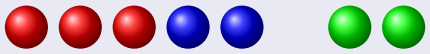
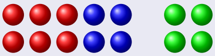
Soustavy lineárních rovnic

Lehce infantilní příklad s kuličkami

Příklad

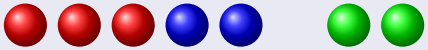
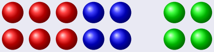
Máme kuličky různých barev. Červená kulička váží x gramů, modrá y gramů a zelená z gramů.

	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	? g	$6x + 4y + 4z = ?$

Lehce infantilní příklad s kuličkami

Příklad

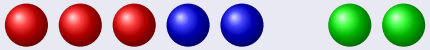
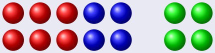
Máme kuličky různých barev. Červená kulička váží x gramů, modrá y gramů a zelená z gramů.

	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	40 g	$6x + 4y + 4z = 40$

Lehce infantilní příklad s kuličkami

Příklad

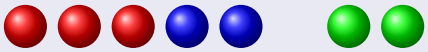
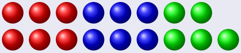
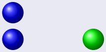
Máme kuličky různých barev. Červená kulička váží x gramů, modrá y gramů a zelená z gramů.

	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	40 g	$6x + 4y + 4z = 40$

Rovnici můžeme vynásobit libovolným NENULOVÝM číslem.

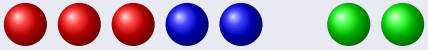
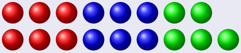
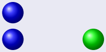
Lehce infantilní příklad s kuličkami – pokračování

Příklad

	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	51 g	$6x + 6y + 5z = 51$
	? g	$2y + z = ?$

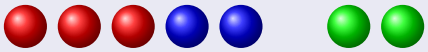
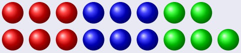
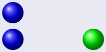
Lehce infantilní příklad s kuličkami – pokračování

Příklad

	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	51 g	$6x + 6y + 5z = 51$
	11 g	$2y + z = 11$

Lehce infantilní příklad s kuličkami – pokračování

Příklad

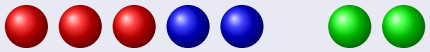
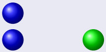
	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	51 g	$6x + 6y + 5z = 51$
	11 g	$2y + z = 11$

K jedné rovnici můžeme přičíst libovolný (i nulový) násobek jiné rovnice.

Lehce infantilní příklad s kuličkami – dokončení

Příklad

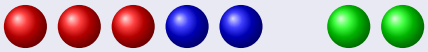
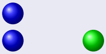
Určete x, y a z, jestliže víme:

	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	11 g	$2y + z = 11$
	9 g	$3z = 9$

Lehce infantilní příklad s kuličkami – dokončení

Příklad

Určete x, y a z, jestliže víme:

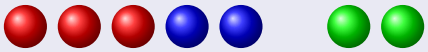
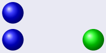
 20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
 11 g	$2y + z = 11$
 9 g	$3z = 9$

$$3z = 9 \quad \Rightarrow \quad z = 3$$

Lehce infantilní příklad s kuličkami – dokončení

Příklad

Určete x, y a z, jestliže víme:

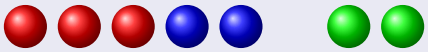
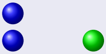
	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	11 g	$2y + z = 11$
	9 g	$3z = 9$

$$
\begin{aligned}
3z &= 9 &\Rightarrow\quad z &= 3 \\
2y + 3 &= 11 &\Rightarrow\quad y &= 4
\end{aligned}
$$

Lehce infantilní příklad s kuličkami – dokončení

Příklad

Určete x, y a z, jestliže víme:

	20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
	11 g	$2y + z = 11$
	9 g	$3z = 9$

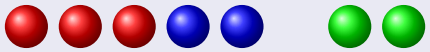
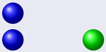
$$
\begin{aligned}
3z &= 9 & \Rightarrow \quad z &= 3 \\
2y + 3 &= 11 & \Rightarrow \quad y &= 4 \\
3x + 8 + 6 &= 20 & \Rightarrow \quad x &= 2
\end{aligned}
$$

Řešením soustavy je jediná uspořádaná trojice $[x, y, z] = [2, 4, 3]$.

Lehce infantilní příklad s kuličkami – dokončení

Příklad

Určete x, y a z, jestliže víme:

 20 g	$3x + 2y + 2z = 20$
 11 g	$2y + z = 11$
 9 g	$3z = 9$

$$\begin{aligned} 3z &= 9 & \Rightarrow && z &= 3 \\ 2y + 3 &= 11 & \Rightarrow && y &= 4 \\ 3x + 8 + 6 &= 20 & \Rightarrow && x &= 2 \end{aligned}$$

Řešením soustavy je jediná uspořádaná trojice $[x, y, z] = [2, 4, 3]$.

Je-li soustava v trojúhelníkovém tvaru, vyřešíme ji snadno.

Obecný tvar soustavy lineárních rovnic

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

(Alespoň obvykle v $\mathbb{R}$; můžeme pracovat i s jinými množinami.)

Soustavu můžeme řešit úpravou na schodovitý, resp. trojúhelníkový tvar – tzv. GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA.

Při řešení soustavy nemusíme celé rovnice opisovat, stačí pracovat s koeficienty a_{ij}, b_i – vytvoříme z nich matici.

Matice

Maticí typu $m \times n$ nad množinou reálných čísel budeme rozumět obdélníkové schéma o m řádcích a n sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

Rozšířená matice soustavy lineárních rovnic

K matici koeficientů u jednotlivých neznámých přidáme ještě pravou stranu:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Tuto matici upravíme na schodovitý tvar pomocí elementárních řádkových úprav:

- výměna pořadí rovnic
- vynásobení některé rovnice nenulovým číslem
- přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku

Schodovitý tvar matice

Vedoucí prvek řádku neboli pivot

První nenulový prvek v řádku (pokud existuje) se nazývá vedoucí prvek řádku neboli pivot.

Schodovitý tvar matice

Řekneme, že matice je ve schodovitém tvaru, jestliže

- nulové řádky (pokud existují) jsou umístěné na konci,
- ve dvou po sobě jdoucích nenulových řádcích je pivot na nižším řádku víc vpravo než pivot na řádku vyšším.

Jak může schodovitý tvar vypadat? Pivoty jsou vyznačené červeně.

ano (trojúhelník)	ano	ne (špatně je 3. řádek)
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Postup při Gaussově eliminaci

- Pomocí odečítání vhodných násobků 1. rovnice od 2. až poslední rovnice vyloučíme x_1 ze všech rovnic kromě první. Co když ale 1. rovnice x_1 neobsahuje? Vyměníme ji nejprve s jinou rovnicí, která x_1 obsahuje.
- Pomocí odečítání vhodných násobků 2. rovnice od 3. až poslední rovnice vyloučíme x_2 ze všech následujících rovnic. Pokud 2. rovnice x_2 neobsahuje, vyměníme ji s jinou z následujících, která x_2 obsahuje.
- Analogicky postupujeme dále.

Při „ručním“ výpočtu není nutno tento postup přesně dodržet, když si všimneme něčeho lepšího.

Příklad

Příklad

Najděte řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & & & + & 2u & = & 3 \\ 2x & - & 2y & + & z & - & u & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & z & & & = & 2 \\ x & & & + & z & + & u & = & 1 \end{array}$$

Příklad

Příklad

Najděte řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & & & + & 2u & = & 3 \\ 2x & - & 2y & + & z & - & u & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & z & & & = & 2 \\ x & & & + & z & + & u & = & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III - 3I \\ IV - I \end{array}$$

Příklad – pokračování

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \; II \leftrightarrow III \quad \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \; IV - II$$

Matice je ve schodovitém (zde trojúhelníkovém) tvaru. Upravená soustava je

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & & & + & 2u & = & 3 \\ & & y & + & z & - & 6u & = & -7 \\ & & & & z & - & 5u & = & -6 \\ & & & & & & 5u & = & 5 \end{array}$$

Příklad – pokračování, zpětný chod

$$\begin{aligned} 5u &= 5 &\Rightarrow\quad & u = 1 \\ z - 5u &= -6 &\Rightarrow\quad & z = -6 + 5u = -6 + 5 = -1 \\ y + z - 6u &= -7 &\Rightarrow\quad & y = -7 - z + 6u = -7 + 1 + 6 = 0 \\ x - y + 2u &= 3 &\Rightarrow\quad & x = 3 + y - 2u = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení, a to uspořádanou čtveřici

$$[x, y, z, u] = [1, 0, -1, 1].$$

Doporučujeme na závěr pro kontrolu provést zkoušku dosazením do <u>původních</u> rovnic:

$$\begin{aligned} L_1 &= x - y + 2u = 1 + 2 = 3, & P_1 &= 3, & L_1 &= P_1 \\ L_2 &= 2x - 2y + z - u = 2 - 1 - 1 = 0, & P_2 &= 0, & L_2 &= P_2 \\ L_3 &= 3x - 2y + z = 3 - 1 = 2, & P_3 &= 2, & L_3 &= P_3 \\ L_4 &= x + z + u = 1 - 1 + 1 = 1, & P_4 &= 1, & L_4 &= P_4 \end{aligned}$$

Má soustava vždy právě jedno řešení?

Uvažme soustavu

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 8 \end{array}$$

Má soustava vždy právě jedno řešení?

Uvažme soustavu

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 8 \end{array}$$

Druhá rovnice je dvojnásobkem první, nepřináší žádnou novou informaci.

Má soustava vždy právě jedno řešení?

Uvažme soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 8 \end{array}$$

Druhá rovnice je dvojnásobkem první, nepřináší žádnou novou informaci.
Řešeními této soustavy jsou např. uspořádané dvojice $[4,0],[2,1],[3,\frac{1}{2}],\dots$ Celkově existuje nekonečně mnoho řešení.

Má soustava vždy právě jedno řešení?

Uvažme soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 8 \end{array}$$

Druhá rovnice je dvojnásobkem první, nepřináší žádnou novou informaci.

Řešeními této soustavy jsou např. uspořádané dvojice $[4, 0], [2, 1], [3, \frac{1}{2}], \dots$ Celkově existuje nekonečně mnoho řešení.

Nyní se podívejme na soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 7 \end{array}$$

Má soustava vždy právě jedno řešení?

Uvažme soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 8 \end{array}$$

Druhá rovnice je dvojnásobkem první, nepřináší žádnou novou informaci.
Řešeními této soustavy jsou např. uspořádané dvojice $[4, 0], [2, 1], [3, \frac{1}{2}], \ldots$ Celkově existuje nekonečně mnoho řešení.
Nyní se podívejme na soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 7 \end{array}$$

Rovnice jsou v rozporu, řešení neexistuje žádné, množina všech řešení je prázdná.

Má soustava vždy právě jedno řešení?

Uvažme soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 8 \end{array}$$

Druhá rovnice je dvojnásobkem první, nepřináší žádnou novou informaci.
Řešeními této soustavy jsou např. uspořádané dvojice $[4,0], [2,1], [3,\frac{1}{2}], \dots$ Celkově existuje nekonečně mnoho řešení.
Nyní se podívejme na soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 4 \\ 2x & + & 4y & = & 7 \end{array}$$

Rovnice jsou v rozporu, řešení neexistuje žádné, množina všech řešení je prázdná.
U předchozích dvou soustav jsme počet řešení byli schopni určit na první pohled. U větších soustav to zpravidla nelze a je nutno je nejprve upravit na schodovitý tvar.

Příklad

Příklad

Najděte řešení soustavy

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 11 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\
x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 4x_4 & = & -2
\end{array}
$$

Příklad

Příklad

Najděte řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 11 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 10 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 10 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \leftrightarrow II \\ \\ \\ IV : 2 \end{array}$$

Příklad – pokračování

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 3I \\ III - I \\ IV - I \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV + 2II \end{array}$$

Nyní je matice ve schodovitém tvaru.

Příklad – pokračování

Upravená soustava:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Následuje zpětný chod. Neznámá x_4 je určená jednoznačně. Avšak x_3 jednoznačně vypočítat nelze. Můžeme je volit libovolně a další neznámé pak vyjádříme pomocí něj.

$$\begin{array}{rcl} 2x_4 = -4 & \Rightarrow & x_4 = -2 \\ & & x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ x_2 - 2t - (-2) = 2 & \Rightarrow & x_2 = 2t \\ x_1 + 6t + t = 3 & \Rightarrow & x_1 = 3 - 7t \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení a množina všech řešení je

$$\{[3 - 7t, 2t, t, -2]; t \in \mathbb{R}\}.$$

Příklad – pokračování

Co kdyby v původní soustavě na pravé straně poslední rovnice bylo $+2$?

Příklad – pokračování

Co kdyby v původní soustavě na pravé straně poslední rovnice bylo $+2$?
Po úpravě bychom dostali

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & & 0 & = & 2 \end{array}$$

a soustava by neměla žádné řešení.

Homogenní soustavy lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic se nazývá homogenní, jestliže na pravé straně jsou pouze nulové hodnoty, $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.
V opačném případě

Homogenní soustavy lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic se nazývá homogenní, jestliže na pravé straně jsou pouze nulové hodnoty, $b_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.
V opačném případě (alespoň jedna nenulová hodnota vpravo) se nazývá nehomogenní.

Homogenní soustavy lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic se nazývá homogenní, jestliže na pravé straně jsou pouze nulové hodnoty, $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.
V opačném případě (alespoň jedna nenulová hodnota vpravo) se nazývá nehomogenní.

Může se stát, že homogenní soustava nemá řešení? Co je v každém případě řešením soustavy s nulovou pravou stranou?

Homogenní soustavy lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic se nazývá homogenní, jestliže na pravé straně jsou pouze nulové hodnoty, $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.
V opačném případě (alespoň jedna nenulová hodnota vpravo) se nazývá nehomogenní.

Může se stát, že homogenní soustava nemá řešení? Co je v každém případě řešením soustavy s nulovou pravou stranou? Může být řešením i něco jiného?

Příklad

Najděte všechna řešení soustavy

$$a)\quad \begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ 2x + 5y &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 2x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

Příklad – řešení

a) Úpravou na schodovitý tvar dostaneme

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ 19y &= 0, \end{aligned}$$

jediným řešením je $[x, y] = [0, 0]$, množina všech řešení je jednoprvková:

$$\{[0, 0]\}.$$

b) Druhá rovnice je dvojnásobkem první, můžeme ji tedy vynechat. Řešením je každá uspořádaná dvojice $[x, y]$, kde $x = 2y$, např. $[2, 1], [-3, -1.5]$, apod. Množina všech řešení je tedy

$$\{[2t, t]; t \in \mathbb{R}\}.$$

Vlastnosti homogenních soustav lineárních rovnic

- Vždy existuje řešení – nulový vektor je vždy řešením. Řešení ale může být i více.
- Je-li $\overline{x}$ řešením homogenní soustavy, je i jeho libovolný násobek řešením.
- Jsou-li $\overline{x}$ a $\overline{y}$ dvě řešení homogenní soustavy, je i jejich součet řešením.

Příklad

Příklad

Najděte všechna řešení soustavy homogenních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 9x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 9x_5 & = & 0 \end{array}$$

Příklad

Příklad

Najděte všechna řešení soustavy homogenních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 9x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 9x_5 & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & -9 & 2 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - I \\ III - 3I \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + 2II \end{array}$$

Příklad – pokračování

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & 0 \\
 & & & & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\
 & & & & & & x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}
$$

$$x_5 = t, \quad t \in \mathbb{R}; \qquad x_4 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = t$$

$$2x_3 + 3t + 4t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{7}{2}t$$

$$x_2 = s, \quad s \in \mathbb{R}; \qquad x_1 - 3s - 7t + 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5t + 3s$$

Množina všech řešení je

$$\left\{ \left[5t + 3s, s, -\frac{7}{2}t, t, t \right] ; t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Příklad na soustavu s parametrem

Příklad

V $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic s parametrem a.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 9y & & & = & 1 \\ x & + & a^2y & + & 2z & = & a \\ x & + & 9y & + & 3z & = & -5. \end{array}$$

Příklad na soustavu s parametrem

Příklad

V $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic s parametrem a.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 9y & & & = & 1 \\ x & + & a^2y & + & 2z & = & a \\ x & + & 9y & + & 3z & = & -5. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & a^2 & 2 & a \\ 1 & 9 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & a^2-9 & 2 & a-1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 9y & & & = & 1 \\ & & (a^2-9)y & + & 2z & = & a-1 \\ & & & & 3z & = & -6. \end{array}$$

Příklad – pokračování

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 9y & & & = & 1 \\ & & (a^2-9)y & + & 2z & = & a-1 \\ & & & & 3z & = & -6 \quad \Rightarrow \quad z=-2 \end{array}$$

V případě, že $a^2 - 9 \neq 0$, tj. $a \neq \pm 3$, pokračujeme dále se zpětným chodem:

$$(a^2-9)y - 4 = a - 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{a+3}{a^2-9} = \frac{1}{a-3}$$

$$x + \frac{9}{a-3} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 - \frac{9}{a-3} = \frac{a-12}{a-3}$$

Pro $a \neq \pm 3$ je množina všech řešení soustavy

$$\left\{ \left[\frac{a-12}{a-3}, \frac{1}{a-3}, -2 \right] \right\}.$$

Příklad – pokračování

Pro $a = 3$ pokračujeme v úpravě na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right) \quad 2III - 3II$$

Soustava nemá žádné řešení.

Pro $a = -3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 2III - 3II$$

Ze druhé rovnice vychází $z = -2$. Neznámou y si můžeme zvolit libovolně, $y = t, t \in \mathbb{R}$, a z první rovnice pak máme $x = 1 - 9t$. Pro $a = -3$ má soustava nekonečně mnoho řešení, a to

$$\{[1 - 9t, t, -2]; t \in \mathbb{R}\}.$$

Příklad – dokončení

Výsledky shrneme do tabulky:

a	množina všech řešení
$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$	$\left\{\left[\frac{a-12}{a-3}, \frac{1}{a-3}, -2\right]\right\}$
$a = 3$	$\emptyset$
$a = -3$	$\{[1 - 9t, t, -2]; t \in \mathbb{R}\}$