Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA 4110
Høsten 2019

Innlevering 2

Oppgaver til kapittel 3

1 Løs ligningen $Ax = b$ for

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denne matrisen er allerede redusert til det fulleste. Den er heller ikke inverterbar. Jeg får derfor fire frie variabler, x_1, x_3, x_4 og x_7:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_7 = 0 &\implies x_2 = -x_3 - x_7 \\ x_5 + x_7 = 0 &\implies x_5 = -x_7 \\ x_6 + x_7 = 0 &\implies x_6 = -x_7 \\ &\implies X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_3 - x_7 \\ x_3 \\ x_4 \\ -x_7 \\ -x_7 \\ x_7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeg ser at denne matrisen ikke er invertertbar, da den ikke er kvadratisk, så løser den ved hjelp av gausseliminasjon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & \frac{3}{2} & -8 & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & -4 & \frac{9}{4} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & \frac{3}{2} & -8 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{215}{28} & -\frac{39}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{7}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{187}{215} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{156}{215} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{83}{215} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{187}{215} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{156}{215} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\implies x = \begin{bmatrix} \frac{83}{215} \\ \frac{187}{215} \\ \frac{156}{215} \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ La v og w være disse vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad og \quad w = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Finn en vektor

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

slik at u, v og w spenner ut i $\mathbb{R}^3$, og løs ligningen $xu + yv + zw = 0$.

Velger meg:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sjekker om de tre vektorene er lineære uavhengige (som også betyr de spenner ut i $\mathbb{R}^3$) ved hjelp av ligningen $xu + yv + zw = 0$. Dersom $x = y = z = 0$ spenner vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 8 & 0 \\ 1 & -7 & -8 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ser at $x = y = z = 0$ som vil si vektorene er lineært uavhengige og spenner i $\mathbb{R}^3$. Løsningen på $xu + yv + zw = 0$ er $x = y = z = 0$

$\boxed{3}$ La p og q være følgende polynomer:

$$p(x) = x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = 4x^2 + 18x + 4$$

a) La s være polynomet $x^2 + 8x + 2$. Finnes det konstanter slik at $s(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$ for alle x?

Sjekker om s kan skrives som en lineærkombinasjon av p og q:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 18 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 16 & 5 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 29 \end{array}\right]$$

Den nederste raden forteller meg at $0 = 29$, som vil si dette er et inkonsistent ligningssystem. Det vil videre si at det ikke finnes konstanter a og b slik at $s(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$ for alle x.

b) Finn et andregradspolynom t som oppfyller følgende: For hvert andregradspolynom r skal det være mulig å finne konstanter a, b og c slik at $r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot t(x)$.

Prøver med $t(x) = x^2 + x + 1$. Hvis p, q og t er lineært uavhengige, finnes det konstanter som alltid oppfyller kravet:

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 18 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 16 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ser at de er lineært uavhengige og derfor med $t = x^2 + x + 1$ er det mulig å finne konstanter a, b og c.

Oppgaver til kapittel 4

$\boxed{4}$ La v_1 og v_2 være vektorer i $\mathbb{R}^2$, og A en 2x2-matrise slik at:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad og \qquad Av_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut Aw, der $w = 2v_1 - v_2$.

$$\begin{aligned} Aw &= A(2v_1 - v_2) \\ &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-2 \\ -2-3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5 Er følgende matriser inverterbare? I så fall, finn den inverse og sjekk at svaret ditt er riktig.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

En matrise er ikke inverterbar dersom determinanten er lik 0. Regner ut determinanten i denne matrisen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot i - i \cdot 1 &= i - i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Siden determinanten er lik 0 er ikke denne matrisen inverterbar.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

For at en matrise skal være inverterbar må den være på formen NxN, noe denne matrisen ikke er. Derfor er den ikke inverterbar.

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Denne har potensiale til å være inverterbar. Finner determinanten:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (3 \cdot 5 - 4 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 5 - 4 \cdot 3) + 3 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 3) &= -1 - 2 * -2 + 3 * -1 \\ &= -1 + 4 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Determinanten er 0 og dermed er ikke matrisen invertertbar.

6 La A og B være to 2x2-matriser. Betrakt ligningen $AX = B$, hvor X er en ukjent 2x2-matrise.

a) Forklar hvorfor ligningen er ekvivalent med å løse to 2x2-ligningssystemer samtidig. Hvordan generaliseres denne påstanden for nxn-matriser?

Jeg bruker b) for å vise et eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dette korresponderer til de to lineære systemene:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= -1 \end{cases}$$

Som er to 2x2 lineære systemer. Med ord vil det si at hver kolonne i A har løsninger i kolonnene de korresponderende kolonnene i B. Dette gjelder også for alle NxN matriser.

b) Løs ligningen for $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Her står det at $0 = -2$, ligningssystemet har ingen løsning.

$\boxed{7}$ **a)** ?

b) Skriv om ligningen til fire ligninger med fire ukjente. Hva er totalmatrisen?

Starter med å sette $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ for så å finne c_1, c_2, c_3 og c_4:

$$AX + XB = C$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

Finner så ligninger for c_1, c_2, c_3 og c_4 ved å gange AX og XB og deretter summere:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1x_1 + a_2x_3 + x_1b_1 + x_2b_3 \\ c_2 &= a_1x_2 + a_2x_4 + x_1b_2 + x_2b_4 \\ c_3 &= a_3x_1 + a_4x_3 + x_3b_1 + x_3b_3 \\ c_4 &= a_3x_2 + a_4x_4 + x_3b_2 + x_3b_4 \end{aligned}$$

Totalmatrisen blir:

$$\begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2x_3 + x_1b_1 + x_2b_3 & a_1x_2 + a_2x_4 + x_1b_2 + x_2b_4 \\ a_3x_1 + a_4x_3 + x_3b_1 + x_3b_3 & a_3x_2 + a_4x_4 + x_3b_2 + x_3b_4 \end{bmatrix}$$

c) Løs ligningen når A, B og C er følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setter opp en ligning for X i form av en matrise:

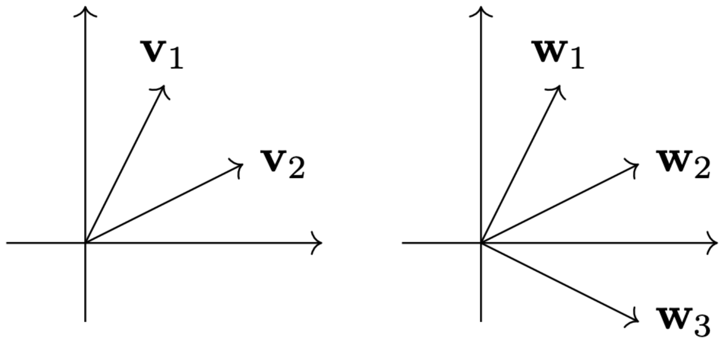
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

For å finne X har jeg brukt verdiene i matrisene A og B, satt dette inn i ligningene for c_1, c_2, c_3 og c_4 og funnet "det som står før" alle x-verdiene og puttet inn på de korresponderende plassene i matrisen.

Ser nå at løsningen på ligningen $AX + XB = C$ er $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Oppgaver til kapittel 5

$\boxed{8}$ De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$:



I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

I tilfelle 1 er de to vektorene lineært uavhengige. Dette fordi lineær uavhengighet vil si at den ene vektoren er et multiplum av den andre, men siden de spenner i forskjellige retninger er ikke dette tilfelle her. Siden de også spenner i hver sin retning, spenner de ut i hele $\mathbb{R}^2$.

I tilfelle 2 er vektorene *ikke* lineært uavhengige. Dette fordi høyeste antall n av vektorer i $\mathbb{R}^m$ som er lineært uavhengige er $n = m$. Her har vi 3 vektorer i $\mathbb{R}^2$, altså $n > m$. To av vektorene er dog uavhengige, som vil si de spenner ut i hele $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{9}$ Er vektorene lineært uavhengige?

a)

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

Sjekker om ligningen $x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 = 0$ holder:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\2 & 3 & 4 & 0\\3 & 4 & 5 & 0\end{array}\right] \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\\0 & -2 & -4 & 0\end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Siste raden med kun 0'er forteller meg at disse vektorene *ikke* er uavhengige.

b)

$$\begin{bmatrix}2\\4\\2i\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}i\\2i\\-1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}5-3i\\10-2i\\4+6i\end{bmatrix}$$

Bruker teorem 6.12 som sier at disse er ekvivalente:

1. $det\ A \neq 0$
2. Kolonnene i A er lineært uavhengige

Finner $det\ A$:

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot (2i \cdot (4+6i) - (10+2i) \cdot -1) - i \cdot (4 \cdot (4+6i) - (10+2i) \cdot 2i) + (5-3i) \cdot (-4 - (2i \cdot 2i)) \\
&= 2 \cdot (8i - 12 + 10 + 2i) - i \cdot (16 + 24i - 20i + 4) + (5-3i) \cdot (-40+4) \\
&= 2 \cdot (10i - 2) - i \cdot (20 + 4i) \\
&= 20i - 4 - 20i + 4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Determinanten er 0, derfor holder ikke (1) fra teoremet og dermed holder heller ikke (2). Vektorene er *ikke* uavhengige.

Oppgaver til kapittel 6

$\boxed{10}$ Regn ut determinanten til følgende matriser og avgjør om kolonnene er lineært uavhengige.

a)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

Finner determinanten:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 &= 1 - 4 \\
&= -3
\end{aligned}
$$

I følge teorem 6.12 (punktene i forrige oppgave) er kolonnene lineært uavhengige.

b)

$$
\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 4 \\ -6 & 15 & 1 \end{bmatrix}
$$

Finner determinanten:

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot (-4 \cdot 1 - 7 \cdot 15) + 5 \cdot (2 \cdot 1 - 7 \cdot (-6)) + 3 \cdot (2 \cdot 15 - (-4 \cdot -6)) \\
&= 2 \cdot (-4 - 105) + 5 \cdot (2 + 42) + 3 \cdot (30 - 24) \\
&= 2 \cdot (-109) + 5 \cdot 44 + 3 \cdot 6 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

I følge teorem 6.12 (punktene i forrige oppgave) er kolonnene lineært uavhengige.

c)

$$
\begin{matrix} 2i - 5 & & 3 \\ 2 - 4i & & 4 \\ -615 & & i \end{matrix}
$$

Finner determinanten:

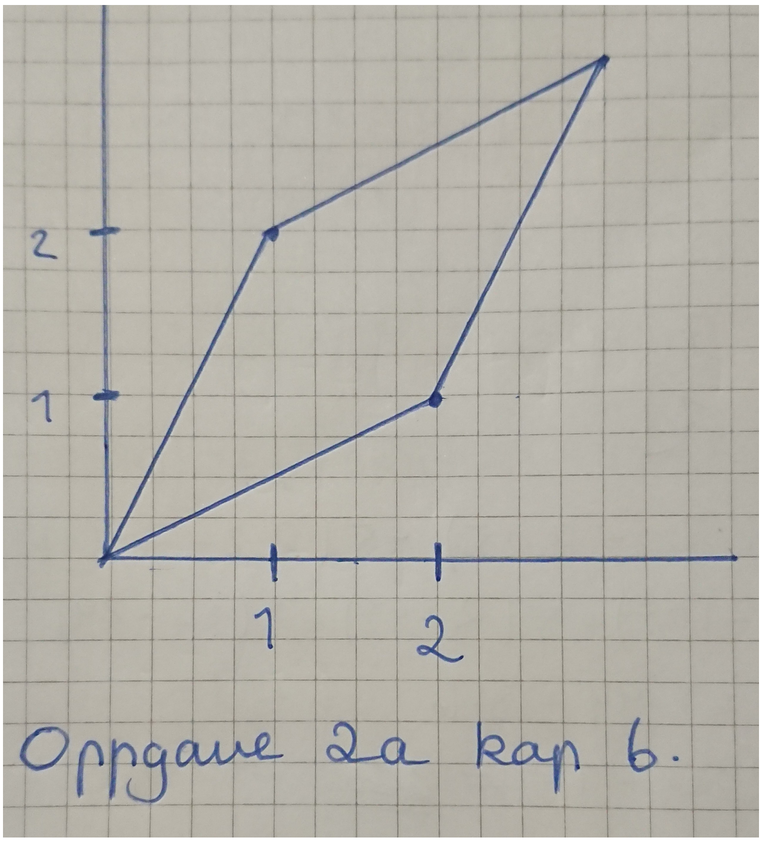
$$\begin{aligned}
&2i \cdot (-4i \cdot i - 7 \cdot 15) + 5 \cdot (2i \cdot 1 - 7 \cdot (-6)) + 3 \cdot (2 \cdot 15 - (-4i \cdot -6)) \\
&= 2i \cdot (4 - 105) + 5 \cdot (2i + 42) + 3 \cdot (30 - 24i) \\
&= 202i + 10i + 210 + 90 - 72i \\
&= 300 - 264i
\end{aligned}$$

I følge teorem 6.12 (punktene i forrige oppgave) er kolonnene lineært uavhengige.

$\boxed{11}$ Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

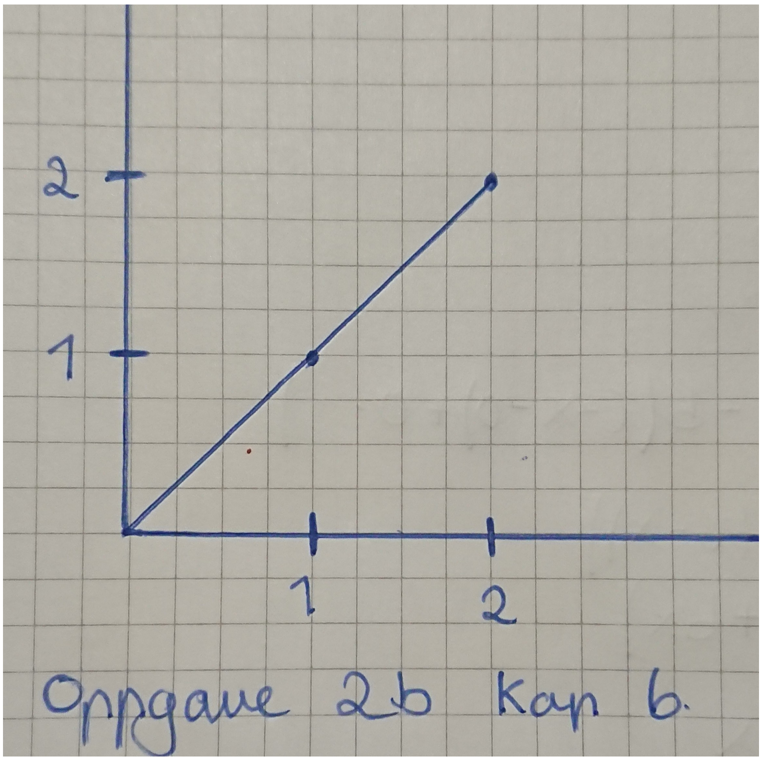


Arealet er gitt ved determinanten til A:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 &= 1 - 4 \\
&= -3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$



Her ser vi at vektorene er lineært avhengige og ligger på linje, vi kan derfor ikke tegne noe parallellogram, men determinanten blir 0, og arealet på "parallellogrammet" er 0.

$\boxed{12}$ La A være matrisen:

$$\begin{bmatrix}a & b & 0 & 0\\ c & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & y & Z\end{bmatrix}$$

a) Finn det A uttrykt ved a, b, c, x, y, z

$$detA = a \cdot det\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x\\ 0 & y & z\end{bmatrix} - b \cdot det\begin{bmatrix}c & 0 & 0\\ 0 & 0 & x\\ 0 & y & z\end{bmatrix}$$

$$= a \cdot (0 \cdot det\begin{bmatrix}0 & x\\ y & z\end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix}0 & x\\ 0 & z\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}) - b \cdot (c \cdot det\begin{bmatrix}0 & x\\ y & z\end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix}0 & x\\ 0 & z\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix})$$

$$= a \cdot 0 - b \cdot (c \cdot det\begin{bmatrix}0 & x\\ y & z\end{bmatrix})$$

$$= -b \cdot (-cxy)$$

$$= bcxy$$

b) For hvilke a, bc og x, y, z er A inverterbar?

En matrise A er inverterbar dersom $detA \neq 0$. Determinanten til A er 0 dersom b, c, y eller $z = 0$, så for alle verdier for a og z og verdier ulik 0 for b, c, y og x er matrisen inverterbar.