TMA 4110
Høsten 2019

Innlevering 1

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

1 Oppgaver til kap 1

$\boxed{1}$ Skriv om til polar form og regn ut:

a) $(\sqrt{3}+i)*(1-i)$
Setter $z=(\sqrt{3}+i)$ og $w=(1-i)$ og skriver om til polar form:

$$(\sqrt{3}+i)*(1-i)=rse^{i(\theta-\phi)}$$

Hvor $r=|z|$, $\theta=arg(z)$, $s=|w|$ og $\phi=arg(w)$
Finner rs:

$$\begin{aligned} rs &= |z|*|w| \\ &= \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}*\sqrt{1^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{4}*\sqrt{2} \\ &= 2*\sqrt{2} \end{aligned}$$

Finner så $\theta+\phi$:

$$\begin{aligned} \theta+\phi &= \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan\frac{1}{1} \\ &= \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Setter dette inn i $rse^{i(\theta-\phi)}$:

$$\begin{aligned} rse^{i(\theta-\phi)} &= 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{12}} \\ &= 2\sqrt{2}(\cos-\frac{\pi}{12}+i\sin-\frac{\pi}{12}) \\ &= \underline{\underline{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}} \end{aligned}$$

b) $\frac{(\sqrt{3}+i)}{(1-i)}$
Setter igjen $z = (\sqrt{3}+i)$ og $w = (1-i)$, med $r = |z| = \sqrt{4} = 2$, $s = |w| = \sqrt{2}$, $\theta = arg(z) = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ og $\phi = arg(w) = \frac{\pi}{4}$. Skriver om til polar form og regner ut:

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{3}+i)}{(1-i)} &= \frac{re^{i\theta}}{se^{i\phi}}\\ &= \frac{r}{s}(e^{i(\theta-\phi)})\\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} * (\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi))\end{aligned}$$

Regner ut $\theta - \phi$ og setter inn:

$$\begin{aligned}\theta - \phi &= \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4})\\ &= \frac{5\pi}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{2}} * (\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})) &= \frac{2}{\sqrt{2}} * (\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i)\\ &= \underline{\underline{\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i}}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ La $z = \frac{3\pi}{4}i$ og $w = -\frac{3\pi}{4}i$ være komplekse tall

a) Skriv tallet $e^z - e^w$ på polar form:

$$\begin{aligned}e^z - e^w &= e^{0+\frac{3\pi}{4}i} - e^{-\frac{3\pi}{4}i}\\ &= e^0 * e^{\frac{3\pi}{4}i} - e^0 * e^{-\frac{3\pi}{4}i}\\ &= (\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) - (\cos-\frac{3\pi}{4} + i\sin-\frac{3\pi}{4})\\ &= \cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} - i\sin-\frac{-3\pi}{4}\\ &= \cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} + i\sin-\frac{3\pi}{4}\\ &= \underline{\underline{2i\sin\frac{3\pi}{4}}}\end{aligned}$$

Her ville jeg sagt at $r = 2$ i og med at $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ og skrevet om til $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$, men ser her at dette blir feil, for da får jeg $2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \neq 2i\sin\frac{3\pi}{4}$, så jeg vet ikke helt hva jeg skal gjøre videre her.

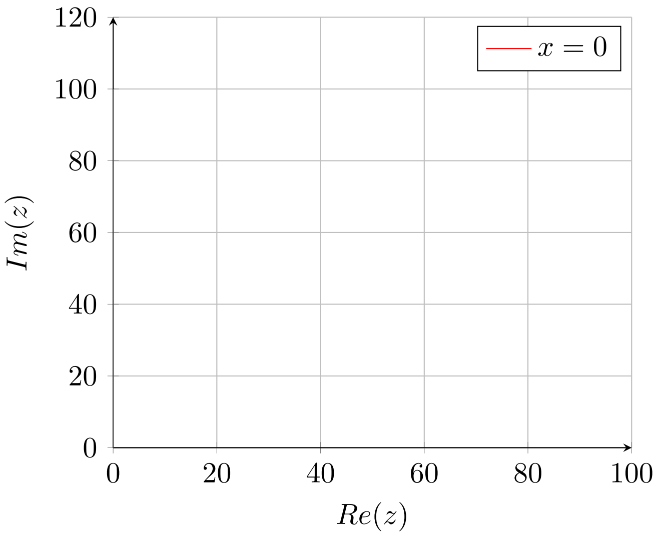
b) Skriv tallet $\frac{e^z}{e^w}$ på polar form:

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{e^w} &= e^{z-w} \\ &= e^z * e^{-w} \\ &= e^{\frac{3\pi}{4}i} * e^{\frac{3\pi}{4}i} \\ &= e^{(\frac{3\pi}{4}i)^2} \\ &= e^{\frac{6\pi}{4}i} \\ &= \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} \\ &= \underline{\underline{i\sin\frac{6\pi}{4}}}\end{aligned}$$

Her tror jeg at jeg kan skrive om til $e^{i\frac{6\pi}{4}}$ i og med at $\cos\frac{6\pi}{4} = 0$. Ønsker gjerne tilbakemelding på disse to deloppgavene.

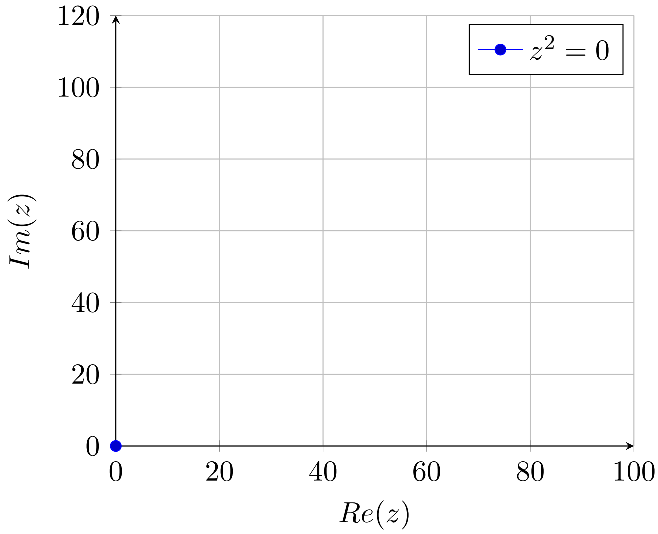
$\boxed{3}$ Skisser alle z i det komplekse planet som tilfredsstiller:

a) $\text{Im}\, z > 0$



Det synes ikke så godt, men det er en graf på den imaginære aksen her. Det jeg prøver å få frem er at alle z som tilfredsstiller er hele den imaginære aksen (med verdier > 0)

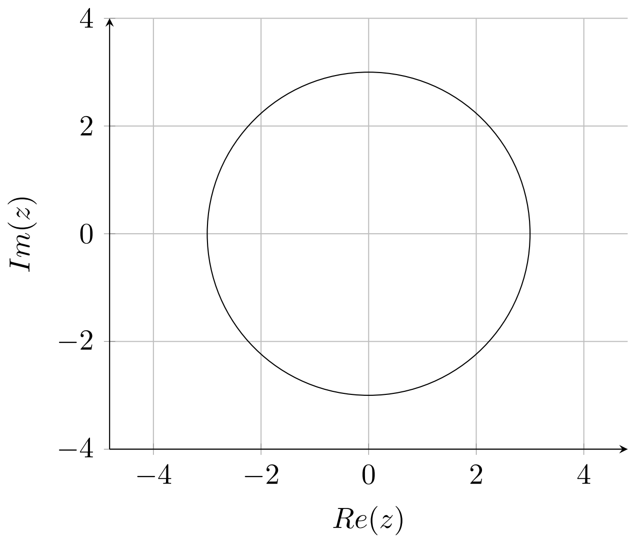
b) $z^2 = 0$



c) $z\bar{z} = 9$

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= 9 \\
\implies (a+bi)(a-bi) &= 9 \\
\implies a^2 + b^2 &= 9
\end{aligned}
$$

Dette er en sirkel med radius 3, plotter denne:



d) $z^6 = -1 + i\sqrt{3}$

$$z^6 = -1 + i\sqrt{3}$$

z kan skrives som:

$$z = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

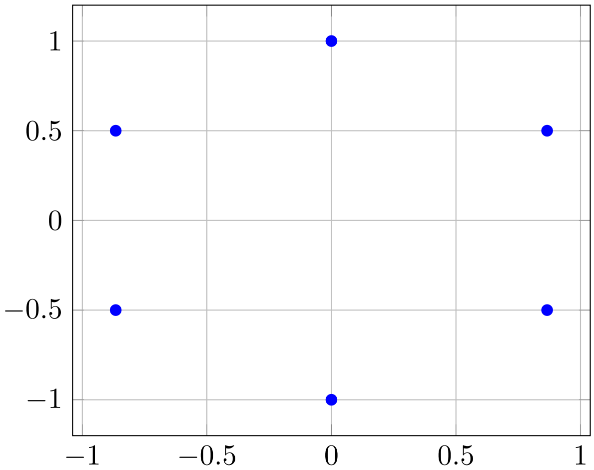
som gir meg:

$$\begin{aligned} e^{i(\pi+2k\pi)} &= -1+i\sqrt{3} \\ e^{i(\pi+2k\pi)\frac{1}{6}} &= (-1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{6}} \\ e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6})} &= (-1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

som gir meg verdiene til z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 og z_6:

$$\begin{aligned} z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} &= (0.866, 0.5) \\ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{6}} &= (0, 1) \\ z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}} &= (-0.866, 0.5) \\ z_4 = e^{i\frac{7\pi}{6}} &= (-0.866, -0.5) \\ z_5 = e^{i\frac{9\pi}{6}} &= (0, -1) \\ z_6 = e^{i\frac{11\pi}{6}} &= (0.866, -0.5) \end{aligned}$$

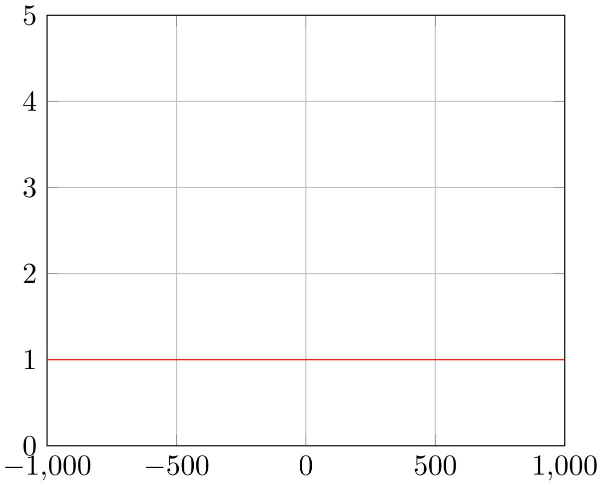
Der koordinatene er funnet ved hjelp av at alle punktene ligger på enhetssirkelen, som vil si en radius på 1, $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}$ og punktene er $(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}))$ hvor $0 \leq k \leq 5$



e) $z - \overline{(z-2i)} = 0$

$$\begin{aligned} z - \overline{(z-2i)} &= 0 \\ a + bi - (\bar{z} + 2i) &= 0 \\ a + bi - (a - bi + 2i) &= 0 \\ a + bi - a + bi - 2i &= 0 \\ 2i(b-1) &= 0 \\ b - 1 &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Dette vil si at alle z som tilfredstiller $z - \overline{(z-2i)} = 0$ ligger på linjen $y = 1$, hvor x kan være alle mulige vilkårlige verdier:



$\boxed{4}$ La z og w være komplekse tall. Vis at

a)

$$\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

Løser først venstresiden:

$$\begin{aligned}
\overline{(\frac{z}{w})} &= \overline{(\frac{a+bi}{c+di})} \\
&= \overline{(\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)})} \\
&= \overline{(\frac{ac-adi+bci+bd}{(c^2+d^2)})}
\end{aligned}$$

Her klarer jeg ikke komme lenger. Vet ikke hvordan jeg skal løse den siste. Ville ihvertfall løst den ferdig og vist at det blir det samme som:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{z}}{\overline{w}} &= \frac{(a-bi)}{(c-di)} \\
&= \frac{(a-bi)(c+di)}{(c^2+d^2)} \\
&= \frac{ac+iad-ibc+bd}{(c^2+d^2)}
\end{aligned}$$

Dersom jeg kan skrive $\overline{(\frac{ac-adi+bci+bd}{(c^2+d^2)})}$ som $\frac{ac+iad-ibc+bd}{(c^2+d^2)}$ har jeg bevist at $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

b)

$$(\overline{z})^n = \overline{z^n}$$

Bruker at en kan skrive komplekse tall på formen $re^{i\theta}$ og løser først venstresiden:

$$\begin{aligned}(\overline{z})^n &= (\overline{re^{i\theta}})^n \\ &= (re^{-i\theta})^n \\ &= r^n e^{-in\theta}\end{aligned}$$

Løser så høyresiden:

$$\begin{aligned}\overline{z^n} &= \overline{(re^{i\theta})^n} \\ &= \overline{r^n e^{in\theta}} \\ &= r^n e^{-in\theta}\end{aligned}$$

c)

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

Regner først ut venstresiden:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 + |z-w|^2 &= |a+c+bi+di|^2 + |a-c+bi-di|^2 \\ &= \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}^2 + \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}^2 \\ &= (a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2 \\ &= a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2 \\ &= 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2 \\ &= 2(a^2+b^2)+2(c^2+d^2)\end{aligned}$$

Regner så ut høyresiden:

$$\begin{aligned}2|z|^2+2|w|^2 &= 2\sqrt{a^2+b^2}^2 + 2\sqrt{c^2+d^2}^2 \\ &= 2(a^2+b^2)+2(c^2+d^2)\end{aligned}$$

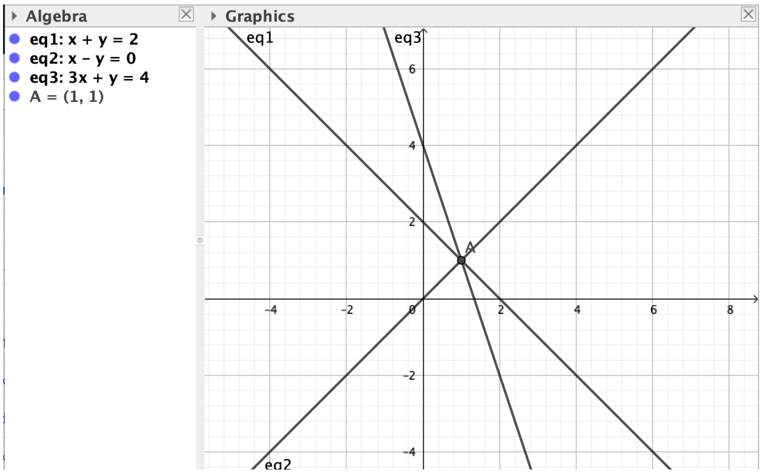
Jeg har nå bevist at venstresiden er lik høyresiden.

2 Oppgaver til kap 2

5 Løs likningssystemet:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \\ 3x + y &= 4 \end{aligned}$$

grafisk, dersom det er mulig.
Løser likningssystemet i GeoGebra:



Figur 1: Løsning av likningsettet i oppgave 1 kap 2

Ser at linjene skjærer hverandre i punktet $(1, 1)$ som vil si løsningen på likningsettet er $x = 1$ og $y = 1$

6 Er følgende to likningsett ekvivalente?

$$\begin{cases} x &= 1 \\ x + y &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Begynner med å eliminere x fra likning 2 ved å trekke fra likning 1:

$$\begin{aligned} x + y - x &= 2 - 1 \\ \implies y &= 1 \end{aligned}$$

Bytter ut likning 2 med dette:

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \\ x + y + z &= 3 \end{cases}$$

Eliminerer så x og y fra likning 3 ved å trekke fra likning 1 og 2:

$$\begin{aligned} x + y + z - x - y &= 3 - 1 - 1 \\ \implies z &= 1 \end{aligned}$$

Setter inn dette for likning 3 og får likningsettet:

$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1 \\ z & = 1 \end{cases}$$

Dette vil si at de to likningsettene er ekvivalente.

$\boxed{7}$ Er følgende to matriser radekvivalente?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad og \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Nei. De to matrisene er ikke rasekvivalente, da det ikke er noen operasjoner som kan gjøres på de slik at vi kan komme fra den ene til den andre.

$\boxed{8}$ La $(-1, 3)$, $(1, 3)$ og $(2, 6)$ være punkter i planet.

a) Finnes det et førstegradspolynom $f(x) = dx + e$ slik at de tre punktene ligger på f?

Nei. Det finnes ikke. Et førstegradspolynom er en rett linje og punktene ligger ikke på linje.

b) Finnes det er annengradspolynom $f(x) = ax^2 + bx + c$, slik at de tre punktene ligger på grafen?

Begynner med å sette opp:

$$\begin{cases} a * (-1)^2 + b * (-1) + c & = 3 \\ a * (1)^2 + b * (1) + c & = 3 \\ a * (2)^2 + b * (2) + c & = 6 \end{cases} \qquad = \qquad \begin{cases} a - b + c & = 3 \\ a + b + c & = 3 \\ 4a + 2b + c & = 6 \end{cases}$$

Setter så opp en matrise og reduserer:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right]
$$
$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{array}\right]
$$
$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \end{array}\right]
$$
$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]
$$
$$
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]
$$

Ser at $b = 0$ og $c = 2$. Bruker dette til å finne a:

$$
\begin{aligned}
a - b + c &= 3 \\
a - 0 + 2 &= 3 \\
a &= 1
\end{aligned}
$$

$f(x)$ som går igjennom alle tre punktene er $f(x) = x^2 + 2$

$\boxed{9}$ Se på likningssystemet

$$
\begin{cases} ax + by & = m \\ cx + dy & = n \end{cases}
$$

der a, b, c, d, m og n er konstanter, og $ad \neq bc$

a) Hvor mange løsninger har systemet?

Systemet har kun én løsning. Dette fordi systemet har ingen løsninger dersom de to linjene er parallelle og uendelig dersom de er like. De kan ikke være parallelle siden $ad \neq bc$ og de kan heller ikke være like da $ad \neq bc$.

b) Finn x og y uttrykt ved a, b, c, d, m og n.

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ ax &= m - by \\ x &= \frac{m - by}{a} \end{aligned}$$

Setter dette inn i likning 2:

$$\begin{aligned} c(\frac{m - by}{a}) + dy &= n \\ \frac{cm}{a} - \frac{cby}{a} + dy &= n \\ \frac{cm}{a} + y(d - \frac{cb}{a}) &= n \\ y &= \frac{n - \frac{cm}{a}}{d - \frac{cb}{a}} = \frac{na - cm}{da - cb} \end{aligned}$$

Setter dette inn for y i $x = \frac{m-by}{a}$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m - by}{a} \\ x &= \frac{m - \frac{na-cm}{da-cb}}{a} = \frac{adm - an - bcm + cm}{a(da - cb)} \end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Løs likningssystemene

a)

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z & = -38 \\ 4x - 3y + 8x & = -26 \\ -2x + 4y - 2z & = 17 \end{cases}$$

Setter opp matrisen og eliminerer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & -38 \\ 4 & -3 & 8 & -26 \\ -2 & 4 & -2 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & -38 \\ 0 & 5 & -10 & 50 \\ -2 & 4 & -2 & 17 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & -38 \\ 0 & 5 & -10 & 50 \\ 0 & 0 & 7 & -21 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & \frac{9}{2} & -19 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Ser nå at $z = -3$, bruker dette til å finne x og y.

$$\begin{aligned} y - 2 * -3 &= 10 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2 * 4 + \frac{9 * -3}{2} &= -19 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} x + 3y + 6z & = 4 \\ 2x + 8y + 16z & = 8 \end{cases}$$

Setter opp matrisen og eliminerer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 16 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Setter opp en parametisering for $x = 4$, $y = -2z$ og $z = s$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ -2s \\ s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{cases} (1+i)z - w & = i \\ (1-i)z + (1+i)w & = 1 \end{cases}$$

Setter opp en matrise og eliminerer:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & i \\ 1-i & 1+i & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1+i & i(1-i) \\ 2 & 2i & 1+i \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1+i & i(1-i) \\ 0 & 1+i & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1+i & i(1-i) \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ser nå at $w = 0$, bruker dette til på finne z:

$$\begin{aligned} 2z + (-1+i)w &= i+1 \\ 2z + 0 &= i+1 \\ z &= \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{cases} 2z + iw + (5-3i)u & = 10 \\ 4z + 2iw + (10-2i)u & = 20+16i \\ 2iz - w + (4+6i)u & = 2+12i \end{cases}$$

Setter igjen opp en matrise og eliminierer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 4 & 2 & 10-2i & 20+16i \\ 2i & -1 & 4+6i & 2+12i \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 4 & 2 & 10-2i & 20+16i \\ 0 & 0 & 1+i & 2+10i \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 4 & 2 & 10-2i & 20+16i \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 2 & i & 5+i & 10+8i \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 0 & 0 & 4i & 8i \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ser at likningssystemet har uendelig mange løsninger og setter $w = t$ for å parametisere:

$$\begin{bmatrix} z \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6i-ti}{2} \\ t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{C}$$