EKSAMEN I FAG 45011
ALGORITMER OG DATASTRUKTURER

Mandag 13. januar 1992 kl. 0900-1300

Faglig kontakt under eksamen: Arne Halaas, tlf. 3442

Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Godkjent lommekalkulator tillatt.

Merk: Alle svar skal skrives på vedlagte svarsark, der maksimal poengsum for hvert delspørsmål er angitt. En besvarelse kan totalt gis inntil 100 poeng.

Oppgave 1

Gitt sekvensen S: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ av positive heltall.
Dersom et tall m forekommer mer enn $\lceil n/2 \rceil$ ganger i S sier vi at m er et majoritetstall.

(a) (14 poeng)
Gi en meget kort beskrivelse av **ideen** til en så effektiv som mulig algoritme M for å finne et eventuelt majoritetstall m i S. Realiser M som en PASCAL-funksjon.

(b) (6 poeng)
Angi grenser for M's maksimale tidsforbruk med θ-notasjonen, og sammenlign M med standard (velkjente) algoritmer som kunne ha løst problemet.

Oppgave 2

Anta at en datamengde består av en meget lang sekvens av desimale sifre, der P=60% av sifrene er sifferet 0. De øvrige 9 sifre forekommer like hyppig.

(a) (6 poeng)
Finn en optimal Huffman-kode for sifrene, og den midlere kodelengden.

(b) (6 poeng)
Hvor liten kan p bli før koden funnet under (a) ikke lenger er optimal?

(c) (8 poeng)
Anta at en datafil består av en sekvens av (alle 256) 8-bits tegn, der den høyeste tegnfrekvensen er mindre enn det doble av den laveste tegnfrekvensen. Vis at Huffman-koding i dette tilfellet ikke er mer effektivt enn å bruke fast 8-bits kodelengde.

Oppgave 3

Gitt Dijkstras korteste-vei algoritme:

Dijkstra(G, w, s)
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2 $S \leftarrow \emptyset$
3 $Q \leftarrow V[G]$
4 **while** $Q \neq \emptyset$
5   **do** $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
6         $S \leftarrow S \cup \{u\}$
7   **for** each vertex $v \in Adj[u]$
8   **do** RELAX(u, v, w)

(a) (8 poeng)
Vil du støtte et forslag om å endre linje 4 til “4 while |Q| $>$1”? (Begrunn.)

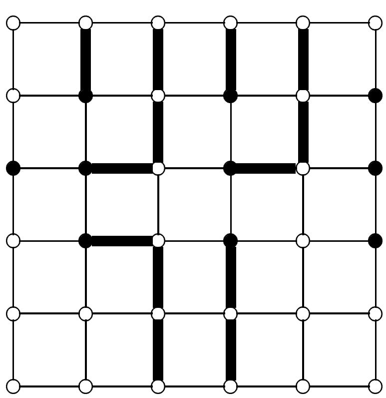
(b) (12 poeng)
Gi **din egen** korte beskrivelse av det du oppfatter som hovedideen bak Bellman-Ford algoritmen. Forklar spesielt, med ord/figur (ikke matematikk), din oppfatning av algoritmens korrekthet.

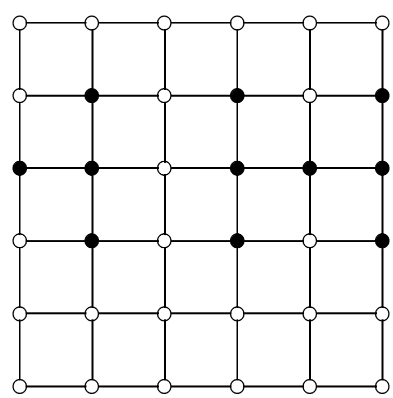
Oppgave 4

Gitt et rutenett med n x n noder og et utvalg på m noder av disse. Vi definerer “Rømningsproblemet” som følger:

For hver av de m utvalgte nodene gjelder det å finne egen rømningsvei til en vilkårlig node på randen av rutenettet. Rømningsveiene kan ikke berøre/krysse hverandre. (Veiene skal være disjunkte.)

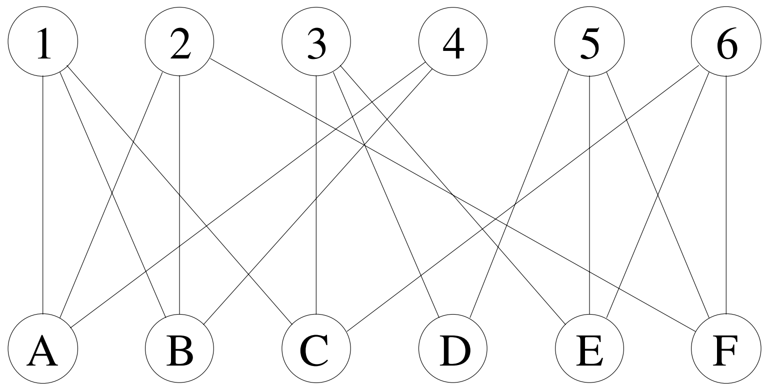
For rutenettet i figur I nedenfor, der n=6 og m=10, er det mulig å finne m=10 disjunkte rømningsveier. Merk at vi da også teller med (blokkerende) noder som i utgangspunktet er på randen. For rutenettet i figur II finnes ingen løsning.


Figur I


Figur II

(a) (12 poeng)
Vis hvordan rømnings-problemet kan omformes til et ordinært flytmaksimeringsproblem.

(b) (8 poeng)
Du skal her vise hvordan flytmaksimerings-algoritmen arbeider for å finne en såkalt maksimal "matching" i den bipartitte grafen nedenfor.
Anta at de flytforøkende veiene ut fra en node velges i stigende nummer/bokstavrekkefølge, og at flyten går "nedenfra og opp".
En flyforøkende vei kan her angis med en sekvens av bokstaver og tall, der de 3 første flytforøkende veier som blir funnet vil funnet vil være (A,1),(B,2),(C,3).
Finn, i riktig rekkefølge, de resterende flytforøkende veier som vil bli funnet.



Oppgave 5

En k-klikk i en urettet graf G med n noder er en komplett undergraf med k noder. Det finnes i alt n^k forskjellige utvalg av k noder i G, og en kan effektivt finne ut om et slikt utvalg utgjør en komplett graf.
Følgende algoritme A foreslås for å løse problem (K) "Har G en k-klikk?":
A: For hvert mulig utvalg: Sjekk (og stopp eventuelt) hvis utvalget er en k-klikk.

Påstand: "A's maksimale tidsforbruk er O($n^k \cdot k^2$), og K er derfor med i klassen P av problemer som kan løses i polynomisk tid."

(a) (8 poeng)
Er K med i klassen NP? (Begrunn)

(b) (12 poeng)
Forsvar eller angrip påstanden ovenfor. Diskuter her også problem-formuleringen.