Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

1 Oppgaver til kapittel 7

1 Avgjør om følgende delmengder i $\mathbb{R}^2$ er underrom av $\mathbb{R}^2$.

Må vise:

1. Nullvektoren er i underrommet
2. $x, y \in W \implies x + y \in W$
3. $x \in W$ og $c \in W \implies cx \in W$

a) Alle x, y slik at $x + y = 0$. ($W = \{(x, y) : x + y = 0\}$)

1. $0 + 0 = 0$ $((0, 0))$ Ja!
2. $(x, y) \in W$, $(\hat{x}, \hat{y}) \in W$. Siden $x+y = 0$ og $\hat{x}+\hat{y} = 0$ er $x+y+\hat{x}+\hat{y} = 0 \in \mathbb{R}^2$. Ja!
3. $c(x + y) = 0$ Siden $x + y = 0$ har jeg $c \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}^2$. Ja!

Ja, det er et underrom.

b) Alle x, y slik at $x + y = 1$. ($W = \{(x, y) : x + y = 1\}$)

1. $0 + 0 = 1 \neq 0$ Nei.

Ikke et underrom da nullevektoren ikke er i rommet.

c) $\mathbb{Q}^2$

1. 0 er et rasjonelt tall, derfor er nullvektoren i $\mathbb{Q}^2$
2. Motbevis: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{R}^2$

$\mathbb{Q}^2$ er ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$.

2 La A og B være følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til A, og finn dimensjonen til hvert av disse rommene.

En basis for kolonnerommet til A er kolonnene som har pivotelementer. Det vil si:

$$Col A = \text{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim colA = 3$

Basis for nullrommet finner jeg ved å løse ligningen $Ax = \underline{0}$. A er allerede på redusert trappeform, og jeg vil få frie variabler:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \\
x_2 &= -x_3 - x_7 = -s - u \\
x_3 &= s \\
x_4 &= t \\
x_5 &= -x_7 = -u \\
x_6 &= -x_7 = -u \\
x_7 &= u
\end{aligned}$$

Som vi si en basis for nullrommet til A er:

$$\begin{aligned}
NullA &= \begin{bmatrix} r \\ -s-u \\ s \\ t \\ -u \\ -u \\ u \end{bmatrix} \\
&= r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

$\dim NullA = 4$

Basis for radrommet til A er radene i a som har pivotelementer:

$$RowA = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim RowA = 3$

b) Gjør det samme for matrisen B.

Jeg Gausseliminerer B:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-2&-4\\0&-3&-6\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&2&4\\0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Basis for kolonnerommet til B er de samme kolonnene som i den reduserte matrisen (samme nr. kolonne). Det er også de kolonnene som er pivotkolonner, altså kolonne nr 1 og 2:

$$ColB = \text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}\right\}$$

$\dim ColB = 2$

Nullrommet til A ar igjen gitt ved $Ax = \underline{0}$ som er det samme som å løse ligningen $Bx = \underline{0}$ hvor B er den reduserte matrisen. Jeg får igjen frie variabler:

$$x_1 = x_3$$
$$x_2 = -2x_3$$
$$x_3 = s$$

som vil si at nullrommet til B er:

$$NullB = \begin{bmatrix}s\\-2s\\s\end{bmatrix}$$
$$= s\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$
$$\implies \text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$\dim NullB = 1$

Basis for radrommet til B er radene som har pivotelementer:

$$RowB = \text{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}\right\}$$

$\dim RowB = 2$

c) Ligger vektoren (0, 1, -2, 3, -1, -1, 1) i nullrommet til A? Ligger den i nullromet til B?

Dersom det er meningen at denne vektoren skal være en radvektor, ligger den ikke i nullrommet til noen av de, ettersom kravet for å ligge i nullrommet er at ligningen $Ax = \underline{0}$, hvor x er denne vektoren, er oppfylt. Både A og B har feil dimensjoner for å kunne ganges med denne vektoren dersom det er en radvektor.

Er det derimot meningen at det skal være en kolonnevektor, kan jeg sjekke om den ligger i nullrommet til A, men ikke B, da den har feil dimensjoner:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2\\ 3\\ -1\\ -1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1\\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1\\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ja, denne vektoren ligger i nullrommet til A, men ikke i nullrommet til B.

d) Ligger vektoren (-1, -1, -1, -1) i kolonnerommet til A? Ligger den i kolonnerommet til B?

Dersom det er meningen at det skal være en kolonnevektor og ikke en radvektor, ser jeg at den ikke ligger i kolonnerommet til A, da alle vektorer i kolonnerommet til A er på formen $\begin{bmatrix}r\\ s\\ t\\ 0\end{bmatrix}$ hvor r, s, t er vilkårlige tall. Vekoren i spørsmålet har -1 i siste rad, ikke 0 som alle vektorer i kolonnerommet til A har. Sjekker B. Ser at hvis jeg ganger $\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$ (andre vektor i kolonnerommet) med -1 og legger de to vektorene sammen (vektoren ganget med -1 og første vektor i kolonnerommet) vil jeg få $\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$ som vil si denne vektoren er i kolonnerommet til B.

3 **a)** Finn en basis for $\mathcal{P}_2$. Vis at det faktisk er en basis.

En basis for $\mathcal{P}_2$ er:

$$\mathrm{Sp}\left\{x^2, x, 1\right\} = \left\{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Ser fort at disse vektorene er lineært uavhengige, da eneste måten å få null på er å velge $a = b = c = 0$. Ser også lett at de utspenner hele $\mathcal{P}_2$.

b) Hva er koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for $\mathcal{P}_2$?

Koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ er $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) Finn en basis for $\mathcal{P}_n$, der $n \geq 0$

$$\mathrm{Sp}\left\{1, x_1 x, x_2 x^2, \ldots, x_n x^n\right\} = \left\{x_0 + x_1 x + x_2 x^2 + \cdots + x_n x^n \mid x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

$\boxed{4}$ La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være følgende vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Se på planet i $\mathbb{R}^3$ som består av alle vektorer på formen $\mathbf{u} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$, der s og t er vilkårlige tall. Er dette planet et underrom av $\mathbb{R}^3$?

Planet jeg får av $\mathbf{u} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$ er:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + s + 2t \\ -1 + 2s + 3t \\ 1 + 3s + 4t \end{bmatrix}$$

Sjekker om nullvektoren er i denne mengden:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Det står nå at $t = -1$ og $t = 3$, som ikke går. Det er inkonsistens i systemet. Derfor er ikke nullvektoren ikke i mengden og dette er ikke et underrom. (Brukte at $s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2 = -\mathbf{u}$)

b) Er planet som består av alle vektorer på formen $\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$ et underrom av $\mathbb{R}^3$?

Sjekker igjen om nullvektoren er i planet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Ser at vi kan få nullvektoren ved å sette $s = 1$ og $t = -1$, dette kan da være et underrom.
(((Brukte at $s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2 = -\mathbf{v}$))
Sjekker at sum av to vektorer i underrommet også er i $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2) + (\mathbf{v} + \hat{s} \cdot \mathbf{a}_1 + \hat{t} \cdot \mathbf{a}_2) \\ = 2\mathbf{u} + (s + \hat{s})\mathbf{a}_1 + (t + \hat{t})\mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

Som også er i $\mathbb{R}^3$. Sjekker at en skalar ganget med $\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$ også er i $\mathbb{R}^3$:

$$c \cdot (\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2) = c \cdot \mathbf{v} + c \cdot s \cdot \mathbf{a}_1 + c \cdot t \cdot \mathbf{a}_2)$$

Som også er i $\mathbb{R}^3$. Det vil si at $\mathbf{v} + s \cdot \mathbf{a}_1 + t \cdot \mathbf{a}_2$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

c) La $A = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$ være matrisen som har $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som kolonner. Ligger vektoren $\mathbf{u}$ i kolonnerommet til A? Hva med $\mathbf{v}$? Sammenlign med det du fant ut i del **a)** og **b)**

Dette finner jeg ut ved å sjekke om $A = \mathbf{u}$ og $A = \mathbf{v}$ har en løsning. Sjekker med $\mathbf{u}$ først:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Systemet er inkonsistent, som vil si $\mathbf{u}$ ikke er i kolonnerommet til A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet har en løsning. $\mathbf{v}$ er i kolonnerommet til A.
Vet ikke helt hvordan jeg skal sammenligne, men fant jo ut at $\mathbf{u}+s\cdot\mathbf{a}_1+t\cdot\mathbf{a}_2$ ikke er et underrom og $\mathbf{u}$ er ikke i kolonnerommet til A. Fant og ut at $\mathbf{v}+s\cdot\mathbf{a}_1+t\cdot\mathbf{a}_2$ er et underrom og at $\mathbf{v}$ er i kolonnerommet til A. Er sikkert noe der jeg ikke klarer å se bare.

$\boxed{5}$ La A være en m x n matrise, hvor $m < n$. Hvilke av følgende påstander kan vi da konkludere med?

a) $\dim ColA > 0$

b) $\dim NullA > 0$
$\underline{0}$ er alltid med i nullrommet, derfor kan vi konkludere med denne.

2 Oppgaver til kapittel 8

$\boxed{6}$ Finn ut om T er en lineærtransformasjon. Hvis den er det: finn standardmatrisen til T, regn ut ker T og im T, og finn ut om T er injektiv, og om den er surjektiv.

For hver av deloppgavene sjekker jeg om $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)$ og hvis de stemmer, om $cT\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=T\left(c\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$

a) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\sin x+\cos y\\-\sin y\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)&=T\left(\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{bmatrix}\right)\\&=\begin{bmatrix}\sin\left(x_1+y_2\right)+\cos\left(x_2+y_2\right)\\-\sin x_2+y_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)&=\begin{bmatrix}\sin x_1+\cos x_2\\-\sin x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin y_1+\cos y_2\\-\sin y_1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\sin x_1+\cos x_2+\sin y_1+\cos y_2\\-\sin x_2-\sin y_2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}\sin\left(x_1+y_2\right)+\cos\left(x_2+y_2\right)\\-\sin x_2+y_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

T er ikke en lineærkombinasjon.

b) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=e^x+e^y$

$$\begin{aligned}T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)&=T\left(\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{bmatrix}\right)\\&=e^{x_1+y_1}+e^{x_2+y_2}\end{aligned}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)=e^{x_1}+e^{x_2}+e^{y_1}+e^{y_2}\neq e^{x_1+y_1}+e^{x_2+y_2}$$

T er ikke en lineærkombinasjon.

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 8(x_1 + y_1) - 7(x_2 + y_2) \\ 3(x_3 + y_3) - 8(x_1 + y_1) - 7(x_2 + y_2) \\ 5(x_2 + y_2) - 4(x_1 + y_1) - 8(x_3 + y_3) \\ 6(x_2 + y_2) - 6(x_1 + y_1) - 4(x_3 + y_3) \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x_1 - 7x_2 \\ 3x_3 - 8x_1 - 7x_2 \\ 5x_2 - 4x_1 - 8x_3 \\ 6x_3 - 6x_1 - 4x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8y_1 - 7y_2 \\ 3y_3 - 8y_1 - 7y_2 \\ 5y_2 - 4y_1 - 8y_3 \\ 6y_3 - 6y_1 - 4y_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8x_1 - 7x_2 + 8y_1 - 7y_2 \\ 3x_3 - 8x_1 - 7x_2 + 3y_3 - 8y_1 - 7y_2 \\ 5x_2 - 4x_1 - 8x_3 + 5y_2 - 4y_1 - 8y_3 \\ 6x_3 - 6x_1 - 4x_3 + 6y_3 - 6y_1 - 4y_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8(x_1 + y_1) - 7(x_2 + y_2) \\ 3(x_3 + y_3) - 8(x_1 + y_1) - 7(x_2 + y_2) \\ 5(x_2 + y_2) - 4(x_1 + y_1) - 8(x_3 + y_3) \\ 6(x_2 + y_2) - 6(x_1 + y_1) - 4(x_3 + y_3) \end{bmatrix}$$

Sjekker så om det er det samme multiplisert med en skalar:

$$cT\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = c\begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8cx - 7cy \\ 3cz - 8cx - 7cy \\ 5cy - 4cx - 8cz \\ 6cy - 6cx - 4cz \end{bmatrix}$$

$$T\left(c\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8cx - 7cy \\ 3cz - 8cx - 7cy \\ 5cy - 4cx - 8cz \\ 6cy - 6cx - 4cz \end{bmatrix}$$

T er en lineærtransformasjon. Standardmatrisen til T er gitt ved $A = [T(\underline{e_1})\ T(\underline{e_2})\ T(\underline{e_3})]$.

Finner disse:

$$T(\underline{e_1}) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\-8\\-4\\-6\end{bmatrix} \quad T(\underline{e_2}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-7\\-7\\5\\6\end{bmatrix}$$

$$T(\underline{e_3}) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\3\\-8\\-4\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix}6 & -7 & 0\\-8 & -7 & 3\\-4 & 5 & -8\\-6 & 6 & -4\end{bmatrix}$$

T er injektiv dersom kolonnene i A er lineært uavhengige. Finner $colA$:

$$\begin{bmatrix}6 & -7 & 0\\-8 & -7 & 3\\-4 & 5 & -8\\-6 & 6 & -4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow colA = \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}6\\-8\\-4\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-7\\-7\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-8\\-4\end{bmatrix}\right\}$$

Dette vil si kolonnene i A er lineært uavhengige og T er injektiv. Siden kolonnene i A ikke utspenner $\mathbb{R}^4$ er den ikke surjektiv. Dersom en lineærtransformasjon er injektiv er $\ker T = \{\underline{0}\}$ som er tilfelle her. Im $T = ColA$

d) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{y}\\\hat{z}\\\hat{w}\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}x+\hat{x}\\y+\hat{y}\\z+\hat{z}\\w+\hat{w}\end{bmatrix}\right)$$
$$= (x+\hat{x})^2 + (y+\hat{y})^2 + (z+\hat{z})^2 + (w+\hat{w})^2$$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{y}\\\hat{z}\\\hat{w}\end{bmatrix}\right) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 + \hat{w}^2$$

$$\neq (x+\hat{x})^2 + (y+\hat{y})^2 + (z+\hat{z})^2 + (w+\hat{w})^2$$

T er ikke en linærtransformasjon.

e) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right)$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{w} \end{bmatrix}\right) = (x+\hat{x}) + 2(y+\hat{y}) + 3(z+\hat{z}) + 4(w+\hat{w})$$

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ \hat{w} \end{bmatrix}\right) &= x + \hat{x} + 2y + 2\hat{y} + 3z + 3\hat{z} + 4w + 4\hat{w} \\ &= (x+\hat{x}) + 2(y+\hat{y}) + 3(z+\hat{z}) + 4(w+\hat{w}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\left(c \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) &= c \cdot T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) \\ &= c(x + 2y + 3z + 4w) \end{aligned}$$

T er en lineærtransformasjon. Finner standardmatrisen A:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1 \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 3 \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 4$$

$$\implies A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ser at kolonnene i A ikke er linært uavhengige, T er derfor ikke injektiv. Kolonnene i A spenner hele $\mathbb{R}^1$, den er derfor surjektiv. Bildet til T er kolonnerommet til A som er $\left\{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\right\}$. Kjernen til T er nullrommet til A som kun består av nullvektoren.

$\boxed{7}$ Finn standardmatrisen til linærtransformasjonen

a) … $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler planet om x-aksen.

Ser at $S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$. Standardmatrisen finner jeg ved $\begin{bmatrix} S(\underline{e_1}) & S(\underline{e_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) … $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer planet med $\frac{3\pi}{4}$.

Ser at $R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - y\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ x\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$. Standardmatrisen er gitt ved $A = \begin{bmatrix} R(\underline{e_1}) & R(\underline{e_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$\boxed{8}$ La S og R være som i forrige oppgave. Finn standardmatrisene til sammensetningene $S \circ R$ og $R \circ S$. Gi en geometrisk beskrivelse av hva disse lineærtransformasjonene gjør.

$$
\begin{aligned}
S \circ R = S\left(R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) &= S\left(\begin{bmatrix} x\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - y\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ x\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} x\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ x\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - y\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \\
\implies A &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Har regnet ut standardmatrise så mange ganger i denne øvingen, så gidder ikke videre å skrive hvordan jeg gjør det.

$$
\begin{aligned}
R \circ S = R\left(S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) &= R\left(\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} x\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ x\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - y\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \\
\implies A &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Aner ikke hvordan jeg skal gi en geometrisk beskrivelse, men de roterer ihvertfall $\frac{3\pi}{4}$ radianer og speiler om x-aksen.

$\boxed{9}$ La $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x:

$$G(p) = q, \quad \text{der } q(x) = x \cdot p(x)$$

a) Vis at D og G er lineærtransformasjoner.
Viser at D er en:

$$
\begin{aligned}
&D(p + \hat{p}) = (p + \hat{p})' = p' + \hat{p}' \\
&D(p) + D(\hat{p}) = p' + \hat{p}' \\
\\
&D(cp) = (cp)' = cp' \\
&cD(p) = cp'
\end{aligned}
$$

D er en lineærtransformasjon. Viser at G er en:

$$
\begin{aligned}
&G(p + \hat{p}) = x(p(x) + \hat{p}(x)) = q \\
&G(p) + G(\hat{p}) = x(p(x)) + x(\hat{p}(x)) = x(p(x) + \hat{p}(x)) = q \\
\\
&cG(p) = cq = cxp(x) \\
&G(cp) = cxp(x)
\end{aligned}
$$

G er en lineærtransformasjon.

b) Finn bildet og kjernen til D og til G.

Im $D = \mathcal{P}$, da vi kan få alle mulige polynomer ved å bruke D.

Ker $D = \{$Alle konstante polynomer$\}$, da disse derivert blir 0.

Im $G = \{$Alle polynomer uten konstantledd$\}$, da $x \cdot p(x)$ vil fjerne alle konstantledd, fordi den ganger med x.

Ker $G = \{\underline{0}\}$, da dette er den eneste måten vi kan få $G(p) = 0$.

c) Finn ut om D og G er injektive og/eller surjektiv

Ved hjelp av teoerm 8.9 - *En lineærtransformasjon $T : V \to W$ er injektiv hvis og bare hvis ker $T = \{0\}$.* ser jeg at G er injektiv. D er ikke injektiv. Siden D utspenner hele $\mathcal{P}$ er D surjektiv. G utspenner ikke hele $\mathcal{P}$ og er derfor ikke surjektiv.

d) Beskriv lineærtransformasjonen $(D \circ G) - (G \circ D)$.

Igjen, usikker på hva som menes med å beskrive en lineærtransformasjon, men den gjør er å spytte ut den opprinnelige $p(x)$. F.eks:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 \\ D(P(x)) &= 2x \\ G(P(x)) &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(G(P(x))) - G(D(P(x))) &= D(x^3) - G(2x) \\ &= 3x^2 - 2x^2 = x^2 \end{aligned}$$

e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner på samme måte som vi definerte D og G. Velg en passende basis for hvert av vektorrommene $\mathcal{P}_2$ og $\mathcal{P}_3$, og finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

Basis for $\mathcal{P}_2 = \{1, x, x^2\}$

Basis for $\mathcal{P}_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$

Finner matrise for basisene:

$$\begin{aligned} A_{D_3} &= \big[[D(1)] \quad [D(x)] \quad \big[D(x^2)\big] \quad \big[D(x^3)\big]\big] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{G_3} &= \big[[G(1)] \quad [G(x)] \quad \big[G(x^2)\big]\big] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sjekker at dette faktisk er matrisene for basisene:

$$A_{D_3} \cdot \begin{bmatrix}1\\5\\7\\3\end{bmatrix}, \quad \text{der} \begin{bmatrix}1\\5\\7\\3\end{bmatrix} = 1 + 5x + 7x^2 + 3x^3 = p(x)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\5\\7\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\14\\21\\0\end{bmatrix}$$

$$= 5 + 14x + 21x^2 = p'(x)$$

$$A_{G_3} \cdot \begin{bmatrix}5\\7\\8\end{bmatrix}, \quad \text{der} \begin{bmatrix}5\\7\\8\end{bmatrix} = 5 + 7x + 8x^2 = p(x)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\7\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\\8\end{bmatrix}$$

$$= 5x + 7x^2 + 8x^3 = xp(x)$$

$\boxed{10}$ La $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ være funksjonen som er gitt ved derivasjon:

$$D(f) = f'$$

a) Vis at D er en lineærtransformasjon.
Må vise $D(f+g) = D(f) + D(g)$ og $cD(f) = D(cf)$

$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g'$$
$$D(f) + D(g) = f' + g'$$

$$D(cf) = (cf)' = cf'$$
$$cD(f) = cf'$$

D er en lineærtransformasjon.

b) Finn kjernen ker D av lineærtransformasjonen D. Er ker D et endeligdimensjonalt vektorrom? I så fall: Finn en basis
Ker $D = \{$Alle funksjoner som er konstanter$\}$ Basis for Ker $D = \text{Sp}\{1\}$

c) Er D surjektiv?
Ja, D er surjektiv! Definisjonen for at en funksjon skal være surjektiv er:

En funksjon $f : A \to B$ kalles surjektiv dersom det for hver $b \in B$ finnes minst én $a \in A$ slik at $f(a) = b$

Analysens fundamentalteorem sier at for hver f' finnes det en $F = \int_a^x f'$, som vil si det for alle f' finnes en F slik at $D(F) = f'$.