№29

Дано: $A(2\sqrt{3};2)$, $B(0;-3)$, $C(-4;4)$, $D(\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $E(-\sqrt{2};\ -\sqrt{6})$, $F(-7;\ 0)$

Найти полярные координаты точек

Решение:

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Точка A

$r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$

$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\varphi=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi=30^0$ $\Rightarrow$ $A\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$

Точка B

$r=\sqrt{(0)^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

$\cos\varphi=\frac{0}{3}=0$

$\sin\varphi=\frac{-3}{3}=-1$ $\Rightarrow$ $\varphi=270^0$ $\Rightarrow$ $B\left(3;\frac{3\pi}{2}\right)$

Точка C

$r=\sqrt{(-4)^2+(4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\cos\varphi=\frac{-4}{4\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\varphi=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi=135^0$ $\Rightarrow$ $C\left(4\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$

Точка D

$r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\varphi=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi=315^0$ $\Rightarrow$ $D\left(2;\frac{7\pi}{4}\right)$

Точка E

$r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\cos\varphi=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}$

$\sin\varphi=\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $\varphi=240^0$ $\Rightarrow$ $E\left(2\sqrt{2};\frac{4\pi}{3}\right)$

Точка F

$r=\sqrt{(-7)^2+(0)^2}=\sqrt{49}=7$

$\cos\varphi=\frac{-7}{7}=-1$

$\sin\varphi=\frac{0}{7}=0$ $\Rightarrow$ $\varphi=180^0$ $\Rightarrow$ $F(7;\pi)$

Ответ: $A\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(3;\frac{3\pi}{2}\right)$

$C\left(4\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$; $D\left(2;\frac{7\pi}{4}\right)$

$E\left(2\sqrt{2};\frac{4\pi}{3}\right)$; $F(7;\pi)$

№30

Дано: $A\left(10;\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;\frac{5\pi}{4}\right)$, $C\left(0;\frac{\pi}{10}\right)$, $D\left(1;\ \frac{-\pi}{4}\right)$, $E\left(-1;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $F\left(-1;\ \frac{-\pi}{4}\right)$

Найти прямоугольные координаты точек

Решение:

$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}$

Точка A $\left(10;\frac{\pi}{2}\right)$

$r=10$ $\quad \begin{cases}x=10\cos\frac{\pi}{2}=10\times 0=0\\ y=10\sin\frac{\pi}{2}=10\times 1=10\end{cases}$ $\Rightarrow$ $A(0;10)$

Точка B $\left(2;\frac{5\pi}{4}\right)$

$r=2$ $\quad \begin{cases}x=2\cos\frac{5\pi}{4}=2\times\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}\\ y=2\sin\frac{5\pi}{4}=2\times\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $B(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Точка C $\left(0;\frac{\pi}{10}\right)$

$r = 0$ $\begin{cases} x = 0\cos\dfrac{\pi}{10} = 0 \\ y = 0\sin\dfrac{\pi}{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ C(0; 0)

Точка D$\left(1;\frac{-\pi}{4}\right)$

$r = 1$ $\begin{cases} x = 1\cos\dfrac{-\pi}{4} = 1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 1\sin\dfrac{-\pi}{4} = 1 \times \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$ D$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

Точка E$\left(-1;\frac{\pi}{4}\right)$

$r = -1$ $\begin{cases} x = -1\cos\dfrac{\pi}{4} = -1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ y = -1\sin\dfrac{\pi}{4} = -1 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$ E$\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

Точка F$\left(-1;\frac{-\pi}{4}\right)$

$r = -1$ $\begin{cases} x = -1\cos\dfrac{-\pi}{4} = -1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ y = -1\sin\dfrac{-\pi}{4} = -1 \times \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$ F$\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ответ: A(0; 10) ; B$(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$
C(0; 0) ; D$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; $E\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; F$\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

№32

Дано: M$\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, N$\left(4;\frac{3\pi}{4}\right)$

Определить расстояние между точками

Решение:

Расстояние между точками(представленными в полярной системе координат) определяется по формуле $d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1^2 r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

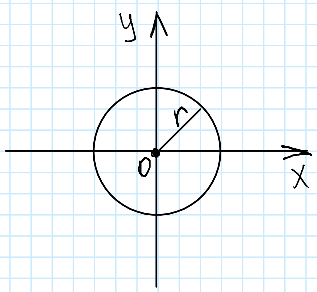
$$d = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2\cdot 3^2\cdot 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{9 + 16 - 72\cdot\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)} = \sqrt{25 - 0} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5

№49

В полярной системе координат составить уравнение окружности с центром в полюсе

Решение:



$x^2 + y^2 = a^2$ уравнение окруж. в прямоугольной системе координат с центром (0; 0)

$x^2 + y^2 = a^2$ и x = r cos ϕ, y = r sin ϕ, то $(r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2 = a^2$. Упростим, $r^2\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{1} = a^2$.

$\Rightarrow$ уравнение окружности в полярной системе координат r = a

Ответ: r = a

№50

В полярной системе координат составить уравнение полупрямой, проходящей через полюс и образующей с полярной осью угол α

Решение:

полярная система задается координатами **r** (радиус) и **φ** (угол)

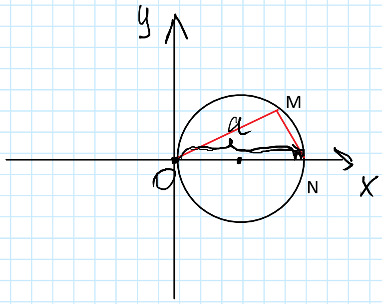
уравнение полупрямой, проходящего через полюс под углом α к полярной оси, имеет вид: **φ**=α

Ответ: **φ**=α

№51

В полярной системе координат составить уравнение окружности диаметра a, если полюс лежит на окружности, а полярная ось проходит через центр окружности.

Решение:



Возьмем произвольную точку M на окружности. Треугольник OMN прямоугольный. Получаем уравнение окружности в виде $r = 2R\ cos\varphi$
По условию, a - диаметр , следовательно, уравнение окружности $r = a\ cos\varphi$

Ответ: $r = a\cos\varphi$

Дано: z = 6+i

Найти модуль |z| и аргумент arg z комплексного числа z = 6+i. Представить число z в тригонометрической форме

Решение:

z = 6+i

a=6
b=1

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad |z| = \sqrt{6^2+1^2} = \sqrt{37}$

$\arg z = arctg = \frac{b}{a}$ $\quad \arg z = arctg = \frac{1}{6}$

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ $\quad z = \sqrt{37} \cdot \left(cos\left(arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{6}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(ar\,\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{6}\right)\right)\right)$

Ответ: $|z| = \sqrt{6^2+1^2} = \sqrt{37}$
$\arg z = arctg = \frac{1}{6}$
$z = \sqrt{37} \cdot \left(cos\left(arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{6}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(ar\,\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{6}\right)\right)\right)$

Дано: $w = z^{18}$ $\quad$ z = 6+i

Найти $w = z^{18}$,используя формулу Муавра

Решение:

$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$ формула Муавра

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad |z| = \sqrt{37}$

$z = \sqrt{37} \cdot \left(cos\left(arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{6}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(ar\,\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{6}\right)\right)\right) \Rightarrow z^{18} = \left(\sqrt{37}\right)^{18} \cdot \left(cos\left(18 \times arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{6}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(18 \times ar\,\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{6}\right)\right)\right)$

Ответ: $z^{18} = \left(\sqrt{37}\right)^{18} \cdot \left(cos\left(18 \times arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{6}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(18 \times ar\,\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{6}\right)\right)\right)$