvik hevder å ha utviklet en ny datastruktur for prioritetskøer som støtter operasjonene `Insert(Queue,element)`, `FindMaximum(Queue)` og `DeleteMaximum(Queue)`. Lurvik påstår at alle disse 3 operasjonene kun krever **O**(1) tid.
(a) Det er ingen grunn til å tro på Lurvik. Hvorfor ikke?

Svar: 8%
n stk. `Insert`-operasjoner, etterfulgt av n stk. (`FindMaximum`, `DeleteMaximum`) ville gitt en *generell* **O**(n)-algoritme for sortering, i strid både med **Ω**(n·log n)-grensen og alle kjente metoder.

Oppgave 4. (21%)

Vi skal her se på et problem som skal løses ved hjelp av Dynamisk Programmering:

Problem P(S, n): *Gitt en sekvens $S = \langle s_1,s_2,...,s_n\rangle$ bestående av n heltall. Finn lengden L_n av den lengste subsekvensen $S^\bullet$ i S som er slik at verdiene i $S^\bullet$ er stigende.Verdiene i $S^\bullet$ må ikke nødvendigvis være naboer i S.*
Merk at det her kun spørres etter lengden L_n av den (en av de) lengste subsekvensen(e) i S.

Eksempel (n=9):
$S = \langle 9,5,2,8,7,3,1,6,4\rangle$. Her er $L_n = 3$. Subsekvensen $S^\bullet$ består da av enten $\langle 2,3,4\rangle$ eller $\langle 2,3,6\rangle$.

(a) Beskriv kort hvordan vi kan finne L_n ved dynamisk programmering.

Svar: 5%

$L_i = \max\{L_j\} + (1$ hvis og bare hvis $s_j < s_i)$, hvor $0<j<i$.

Dvs.:
L_i er løsningen på P(S_i, i), hvor S_i er et prefiks av S med lengde i.

(b) Finn tidskompleksiteten til metoden foreslått i (a)

Svar: 4% Dobbel løkke, dvs. $\mathbf{O}(n^2)$

(c) Forklar kort hvordan du kan finne selve sekvensen $S^\bullet$ ved å føye ekstra informasjon til løsningen foreslått i **(a)**. Bruk gjerne det oppgitte eksempelet for å illustrere ideene.

Svar: 4%
Føy til $\{P_i\}$ der P_i peker til nærmeste lavere S-indeks i den lengste sekvensen som ender i s_i. Følg så kjeden tilbake fra s_n.

(d) Hva blir tidkompleksiteten i **(c)**?

Svar: 4% Ingen forandring, dvs. $\mathbf{O}(n^2)$

(e) Foreslå en praktisk sammenheng der problemet P(S,n) er av interesse.

Svar: 4% Dukker opp i forbindelse med mønstergjenkjenning i permutasjoner. (Andre gode forslag premieres).

Oppgave 5. (8%)

Vi skal i denne oppgaven se på et praktisk problem knyttet til et rettet nettverk $G=(V,E)$. Kantene i E representerer vannførende kanaler, hver med en spesifisert kapasitet c kubikkmeter pr. sekund. Kanalene møtes i noder som ikke har noen kapasitetsbeskrankning. Kantene har i tillegg en parameter *InTown* som har verdien *True* dersom kanten ligger i tettbebyggelsen, *False* ellers.

(Vi antar at en eventuell oversvømmelse bare vil forekomme i én kanal, dvs. vi ser bare på hvor oversvømmelsen starter.)

(a) Hvilken metode vil du bruke for å finne ut om en det er mulig at en oversvømmelse rammer en av kanalene i tettbygd strøk?

Svar: 4% (Retning kan være helning – naturlig å anta DAG.) Bruk Maks-flyt-algoritmen (Ford Fulkerson). Kanter med uendelig kapasitet fra en virtuell kilde *S* til noder med utgående åpne kanaler (tilsig, nedbør). Tilsvarende fra noder med fritt avløp til et virtuelt sluk *T* (hav etc.). Maks-flyt fra *S* til *T* gir et *snitt*. Mulig oversvømmelse hvis man har minst én *InTown* i dette snittet. Snittet trenger ikke være entydig – det er naturlig å anta at man velger det som er nærmest *S*.

(b) Hvordan vil du finne ut om en oversvømmelse garantert vil ramme et tettbygd strøk?

Svar: 4% Samme modell som i **(a)** gir *garantert* oversvømmelse dersom samtlige kanter i snittet også er *InTown*.

Oppgave 6, Øvingsrelaterte oppgaver. (25%)

(a) Kjør Partition på tallene : 13, 7, 11, 4, 6, 2, 0, 32, 29.
Bruk tallet 13 som pivot-element. Vis høyre og venstre partisjoneringsindeks per steg (i,j).

Svar: 4% (*Partisjonerings-indeksene vises ved understrekning. Tallene er allerede partisjonerte – derfor ingen "swapping"*)

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1: [<u>13</u>, 7, 11, 4, 6, 2, 0, 32, <u>29</u>]

2: [<u>13</u>, 7, 11, 4, 6, 2, 0, <u>32</u>, 29]

3: [<u>13</u>, 7, 11, 4, 6, 2, <u>0</u>, 32, 29]

4: [0, <u>7</u>, 11, 4, 6, 2, <u>13</u>, 32, 29]

5: [0, 7, <u>11</u>, 4, 6, 2, <u>13</u>, 32, 29]

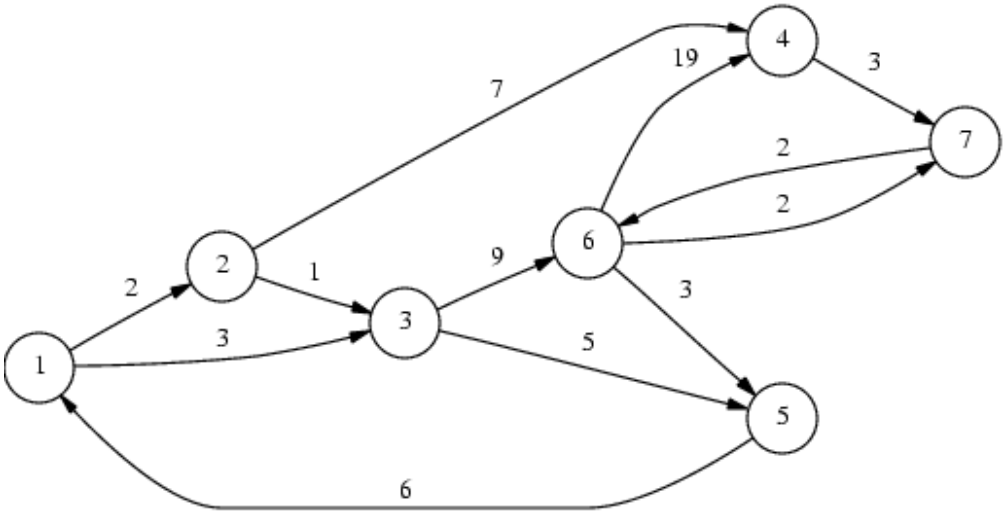
6: [0, 7, 11, <u>4</u>, 6, 2, <u>13</u>, 32, 29]

7: [0, 7, 11, 4, <u>6</u>, 2, <u>13</u>, 32, 29]

8: [0, 7, 11, 4, 6, <u>2</u>, <u>13</u>, 32, 29]

(b) Hva ville vært optimalt pivot-element generelt sett når Partition blir brukt i Quicksort?

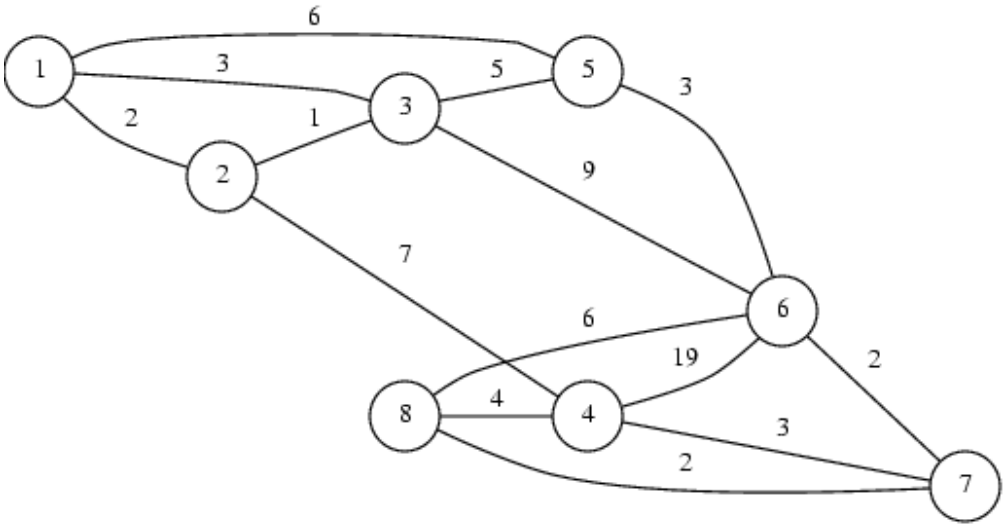
Svar: 2% Medianen



(c) Bruk Dijkstras algoritme til å finne korteste vei fra node 1 til de andre nodene i grafen over. Fyll inn verdier for avstandsfunksjonen d (for hvert steg i algoritmen) i tabellen under:

Svar: (8%)

Steg	**Node 1**	**Node 2**	**Node 3**	**Node 4**	**Node 5**	**Node 6**	**Node 7**
1	**0**	2	3	∞	∞	∞	∞
2	**0**	**2**	3	9	∞	∞	∞
3	**0**	**2**	**3**	9	8	12	∞
4	**0**	**2**	**3**	9	**8**	12	∞
5	**0**	**2**	**3**	**9**	**8**	12	12
6	**0**	**2**	**3**	**9**	**8**	**12**	12
7	**0**	**2**	**3**	**9**	**8**	**12**	**12**



(d) Finn minste spenntre i grafen over, ved bruk av Prims algoritme. Fyll inn nodepar (fra-node – til-node) for kantene du legger til i hvert steg i tabellen under:

Svar: 6%

Steg	**Fra-node**	**Til-node**
1	1	2
2	2	3
3	3	5
4	5	6
5	6	7
6	7	8
7	7	4
8		

(e) Hva blir summen av kantene i det minimale spenntreet?

Svar: 2% 18

(f) Kan man ha et største spenntre? Hvordan vil du evt. finne det, og hva blir tidskompleksiteten?

Svar: 3%
Å finne et største spenntre er ekvivalent med å finne et minste spenntre. Hvis k er den største kant-vekten, kan alle kant-vektene k_i settes til $k–k_i$ og man kan så kjøre for eksempel Prims algoritme på den omformede grafen. (Eventuelt kan man gjøre om algoritmen til å plukke ut den *største* kanten hver gang istedenfor den *minste*). Kjøretiden er som for å finne minste spenntre:

$$\mathbf{O}(|E| \log |V|)$$

Det er generelt bedre å endre datasettet enn å endre algoritmen.