TMA4110 - Notater 2019

Sander Lindberg

Contents

1 Komplekse tall

$Z = a + bi \quad Z \in \mathbb{C}$

Skal bli kvitt at $x^2 + 1 = 0$ ikke har noen løsning.

Vi kan nå skrive $x = \pm\sqrt{-1}$

Finner opp et nytt tall: $i = \sqrt{-1} \implies i^2 = -1$

i kalles den *imaginære enheten*

Example 1.1

Løs $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b, c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-2 * 1 * 2}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-1 \pm 2i}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

Formel 1.1

1. $R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ kalles "lengden", "modulus" eller "absolut verdi".
2. $arg(z) = \theta = \arcsin\frac{b}{|z|} = \arccos\frac{a}{|z|} = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi, a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, a = 0, b > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, a = 0, b < 0 \end{cases}$

Kalles "argumentet" til z.

Example 1.2

Gitt $z = -1 + i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$, finn $|z|$, $|w|$, $arg(z)$ og $arg(w)$:
$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$|w| = \sqrt{4} = \sqrt{2}$
$arg(z) = \frac{3\pi}{2}$ $(\arctan\frac{1}{-1} + \pi)$
$arg(w) = \frac{\pi}{3}$ $(\arctan\sqrt{3})$

1.1 Polar form

Starter med å se på noen geometriske rekker:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \frac{x^n}{n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

Disse kan settes sammen til Eulers formel:

Definition 1.1: Eulers Formel

$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} \dots$

Vi kan nå skrive z på polarform:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

1.2 Hvorfor komplekse tall?

Theorem 1.1: Analysens fundamentalteorem

Polynomet $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} \dots a_1 z + a_0$ kan allid faktoriseres $P(z) = \prod_1^n (z - z_i)$ der z_i er løsninger av likningen $P(z) = 0$

Example 1.3

Faktoriser $z^2 + z + 1$
$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

En polynomlikning har alltid n løsninger

Example 1.4

$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z-1)^3$
Sier at $z = 1$ er en rot med multiplisitet 3.

Spesialtilfelle:

Example 1.5

Finn alle z som tilfredsstiller $z^n = -1$
Komplekse n-te røtter:
Skal løse $z^n = w$. w er kjent, skal finne z.

$$
\begin{aligned}
z^n &= w = re^{i\theta} = re^{o(\theta+2k\pi)} \\
&\implies z = \sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{e^{i(\theta+2k\pi)}} \\
&= \sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}}, \quad 0 \leq k \leq n-1
\end{aligned}
$$

2 Lineære systemer og gausseliminasjon

Theorem 2.1

Et lineært likningsystem har enten
1. Entydig løsning
2. Ingen løsning
3. Uendelig mange løsninger

Example 2.1: Linkingssystem med uendelig mange løsninger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dette ser ut som tre likninger, men det er egt bare 2:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 4 \\ y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Vi har to likninger med tre ukjente, som ikke går an å løse. Vi setter derfor inn frie variabler. (finne en parametisering)
1. Velg $z = s$
2. Skriv de andre ved hjelp av s (x og y)
3. Skriv likningene på vektorform

Velger $z = s$, da får vi $y = 2 - 2s$ og $x = -2 + s$. På vektorform blir dette:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+s \\ 2-2s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot s$$

2.1 Vektorer

En vektor $\underline{x}$ skrives på formen $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$

Formel 2.1: To operasjoner på vektorer

Addisjon:

$$\underline{x}+\underline{y}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{bmatrix}$$

Skalarmultiplikasjon:

$$k\cdot\underline{x}=k\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\\kx_3\end{bmatrix}$$

Formel 2.2: Skalarprodukt og vektorprodukt

Skalarprodukt:

$\underline{x}\cdot\underline{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\ldots$

Vektorprodukt:

$$\underline{x}\times\underline{y}=\begin{bmatrix}x_2y_2-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_2y_1-x_1y_2\end{bmatrix}$$

2.1.1 Lineærkombinasjon

En lineærkombinasjon av vektorer skrives på formen: $\underline{x_1}k_1+\underline{x_2}k_2+\cdots+\underline{x_n}k_n$

Det er altså en vektor du får ved å legge sammen to vektorer multiplisert med en skalar.

3 Vektorlikninger

Litt repitisjon:

Søylevektor: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{bmatrix}$$

Lineærkombinasjon av $\underline{x}$ og $\underline{y}$: $a\underline{x} + b\underline{y}$.

$\underline{x}$ og $\underline{y}$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$

3.1 Linære spenn

Definition 3.1: Lineært spenn

$Sp\left\{\underline{x}, \underline{y}\right\}$ kalles det *lineære spennet*. $Sp\left\{\underline{x}, \underline{y}\right\} = \left\{a\underline{x} + b\underline{y} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$
Det lineæret spennet er altså mengden av alle linærkombinasjoner til $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

Example 3.1

Hva er $Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$?

Vet at $Sp\left\{\underline{x}\right\} = Sp\left\{a\underline{x}\right\}$ som i mitt tilfelle er $Sp\left\{a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Som tilsvarer x-aksen. Hva er $Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$?

Bruker samme metode som sist: $Sp\left\{a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ Som er xy-planet.

3.2 Linkningssett

Vi er nå interessert i å løse likningsett, f.eks:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ x + 5y + 9z = 33 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Setter opp som en matrise og gausseliminerer for å finne løsning:

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{38}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Ser at $x = 7$, $y = -2$ og $z = 4$. Setter inn i det originale utrykket for å sjekke:

$$
\begin{aligned}
7 + 2 \cdot -2 - 2 \cdot 4 &= -5 \\
7 + 5 \cdot -2 + 9 \cdot 4 &= 33 \\
2 \cdot 7 + 5 \cdot -2 - 4 &= 0
\end{aligned}
$$

Jeg har funnet riktige verdier for x, y og z.

Definition 3.2: Matriser

En mxn matrise skrives på formen:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{mn} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}
$$

Denne matrisen har altså m rader og n kolonner.

Definition 3.3: Søylevektorer og radvektorer

Hvis $\underline{v}$ er en søylevektor, kan den skrives på formen: $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_n \end{bmatrix}$

En radvektor er basically bare en liggende søylevektor: $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$

Formel 3.1: Fremgangsmåte for vektorlikninger

Dette er vel egt ikke en formel, men det går fint. Her kommer en oppskrift på hvordan løse vektorlikninger:

1. Sett opp de forskjellige søylevektorene som kolonner i en matrise.
2. Gausseliminer.

Ikke så veldig mye verre enn det egt.

Formel 3.2: Gange matrise med vektor

Igjen, ikke formel, men vet ikke hva jeg skal putte det under.
(Har hatt et par glass vin når jeg skriver dette, så ikke hat meg om noe er feil <3)

Gitt $A = \begin{bmatrix} \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_3} & \dots & \underline{v_n} \end{bmatrix}$, hvor A er en mxn matrise og $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Så er $A \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \dots + x_n v_n \in \mathbb{R}^m$

Example 3.2: Matrise ganger vektor

Gitt $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ og $\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ finn $A \cdot \underline{x}$

Setter opp og ganger:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Theorem 3.1

$A(\underline{v} + \underline{w}) = A\underline{v} + A\underline{w}$
$A(c\underline{v}) = c(A\underline{v})$

3.3 Enhetsvektorer

Enhetsvektorer er vektorer som har én 1er og resten 0. De finnes i alle $\mathbb{R}^n$.

Enhetsvektorer i $\mathbb{R}^2$: $\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Enhetsvektorer i $\mathbb{R}^3$: $\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Samme mønster for $\mathbb{R}^n$

3.4 Vektorlikninger

Definition 3.4: En vektorlikgning

En vektorlikning er på formen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{mn} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix}$$

Vi skriver den som regel om til en matrise:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

4 Forelesning 16.10.19

I dag:

- Oppsummere projeksjon
- ”Anvendelse av projeksjon”
- Kapittel 10.

Formel 4.1

$$P_{\underline{v}} = \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{v}, \underline{v} >} \cdot \underline{v}$$
$$\underline{\mathbb{R}^n} :< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{v}^T \underline{w}$$
$$\underline{\mathbb{C}^n} :< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{v}^* \underline{w}$$
$$\underline{C([a,b])} :< f, g >= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx$$

4.1 Fourier-analyse(Anvendelse)

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \ldots\}$ er en ortiginal basis. Tenker at vi har en funksjon som går som et signal (ujevne bølger opp og ned, radiobølger f.eks). Har lyst til å finne ut av hvordan bølgene oppfører seg. Og det var det? Han ville visst bare nevne det.

5 Egenverdier og egenvektorer

Det vi har jobbet med til nå er linærtransformasjoner, alle lineærtrans kan representeres som martriser. F.eks $f_A(\underline{v}) = A\underline{v}$.

Hva om $f_A(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$, for $\lambda \in \mathbb{R}$? Alstå, vi får bare et tall ganget med en vektor? Kaller λ for egenverdi og $\underline{v}$ for egenvektor.

Example 5.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, e_1, e_2, \underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{e_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\underline{v}$$

Ser at det er kun en av vektorene ($\underline{v}$) som gir en skalering. Vi har lyst til å finne akkurat de tallene som gir skalering og de vektorene detgjelder.

Definition 5.1

La A være en nxn matrise, $\underline{v}$ være en nx1 vektor og λ være en skalar.
Dersom $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$, sp kalles λ en egenverdi av A og $\underline{v}$ en egenvektor av A, tilhørende λ

Hva om $\underline{w} = c\underline{v}$?

Da er $A\underline{w} = A(c\underline{v}) = cA\underline{v} = c\lambda\underline{v} = \lambda c\underline{v} = \underline{w}$.

Det følger at $\underline{w}$ også er en egenvektor til A med hensyn til λ.

Hva om $\lambda = 0$? Det betyr at $A\underline{v} = \underline{0}$ Som vil si at kolonnene i A *ikke* er lineært uavhengige. Som videre vil si at A ikke har noen invers. Determinanten er også 0.

Theorem 5.1

$\lambda = 0$ er en egenverdi til $A \iff A$ ikke er invertibel.

Theorem 5.2

La $T : V \to V$ (vi har en kvadratisk matrise) være en lineærtransformasjon. (Som også betyr at V er et vektorrom), og la $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$ være egenverdier til T. Da er de tilhørende egenvektorene $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_t}$ lineært uavhengige.

Theorem 5.3

La $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon representert ved nxn matrise A. La A ha n distinkte egenverdier.
Da utgjør de tihlørende egenvektorene $\underline{v_1}, \underline{v_2} \ldots, \underline{v_n}$ en basis for V.

Example 5.2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Anta en linje gjennom origo ($y = x$) da er denne matrisemultiplikasjonen en speiling over denne linjen.

Si vi har en vektor $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ganger vi denne med A får vi den samme vektoren ut igjen, med egenverdi 1. ($A\underline{v_1} = 1\underline{v}$)

Har vi linjen $y = -x$ og vektoren $\underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ får vi $A\underline{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\underline{v_3}$ (Egenvedien er -1)

Definition 5.2

La λ være en egenverdi til A med tilhørende egenvektor $\underline{v}$, da kalles mengden $Sp\{\underline{v}\}$ egenrommet til λ. Nullvektoren er i egenrommet, selvom nullvektoren ikke er en egenvektor. (super forvirrende :p)

5.1 Metode for å finne egenverdi og egenvektor

$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \implies A\underline{v} - \lambda\underline{v} = 0.$

Vet at $AI_n = A$ og $\underline{v}I_n = \underline{v}$

Ved hjelp av dette kan vi finne $A\underline{v} - \lambda\underline{v} = 0 \implies A\underline{v} - \lambda I_n\underline{v} = 0 \implies (A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0} \implies A - \lambda I_n$ ikke er invertibel.

Dette impliserer også et $det(A - \lambda I_n) = 0$ Videre, $\underline{v}$ ligger i nullrommet til A fordi vi ganget med et matrise og fikk $\underline{0}$

Theorem 5.4

La A være en mxn matrise.
Da:

- Egenverdiene til A er løsningene λ til $det(A - \lambda I_n) = 0$
- λ egenverdi til A, så er egenvektorene $\underline{v}$ til λ løsningene til $(A - \lambda I_n)\underline{v} = 0$

God, skjønner ingenting av dette her :p

Definition 5.3

Dimensjonen til egenrommet til λ kalles den geometriske multiplisiteten til λ.

Example 5.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Vil finne egenverdiene.

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_2) &= (1-\lambda)(-3-\lambda) - 12 \\ &= -3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 12 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \\ &\implies \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-15)}}{2} \\ &\implies \lambda = -1 \pm 4 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -5$$

Vi kan nå finne egenvektorene til A.

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A + 5I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\underline{v_1}$ er løsningen på $A\underline{v_1} = 0$ og $\underline{v_2}$ er løsningen på $A\underline{v_2} = 0$

Egenrommet: $\lambda = 3$ er $Sp\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ og til $\lambda = -5$ er $Sp\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

Example 5.4

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -8-\lambda & 0 & 6 \\ 12 & 4-\lambda & -6 \\ -20 & 0 & 12-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I_3) &= (-8-\lambda)(4-\lambda)(14-\lambda) + (4-\lambda)\cdot 20 \cdot 6 = 0 \\ &= (4-\lambda)((-8-\lambda)(14-\lambda)+120) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0 \\ &\implies \lambda_1 = 4, \quad \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} \\ &\implies \lambda_2 = 3+1 = 4, \quad \lambda_3 = 3-1 = 2 \end{aligned}$$

Har lyst til å vinne egenvektorer:

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 12 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 6 \\ 12 & 2 & -6 \\ -20 & 0 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Kan også bruke metoder fra tidligere (frie variabler) for å finne nullrommet (som er egenvektorene) (tror jeg).
Egenrommet til $\lambda = 4$ har dimensjon 2 og til $\lambda = 2$ har dimensjon 1.

6 Forelesning 17.10.19

6.1 Egenverdier og egenvektorer

$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$, der A er en mxn matrise.

Finne λ: Løs $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Finne $\underline{v}$: Gitt $\lambda, \underline{v} \in Null(A - \lambda I_n)$

Geometrisk multiplisitet til λ er dimensjonen til egenrommet til λ.

Example 6.1

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$$

Da er:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

7 Eksistens av egenverdier og egenvektorer

Lurer på:

- Hvor mange egenverdier kan en matrise ha?
- Finnes det alltid egenvektorer ($\underline{v}$) og evgenverdier (λ)?
- Hva er dimensjonene til egenrommene? (Generelt, kan alltid regne det ut.)
- Kan vi finne en basis for $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ bestående av egenvektorer?

Example 7.1: Generell egenverdi 2*2 matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\implies det(A - \lambda I_n)$$
$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$
$$= \lambda^2 - a\lambda - d\lambda + ad - bc$$

Hvor mange løsninger har et generelt polynom?

Theorem 7.1: Algebraens fundamentalteorem

Dersom vi har en ligning $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ kan den skrives som $a_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ hvor x_i er løsninger av $f(x) = 0$
$\implies \forall a_i \in \mathbb{R}$ eller $\forall a_i \in \mathbb{C}$, finnes det n (ikke nødvendigvis unike) komplekse løsninger x_i av $f(x) = 0$.
Dersom faktoren $(x - x_i)$, for en gitt i forekommer m ganger, sier vi at x_i har multiplisitet m.

Theorem 7.2

En kompleks nxn matrise A har alltid n egenverdier, når vi teller med multiplisiteten. (Hvis en egenverdi oppstår to ganger, teller vi dette som 2).

Definition 7.1: Algebraisk multiplisitet

Dersom λ er en rot av $det(A - \lambda I_n) = 0$ og har multiplisitet m, så kaller vi m den algebraiske multiplisiteten til λ.

Theorem 7.3

En reell matrise A (nxn) trenger ikke nødvendigvis ha noen reelle røtter (egenverdier). Dersom n er et oddetall, vil vi *alltid* ha minst én reell egenverdi.

Theorem 7.4

La λ være en kompleks egenverdi av A.

Da er også $\bar{\lambda}$ en egenverdi. Hvis $\underline{v}$ egenvektor til λ, så er $\underline{\bar{v}}$ egenvektor til $\bar{\lambda}$

Example 7.2

La $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Hva er egenverdien(e) og egenvektor(ene)?
Egenverdiene er gitt ved $det(A - \lambda I_n) = 0$:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_n) &= det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\ &= det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\ &= -\lambda \cdot -\lambda - -1 \cdot 1 = 0 \\ &= \lambda^2 + 1 = 0 \\ &\implies \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i \end{aligned}$$

Egenvektorer:

$$\begin{aligned} A - iI_2 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & -1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$A + iI_2 = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Vi ser at $\lambda_1 = \bar{\lambda_2}$ og $\underline{v_1} = \underline{\bar{v_2}}$

Example 7.3

Vi har $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Har lyst til å finne egenvektorer og egenverdier.

$$
\begin{aligned}
A - \lambda I_3 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&\implies det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + (3-\lambda) \\
&= (3-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \\
&\implies \lambda_1 = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \\
&= \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \\
&\implies \lambda_2 = 1 + i \quad \lambda_3 = 1 - i
\end{aligned}
$$

La oss nå finne egenvediene:

$$
\begin{aligned}
A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vi har to pivotkolonner, aka 1 fri variabel. Vi får $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Videre:

$$
\begin{aligned}
A - (1+i)I_3 = \begin{bmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \\
&\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \implies \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Example 7.4

Vi har $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$
$$\implies det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$
$$\implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dimensjonen til egenrommet til $\lambda = 1 = 1$

Theorem 7.5

Egenrommet til λ har dimensjon ≥ 1 og geometrisk multiplisitet $\leq$ algrebraisk multiplsitet

Theorem 7.6

Egenverdiene til A utgjør en basis hvis og bare hvis algebraisk multiplisitet = geometrisk multiplisitet for alle egenverdier.

8 Forelesning 21.10.19

8.1 Oppsummering kap 10

A nxn matrise, $\underline{v} \neq 0$ slik at $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$; Egenverdi: λ og egenvektor $\underline{v}$

Finner λ ved å løse $det(A - \lambda I_n) = 0$

Finner $\underline{v}$ til λ ved å finne $\underline{v} \in Null(A - \lambda I - n)$

Egenrommet til λ er $Null(A - \lambda I_n)$

Finnes alltid n egenverdier til λ

Finnes minst en $\underline{v}$ per λ

Dersom algebraisk multiplisitet = geometrisk multiplisitet, for alle $\lambda \implies \underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}$ basis.

8.2 Diagonalisering

Definition 8.1

A nxn matrise er diagonaliserbar dersom det finnes en diagonal matrise D ig invertibel matrise P slik at $A = PDP^{-1}$

9 Diagonalisering

Vi har $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$. Hva er D^5?

$D^5 = D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D$.

$D^2 = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & (-5)^2 \end{bmatrix} \implies D^5 = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-5)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -3125 \end{bmatrix}$

Hva om vi har $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, hva blir A^5? Det er vanskelig. Vi vil skrive $A = PDP^{-1}$. $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$ som vil si vi kan skrive $A^5 = PD^5P^{-1}$.

Fra tidligere eksempel (tydeligvis) har vi: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -5, \quad \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Vi hadde også systemene: $A\underline{v_1} = \lambda \underline{v_1}, \quad A\underline{v_2} = \lambda \underline{v_2}$. Vil skrive disse som et system.

$P = [\underline{v_1} \quad \underline{v_2}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Kan skrive $A\underline{v_1} = \lambda_1 \underline{v_1} + 0\underline{v_2}, \quad A\underline{v_2} = \lambda \underline{v_2} + 0\underline{v_1}$

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

Definition 9.1

En nxn matrise A er diagonaliserbar dersom det eksisterer en invertibel P og diagonal D slik at $A = PDP^{-1}$

Example 9.1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -5$, $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
$A\underline{v_1} = \lambda_1 \underline{v_1} + 0 \cdot \underline{v_2}$
$A\underline{v_2} = 0 \cdot \underline{v_2} 0 \lambda_2 \underline{v_2}$

Dette vil si:

$A[\underline{v_1 v_2}] = [\underline{v_1} \quad \underline{v_2}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$
$\implies A = PDP^{-1}$

Theorem 9.1

nxn matrise A er diagonaliserbar $\iff$ A har n lineært uavhengige egenvektorer.

Proof 9.1: Theorem 9.1

Anta A har n lineært uavhengige egenvektorer $\underline{v_1},\dots,\underline{v_n}$. Da vet vi at vi har n egenverdier (trenger ikke være unike) slik at $A\underline{v_i} = \lambda_i \underline{v_i} \forall i$

Da følger det at $\begin{bmatrix} A\underline{v_1} & A\underline{v_2} & A\underline{v_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \underline{v_1} & \lambda \underline{v_2} & \lambda \underline{v_n} \end{bmatrix}$ som er det samme som $A\begin{bmatrix} \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\implies A = PDP^{-1} \implies A$ er diagonaliserbar.

Anta nå A er diagonaliserbar. Det vil si det finnes D og P slik at $A = PDP^{-1}$. Da kan vi gange med P på begge sider: $AP = PD$

$\implies \begin{bmatrix} A\underline{k_1} & A\underline{k_2} & \dots & \underline{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\underline{k_1} & a_2\underline{k_2} & \dots & a_n\underline{kn} \end{bmatrix}$

$\implies A\underline{k_i} = a_i\underline{k_i} \forall i \implies a_i$ egenverdi for $\underline{k_i}$ som er egenvektor for A.

P invertibel $\implies \underline{k_1},\underline{k_2},\dots,\underline{k_n}$ er lineært uavhengige $\implies \underline{k_1},\dots,\underline{k_n}$ lineært uavhengige egenvektorer til A.

Theorem 9.2

Dersom nxn matrisen A har n distinkte egenverdier, så er A diagonaliserbar.

Theorem 9.3

A nxn matrise. Da er A diagonaliserbar hvis og bare hvis algebraisk multiplisitet = geometrisk multiplisitet for alle λ

Merk: Reell matrise A kan ha kompleks P og D slik at $A = PDP^{-1}$

Example 9.2

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

A har egenverdier $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ og $\lambda_3 = 4$, med egenvetorer $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, til $\lambda = 2$, $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ til $\lambda = 4$.

Kan sette opp

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ hvor tallene som ikke er 0 er egenverdiene.

$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ hvor kolonnene er egenvektorene.

Da er $A = PDP^{-1}$.

Example 9.3

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Har komplekse egenverdier $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -1$. Egenvektorer: $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ og $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Egenverdiene gir oss en diagonalmatrise $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ og egevektorene gir oss $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \frac{-2i}{4} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Example 9.4

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Finner egenverdier og egenvektorer:

$$\begin{aligned} A - \lambda I_2 &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &\implies det(A - \lambda I_1) = (1-\lambda)^2 = 0 \\ &\implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Algebraisk multiplisitet er 2, mens geometisk er 1. A er ikke diagonaliserbar.

Har en matrise $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og $b \neq 0$.

$det(A - \lambda I_2) = (a-\lambda)^2 + b^2 = 0 \implies \lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib.$

Ser på $A - (a+ib)I_2 = \begin{bmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -ib & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$

$r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Theorem 9.4

A reell 2x2 matrise med kompleks egenverdi $\lambda = a - ib$ (eller $\lambda = a + ib$) hvor $b > 0 \in \mathbb{R}$. La $\underline{v} \in \mathbb{C}^2$ være egenvektor til λ da kan vi skrive $A = PCP^{-1}$, hvor $P = \begin{bmatrix} Re\underline{v} & Im\underline{v} \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

Example 9.5

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
det(A - \lambda I_2) &= (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \\
&\implies \lambda = [2-i,\, 2+i] \\
\\
A - (2-i)I_2 &= \begin{bmatrix} -i+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \\
&\implies \underline{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Re(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Im(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\implies P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

10 Forelesning 24.10.19

$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$T_\theta \cdot T_\theta = T_{2\theta}$

Example 10.1

Lol, dette var samme eksempel som det forrige, jaja, skirver det opp på nytt. :)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Skriv A som PCP^-1
Strategi:

1. Finn egenverdiene λ
2. Finn egenvektorene $\underline{v}$
3. finn r og θ
4. Sett opp $A = PCP^-1$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_2) &= (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 5 \\ &\implies \lambda = [2-i,\ 2+i] \end{aligned}$$

Vi har nå $a = 2$ og $b = 1$
Finner egenvekorer:

$$\begin{aligned} A - (2-i)I_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (2-i) & 0 \\ 0 & (2-i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \\ &\implies \underline{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies Re\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Im\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finner r og θ

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26.5\text{grader} \end{aligned}$$

$$(\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}})$$

Finner nå A?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$A\underline{v} = PCP^{-}1\underline{v} = PC\underline{u} = PDT_\theta\underline{u} = PD\underline{u}_\theta = P\underline{u}_\theta = A\underline{v}$

11 Symmertiske matriser

Definition 11.1

En nxn matrise A er symmetrisk dersom $A = A^T$

Example 11.1: Symmetrisk $3x3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -5 & 2 & -13 \\ 7 & -13 & 3 \end{bmatrix} = A^T$$

Er symmetrisk. Hvis vi speiler elementene om diagonalen, får vi samme matrise.

Example 11.2: Symmetrisk $2x2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A - \lambda I_2 &= \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix} \\ det(A-\lambda I_2) &= (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0 \\ &= \lambda^2 - (a+c)\lambda - ac - b^2 \end{aligned}$$

$$\implies \lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}$$

Er utrykket under roten større enn 0?

$$\begin{aligned} (a+c)^2 - 4ac + 4b^2 &= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 \\ &= (a-c)^2 + 4b_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Dersom $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$ får vi en dobbelrot.
Dersom $(a-c)^2 + 4b^2 > 0$ for vi to unike egenverdier.
Hvis vi har dobbelrot får vi:

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} P^{-}1 = \lambda P I_2 P^{-}1 \implies A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Theorem 11.1

A symmetrisk nxn matrise. Da har A n reelle egenverdier og A er diagonaliserbar.

Example 11.3

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

være en symmetrisk matrise, vet ikke helt hva oppgaven egt er, men skriver ned det han gjør.

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_3) &= (1-\lambda)(6-\lambda)^2 + 16 - (4(6-\lambda(6-\lambda))) + (1-\lambda) \\ &= \lambda^3 - 13\lambda^2 + 36\lambda \\ &\implies \lambda = [0,\ 4,\ 9] \\ \underline{v_1} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan nå skrive $A = PDP^-1$ der

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenvektorene er også ortogonale! Dette er sant for alle symmetriske matriser (der vi har distinkte egenvektorer)

Theorem 11.2

A symmetrisk nxn matrise. Da er egenvektorene tilhørende forskjellige egenverdier ortogonale.

Definition 11.2

En nxn matrise A kalles *hermitsk* dersom $A = A^*$ (kompleks konjugert og transponert)

12 Markov kjeder

Example 12.1

Anta barna i barnehagen holder emd enten Manchester United, Liverpool eller Arsenal. Barna er såpass små at de ikke har lært seg at det ikke er lov til å bytte favorittklubb.
Sannsynligheten for at et barn fortsatt heier på MU etter et år er 50%. Sannsynligheten for at de bytter til Liverpool er 30%, 20% til Liverpool. Hvis de heier på Liverpool et år, er sannsynligheten 20% for at de bytter til MU, 80% for at de fortsetter med Liverpool og 0% for at de bytter til Arsenal.
Hvis de heier på Arsenal et år er det 30% for at de bytter til MU, 30% til L og 40% til L. Kan sette opp som en tabell:

fra	MU	L	A	Til
	50	20	30	MU
	30	80	30	L
	20	0	40	A

Kan også sette opp som matrise:

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Får en startvektor $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

Hva er fordelingen etter 1 år? Det blir startvektor ganger matrisen $M = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.45 \\ 0.18 \end{bmatrix}$

Hva med etter 2 år? Det blir $M^2 \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 0.329 \\ 0.525 \\ 0.146 \end{bmatrix}$

Etterhvert vildu kommer til en "Likevektsstilling" som ser ut som $q = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$, slik at $Mq = q$. Da er q egenvektor for M med egenverdi $\lambda = 1$

Definition 12.1

En vektor $\underline{x}$ hvor alle koordinatene er positive reelle tall og koordinatene summerer til 1 (elementene i kolonnene), kalles en sannsynlighetsvektor.

Definition 12.2

En matrise M hvor alle kolonnene er en sannsynlihetsvektor, kalles M en stokastisk matrise.

Definition 12.3

Gitt M og x_0, da kalles følgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ hvor $x_i + 1 = M \cdot x_i$ en Markov kjede.

Theorem 12.1

En stokastisk matrise har alltid egenverdi $\lambda = 1$

Proof 12.1

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ M_{31} & M_{32} & \dots & M_{3n} \end{bmatrix}$$

Hver kolonne kummerer til 1.

$$M^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{32} \\ M_{31} & M_{23} & \dots & M_{33} \end{bmatrix}$$

M^T har egenverdi $\lambda = 1$ og egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$ Vi får da $M^T \underline{v} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$

$$det(M^T - \lambda I_n) = det(M^T - \lambda I_n^T)$$
$$= det((M - \lambda I_n)^T)$$

Generelt: $\det A = \det A^T$

$$= det(M - \lambda I_n)$$
$$\implies \lambda = 1 \text{ egenverdi for } M$$

Definition 12.4

Dersom $\underline{q}$ er en egenvektor til $\lambda = 1$ for stokastisk matrise M, og $\underline{q}$ er sannsynlighetsvektor, så kalles $\underline{q}$ for en *likevektsvektor*

Merk:

Gitt vektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, så er

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \underline{x}$$

en vektor med koordinatsum lik 1

Example 12.2

Fortsetter med fotballag-eksemepelt fra over.
Har

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Kan finne

$$\begin{aligned} M - I &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ Ganget med 10 og gausset.} \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \implies \underline{v} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \implies q \end{aligned}$$

Definition 12.5

En stokastisk matrise M kalles *regulær*, dersom det finnes en $k \geq 1$ slik at alle elementer i $M^k > 0$

Theorem 12.2

M regulær stokastisk matrise. Da har M unik likevektor $\underline{q}$ og uansett startvektor x_0, så vil Markovkjeden konvergere mot $\underline{q}$.

13 System av differensiallikninger

(Nome er tilbake, ikke sikkert det blir bra notater videre.)

Først: Litt om vektorfunkjsoner:

13.1 Vektorfunksjoner

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ .. \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \dots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$$

$\underline{x}'(t)$ gir tangentvektoren til posisjonen til fluen.

$||\underline{x}'(t)||$ kalles "banefart".

Example 13.1

$\underline{x}(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$
Her kan vi tenkte på t som tiden en flue bruker på å flytte seg, og output er hvor langt den har bevegd seg.

Dersom $\underline{x}(t)$ er deriverbar, og $||\underline{x}'(t) \neq 0||$ er $\underline{x}(t)$ glatt. For eksempel er $\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$ *ikke* glatt.

$\underline{x}(t), \underline{x_1}(t), \ldots, \underline{x_n}(t)$ er lineært uavhengig, dersom de er lineært uavhengige for alle t.

13.2 Systemer av differensiallikninger

Example 13.2

$\underline{x}'(t) = 2\underline{x}(t) + \underline{y}(t)$

$\underline{y}'(t) = \underline{x}(t) + 2\underline{y}(t)$
Liker å skrive systemet som:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}'(t) \\ \underline{y}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave: Finn en $\underline{y}$

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{y}$$

$$\implies \underline{y_1} = 3e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fun fact: Derosm $\underline{x}$ er egenvektor til A, med egenverdi λ løser $\underline{y}(t) = e^{\lambda t}\underline{x}$ systemet $\underline{y}' = A\underline{y}$

Theorem 13.1

Dersom A er diagonaliserbar, finnes n lineært uavhengige løsninger.
(Dette fordi A diagonaliserbar $\implies$ n uanhengige egenvektorer)

Theorem 13.2

Dersom A ikke er diagonaliserbar, finnes det n lineært uavhengige løsninger.

Disse to teoremene sier i praksis at det alltid er n lineært uanvhengige løsninger, men hvis A ikke er diagonaliserbar, er de for vanskelige for oss å finne. Derfor - på eksamen, hvis vi skal finne løsning av et system, kan vi anta A er diagonaliserbar.

Example 13.3

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{y}(t)$$

Finn "den andre" løsningen.
Egenverdier: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.
Egenvektorer: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (for λ_1).
Vi har dermed:

$$\underline{y_2}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Denne løsningen pluss den forrige løsningen er også en løsning.
En generell løsning for systemet er:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{x_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{x_2} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \underline{x_n}$$

13.3 Initialverdiproblem

Vi har $\underline{y}' = A\underline{y}$ og en $\underline{y}(t_0)$ "der kalaset skal starte" og har en $\underline{y_0}$ som $\underline{y}(t_0)$ skal bli.

Hvis vi har $\underline{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{y}$ og $\underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Setter inn generell løsning:

$$\underline{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\implies c_1 = c_2 = 1$$
$$\implies \underline{y}(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Theorem 13.3

$\underline{y}'$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y_0}$ har alltid en entydig løsning.

Example 13.4

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underline{y}$$

Finn løsningen på problemet.
Egenverdiene til matrisen er 0, 4 og 9.

Egenvektor for $\lambda = 0$: $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Egenvektor for $\lambda = 4$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Egenvektor for $\lambda = 9$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Det vil da si den generelle løsningen er:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^0 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{9t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Det første leddet kalles en likevektsløsning.

13.4 Fasediagram

(Kun $\mathbb{R}^2$)

Et fasediagram er et koordinatsystem, hvor vi har en scetch av løsningene våre.

Har løsningen fra tidligere $\underline{y}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Steg for å finne fasediagram:

1. Tegn egenrommene
2. Tegn noen løsningskurver (løs $\underline{y}(0)$ med forskjellige startverdier).
3. Indiker retning

14 Forelesning 08.11.19

14.1 Litt repitisjon

$\underline{y}' = A\underline{y}$ Sistem av defflikning

Generell løsning: $\underline{y}(t) = c' e^{\lambda_1 t} x_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} c_n$ Dersom A er diagonaliserbar.

Example 14.1

$y_1' = y_2,\ y_2' = -y_1 \implies \underline{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{y}$

Step 1: Finn egenverdier og egenvektorer.

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_2) &= (-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1 \cdot -1 \\ &= \lambda^2 + 1 \\ \implies \lambda &= [-i,\ i] \end{aligned}$$

Egenvektor for $\lambda = i$: $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Egenvektor for $\lambda = -i$: $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \implies \underline{y}(t) = c_1 e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Kan vi tegne fasediagram av dette? - nei, det er ikke så lett. Vi er nødt til å gjøre noe lurt.

Triks 1: $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. Da får vi $\underline{y_1}(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ ie^{it} - ie^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$

Triks 2: $c_1 = \frac{1}{2i}$, $c_2 = -\frac{1}{2i}$ som gir $\underline{y_2}(t) = \frac{1}{2i} e^{it} - \frac{1}{2i} e^{-it} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$

Da får vi $\underline{y}(t) = d_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ -sint \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

Fasegiagrammet blir da masse rundinger med forskjellige radiuser, med origo som sentrum.

Example 14.2

$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{y}$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda i_2) &= (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \\ \implies \lambda &= [1 - i,\ 1 + i] \end{aligned}$$

Egenvektor for $\lambda = 1 + i$: $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Egenvektor for $\lambda = 1 - i$: $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Vi får $\underline{y}(t) = c_1 e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + c_2 e^{(1-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Dette er det samme som $e^{-t} \cdot \left(c_1 e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + c_2 e^{-ti} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right)$

Moralen er: Imaginær λ lager ellipser som fasediagram. Hvis $Re(\lambda) > 0$ fpr vi utadgående spiraler. Motsatt andre veien.

14.2 En ny type likning

$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}$, der $\underline{f}$ er en vektorfunksjon. Denne likningen kalles en inhomogen likning.

$\underline{y}' = A\underline{y}$ kalles en homogen likning.

En løsning av $\underline{y}' = A\underline{y}$ kalles en homogen løsning $\underline{y}_h$

En løsning av $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}$ som ikke inneholder homogene løsninger, kalles en partikulær løsning. (evt. inhomogen løsning.). Skrives $\underline{y}_p$

Den generelle løsningen av $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}$ er $\underline{y} = \underline{y}_h + \underline{y}_p$

Example 14.3

$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{y}_h = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\underline{y}_p = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ Vi putter inn i likningen:

$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Som vil si $\underline{y}(t) = \underline{y}(t)_h + \underline{y}(t)_p = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Teknikk:

14.2.1 Variasjon av parametre

Dette er en formel basert på følgende idé:

$\underline{y}_p = Y(t)c(t)$, der Y er en matrise $Y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\underline{x_1} & \dots & e^{\lambda_n t}\underline{x_n} \end{bmatrix}$

Vi vet at $det(Y(t)) \neq 0$

$\underline{y}_p' = Y'c + Yc'$

Setter inn i $\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{f}$ og får $Y'c + Yc' = AYc + \underline{f}$

Kan skrive $Y'c$ som AYc, så vi kan stryke og får $Yc' = \underline{f} \implies c(t) = \int_0^t Y^{-1}(s) \cdot \underline{f}(s) ds$

Example 14.4

$\underline{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Finner $Y(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^t \\ e^{3t} & -e^t \end{bmatrix}$

$det(Y) = -2e^{4t}$

$Y^{-1}(t) = -\frac{1}{2e^{4t}} \begin{bmatrix} -e^t & -e^t \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}$

$Y^{-1}\underline{f}(t) = -\frac{1}{2e^{4t}} \begin{bmatrix} -e^t & -e^t \\ -e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix}$

$\int_0^t Y^{-1}\underline{f} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix} = c(t)$

$Yc = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

15 Repitisjon ig?

15.1 Kont 2019

Example 15.1: Oppgave 1

a)
Finn alle løsninger av

$$z^5 = i$$

i $\mathbb{C}$.
Setter opp likningen $z^5 = i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)} \implies z = e^{\frac{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}{5}}$
Deretter er det bare å sette inn verdier for n hvor $0 \le n \le 4$
b)
La z og w være komplekse tall. Vis at

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \bar{z}/\bar{w}$$

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ w &= c + di \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a+bi}{c+di} \\ &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

$$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{ac+bd-i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$\begin{aligned} \bar{z}/\bar{2} &= \frac{a-bi}{c-di} \cdot \frac{c+di}{c+di} \\ &= \frac{ac+bd-i(bc-ad)}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

Ser de er like :)

Example 15.2: Oppgave 2

a)
La A være en reell mxn-matrise. Skriv ned definisjonen på nullrommet til A. Vis at nullrommet er et underrom av $\mathbb{R}^n$.
Nullrommet er alle $\underline{x}$ slik at $A\underline{x} = \underline{0}$. (Kjernen T er det samme for lineærtransformasjoner).
Er det et vektorrom? Underrom? Et underrom er en delmengde som i seg selv er et vektorrom.

Theorem 15.1: "Sjekketeoremet" (7.9)

1. Er 0 med?
2. $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er i delmengden, skal også $\underline{x}+\underline{y}$ være i delmengden
3. Dersom $\underline{x}$ er med, skal også $c\underline{x}$ være med.

1. Sjekker om 0 er med. Ja, ganger vi A med 0 får vi 0.
2. $A\underline{x} = 0$ og $A\underline{y} = 0 \implies A(\underline{x}+\underline{y}) = A\underline{x}+A\underline{y} = 0$. Med andre ord: $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i nullrom impliserer at $\underline{x}+\underline{y}$ er i nullrommet.
3. $A\underline{x} = \overline{0} \implies A(c\underline{x}) = 0 \implies c(A\underline{x}) = 0$

b)
Vi studerer matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ligger

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i nullrommet til A?
Finn en basis for $Col A$. Bestem dimensjonene på disse underrommene.
Ser med en gang at $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ikke ligger i nullrommet. Ser at $A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. Denne vektoren ligger i nullrommet.
Basiser: Radreduserer matrisen A:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -5 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies Col A = sp\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\implies Null A = sp\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Example 15.3: Oppgave 2

c) Finn en ortogonal basis for $Col\,A$. Regn ut den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix}3\\2\\9\end{bmatrix}$ ned på $Col\,A$.

Har basisen som ikke er ortogonal. Setter $\underline{u_1} = \begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}$ og bruker Grahmschmidt:

$$\begin{aligned}\underline{u_2} &= \underline{v_2} - \frac{\underline{u_1}\cdot\underline{u_2}}{\underline{u_1}\cdot\underline{u_1}}\cdot\underline{u_1}\\ &= \begin{bmatrix}4\\-4\\-2\end{bmatrix} - \frac{2\cdot 4 + (-5)\cdot(-4) + 1\cdot(-2)}{2^2+5^2+1^2}\cdot\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}4\\-4\\-2\end{bmatrix} - \frac{26}{30}\cdot\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{30}\cdot\begin{bmatrix}68\\10\\-86\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Projeksjon av $\begin{bmatrix}3\\3\\9\end{bmatrix}$ ned på $Col\,A$:

$$P\left(\begin{bmatrix}3\\3\\9\end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix}3\\3\\9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix}2\\-5\\1\end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}68\\10\\-86\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}68\\10\\-86\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}68\\10\\-86\end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix}68\\10\\-86\end{bmatrix}$$