TIPS, TRIKS & SHIT

- $y-y_0 = m(x-x_0)$, $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, $S(x_0,y_0)$ radius
- enhetssirkelen $x^2+y^2=1$ $O: 2\pi,\ r=1$
- $\text{ant.}\ ^\circ/360^\circ = \frac{\text{ant. radianer}}{2\pi}$
- Trig. regneregler:
  - $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
  - $\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$
  - $\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
  - Teorem 2 gir:
    - $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
    - $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
  - Tangens:
    - $\tan^2\theta = (1/\cos^2\theta) - 1$
    - $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
    - $\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$
- Potenser:
  - $a^r a^s = a^{r+s}$ · $(a^r)^s = a^{rs}$
  - $a^r b^r = (ab)^r$ · $a^0 = 1$
  - $a^{-r} = 1/a^r$ · $a^1 = a$
  - $a^r/a^s = a^{r-s}$ · $a^r > 0$
  - $a^r/b^r = (a/b)^r$ · $a^{-1} = 1/a$
- Logaritmer:
  - $\log_a a^x = x$ $a^{\log_a x} = x$
  - $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
  - $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
  - $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$
  - $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$ $\log_a \frac{1}{a} = -1$
- Funksjoner:
  - mengde: ansamling av tall
  - element: $\in$ hører med i mengden
  - union: $\cup$ "eller"
  - snitt: $\cap$ "og"/"både"
  - inklusjon: $\subset$ inkluderer
  - kombinere:
    - $+$ $h = f+g \Rightarrow h(x) = f(x)+g(x)$ def. mng. $a \cup b$
    - $\times$ $h = fg \Rightarrow h(x) = f(x)g(x)$ def. mng. $a \cap b$
    - $\circ$ $h = f\circ g \Rightarrow h(x) = f(g(x))$ def. mng $\{x \in b \mid g(x) \in a\}$
  - symmetri: jevn (aldri injektiv) eller odde
  - inversfunksjon f^{-1} omgjør f
    - La $f: a \to \mathbb{R}$ verdimengde $f(a)$
    - $f^{-1}(y) = x$ er inversen. $(f^{-1}(f(x)) = x)$
  - logaritme: $y = f(x) = a^x \Rightarrow x = \log_a y$, som er inversfunksjonen.

TIL TEOREM 3:

$f^{-1}: f(a) \to \mathbb{R}$ gitt ved at $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

$f^{-1}(f(x)) = x$ og $f(f^{-1}(y)) = y$

Som vil si at f og f^{-1} er hverandres inverser.

DEF: absoluttverdi:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

DEF: enhetssirkelen:
for hver vinkel θ får vi et unikt punkt (a,b) på enhetssirkelen

TEOREM 2: addisjonsformler
La α og β være $\mathbb{R}$:
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

DEF: tangens
$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ $\cos\theta \neq 0$
↳ ubegrenset

UFORMELL
DEF: sin, cos, tan i rett trekant

$\sin = \frac{\text{mot}}{\text{hyp}}$ $\cos = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}}$ $\tan = \frac{\text{mot}}{\text{hos}}$

DEF: logaritmer
for $a > 0$ og $y > 0$, er $\log_a y = x$ hvor x er det unike og reelle tallet som gir: $a^x = y$

NB! Eulers tall $e = 2{,}7182\ldots$
Den naturlige logaritme
$\log_e x = \log x = \ln x$ (e grunntall)

DEF: funksjoner
en funksjon f fra en mengde tall a av reelle tall $\to \mathbb{R}$, er en regel som til et hvert tall $x \in a$ gir ett tall $f(x) \in \mathbb{R}$. Vi skriver: $f: a \to \mathbb{R}$
$f(x)$ er funksjonsverdien til f i x
a er definisjonsmengden

NB! $f\circ g \neq g \circ f$

DEF: symmetri
- $f: a \to \mathbb{R}$ er jevn dersom $f(-x) = f(x)$ for alle $x \in a$
- $f: a \to \mathbb{R}$ er odde dersom $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in a$

DEF: injektiv (en-til-en)
en funksjon $f: a \to \mathbb{R}$ er injektiv hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når $x_1 \neq x_2$

TEOREM 3: injektiv og invers
La $f: a \to \mathbb{R}$ være injektiv med verdimng. $f(a)$. f^{-1} har def. mng $f(a)$, v. mng. a
Dvs f og f^{-1} bytter v. mng og def. mng

- Funksjoner (forts.)
  - periodiske - typ "bølger". p = periode

- Eksponentiell vekst og tallfølger
  - $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$
  - Følge: en funksjon $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (der $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$)
    kan uttrykkes som tabell eller funksjon av følgen a_n, n stiger i det uendelige

- Grenseverdier:
  gitt en følge $\{a_n\}$ har en tre mulige utfall:
  1) $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$ nærmer seg et tall L : konvergerer mot L
  2) $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \pm\infty$ vokser ubegrenset : divergerer mot $\pm\infty$
  3) hvis verken 1) eller 2) sier en kun at følgen divergerer.

  - grenser av polynomer - divider teller og nevner med høyeste potens i nevner - forkort - sett inn x og løs

  - på formen $a_n = a - b \to a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)} \to \frac{a^2 - b^2}{a+b}$

- Rekursjon: følge hvor a_{n+1} uttrykkes med a_n. Krever a_0.

- Fikspunkter: om rekursiv følge konvergerer, vil dette alltid være mot fikspunktene
  - løs $a = f(a)$ for å finne fikspunktene

- Formell def. av grenseverdi : ε = epsylon
  - sett $a_n < \varepsilon$ og løs mhp. n
  - uttrykket m/ ε i er nå $\leq N$
  - gir at $a_n - L <$ uttrykk m/ $\varepsilon = N < a_{\text{uttrykk m/ } \varepsilon}$

- Det gyldne snitt :

$a/b = (a+b)/a = \varphi = 1{,}618\dots$

- Fibonacci-tall : dobbel rekursiv følge som avhenger av de to første tallene i følgen. Eks: kaniner på øde øy

- Grenser til funksjoner : uformelt. La a er $\mathbb{R}$, f er nær a
  1) $\lim_{x\to a}(f(x)) = L$ ved å velge x nær ($\neq$) a
  2) $\lim_{x\to a}(f(x)) = \pm\infty$ - en sier at grensen ikke eksisterer
  3) om ikke 1) eller 2) - grensen eksisterer ikke.
  - Se på grense fra to sider : $\lim_{x\to a^+}(f(x))$ hvis $x > a$
    $\lim_{x\to a^-}(f(x))$ hvis $x < a$

- Grenseverdier i uendelig:
  f(x) går mot et $\mathbb{R}$ tall L når $x \to \infty$
  ↳ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

  - samme regneregler gjelder, uansett hva x går mot. Pass bare på: 0/0, $\infty - \infty$, ∞/∞ osv.

NB! $\lim_{x\to\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$ og $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

DEF: periodiske funksjoner
en funksjon $f: a \to \mathbb{R}$ kalles periodisk om det finnes et tall $p > 0$ | $f(x+p) = f(x)$ for alle $x \in a$

TEOREM 4: regneregler for grenser
La a_n og b_n være konvergente. $\lim_{n\to\infty}(a_n)$ $\lim_{n\to\infty}(b_n)$:
1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2) $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$
3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n$
4) $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n$

NB! Unngå uttrykk som 0/0, ∞/∞, $\infty - \infty$ ...

DEF: fikspunkter
for den rekursive følgen $a_{n+1} = f(a_n)$ er a et fikspunkt dersom $f(a) = a$
Om $a_0 = a$, blir alle $a_n = a$. Dvs den er stuck i de punktene.

DEF: grenseverdier
følgen a_n konvergerer mot L hvis det for en hver $\varepsilon > 0$ finnes et naturlig tall N slik at
$|a_n - L| < \varepsilon$ for alle $n > N$

DEF: det gyldne snitt
en oppdeling i to slik at forholdet minst : størst = størst : helheten

TIPS:
Fibonacci-tallene har eksponentiell vekst med proporsjonalitetskonst. = φ

NB!
$\lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = L \cap \lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Dvs: kan se på grensene fra hver side, men grensen er kun L om begge sider gir det. Om ikke → eksisterer ikke grensa

TEOREM 5: regneregler for grenser
Anta $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a}(g(x)) = K$
1) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + K$
2) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \times K$
3) $\lim_{x\to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot L$
4) $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L/K$ $K \neq 0$

TEOREM 6: skviseteoremet

La $a<b<c$ og f, h og g være funksjoner definert på $(a,c) \cup (c,b)$.
Hvis $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for alle verdier av x i $(a,c) \cup (c,b)$ og $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$:
$\lim_{x\to c} f(x) = L$

Dvs at en kan finne grenseverdien til f ved å se hvor grenseverdiene til g og h går. f er mellom g og h, så f "skvises" mellom dem helt til L.

sin&cos "bølger" seg bortover · finner $\lim_{x\to a}$ ved å sette opp ulikhet for å så se på grensen fra begge sider. Verdimengde $[-1,1]$ → $-1 \leq f(x) \leq 1$ og se på $\lim_{x\to a^+}$ og $\lim_{x\to a^-}$ · løs de to og bestem grenseverdien

TEOREM 7: to viktige trigonometriske grenseverdier

1) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ 2) $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$

Bevis vha. enhetssirkelen og teorem 6

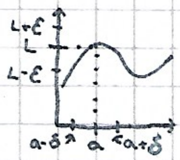
- Kontinuerlige funksjoner
  - funksjon uten "hopp og hakk".

DEF: kontinuitet
en funksjon $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig i et punkt c mellom a og b, $a<c<b$, hvis:
$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

TIPS: sjekkliste for å sjekke kontinuitet
1) er $f(c)$ definert? Den må finnes for å være kontinuerlig
2) eksisterer grenseverdien $\lim_{x\to c} f(x) = L$?
3) er $f(c) = L$? I så fall er $f(c) = \lim_{x\to c} f(x) = L$

TIPS: kontinuitet hos ulike typer funksjoner
- Polynomer: 1) 2) 3) oppfylt - bare å sette inn
- Rasjonale: $P(x)/Q(x)$, $Q(x) \neq 0$
- Eksponential: alle
- Logaritmer: alle tall >0
- Potenser & trig: alle definerte

DEF: formell definisjon av grenser
- $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dersom det for en hver $\varepsilon>0$ finnes et tall $\delta>0$ slik at:
$|f(x)-L|<\varepsilon$ når $0<|x-a|<\delta$
- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ dersom det for enhver $M>0$ finnes et tall $\delta>0$ slik at:
$f(x)>M$ når $0<|x-a|<\delta$



TEOREM 8:

hvis f og g er kontinuerlige i $x=c$, er også disse det:
- $a \cdot f$ for et tall a
- $f+g$
- $f \cdot g$
- f/g $g \neq 0$

hvis g er kont. i $x=c$, $g(c)=L$ og f er kont. i $x=L$, så er:
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

TEOREM 9: skjæresetningen / mellomverditeoremet

La $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ være kontinuerlig på (a,b). For ethvert tall L mellom $f(a)$ og $f(b)$ finnes minst ett tall $a<c<b$ slik at $f(c)=L$
eks. med fjelltur - opp dag 1 kl. 10^{00}-12^{00} og ned dag 2 kl. 10^{00}-12^{00} · vil være minst ett punkt hvor en er til samme tid (dagen etter) på samme sted