# TMA4110 - Notater 2019

Sander Lindberg

# Contents

# 1 Komplekse tall

$Z = a + bi \quad Z \in \mathbb{C}$

Skal bli kvitt at $x^2 + 1 = 0$ ikke har noen løsning.

Vi kan nå skrive $x = \pm\sqrt{-1}$

Finner opp et nytt tall: $i = \sqrt{-1} \implies i^2 = -1$

i kalles den *imaginære enheten*

**Example 1.1**

Løs $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b, c &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-2 * 1 * 2}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-1 \pm 2i}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

**Formel 1.1**

1. $R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ kalles "lengden", "modulus" eller "absolut verdi".
2. $arg(z) = \theta = \arcsin\frac{b}{|z|} = \arccos\frac{a}{|z|} = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}, a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi, a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, a = 0, b > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, a = 0, b < 0 \end{cases}$

Kalles "argumentet" til $z$.

**Example 1.2**

Gitt $z = -1 + i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$, finn $|z|$, $|w|$, $arg(z)$ og $arg(w)$:
$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
$|w| = \sqrt{4} = \sqrt{2}$
$arg(z) = \frac{3\pi}{2}$ $(\arctan\frac{1}{-1} + \pi)$
$arg(w) = \frac{\pi}{3}$ $(\arctan\sqrt{3})$

## 1.1 Polar form

Starter med å se på noen geometriske rekker:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \frac{x^n}{n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

Disse kan settes sammen til Eulers formel:

**Definition 1.1: Eulers Formel**

$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} \dots$

Vi kan nå skrive $z$ på polarform:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

## 1.2 Hvorfor komplekse tall?

**Theorem 1.1: Analysens fundamentalteorem**

Polynomet $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} \dots a_1 z + a_0$ kan allid faktoriseres $P(z) = \prod_1^n (z - z_i)$ der $z_i$ er løsninger av likningen $P(z) = 0$

**Example 1.3**

Faktoriser $z^2 + z + 1$
$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

En polynomlikning har alltid $n$ løsninger

**Example 1.4**

$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z-1)^3$
Sier at $z = 1$ er en rot med multiplisitet 3.

Spesialtilfelle:

**Example 1.5**

Finn alle $z$ som tilfredsstiller $z^n = -1$
Komplekse n-te røtter:
Skal løse $z^n = w$. $w$ er kjent, skal finne $z$.

$$\begin{aligned} z^n = w = re^{i\theta} &= re^{o(\theta+2k\pi)} \\ \implies z &= \sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{e^{i(\theta+2k\pi)}} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot \sqrt[n]{e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}}, \quad 0 \le k \le n-1 \end{aligned}$$

# 2 Lineære systemer og gausseliminasjon

**Theorem 2.1**

Et lineært likningsystem har enten
1. Entydig løsning
2. Ingen løsning
3. Uendelig mange løsninger

**Example 2.1: Linkingssystem med uendelig mange løsninger**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dette ser ut som tre likninger, men det er egt bare 2:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 4 \\ y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Vi har to likninger med tre ukjente, som ikke går an å løse. Vi setter derfor inn frie variabler. (finne en parametisering)
1. Velg $z = s$
2. Skriv de andre ved hjelp av $s$ ($x$ og $y$)
3. Skriv likningene på vektorform

Velger $z = s$, da får vi $y = 2 - 2s$ og $x = -2 + s$. På vektorform blir dette:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+s \\ 2-2s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot s$$

## 2.1 Vektorer

En vektor $\underline{x}$ skrives på formen $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$

**Formel 2.1: To operasjoner på vektorer**

**Addisjon**:

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

**Skalarmultiplikasjon**:

$$k \cdot \underline{x} = k \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}$$

**Formel 2.2: Skalarprodukt og vektorprodukt**

**Skalarprodukt**:

$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \dots$

**Vektorprodukt**:

$$\underline{x} \times \underline{y} = \begin{bmatrix} x_2 y_2 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{bmatrix}$$

### 2.1.1 Lineærkombinasjon

En lineærkombinasjon av vektorer skrives på formen: $\underline{x_1} k_1 + \underline{x_2} k_2 + \cdots + \underline{x_n} k_n$

Det er altså en vektor du får ved å legge sammen to vektorer multiplisert med en skalar.

# 3 Vektorlikninger

Litt repitisjon:

Søylevektor: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$c \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{bmatrix}$$

Lineærkombinasjon av $\underline{x}$ og $\underline{y}$: $a\underline{x} + b\underline{y}$.

$\underline{x}$ og $\underline{y}$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)

## 3.1 Linære spenn

**Definition 3.1: Lineært spenn**

$Sp\left\{\underline{x}, \underline{y}\right\}$ kalles det *lineære spennet*. $Sp\left\{\underline{x}, \underline{y}\right\} = \left\{a\underline{x} + b\underline{y} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$
Det lineæret spennet er altså mengden av alle linærkombinasjoner til $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

**Example 3.1**

Hva er $Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$?

Vet at $Sp\left\{\underline{x}\right\} = Sp\left\{a\underline{x}\right\}$ som i mitt tilfelle er $Sp\left\{a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Som tilsvarer x-aksen. Hva er $Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$?

Bruker samme metode som sist: $Sp\left\{a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ Som er xy-planet.

## 3.2 Linkningssett

Vi er nå interessert i å løse likningsett, f.eks:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ x + 5y + 9z = 33 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases} \qquad = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 33 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Setter opp som en matrise og gausseliminerer for å finne løsning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & 33 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 11 & 38 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{38}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ser at $x = 7$, $y = -2$ og $z = 4$. Setter inn i det originale utrykket for å sjekke:

$$7 + 2 \cdot -2 - 2 \cdot 4 = -5$$
$$7 + 5 \cdot -2 + 9 \cdot 4 = 33$$
$$2 \cdot 7 + 5 \cdot -2 - 4 = 0$$

Jeg har funnet riktige verdier for $x$, $y$ og $z$.

**Definition 3.2: Matriser**

En $mxn$ matrise skrives på formen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{mn} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Denne matrisen har altså $m$ rader og $n$ kolonner.

**Definition 3.3: Søylevektorer og radvektorer**

Hvis $\underline{v}$ er en søylevektor, kan den skrives på formen: $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_n \end{bmatrix}$

En radvektor er basically bare en liggende søylevektor: $\underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$

**Formel 3.1: Fremgangsmåte for vektorlikninger**

Dette er vel egt ikke en formel, men det går fint. Her kommer en oppskrift på hvordan løse vektorlikninger:

1. Sett opp de forskjellige søylevektorene som kolonner i en matrise.
2. Gausseliminer.

Ikke så veldig mye verre enn det egt.

**Formel 3.2: Gange matrise med vektor**

Igjen, ikke formel, men vet ikke hva jeg skal putte det under.
(Har hatt et par glass vin når jeg skriver dette, så ikke hat meg om noe er feil <3 )

Gitt $A = \begin{bmatrix} \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_3} & \dots & \underline{v_n} \end{bmatrix}$, hvor $A$ er en $mxn$ matrise og $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Så er $A \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \dots + x_n v_n \in \mathbb{R}^m$

**Example 3.2: Matrise ganger vektor**

Gitt $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ og $\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ finn $A \cdot \underline{x}$

Setter opp og ganger:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} &= 2 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Theorem 3.1**

$A(\underline{v} + \underline{w}) = A\underline{v} + A\underline{w}$
$A(c\underline{v}) = c(A\underline{v})$

## 3.3 Enhetsvektorer

Enhetsvektorer er vektorer som har én 1er og resten 0. De finnes i alle $\mathbb{R}^n$.

Enhetsvektorer i $\mathbb{R}^2$: $\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Enhetsvektorer i $\mathbb{R}^3$: $\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Samme mønster for $\mathbb{R}^n$

### 3.4 Vektorlikninger

**Definition 3.4: En vektorlikgning**

En vektorlikning er på formen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{mn} \end{bmatrix} \cdot x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix}$$

Vi skriver den som regel om til en matrise:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

## 4 Forelesning 16.10.19

I dag:

- Oppsummere projeksjon
- "Anvendelse av projeksjon"
- Kapittel 10.

**Formel 4.1**

$$P_{\underline{v}} = \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{v}, \underline{v} >} \cdot \underline{v}$$

$$\mathbb{R}^n :< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{v}^T \underline{w}$$

$$\mathbb{C}^n :< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{v}^* \underline{w}$$

$$\underline{C([a,b])} :< f, g >= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx$$

### 4.1 Fourier-analyse(Anvendelse)

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \dots\}$ er en ortiginal basis. Tenker at vi har en funksjon som går som et signal (ujevne bølger opp og ned, radiobølger f.eks). Har lyst til å finne ut av hvordan bølgene oppfører seg. Og det var det? Han ville visst bare nevne det.

## 5 Egenverdier og egenvektorer

Det vi har jobbet med til nå er linærtransformasjoner, alle lineærtrans kan representeres som matriser. F.eks $f_A(\underline{v}) = A\underline{v}$.

Hva om $f_A(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$, for $\lambda \in \mathbb{R}$? Alstå, vi får bare et tall ganget med en vektor? Kaller $\lambda$ for egenverdi og $\underline{v}$ for egenvektor.

**Example 5.1**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, e_1, e_2, \underline{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{e_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\underline{v}$$

Ser at det er kun en av vektorene ($\underline{v}$) som gir en skalering. Vi har lyst til å finne akkurat de tallene som gir skalering og de vektorene detgjelder.

**Definition 5.1**

La $A$ være en $nxn$ matrise, $\underline{v}$ være en $n$x1 vektor og $\lambda$ være en skalar.
Dersom $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$, sp kalles $\lambda$ en egenverdi av $A$ og $\underline{v}$ en egenvektor av $A$, tilhørende $\lambda$

Hva om $\underline{w} = c\underline{v}$?

Da er $A\underline{w} = A(c\underline{v}) = cA\underline{v} = c\lambda\underline{v} = \lambda c\underline{v} = \underline{w}$.

Det følger at $\underline{w}$ også er en egenvektor til $A$ med hensyn til $\lambda$.

Hva om $\lambda = 0$? Det betyr at $A\underline{v} = \underline{0}$ Som vil si at kolonnene i $A$ *ikke* er lineært uavhengige. Som videre vil si at $A$ ikke har noen invers. Determinanten er også 0.

**Theorem 5.1**

$\lambda = 0$ er en egenverdi til $A \iff A$ ikke er invertibel.

**Theorem 5.2**

La $T : V \to V$ (vi har en kvadratisk matrise) være en lineærtransformasjon. (Som også betyr at $V$ er et vektorrom), og la $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$ være egenverdier til $T$. Da er de tilhørende egenvektorene $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_t}$ lineært uavhengige.

**Theorem 5.3**

La $T : V \to V$ være en lineærtransformasjon representert ved $nxn$ matrise $A$. La $A$ ha $n$ distinkte egenverdier.
Da utgjør de tihlørende egenvektorene $\underline{v_1}, \underline{v_2} \ldots, \underline{v_n}$ en basis for $V$.

**Example 5.2**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Anta en linje gjennom origo ($y = x$) da er denne matrisemultiplikasjonen en speiling over denne linjen.

Si vi har en vektor $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ganger vi denne med $A$ får vi den samme vektoren ut igjen, med egenverdi 1. ($A\underline{v_1} = 1\underline{v}$)

Har vi linjen $y = -x$ og vektoren $\underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ får vi $A\underline{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\underline{v_3}$ (Egenvedien er $-1$)

**Definition 5.2**

La $\lambda$ være en egenverdi til $A$ med tilhørende egenvektor $\underline{v}$, da kalles mengden $Sp\{\underline{v}\}$ egenrommet til $\lambda$. Nullvektoren er i egenrommet, selvom nullvektoren ikke er en egenvektor. (super forvirrende :p)

## 5.1 Metode for å finne egenverdi og egenvektor

$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \implies A\underline{v} - \lambda\underline{v} = 0.$

Vet at $AI_n = A$ og $\underline{v}I_n = \underline{v}$

Ved hjelp av dette kan vi finne $A\underline{v} - \lambda\underline{v} = 0 \implies A\underline{v} - \lambda I_n\underline{v} = 0 \implies (A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0} \implies A - \lambda I_n$ ikke er invertibel.

Dette impliserer også et $det(A - \lambda I_n) = 0$ Videre, $\underline{v}$ ligger i nullrommet til $A$ fordi vi ganget med et matrise og fikk $\underline{0}$

**Theorem 5.4**

La $A$ være en $mxn$ matrise.
Da:

- Egenverdiene til A er løsningene $\lambda$ til $det(A - \lambda I_n) = 0$
- $\lambda$ egenverdi til $A$, så er egenvektorene $\underline{v}$ til $\lambda$ løsningene til $(A - \lambda I_n)\underline{v} = 0$

God, skjønner ingenting av dette her :p

**Definition 5.3**

Dimensjonen til egenrommet til $\lambda$ kalles den geometriske multiplisiteten til $\lambda$.

**Example 5.3**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Vil finne egenverdiene.

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_2) &= (1-\lambda)(-3-\lambda) - 12 \\ &= -3 - \lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 12 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \\ &\implies \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-15)}}{2} \\ &\implies \lambda = -1 \pm 4 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -5$$

Vi kan nå finne egenvektorene til $A$.

$$A - 3I_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A + 5I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\underline{v_1}$ er løsningen på $A\underline{v_1} = 0$ og $\underline{v_2}$ er løsningen på $A\underline{v_2} = 0$

Egenrommet: $\lambda = 3$ er $Sp\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ og til $\lambda = -5$ er $Sp\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

**Example 5.4**

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -8-\lambda & 0 & 6 \\ 12 & 4-\lambda & -6 \\ -20 & 0 & 12-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I_3) &= (-8-\lambda)(4-\lambda)(14-\lambda) + (4-\lambda)\cdot 20 \cdot 6 = 0 \\ &= (4-\lambda)((-8-\lambda)(14-\lambda)+120) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0 \\ &\implies \lambda_1 = 4, \quad \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} \\ &\implies \lambda_2 = 3+1 = 4, \quad \lambda_3 = 3-1 = 2 \end{aligned}$$

Har lyst til å vinne egenvektorer:

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 12 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 6 \\ 12 & 2 & -6 \\ -20 & 0 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Kan også bruke metoder fra tidligere (frie variabler) for å finne nullrommet (som er egenvektorene) (tror jeg).
Egenrommet til $\lambda = 4$ har dimensjon 2 og til $\lambda = 2$ har dimensjon 1.

# 6 Forelesning 17.10.19

## 6.1 Egenverdier og egenvektorer

$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$, der $A$ er en $mxn$ matrise.

Finne $\lambda$: Løs $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Finne $\underline{v}$: Gitt $\lambda, \underline{v} \in Null(A - \lambda I_n)$

Geometrisk multiplisitet til $\lambda$ er dimensjonen til egenrommet til $\lambda$.

**Example 6.1**

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$$

Da er:

$$\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

## 7 Eksistens av egenverdier og egenvektorer

Lurer på:

- Hvor mange egenverdier kan en matrise ha?
- Finnes det alltid egenvektorer ($\underline{v}$) og evgenverdier ($\lambda$)?
- Hva er dimensjonene til egenrommene? (Generelt, kan alltid regne det ut.)
- Kan vi finne en basis for $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ bestående av egenvektorer?

**Example 7.1: Generell egenverdi 2*2 matrise**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\implies det(A - \lambda I_n)$$
$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$
$$= \lambda^2 - a\lambda - d\lambda + ad - bc$$

Hvor mange løsninger har et generelt polynom?

**Theorem 7.1: Algebraens fundamentalteorem**

Dersom vi har en ligning $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ kan den skrives som $a_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ hvor $x_i$ er løsninger av $f(x) = 0$
$\implies \forall a_i \in \mathbb{R}$ eller $\forall a_i \in \mathbb{C}$, finnes det $n$ (ikke nødvendigvis unike) komplekse løsninger $x_i$ av $f(x) = 0$.
Dersom faktoren $(x - x_i)$, for en gitt $i$ forekommer $m$ ganger, sier vi at $x_i$ har multiplisitet $m$.

**Theorem 7.2**

En kompleks $nxn$ matrise $A$ har alltid $n$ egenverdier, når vi teller med multiplisiteten. (Hvis en egenverdi oppstår to ganger, teller vi dette som 2).

**Definition 7.1: Algebraisk multiplisitet**

Dersom $\lambda$ er en rot av $det(A - \lambda I_n) = 0$ og har multiplisitet $m$, så kaller vi $m$ den algebraiske multiplisiteten til $\lambda$.

**Theorem 7.3**

En reell matrise $A$ $(nxn)$ trenger ikke nødvendigvis ha noen reelle røtter (egenverdier). Dersom $n$ er et oddetall, vil vi *alltid* ha minst én reell egenverdi.

**Theorem 7.4**

La $\lambda$ være en kompleks egenverdi av $A$.

Da er også $\bar{\lambda}$ en egenverdi. Hvis $\underline{v}$ egenvektor til $\lambda$, så er $\underline{\bar{v}}$ egenvektor til $\bar{\lambda}$

**Example 7.2**

La $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Hva er egenverdien(e) og egenvektor(ene)?
Egenverdiene er gitt ved $det(A - \lambda I_n) = 0$:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_n) &= det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\ &= det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\ &= -\lambda \cdot -\lambda - -1 \cdot 1 = 0 \\ &= \lambda^2 + 1 = 0 \\ &\implies \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i \end{aligned}$$

Egenvektorer:

$$\begin{aligned} A - iI_2 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & -1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$A + iI_2 = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Vi ser at $\lambda_1 = \bar{\lambda_2}$ og $\underline{v_1} = \underline{\bar{v_2}}$

**Example 7.3**

Vi har $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Har lyst til å finne egenvektorer og egenverdier.

$$\begin{aligned} A - \lambda I_3 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &\implies det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + (3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \\ &\implies \lambda_1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \\ &\implies \lambda_2 = 1 + i \quad \lambda_3 = 1 - i \end{aligned}$$

La oss nå finne egenvediene:

$$\begin{aligned} A - 3I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi har to pivotkolonner, aka 1 fri variabel. Vi får $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Videre:

$$\begin{aligned} A - (1+i)I_3 = \begin{bmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \\ &\implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \implies \underline{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Example 7.4**

Vi har $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$
$$\implies det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$
$$\implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dimensjonen til egenrommet til $\lambda = 1 = 1$

**Theorem 7.5**

Egenrommet til $\lambda$ har dimensjon $\geq 1$ og geometrisk multiplisitet $\leq$ algrebraisk multiplsitet

**Theorem 7.6**

Egenverdiene til $A$ utgjør en basis hvis og bare hvis algebraisk multiplisitet = geometrisk multiplisitet for alle egenverdier.

# 8 Forelesning 21.10.19

## 8.1 Oppsummering kap 10

$A$ $nxn$ matrise, $\underline{v} \neq 0$ slik at $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$; Egenverdi: $\lambda$ og egenvektor $\underline{v}$

Finner $\lambda$ ved å løse $det(A - \lambda I_n) = 0$

Finner $\underline{v}$ til $\lambda$ ved å finne $\underline{v} \in Null(A - \lambda I - n)$

Egenrommet til $\lambda$ er $Null(A - \lambda I_n)$

Finnes alltid $n$ egenverdier til $\lambda$

Finnes minst en $\underline{v}$ per $\lambda$

Dersom algebraisk multiplisitet = geometrisk multiplisitet, for alle $\lambda \implies \underline{v_1}, \underline{v_2}, \ldots, \underline{v_n}$ basis.

## 8.2 Diagonalisering

**Definition 8.1**

$A$ $nxn$ matrise er diagonaliserbar dersom det finnes en diagonal matrise $D$ ig invertibel matrise $P$ slik at $A = PDP^{-1}$

# 9 Diagonalisering

Vi har $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$. Hva er $D^5$?

$D^5 = D \cdot D \cdot D \cdot D \cdot D$.

$D^2 = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & (-5)^2 \end{bmatrix} \implies D^5 = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-5)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -3125 \end{bmatrix}$

Hva om vi har $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, hva blir $A^5$? Det er vanskelig. Vi vil skrive $A = PDP^{-1}$. $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$ som vil si vi kan skrive $A^5 = PD^5P^{-1}$.

Fra tidligere eksempel (tydeligvis) har vi: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -5, \quad \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Vi hadde også systemene: $A\underline{v_1} = \lambda \underline{v_1}, \quad A\underline{v_2} = \lambda \underline{v_2}$. Vil skrive disse som et system.

$P = [\underline{v_1} \quad \underline{v_2}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Kan skrive $A\underline{v_1} = \lambda_1 \underline{v_1} + 0\underline{v_2}, \quad A\underline{v_2} = \lambda \underline{v_2} + 0\underline{v_1}$

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

**Definition 9.1**

En $nxn$ matrise $A$ er diagonaliserbar dersom det eksisterer en invertibel $P$ og diagonal $D$ slik at $A = PDP^{-1}$

**Example 9.1**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -5$, $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
$A\underline{v_1} = \lambda_1 \underline{v_1} + 0 \cdot \underline{v_2}$
$A\underline{v_2} = 0 \cdot \underline{v_2} 0 \lambda_2 \underline{v_2}$

Dette vil si:

$A[\underline{v_1 v_2}] = [\underline{v_1} \quad \underline{v_2}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$
$\implies A = PDP^{-1}$

**Theorem 9.1**

$nxn$ matrise $A$ er diagonaliserbar $\iff$ $A$ har $n$ lineært uavhengige egenvektorer.

**Proof 9.1: Theorem 9.1**

Anta $A$ har $n$ lineært uavhengige egenvektorer $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$. Da vet vi at vi har $n$ egenverdier (trenger ikke være unike) slik at $A\underline{v_i} = \lambda_i \underline{v_i} \forall i$

Da følger det at $\begin{bmatrix} A\underline{v_1} & A\underline{v_2} & A\underline{v_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\underline{v_1} & \lambda\underline{v_2} & \lambda\underline{v_n} \end{bmatrix}$ som er det samme som $A\begin{bmatrix} \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v_1} & \underline{v_2} & \underline{v_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\implies A = PDP^{-1} \implies A$ er diagonaliserbar.

Anta nå $A$ er diagonaliserbar. Det vil si det finnes $D$ og $P$ slik at $A = PDP^{-1}$. Da kan vi gange med $P$ på begge sider: $AP = PD$

$\implies \begin{bmatrix} A\underline{k_1} & A\underline{k_2} & \dots & \underline{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\underline{k_1} & a_2\underline{k_2} & \dots & a_n\underline{kn} \end{bmatrix}$

$\implies A\underline{k_i} = a_i \underline{k_i} \forall i \implies a_i$ egenverdi for $\underline{k_i}$ som er egenvektor for $A$.

$P$ invertibel $\implies \underline{k_1}, \underline{k_2}, \dots, \underline{k_n}$ er lineært uavhengige $\implies \underline{k_1}, \dots, \underline{k_n}$ lineært uavhengige egenvektorer til $A$.

**Theorem 9.2**

Dersom $nxn$ matrisen $A$ har $n$ distinkte egenverdier, så er $A$ diagonaliserbar.

**Theorem 9.3**

$A$ $nxn$ matrise. Da er $A$ diagonaliserbar hvis og bare hvis algebraisk multiplisitet = geometrisk multiplisitet for alle $\lambda$

Merk: Reell matrise $A$ kan ha kompleks $P$ og $D$ slik at $A = PDP^{-1}$

**Example 9.2**

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & -6 \\ -20 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$A$ har egenverdier $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ og $\lambda_3 = 4$, med egenvetorer $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, til $\lambda = 2$, $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\underline{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ til $\lambda = 4$.

Kan sette opp

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ hvor tallene som ikke er 0 er egenverdiene.

$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ hvor kolonnene er egenvektorene.

Da er $A = PDP^{-1}$.

**Example 9.3**

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Har komplekse egenverdier $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -1$. Egenvektorer: $\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ og $\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Egenverdiene gir oss en diagonalmatrise $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ og egevektorene gir oss $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \implies P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \frac{-2i}{4} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

**Example 9.4**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Finner egenverdier og egenvektorer:

$$\begin{aligned} A - \lambda I_2 &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &\implies det(A - \lambda I_1) = (1-\lambda)^2 = 0 \\ &\implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Algebraisk multiplisitet er 2, mens geometisk er 1. $A$ er ikke diagonaliserbar.

Har en matrise $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og $b \neq 0$.

$det(A - \lambda I_2) = (a-\lambda)^2 + b^2 = 0 \implies \lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$.

Ser på $A - (a+ib)I_2 = \begin{bmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -ib & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \implies \underline{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

$r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

**Theorem 9.4**

$A$ reell 2x2 matrise med kompleks egenverdi $\lambda = a - ib$ (eller $\lambda = a + ib$) hvor $b > 0 \in \mathbb{R}$.
La $\underline{v} \in \mathbb{C}^2$ være egenvektor til $\lambda$ da kan vi skrive $A = PCP^{-1}$, hvor $P = \begin{bmatrix} Re\underline{v} & Im\underline{v} \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

**Example 9.5**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I_2) &= (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \\ &\implies \lambda = [2 - i,\ 2 + i] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - (2-i)I_2 &= \begin{bmatrix} -i+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \\ &\implies \underline{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Re(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, quad Im(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\implies P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$