Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastní čísla a vlastní vektory

Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je reprezentováno určitou čtvercovou maticí A:

$$f(\overline{v}) = A\overline{v}$$

Občas se stane, že $f(\overline{v})$ je násobkem $\overline{v}$, tj. obraz leží ve stejné přímce jako vzor.

Vlastní vektory a vlastní čísla (angl. eigenvectors, eigenvalues)

Jestliže pro nenulový vektor $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$ a reálnou nebo komplexní matici A typu $n \times n$ platí

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v},$$

kde $\lambda \in \mathbb{C}$, pak vektor $\overline{v}$ nazveme vlastním vektorem matice A a číslo λ nazveme jejím vlastním číslem (vlastní hodnotou).

Nulový vektor za vlastní vektor nepovažujeme, protože $A\overline{o} = \overline{o} = \lambda\overline{o}$ by platilo pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$.

Příklad na vlastní vektory a čísla – zatím bez výpočtu

Příklad

Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice ortogonální projekce do přímky $y = \frac{1}{3}x$, která je (viz jedna z předchozích přednášek)

$$P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad na vlastní vektory a čísla – zatím bez výpočtu

Příklad

Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice ortogonální projekce do přímky $y = \frac{1}{3}x$, která je (viz jedna z předchozích přednášek)

$$P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory ležící v přímce $y = \frac{1}{3}x$ se zobrazí samy na sebe, zatímco vektory na přímku kolmé se zobrazí na nulu, např.

$$P\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vlastním vektorem je tedy $\overline{v} = [3,1]^{\mathrm{T}}$ nebo jeho libovolný nenulový násobek, k němu příslušné vlastní číslo je $\lambda = 1$. Další vlastní vektor je $\overline{v} = [-1,3]^{\mathrm{T}}$ nebo jeho libovolný nenulový násobek a k němu příslušné vlastní číslo je $\lambda = 0$.

Příklad na vlastní vektory a čísla – stále zatím bez výpočtu

Příklad

Matice rotace o úhel $\alpha = 90^\circ$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad na vlastní vektory a čísla – stále zatím bez výpočtu

Příklad

Matice rotace o úhel $\alpha = 90^\circ$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

žádná reálná vlastní čísla mít nemůže.

Příklad na vlastní vektory a čísla – stále zatím bez výpočtu

Příklad

Matice rotace o úhel $\alpha = 90^\circ$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

žádná reálná vlastní čísla mít nemůže.

Matice natažení na dvojnásobek

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad na vlastní vektory a čísla – stále zatím bez výpočtu

Příklad

Matice rotace o úhel $\alpha = 90^\circ$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

žádná reálná vlastní čísla mít nemůže.
Matice natažení na dvojnásobek

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

má vlastní číslo $\lambda = 2$ a reálným vlastním vektorem je každý vektor $\overline{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{o}\}$.

Připomenutí – kdy má homogenní soustava nenulové řešení?

Příklad

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ 2x + 5y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ 19y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 2x - 4y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2t \\ y &= t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Připomenutí – kdy má homogenní soustava nenulové řešení?

Příklad

$$\begin{array}{rcl} 3x-2y &=& 0\\ 2x+5y &=& 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3x-2y &=& 0\\ 19y &=& 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x-2y &=& 0\\ 2x-4y &=& 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x-2y &=& 0\\ 0 &=& 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x &=& 2t\\ y &=& t,\ t\in\mathbb{R} \end{array}$$

Rozdíl mezi soustavami:

- Matice je regulární, $\begin{vmatrix} 3 & -2\\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, jediné řešení je $\begin{bmatrix} 0\\ 0 \end{bmatrix}$.
- Matice je singulární, $\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, řešení např. $\begin{bmatrix} 0\\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\\ 2 \end{bmatrix}$.

Jak hledat vlastní čísla a vlastní vektory

Má platit: $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$ neboli $A\overline{v} = \lambda I\overline{v}$ neboli $(A - \lambda I)\overline{v} = \overline{o}$.
Aby tato soustava rovnic pro neznámý vektor $\overline{v}$ měla nenulové řešení, musí být matice $A - \lambda I$ singulární, její determinant musí být nulový.

Jak najdeme vlastní čísla a vektory

Nejprve najdeme vlastní čísla jako řešení tzv. charakteristické rovnice

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Výraz

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

nazýváme charakteristický polynom matice A.
Pak pro každé vlastní číslo λ hledáme odpovídající vlastní vektory $\overline{v}$ jako řešení soustavy rovnic

$$(A - \lambda I)\overline{v} = \overline{o}.$$

Jiný tvar charakteristické rovnice

Alternativní tvar charakteristické rovnice a polynomu

Charakteristická rovnice se často uvádí též ve tvaru

$$|\lambda I - A| = 0,$$

charakteristický polynom je pak

$$p(\lambda) = |\lambda I - A|$$

Vlastní čísla však musí vyjít stejně.

Je-li matice sudého řádu, charakteristický polynom v tomto případě vyjde stejně, jako kdybychom jej počítali prvním způsobem. Je-li lichého řádu, vyjdou jeho koeficienty s opačnými znaménky, což však následně při řešení rovnice $p(\lambda) = 0$ nezpůsobí žádnou změnu kořenů.

Příklad – výpočet vlastních čísel a vektorů

Příklad

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = P$ (z předch. př.):

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Příklad – výpočet vlastních čísel a vektorů

Příklad

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = P$ (z předch. př.):

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Budeme počítat determinant z matice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 - \lambda & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |A - \lambda I| = (0{,}9 - \lambda)(0{,}1 - \lambda) - 0{,}3 \cdot 0{,}3 = \\ &= 0{,}09 - \lambda + \lambda^2 - 0{,}09 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Příklad – pokračování

Charakteristická rovnice je

$$\lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Označme $\overline{v}_1$ vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$.
Najdeme jej jako řešení soustavy $(A - 0 \cdot I)\overline{v}_1 = \overline{o}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \overline{v}_1 = \begin{bmatrix} t \\ -3t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Množina všech vlastní vektorů příslušných k $\lambda = 0$ je

$$\{[t, -3t]^{\mathrm{T}}; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

Přidáme-li k ní nulový vektor, vznikne vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$. Obvykle se jako vlastní vektory uvádí pouze bázové vektory takového podprostoru, zde např. $\overline{v}_1 = [1, -3]^{\mathrm{T}}$.

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 1$ najdeme jako řešení soustavy $(A - 1 \cdot I)\overline{v}_2 = \overline{o}$:

$$\left(\begin{array}{rr|c} -0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda_2 = 1$ je např. $\overline{v}_2 = [3, 1]^{\mathrm{T}}$.

Další příklad na vlastní čísla a vektory

Příklad

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -12 & 6 \\ 3 & -4-\lambda & 3 \\ -3 & 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-4-\lambda)(-1-\lambda)+108+108+18(-4-\lambda)-18(8-\lambda)+36(-1-\lambda) =$$

$$= \cdots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\text{Hornerovo schéma}) \cdots = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$$-(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2$$

$$\lambda = -1: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -12 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{v}_1 = \begin{bmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda = -1$ je např. $[-2, -1, 1]^{\mathrm{T}}$.

Příklad – pokračování a pak jedno upozornění

$$\lambda = 2: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{v} = \begin{bmatrix} 2r - p \\ r \\ p \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, p, r \in \mathbb{R}$$

K dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda = 2$ přísluší dva nezávislé vlastní vektory, např. $[2, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ a $[-1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$.

Pozor

Co by to znamenalo, kdybychom při hledání vlastního vektoru k vypočtenému vlastnímu číslu došli do stavu např.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ?!$$

Příklad – pokračování a pak jedno upozornění

$$\lambda = 2: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{v} = \begin{bmatrix} 2r - p \\ r \\ p \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ p, r \in \mathbb{R}$$

K dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda = 2$ přísluší dva nezávislé vlastní vektory, např. $[2, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ a $[-1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$.

Pozor

Co by to znamenalo, kdybychom při hledání vlastního vektoru k vypočtenému vlastnímu číslu došli do stavu např.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ?!$$

Znamenalo by to, že je ve výpočtu někde CHYBA! Matice soustavy pro vlastní vektor je vždy singulární – vždyť tak jsme hledali vlastní čísla, aby singulární byla!

Další příklad na vlastní čísla a vektory

Příklad

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ 3 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda-2)^2$$

$$-\lambda(\lambda-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 2$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{v}_1 = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda = 0$ je např. $[-1, -1, 1]^{\mathrm{T}}$

$$\lambda_{2,3} = 2: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda = 2$ je např. $[-1, -2, 1]^{\mathrm{T}}$ a žádný další nezávislý vlastní vektor neexistuje.

$\lambda = 2$ je dvojnásobné vlastní číslo, ale existuje k němu pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor – jedná se o tzv. defektní vlastní číslo

Některé vlastnosti vlastních čísel a vektorů I

- Matice A typu $n \times n$ má právě n vlastních čísel, počítáme-li je včetně komplexních a včetně násobností.
- Je-li $\overline{v}$ vlastním vektorem matice A, je i jeho libovolný násobek vlastním vektorem pro stejné λ.
- Jsou-li $\overline{u}, \overline{v}$ vlastní vektory příslušné stejnému λ, je i jejich libovolná lineární kombinace vlastním vektorem pro stejné λ.
- Jsou-li $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_k$ vlastní vektory příslušné navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, jsou lineárně nezávislé.
- Má-li matice A vlastní číslo λ násobnosti $k > 1$, nemusí k němu existovat k nezávislých vlastních vektorů. Pokud jich existuje méně, nazývá se λ defektní vlastní číslo a je A defektní matice.

Některé vlastnosti vlastních čísel a vektorů II

- Matice A je singulární právě tehdy, když je jejím vlastním číslem 0.
- Matice A^2 má stejné vlastní vektory jako matice A a její vlastní čísla jsou druhé mocniny vlastních čísel A. Podobně pro vyšší mocniny.
- Matice $A + cI$ má stejné vlastní vektory jako matice A a je-li λ vlastní číslo A, pak vlastní číslo $A + cI$ příslušné stejnému vlastnímu vektoru je $\lambda + c$.
- Je-li matice A regulární, pak A^{-1} má stejné vlastní vektory jako A a její vlastní čísla jsou převrácené hodnoty vlastních čísel A.
- Je-li $p(\lambda)$ charakteristický polynom matice A, pak $p(A) = O$ (nulová matice).

Důkaz některých vlastností

- Vlastní čísla A^2: Je-li $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$, pak vynásobením maticí A zleva:

$$A^2\overline{v} = \lambda A\overline{v} \quad \Rightarrow \quad A^2\overline{v} = \lambda\lambda\overline{v} \quad \Rightarrow \quad A^2\overline{v} = \lambda^2\overline{v}$$

Vektor $\overline{v}$ je vlastním vektorem i pro A^2 a odpovídajícím vlastním číslem je λ^2.

- Nezávislost vlastních vektorů příslušných k různým vlastním číslům – jen náznak důkazu (celkově se provede indukcí):

Jsou-li $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ příslušné k $\lambda_1 \neq \lambda_2$, nemůže být zřejmě $\overline{v}_2 = k\overline{v}_1$. Kdyby to platilo:

$$A\overline{v}_2 = A(k\overline{v}_1) = kA\overline{v}_1 = k\lambda_1\overline{v}_1, \text{ současně } A\overline{v}_2 = \lambda_2\overline{v}_2 = \lambda_2(k\overline{v}_1) = k\lambda_2\overline{v}_1, \text{ spor, protože } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Předpokládejme, že $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ přísluší k různým $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a že $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou taková čísla, že platí

$$c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2 + c_3\overline{v}_3 = \overline{o}$$

Vynásobením maticí A:

$$c_1A\overline{v}_1 + c_2A\overline{v}_2 + c_3A\overline{v}_3 = \overline{o}, \quad \text{tj.} \quad c_1\lambda_1\overline{v}_1 + c_2\lambda_2\overline{v}_2 + c_3\lambda_3\overline{v}_3 = \overline{o}$$

Od poslední rovnice odečteme rovnici $c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2 + c_3\overline{v}_3 = \overline{o}$ vynásobenou λ_3:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_3)\overline{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_3)\overline{v}_2 = \overline{o}$$

Už víme, že $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ musí být nezávislé, a proto $c_1 = c_2 = 0$. Tedy i c_3 musí být nula a $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ jsou lineárně nezávislé. Zobecněním tohoto postupu pro n vektorů by byl důkaz hotov.

Některé vlastnosti vlastních čísel a vektorů III

Součet a součin všech vlastních čísel

Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla matice A, pak

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, kde $\operatorname{tr} A$ je tzv. stopa matice (angl. trace).
- $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$

Náznak důkazu pro součet: Pro matici 2×2 vyplývá ze známých vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice. Ukážeme pro matici 3×3, zobecnění si rozmyslete sami.
Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vlastní čísla matice A, tj. kořeny polynomu $p(\lambda)$, pak

$$p(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = -\lambda^3 + \lambda^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Na druhou stranu,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + \cdots \text{ (zde už } \lambda \text{ nanejvýš v první mocnině)}$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + \lambda(\cdots) + \cdots$$

Porovnáním koeficientů u λ^2 v obou vyjádřeních $p(\lambda)$ dostáváme tvrzení.

Důkaz pro součin (obecně): Protože $p(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$, dosazením

$\lambda = 0$ dostaneme $|A| = (-1)^n(-1)^n \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$

Převod matice na diagonální tvar – příprava

Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ všechna vlastní čísla matice A a $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n$ jim příslušné nezávislé vlastní vektory (už víme, že toto se nemusí vždy podařit), pak pro každý z vektorů platí

$$A\overline{v}_i = \lambda_i \overline{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

a celkově

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\overline{v}_1 & \lambda_2\overline{v}_2 & \cdots & \lambda_n\overline{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Označíme-li

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

platí

$$AP = PD.$$

Protože sloupce matice P jsou lineárně nezávislé, existuje P^{-1}.

Převod matice na diagonální tvar

Převod matice na diagonální tvar

Má-li matice A n lineárně nezávislých vektorů, pak

$$P^{-1}AP = D \quad \text{neboli} \quad A = PDP^{-1},$$

kde P je matice, jejíž sloupce jsou vlastní vektory matice A, a D je diagonální matice, která má na diagonále vlastní čísla v pořadí odpovídajícím pořadí vlastních vektorů jako sloupců P.

Jestliže A n lineárně nezávislých vlastních vektorů nemá, na diagonální tvar ji převést nelze.

Jedná se vlastně o převod matice lineárního zobrazení do báze složené z vlastních vektorů A.

Podobné matice

Podobné matice, diagonalizovatelnost

Řekneme, že matice A, B jsou podobné, jestliže existuje regulární matice P, pro kterou platí

$$A = PBP^{-1}.$$

Znamená to, že matice A a B reprezentují stejné lineární zobrazení, jen v jiné bázi.
Řekneme, že matice A je diagonalizovatelná, jestliže je podobná s nějakou diagonální maticí.

Podobnost, diagonalizovatelnost a vlastní čísla a vektory

Souvislost podobnosti s vlastními čísly

Jestliže jsou si matice A, B podobné, mají stejná vlastní čísla. Opačné tvrzení ale neplatí, najdou se matice, které mají stejná vlastní čísla, ale podobné si nejsou, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizovatelnost a vlastní čísla a vektory

- Matice je diagonalizovatelná právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.
- Má-li matice n navzájem různých vlastních čísel, je diagonalizovatelná.

Vlastní čísla a vektory symetrických matic

Vlastní čísla a vektory symetrické matice

Je-li A reálná symetrická matice, pak platí:

- Všechna její vlastní čísla jsou reálná.
- Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.
- K vlastnímu číslu násobnosti k existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů, tj. symetrická matice nemůže být defektní.
- Symetrická matice je diagonalizovatelná.

Pozn. Podobné věci platí i pro tzv. samoadjungované matice v komplexním oboru. Jsou to matice, pro které platí $A^{\mathrm{T}*} = A$, kde * znamená matici, jejíž prvky jsou čísla komplexně sdružená k prvkům původní matice.

Příklad na vlastní čísla symetrické matice

Příklad

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -12 \\ 0 & 5 & 0 \\ -12 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

Při výpočtu determinantu je vhodné použít rozvoj podle prostředního řádku:

$$\begin{vmatrix} -9-\lambda & 0 & -12 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -12 & 0 & -16-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left((-9-\lambda)(-16-\lambda) - 12 \cdot 12\right) = (5-\lambda)\lambda(\lambda+25)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -25$.

$$\lambda = 5: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -14 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & -21 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda = 5$ je např. $[0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$.

Příklad – pokračování

$$\lambda = 0: \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -9 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & -16 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{v}_2 = \begin{bmatrix} -4t/3 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda = 0$ je např. $[-4, 0, 3]^{\mathrm{T}}$.

$$\lambda = -25: \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 16 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{v}_3 = \begin{bmatrix} 3t/4 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Vlastní vektor příslušný k $\lambda = -25$ je např. $[3, 0, 4]^{\mathrm{T}}$. Celkově tedy máme vlastní vektory

$$\overline{v}_1 = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}}, \quad \overline{v}_2 = [-4, 0, 3]^{\mathrm{T}}, \quad \overline{v}_3 = [3, 0, 4]^{\mathrm{T}}.$$

Všimněte si, že jsou skutečně navzájem kolmé a tvoří tedy ortogonální bázi $\mathbb{R}^3$. Nyní je ještě normujeme a získáme tak ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$ složenou z vlastních vektorů symetrické matice A:

$$\overline{h}_1 = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}}, \quad \overline{h}_2 = \left[-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \overline{h}_3 = \left[\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Příklad – pokračování, něco tu ukážeme

Pro matici A tedy platí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Jak vypadá uvedená inverzní matice? Obvyklým výpočtem bychom zjistili, že

$$\begin{pmatrix} 0 & -4/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Označíme-li matici, která má ve sloupcích normované, navzájem kolmé vlastní vektory, jako Q, vidíme, že

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}.$$

Je to náhoda, nebo zákonitost?

Ortogonální matice

Ortogonální matice

O reálné čtvercové matici Q řekneme, že je ortogonální, jestliže její sloupce jsou jednotkové navzájem kolmé vektory (tj. sloupce tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Pozor, název je trochu matoucí

Ačkoli se matice nazývá ortogonální, její sloupce musí být i normované, tvořit ortonormální bázi!

Vlastnosti ortogonálních matic

- sloupce Q jsou jednotkové, navzájem kolmé vektory
- $\det Q = 1$ nebo $\det Q = -1$
- $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$
- řádky Q jsou také jednotkové, navzájem kolmé

Příklady ortogonálních matic

Příklad

Ortogonálními maticemi typu 2×2 jsou např. jednotková matice, matice rotace o úhel α, matice středové symetrie podle počátku, matice osové symetrie podle osy x, podle přímky $y = x$ i podle jiných přímek, atd.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Na poslední uvedenou matici se dá dívat i jako na permutační matici, která při násobení vyměňuje řádky.
Všimněte si, že zkoumáme-li lineární transformace dané uvedenými maticemi, tak všechny zachovávají délky vektorů a úhly mezi vektory, tj. zachovávají skalární součin.

Příklady ortogonálních matic

Příklad

Analogicky, ortogonálními maticemi typu 3×3 jsou např. permutační matice, matice rotace o úhel α kolem osy z, matice rotací kolem jiných os, matice různých symetrií, atd.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Coby lineární transformace takové matice zachovávají délky a úhly mezi vektory.