TMA 4110
Høsten 2019

Innlevering 5

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$ Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

For hver av deloppgavene kommer jeg til å løse likningen $det(A - \lambda\hat{}_n) = 0$ for å finne egenverdier og $(A - \lambda I_n)\underline{v} = 0$ for å finne egenvektorer (der λ er de forskjellige egenverdiene jeg fant først.)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Egenverdier:

$$\begin{aligned} A - \lambda I_2 &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ det(A - \lambda I_2) &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 2 \\ &= 1^2 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ &\implies \lambda = [-1,\ 3] \end{aligned}$$

Jeg har nå at egenverdiene til matrisen A er $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$. Bruker dette til å finne egenvektorene:

$$\begin{aligned} (A + I_2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Egenvektor for } \lambda = -1 \text{ er } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A - 3I_2) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Egenvektor for } \lambda = 3 \text{ er } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Finner egenverdier:

$$
\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\
det(A - \lambda I_3) &= (1-\lambda)((1-\lambda)\cdot -\lambda - 0 \cdot 0) - 2(2 \cdot -\lambda - 0 \cdot 0) + 0 \\
&= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda \\
&\implies \lambda = [-1,\ 0,\ 3]
\end{aligned}
$$

Jeg har nå at egenverdiene til matrisen A er $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ og $\lambda_3 = 3$. Bruker dette til å finne egenvektorene:

$$
\begin{aligned}
A - 0I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 161 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Egenvektor for } \lambda = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
A + I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Egenvektor for } \lambda = -1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Egenvektor for } \lambda = 3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$det(A - \lambda I_2) = (-\lambda \cdot -\lambda) = \lambda^2$$

$$\implies \lambda = 0$$

Har at egenverdiene λ_1 og $\lambda_2 = 0$, finner egenvektoren(e)

$$A - 0I_2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Egenvektor for } \lambda = 0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Finner egenverdiene:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_3) &= det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 2 & 4 & 9-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (4-\lambda)((1-\lambda)(9-\lambda) - (-2)\cdot 4) - 2(-1(9-\lambda) - (-3)\cdot 2) + 3(-1 \cdot 4 - (1-\lambda) \cdot \\ &= (4-\lambda)(9 - \lambda - 9\lambda + \lambda^2 + 12) - 2(-9 + \lambda + 6) + 3(-4 - 2 + 2\lambda) \\ &= 4\lambda^2 - 40\lambda + 84 - \lambda^3 + 10\lambda^2 - 21\lambda - 2\lambda + 6 + 6\lambda - 18 \\ &= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 57\lambda + 72 \end{aligned}$$

Prøvde meg frem (som hintet sa) med $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$. Fant at $\lambda = 3$ gir 0, som vil si $\lambda = 3$ er en egenverdi. Deretter polynomdividerte jeg $\frac{-\lambda^3+14\lambda^2-57\lambda+72}{\lambda-3}$ og fikk at dette er lik $-\lambda^2 + 11\lambda - 24$. Løser jeg denne ligningen får jeg $\lambda = [3,\ 8]$. Egenverdiene for A er dermed $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ og $\lambda_3 = 8$.

Finner egenvektorene:

Starter med å finne egenvektorer for $\lambda = 3$

$$A - 3\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finner nå egenvektor for $\lambda = 8$

$$A - 8\lambda = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies \underline{v_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$