

1 Rozbor a analýza algoritmu bucket sort

Algoritmus bucket sort řadí pomocí stromu procesů. Vstupem algoritmu je řada čísel. Nechť n je počet čísel v této řadě, potom strom procesů obsahuje právě m listových procesů, kde $m = \log_2 n$. Každý z těchto procesů řadí část vstupu pomocí některého ze sekvenčních řadících algoritmů. Počet prvků, které tyto procesy řadí je tedy roven $\frac{n}{m}$. Dále nechť p reprezentuje celkový počet procesů, potom $p = (2 \times \log_2 n) - 1$. Procesy, které nejsou listovými procesy, spojují dvě seřazené sekvence pomocí sekvenčního algoritmu.

1.1 Složitost a cena algoritmu

Listové procesy čtou $\frac{n}{\log_2 n}$ prvků. Jedná se tedy o složitost $\mathcal{O}(\frac{n}{\log_2 n})$. Při použití sekvenčního řadícího algoritmu se složitostí $\mathcal{O}(r \times \log_2 r)$ bude výsledná složitost řazení $\mathcal{O}(\frac{n}{\log_2 n} \times \log_2 \frac{n}{\log_2 n}) = \mathcal{O}(n)$. Dále se zde nachází nelistové procesy, které je třeba do celkové složitosti algoritmu započítat. Proces při j -té iteraci se nachází v úrovni stromu $i = (\log_2 m) - j$ a spojí 2 posloupnosti o délce $\frac{n}{2^i}$. Při použití sekvenčního řadícího algoritmu určeného ke sloučení 2 seřazených posloupností se složitostí $\mathcal{O}(k)$ bude výsledná časová složitost práce nelistových procesů:

$$\sum_{i=1}^{(\log_2 m)-1} \frac{k \times n}{2^i} = \mathcal{O}(n)$$

Poslední řazení kořenovým procesem s uložením dat do paměti má složitost $\mathcal{O}(n)$.

Celková časová složitost algoritmu je tedy $\mathcal{O}(n)$. Počet potřebných procesů k dosažení této časové složitosti je $\mathcal{O}(\log_2 n)$. Výsledná cena algoritmu bucket sort potom bude $\mathcal{O}(n \times \log_2 n)$. Vzhledem k časové složitosti sekvenční implementace algoritmu bucket sort se jedná o optimální cenu.

2 Implementace

Aplikace **bks** řadí data ze souborů. Tyto soubory považuje za binární a každý byte dat je brán jako číslo vstupní sekvence. Aplikace tedy pracuje s rozsahem čísel 0 – 255. Načtená data ze souboru následně seřadí pomocí algoritmu bucket sort, kde je v listových procesech použit sekvenční řadící algoritmus shell sort a v nelistových procesech je použit merge sort pro sjednocení 2 seřazených posloupností.

Samotná aplikace **bks** přijímá 1 argument reprezentující vstupní soubor (výchozí hodnota je **numbers**) a lze ji spustit například pomocí následujícího příkazu:

```
mpirun --prefix /usr/local/share/OpenMPI -np PROCESS_COUNT bks INPUT_FILE
```

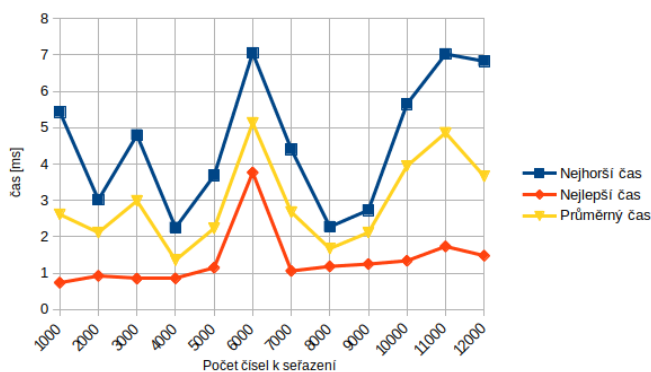
Při spuštění aplikace je nutné zadat správný počet procesů, jinak aplikace končí s návratovou hodnotou 2. Počet procesů je určen nejbližší větší druhou mocninou čísla $\lceil \log_2 n \rceil$. Důvodem této úpravy algoritmu je fakt, že $\log_2 n$ je celé číslo, pokud je hodnota n druhou mocninou čísla 2. Ve chvíli, kdy $\log_2 n$ nevychází jako celé číslo je i uměle navýšena velikost vstupního souboru o čísla 255 (maximální velikost jedné vstupní hodnoty) tak, aby všechny listové procesy pracovaly se stejnou velikostí dat. Kořenový proces, který provádí poslední řazení, poté takto přidaná čísla ignoruje.

3 Experimenty

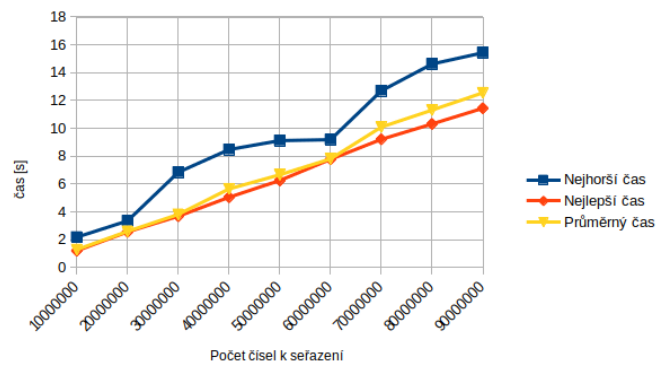
Pro demonstraci algoritmu byl program spuštěn 100x nad krátkými náhodnými sekvencemi (řádově tisíce čísel) a 20x nad dlouhými náhodnými sekvencemi čísel (řádově desítky milionů). Výsledný čas zpracování byl měřen pomocí knihovny metody MPI.Wtime. Měření probíhalo na jednom stroji s procesorem Core i5-7300HQ (2.5GHz).

U krátkých posloupností algoritmus nedosáhl očekávané lineární časové složitosti. Důvodem takového časového průběhu může být skutečnost, že velikost dat, které řadí jednotlivé listové procesy pomocí shell sortu je příliš malá na stabilní časový průběh algoritmu. Svou roli zde může hrát i doba přístupu do paměti, zejména přítomnost dat v paměti cache.

U delších sekvencí průběh zpracování odpovídá přibližně očekávané lineární složitosti a to i přesto, že pro řazení listovými procesy nebyl zvolen algoritmus se složitostí $\mathcal{O}(n \times \log_2 n)$. Složitost shell sortu je $\mathcal{O}(n^{\frac{4}{3}})$, což je (pokud se nejedná o extrémní případy) velmi podobná složitost a proto v těchto případech nemá tak velký dopad.



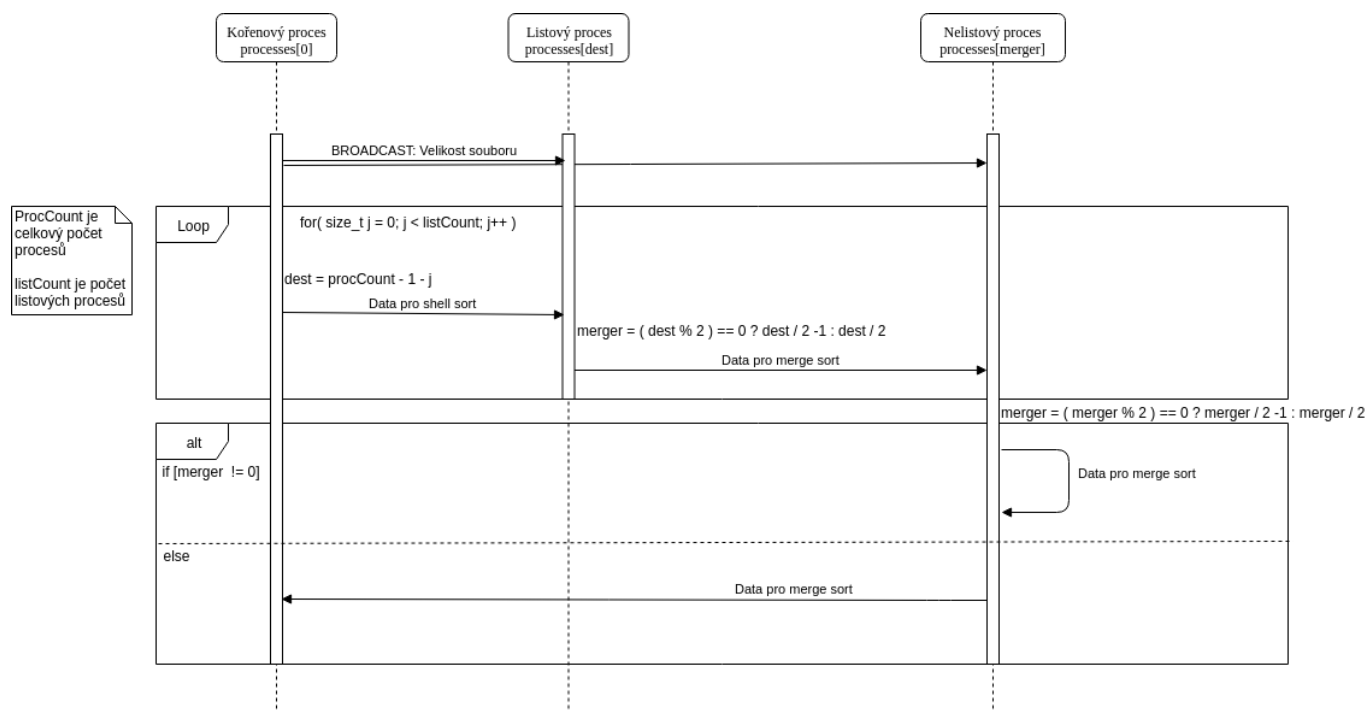
Obrázek 1: Krátké sekvence náhodných čísel



Obrázek 2: Dlouhé sekvence náhodných čísel

4 Komunikace

Komunikaci začíná kořenový proces odesláním velikosti vstupního souboru všem procesům. Na základě této velikosti souboru a ID procesu, si každý proces určí od koho bude přijímat kolik dat, jakým algoritmem bude řadit (merge/shell sort) a komu bude posílat seřazená data. Kořenový proces následně načte celý soubor do paměti, a pokud by měl poslední listový proces dostat méně dat než ostatní, doplní několik čísel s hodnotou 255 na konec sekvence. Data následně odešle listovým procesům. Poté čeká, než mu procesy s ID 1 a 2 pošlou dvě seřazené posloupnosti. Pokud je na vstupu příliš málo čísel (méně než 3), provádí veškeré řazení kořenový proces.



Obrázek 3: Komunikace mezi procesy

5 Závěr

Výsledný algoritmus bucket sort má očekávanou lineární časovou složitost, ale trvá poměrně dlouho, než se časový průběh řazení stane stabilním. Tato implementace algoritmu bucket sort pracuje vždy s vyváženým stromem procesů, a proto ne vždy listový a celkový počet procesů odpovídá vzorcům uvedených v úvodu tohoto projektu.