Standardní skalární součin

Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$

Standardní skalární součin

Pro dva vektory $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{u} = [u_1, \ldots, u_n], \overline{v} = [v_1, \ldots, v_n]$, definujeme jejich standardní (obvyklý) skalární součin jako reálné číslo

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n,$$

např. pro $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ je to $\quad \overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Vlastnosti skalárního součinu

Pro každé $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

- $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$
- $(\alpha \overline{u}) \cdot \overline{v} = \alpha (\overline{u} \cdot \overline{v})$
- $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$
- $\overline{u} \cdot \overline{u} > 0$ pro každé $\overline{u} \neq \overline{o}$; $\overline{o} \cdot \overline{o} = 0$

Norma vektoru

Eukleidovská norma (délka, velikost) vektoru

Pro každý vektor $\overline{u} \in \mathbb{R}^n, \overline{u} = [u_1, \ldots, u_n]$ definujeme jeho eukleidovskou normu jako reálné číslo

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

Vlastnosti normy

Pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

- $\|\overline{u}\| > 0$ pro každé $\overline{u} \neq \overline{o}$; $\|\overline{o}\| = 0$
- $\|\alpha\overline{u}\| = |\alpha| \; \|\overline{u}\|$
- $\|\overline{u} + \overline{v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Souvislost normy a skalárního součinu

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}$$

Jednotkové vektory a normování

Jednotkové vektory

Vektor $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ nazveme jednotkovým, je-li $\|\overline{u}\| = 1$.

Příklady jednotkových vektorů z $\mathbb{R}^2$:

$$[1,0],[0,-1],[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}],[-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}]$$

Celkově v $\mathbb{R}^2$ jednotkové vektory tvoří jednotkovou kružnici.

Normování vektoru

Ke každému $\overline{u} \neq \overline{o}$ lze sestavit vektor ve stejném směru o délce 1 tzv. normováním:

$$\overline{u}_0 = \frac{1}{\|\overline{u}\|}\overline{u},$$

např. pro $\overline{u} = [-1,2]$ je to $\frac{1}{\sqrt{5}}[-1,2] = \left[\frac{-\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$.

Odchylka dvou vektorů a skalární součin

Souvislost odchylky a skalárního součinu, ortogonalita

Pro každé dva nenulové vektory $\overline{u}, \overline{v}$ platí

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = \|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\| \cos \varphi,$$

kde $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel, který spolu vektory $\overline{u}, \overline{v}$ svírají.

Je-li

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = 0,$$

jsou vektory $\overline{u}, \overline{v}$ na sebe kolmé neboli ortogonální, píšeme $\overline{u} \perp \overline{v}$.

Je-li $\overline{u} \cdot \overline{v} > 0$, svírají vektory ostrý úhel. Je-li $\overline{u} \cdot \overline{v} < 0$, svírají vektory tupý úhel.

Skalární součin a délka projekce

Je-li vektor $\overline{u}$ jednotkový, pak $|\overline{u} \cdot \overline{v}|$ udává délku projekce vektoru $\overline{v}$ do přímky dané vektorem $\overline{u}$.

Vektor ortogonální na podprostor

Vektor ortogonální na podprostor

Řekneme, že vektor $\overline{u}$ z vektorového prostoru V je ortogonální k podprostoru L tohoto prostoru a píšeme $\overline{u} \perp L$, jestliže

$$\overline{u} \perp \overline{v}, \text{ t.j. } \overline{u} \cdot \overline{v} = 0, \text{ pro každé } \overline{v} \in L.$$

Je-li vektor $\overline{u}$ kolmý na vektory $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ (t.j. je-li $\overline{u} \cdot \overline{a}_i = 0$, $i = 1, \dots, n$), je $\overline{u}$ kolmý i na libovolnou jejich lineární kombinaci:

$$\overline{u} \cdot (\alpha_1 \overline{a}_1 + \cdots + \alpha_n \overline{a}_n) = \alpha_1 \overline{u} \cdot \overline{a}_1 + \cdots + \alpha_n \overline{u} \cdot \overline{a}_n = 0$$

Pro kolmost k podprostoru stačí kolmost k jeho generátorům

Platí-li

$$\overline{u} \cdot \overline{a}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

je vektor $\overline{u}$ kolmý na prostor generovaný vektory $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$.

Ortogonální projekce (průmět) vektoru do podprostoru

Ortogonální průmět

Je-li vektor $\overline{u} \in V$ a $L \subseteq V$ vektorový podprostor vektorového prostoru V, pak ortogonálním průmětem (projekcí) vektoru $\overline{u}$ do podprostoru L nazveme ten vektor $\overline{v} \in V$, pro který platí

- $\overline{v} \in L$
- $(\overline{u} - \overline{v}) \perp L$

Ortogonální průmět je nejlepší aproximace

Ortogonální průmět vektoru $\overline{u}$ do podprostoru L lze též nazvat prvkem nejlepší aproximace vektoru $\overline{u}$ v podprostoru L – je vektoru $\overline{u}$ ze všech prvků L nejblíže, platí

$$\|\overline{u} - \overline{v}\| = \min_{\overline{w} \in L} \|\overline{u} - \overline{w}\| .$$

Příklad na ortogonální průmět do přímky

Příklad

Najděte ortogonální projekci vektoru $\overline{u} = [-5, -5]$ do přímky $y = \frac{1}{3}x$.

Příklad na ortogonální průmět do přímky

Příklad

Najděte ortogonální projekci vektoru $\overline{u} = [-5, -5]$ do přímky $y = \frac{1}{3}x$.

Přímka je generována např. vektorem $\overline{a} = [3, 1]$.
Ortogonální projekci hledáme proto ve tvaru $\overline{v} = \alpha\overline{a}$. Musíme najít to $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které bude $(\overline{u} - \overline{v})\perp\overline{a}$:

$$(\overline{u} - \overline{v}) \cdot \overline{a} = 0 \Rightarrow (\overline{u} - \alpha\overline{a}) \cdot \overline{a} = 0 \Rightarrow \overline{u} \cdot \overline{a} - \alpha\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$$

a tedy

$$\alpha = \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}}{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \frac{-5\cdot 3 - 5\cdot 1}{3\cdot 3 + 1\cdot 1} = -2$$

a ortogonální průmět $\overline{u}$ do přímky je

$$\overline{v} = -2\overline{a} = [-6, -2].$$

Pro kontrolu ověříme, že je vektor $\overline{u} - \overline{v}$ kolmý na přímku:

$$\overline{u} - \overline{v} = [1, -3], \quad (\overline{u} - \overline{v}) \cdot \overline{a} = 1\cdot 3 - 3\cdot 1 = 0.$$

Můžeme nyní také určit vzdálenost bodu $[-5, -5]$ od přímky $y = \frac{1}{3}x$. Je to

$$\|\overline{u} - \overline{v}\| = \sqrt{10}.$$

Příklad na ortogonální průmět do roviny

Příklad

Najděte ortogonální projekci vektoru $\overline{u} = [3, 11, -4]$ do roviny generované vektory

$$\overline{a}_1 = [2, 0, -1], \quad \overline{a}_2 = [0, 6, 5].$$

Ortogonální průmět hledáme jako lineární kombinaci vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2$:

$$\overline{v} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2,$$

přičemž musí platit, že vektor $\overline{u} - \overline{v} = \overline{u} - \alpha_1\overline{a}_1 - \alpha_2\overline{a}_2$ je kolmý k oběma vektorům $\overline{a}_1, \overline{a}_2$:

$$\begin{array}{rcl} (\overline{u} - \alpha_1\overline{a}_1 - \alpha_2\overline{a}_2)\cdot\overline{a}_1 &=& 0 \quad\Rightarrow\quad (\overline{a}_1\cdot\overline{a}_1)\alpha_1 + (\overline{a}_2\cdot\overline{a}_1)\alpha_2 = \overline{u}\cdot\overline{a}_1 \\ (\overline{u} - \alpha_1\overline{a}_1 - \alpha_2\overline{a}_2)\cdot\overline{a}_2 &=& 0 \quad\Rightarrow\quad (\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2)\alpha_1 + (\overline{a}_2\cdot\overline{a}_2)\alpha_2 = \overline{u}\cdot\overline{a}_2 \end{array}$$

Pro naše konkrétní vektory tedy budeme řešit soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} 5\alpha_1 &-& 5\alpha_2 &=& 10 \\ -5\alpha_1 &+& 61\alpha_2 &=& 46 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rcl} \alpha_1 &=& 3 \\ \alpha_2 &=& 1 \end{array}$$

Ortogonální průmět je

$$\overline{v} = 3\overline{a}_1 + \overline{a}_2 = [6, 6, 2].$$

Pro kontrolu opět ověříme, že je vektor $\overline{u} - \overline{v} = [-3, 5, -6]$ kolmý na rovinu generovanou $\overline{a}_1, \overline{a}_2$:

$$(\overline{u} - \overline{v})\cdot\overline{a}_1 = -3\cdot 2 + 5\cdot 0 - 6\cdot(-1) = 0, \quad (\overline{u} - \overline{v})\cdot\overline{a}_2 = -3\cdot 0 + 5\cdot 6 - 6\cdot 5 = 0.$$

Obecný postup při hledání ortogonální projekce

Jak hledat projekci

Ortogonální průmět vektoru $\overline{u}$ do prostoru generovaného vektory $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m$ je

$$\overline{v} = \alpha_1 \overline{a}_1 + \cdots + \alpha_m \overline{a}_m,$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ najdeme jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
(\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_1)\alpha_1 & + & (\overline{a}_2 \cdot \overline{a}_1)\alpha_2 & + & \cdots & + & (\overline{a}_m \cdot \overline{a}_1)\alpha_m & = & \overline{u} \cdot \overline{a}_1 \\
(\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2)\alpha_1 & + & (\overline{a}_2 \cdot \overline{a}_2)\alpha_2 & + & \cdots & + & (\overline{a}_m \cdot \overline{a}_2)\alpha_m & = & \overline{u} \cdot \overline{a}_2 \\
 & & & & & & & \dots & \\
(\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_m)\alpha_1 & + & (\overline{a}_2 \cdot \overline{a}_m)\alpha_2 & + & \cdots & + & (\overline{a}_m \cdot \overline{a}_m)\alpha_m & = & \overline{u} \cdot \overline{a}_m
\end{array}$$

Všimněme si, že matice této soustavy je vždy symetrická.

Ortogonální a ortonormální báze

Ortogonální a ortonormální báze

O bázi $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_m$ daného vektorového prostoru řekneme, že je ortogonální, jsou-li všechny bázové vektory na sebe kolmé, tj.

$$\overline{b}_i \perp \overline{b}_j \qquad \text{pro každé } i, j \in \{1, \ldots, m\}, i \neq j.$$

Bázi nazveme ortonormální, jestliže je ortogonální a navíc jsou všechny bázové vektory jednotkové.

Jedna z výhod ortogonální, resp. ortonormální báze

Máme-li k dispozici ortogonální, resp. ortonormální, bázi prostoru, je výpočet ortogonální projekce do tohoto prostoru jednoduchý, protože matice soustavy pro nalezení koeficientů $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ je diagonální, resp. jednotková a platí

$$\alpha_i = \frac{\overline{u} \cdot \overline{a}_i}{\overline{a}_i \cdot \overline{a}_i}, \qquad \text{resp. } \alpha_i = \overline{u} \cdot \overline{a}_i.$$

Jak sestavit ortogonální bázi

K sestavení ortogonální báze slouží tzv. Gram-Schmidtův ortogonalizační proces, který nejprve předvedeme na „malých“ příkladech.

Příklad

Najděte ortogonální a pak i ortonormální bázi prostoru $L \subset \mathbb{R}^3$ generovaného vektory

$$\overline{a}_1 = [2, 0, -1], \quad \overline{a}_2 = [0, 6, 5].$$

Jak sestavit ortogonální bázi

K sestavení ortogonální báze slouží tzv. Gram-Schmidtův ortogonalizační proces, který nejprve předvedeme na „malých“ příkladech.

Příklad

Najděte ortogonální a pak i ortonormální bázi prostoru $L \subset \mathbb{R}^3$ generovaného vektory

$$\overline{a}_1 = [2, 0, -1], \quad \overline{a}_2 = [0, 6, 5].$$

Vektory ortogonální báze označíme jako $\overline{b}_1, \overline{b}_2$.
Položíme $\overline{b}_1 = \overline{a}_1 = [2, 0, -1]$.
Druhý vektor pak budeme hledat tak, aby ležel v prostoru L:

$$\overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \beta_{21}\overline{b}_1$$

Koeficient $\beta_{21} \in \mathbb{R}$ musíme najít tak, aby $\overline{b}_2 \perp \overline{b}_1$:

$$(\overline{a}_2 + \beta_{21}\overline{b}_1) \cdot \overline{b}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{a}_2 \cdot \overline{b}_1 + \beta_{21}\overline{b}_1 \cdot \overline{b}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_{21} = -\frac{\overline{a}_2 \cdot \overline{b}_1}{\overline{b}_1 \cdot \overline{b}_1}$$

Pokračování příkladu

V našem případě

$$\beta_{21} = -\frac{-5}{5} = 1, \quad \overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \overline{b}_1 = [0, 6, 5] + [2, 0, -1] = [2, 6, 4].$$

Zkontrolujeme, že opravdu $\overline{b}_1 \perp \overline{b}_2$: $\overline{b}_1 \cdot \overline{b}_2 = 4 + 0 - 4 = 0$.
Ortogonální báze je tedy

$$\overline{b}_1 = [2, 0, -1], \quad \overline{b}_2 = [2, 6, 4].$$

K nalezení ortonormální báze stačí vektory normovat:

$$\left\|\overline{b}_1\right\| = \sqrt{5}, \quad \left\|\overline{b}_2\right\| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14},$$

ortonormální báze je

$$\overline{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\overline{b}_1 = \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right], \quad \overline{h}_2 = \frac{1}{2\sqrt{14}}\overline{b}_2 = \left[\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{2\sqrt{14}}{14}\right].$$

Co se dělo geometricky?

Porovnejte výpočet β_{21} s hledáním projekce do přímky v jednom z předchozích příkladů.
Vektor $\overline{b}_2$ jsme získali tak, že jsme od vektoru $\overline{a}_2$ odečetli jeho ortogonální průmět do přímky dané vektorem $\overline{b}_1$.
Tím je zaručeno to, že jsme zůstali v rovině generované $\overline{a}_1, \overline{a}_2$, i to, že vektory $\overline{b}_1, \overline{b}_2$ budou na sebe kolmé.

Další příklad na ortogonalizaci

Příklad

Najděte ortogonální a pak i ortonormální bázi prostoru $L \subset \mathbb{R}^4$ generovaného vektory

$$\bar{a}_1 = [-1, 0, 1, 2], \quad \bar{a}_2 = [0, -1, 2, 5], \quad \bar{a}_3 = [-13, 4, 5, 0].$$

Další příklad na ortogonalizaci

Příklad

Najděte ortogonální a pak i ortonormální bázi prostoru $L \subset \mathbb{R}^4$ generovaného vektory

$$\bar{a}_1 = [-1, 0, 1, 2], \quad \bar{a}_2 = [0, -1, 2, 5], \quad \bar{a}_3 = [-13, 4, 5, 0].$$

Ortogonální báze bude složená z vektorů $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$. Stejně jako v předchozím příkladu bude

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{b}_2 = \bar{a}_2 + \beta_{21}\bar{b}_1, \quad \text{kde } \beta_{21} = -\frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{b}_1}{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1},$$

zde konkrétně

$$\bar{b}_1 = [-1, 0, 1, 2], \quad \beta_{21} = -\frac{12}{6} = -2, \quad \bar{b}_2 = \bar{a}_2 - 2\bar{b}_1 = [2, -1, 0, 1].$$

Pro kontrolu ověřme, že $\bar{b}_1 \perp \bar{b}_2$: $\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 = -2 + 0 + 0 + 2 = 0$.
Třetí vektor budeme hledat jako

$$\bar{b}_3 = \bar{a}_3 + \beta_{31}\bar{b}_1 + \beta_{32}\bar{b}_2.$$

Musí být kolmý na $\bar{b}_1$ i na $\bar{b}_2$:

$$0 = \bar{b}_3 \cdot \bar{b}_1 = \bar{a}_3 \cdot \bar{b}_1 + \beta_{31}\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1 + \beta_{32}\underbrace{\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_1}_{0} \Rightarrow \beta_{31} = -\frac{\bar{a}_3 \cdot \bar{b}_1}{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1}$$

$$0 = \bar{b}_3 \cdot \bar{b}_2 = \bar{a}_3 \cdot \bar{b}_2 + \beta_{31}\underbrace{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2}_{0} + \beta_{32}\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2 \Rightarrow \beta_{32} = -\frac{\bar{a}_3 \cdot \bar{b}_2}{\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2}$$

Pokračování příkladu

V našem příkladu

$$\beta_{31} = -\frac{18}{6} = -3, \quad \beta_{32} = -\frac{-30}{6} = 5, \quad \bar{b}_3 = \bar{a}_3 - 3\bar{b}_1 + 5\bar{b}_2 = [0, -1, 2, -1].$$

Zkontrolujme, že $\bar{b}_1 \perp \bar{b}_3$ a $\bar{b}_2 \perp \bar{b}_3$:

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_3 = 0 + 0 + 2 - 2 = 0, \quad \bar{b}_2 \cdot \bar{b}_3 = 0 + 1 + 0 - 1 = 0.$$

Ortogonální báze prostoru L je

$$\bar{b}_1 = [-1, 0, 1, 2], \quad \bar{b}_2 = [2, -1, 0, 1], \quad \bar{b}_3 = [0, -1, 2, -1].$$

Všechny tři vektory mají normu $\sqrt{6}$ a ortonormální báze je

$$\bar{h}_1 = [-\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}], \quad \bar{h}_2 = [\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}], \quad \bar{h}_3 = [0, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}].$$

Co se dělo geometricky?

Vektor $\bar{b}_2$ jsme získali tak, že jsme od vektoru $\bar{a}_2$ odečetli jeho ortogonální průmět do přímky dané vektorem $\bar{b}_1$.
Vektor $\bar{b}_3$ jsme získali tak, že jsme od vektoru $\bar{a}_3$ odečetli jeho ortogonální průmět do roviny dané vektory $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Mějme bázi prostoru L složenou z vektorů $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$. Ortogonální bázi $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$ téhož prostoru najdeme takto:

$$
\begin{aligned}
\bar{b}_1 &= \bar{a}_1 \\
\bar{b}_2 &= \bar{a}_2 + \beta_{21}\bar{b}_1, && \beta_{21} = -\frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{b}_1}{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1} \\
\bar{b}_3 &= \bar{a}_3 + \beta_{31}\bar{b}_1 + \beta_{32}\bar{b}_2, && \beta_{31} = -\frac{\bar{a}_3 \cdot \bar{b}_1}{\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1}, \beta_{32} = -\frac{\bar{a}_3 \cdot \bar{b}_2}{\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Obecně $\bar{b}_k = \bar{a}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{kj}\bar{b}_j, \quad \beta_{kj} = -\frac{\bar{a}_k \cdot \bar{b}_j}{\bar{b}_j \cdot \bar{b}_j}, \quad k = 1, \ldots, n.$

Až je ortogonální báze nalezená, normováním získáme bázi ortonormální:

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{\|\bar{b}_1\|}\,\bar{b}_1,\ \bar{h}_2 = \frac{1}{\|\bar{b}_2\|}\,\bar{b}_2,\ \ldots,\ \bar{h}_n = \frac{1}{\|\bar{b}_n\|}\,\bar{b}_n.$$

Co se děje geometricky

Při výpočtu vektoru $\bar{b}_k$, $k = 2, \ldots, n$, od vektoru $\bar{a}_k$ odečítáme jeho ortogonální projekci do podprostoru generovaného vektory $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{k-1}$.

Skalární součin obecně

Definice skalárního součinu

Skalární součin nad $\mathbb{R}$

Je-li $V(\mathbb{R})$ vektorový prostor na polem reálných čísel, pak skalární součin je zobrazení, které dvěma vektorům $\overline{u}, \overline{v} \in V$ přiřadí reálné číslo $\overline{u} \cdot \overline{v}$ (jiné časté označení je $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$), přičemž jsou splněny následující podmínky:

- $\overline{u} \cdot \overline{u} > 0$ pro každé $\overline{u} \in V, \overline{u} \neq \overline{o}$,
- $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$ pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in V$,
- $(\alpha \overline{u}) \cdot \overline{v} = \alpha(\overline{u} \cdot \overline{v})$ pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$,
- $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$ pro každé $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$.

Skalární součin s $\overline{o}$ je nulový

Ze třetí vlastnosti vyplývá

$$\overline{o} \cdot \overline{u} = (0 \cdot \overline{u}) \cdot \overline{u} = 0 \cdot (\overline{u} \cdot \overline{u}) = 0 \text{ pro každé } \overline{u} \in V$$

Jen pro úplnost – jak je to v $\mathbb{C}$

Skalární součin nad $\mathbb{C}$

Je-li $V(\mathbb{C})$ vektorový prostor na polem komplexních čísel, pak skalární součin je zobrazení, které dvěma vektorům $\overline{u}, \overline{v} \in V$ přiřadí komplexní číslo $\overline{u} \cdot \overline{v}$ (jiné časté označení je $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$), přičemž jsou splněny následující podmínky:

- $\overline{u} \cdot \overline{u} > 0$ pro každé $\overline{u} \in V, \overline{u} \neq \overline{o}$,
- $\overline{u} \cdot \overline{v} = (\overline{v} \cdot \overline{u})^*$ pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in V$,
- $(\alpha \overline{u}) \cdot \overline{v} = \alpha(\overline{u} \cdot \overline{v})$ pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in V, \alpha \in \mathbb{C}$,
- $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$ pro každé $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$.

Symbolem * se myslí číslo komplexně sdružené, např. $(2 + 3i)^* = 2 - 3i$.
Hlavní rozdíl oproti $\mathbb{R}$ je v tom, že zde záleží na pořadí, v jakém vektory násobíme, viz druhá vlastnost.

Několik poznámek ke skalárnímu součinu v $\mathbb{C}$

Jsou-li $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{C}^2$, jejich standardní skalární součin nelze definovat jako $\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$, protože pak by např. pro $\overline{u} = [1, i]$ vyšlo $\overline{u} \cdot \overline{u} = 1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0$.

Standardní skalární součin v $\mathbb{C}^2$

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1^* + u_2 v_2^*,$$

podobně obecně pro $\mathbb{C}^n$.

Při vytýkání konstanty z druhého vektoru se musí přidat *

Ze druhé a třetí vlastnosti skalárního součinu nad $\mathbb{C}$ plyne

$$\overline{u} \cdot (\alpha \overline{v}) = ((\alpha \overline{v}) \cdot \overline{u})^* = \alpha^* (\overline{v} \cdot \overline{u})^* = \alpha^* (\overline{u} \cdot \overline{v}).$$

Aby nebylo dost zmatků...

Někdy, především ve fyzice, se v definici skalárního součinu místo zde uvedené třetí vlastnosti požaduje, aby

$$\overline{u} \cdot (\alpha \overline{v}) = \alpha (\overline{u} \cdot \overline{v}) \text{ pro každé } \overline{u}, \overline{v} \in V, \alpha \in \mathbb{C},$$

tj. aby se z druhého vektoru vytýkala konstanta „normálně“, zatímco z prvního s *.

Naštěstí pro nás

V tomto kurzu budeme potřebovat pouze skalární součin nad $\mathbb{R}$, a to navíc skoro vždy jenom ten standardní.

Příklad na skalární součin, část a)

Příklad

Rozhodněte, zda je uvedeným předpisem dán skalární součin v $\mathbb{R}^2$:

a) $\overline{u} \cdot \overline{v} = 4u_1v_1 + u_2v_2$

Ověříme, že zobrazení splňuje všechny čtyři vlastnosti z definice skalárního součinu nad $\mathbb{R}$:

- $\overline{u} \cdot \overline{u} = 4u_1^2 + u_2^2 > 0$ pro každé $\overline{u} \neq [0, 0]$
- $\overline{v} \cdot \overline{u} = 4v_1u_1 + v_2u_2 = 4u_1v_1 + u_2v_2 = \overline{u} \cdot \overline{v}$
- $(\alpha\overline{u}) \cdot \overline{v} = 4(\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 = \alpha(4u_1v_1 + u_2v_2) = \alpha(\overline{u} \cdot \overline{v})$
- $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = 4u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) =$
  $4u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_1w_1 + u_2w_2 = \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot \overline{w}$

Předpisem $\overline{u} \cdot \overline{v} = 4u_1v_1 + u_2v_2$ tedy je dán skalární součin.

Příklad na skalární součin, část b)

Příklad

Rozhodněte, zda je uvedeným předpisem dán skalární součin v $\mathbb{R}^2$:

b) $\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 - u_2 v_2$

Druhá, třetí a čtvrtá vlastnosti je splněna, ověřilo by se to analogicky jako v a). Avšak první vlasnost splněna není. Např. pro

$$\overline{u} = [1, 2]$$

platí

$$\overline{u} \cdot \overline{u} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 < 0.$$

Tímto předpisem tedy skalární součin dán není.

Maticová reprezentace skalárního součinu (jen zhruba)

Maticová reprezentace skalárního součinu v $\mathbb{R}^2$

Vlastnosti 3 a 4 platí pro jakýkoli předpis typu

$$\begin{aligned} \overline{u} \cdot \overline{v} &= k u_1 v_1 + l u_1 v_2 + m u_2 v_1 + n u_2 v_2 = \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aby platila vlastnost 2, musí být $l = m$, tj. matice musí být symetrická.
Aby platila i vlastnost 1, musí matice splňovat ještě další podmínku, tzv. pozitivní definitnost, kterou popíšeme později.

Norma vektoru, odchylka vektorů, ortogonalita

Norma indukovaná skalárním součinem

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}$$

Odchylka vektorů vzhledem k danému skalárnímu součinu

Odchylka dvou nenulových vektorů $\overline{u}, \overline{v} \in V$ vzhledem k danému skalárnímu součinu je ten úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, resp. $\varphi \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, pro který platí

$$\cos \varphi = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\|}$$

Ortogonalita vzhledem k danému skalárnímu součinu

Řekneme, že vektory $\overline{u}, \overline{v}$ jsou ortogonální vzhledem k danému skalárnímu součinu, jestliže

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = 0.$$

Příklad

Příklad

Najděte všechny vektory, které jsou kolmé na vektor $\overline{u} = [-1, 2]$ vzhledem ke skalárnímu součinu z předchozího příkladu, tj.

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = 4u_1 v_1 + u_2 v_2 .$$

Dále popište množinu všech vektorů, pro které v normě indukované tímto skalárním součinem platí $\|\overline{u}\| = 1$.

Je-li $\overline{v} = [v_1, v_2]$ kolmý na $\overline{u}$ vzhledem k tomuto skalárnímu součinu, platí

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = 4 \cdot (-1) \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = -4v_1 + 2v_2 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{v} = [v_1, 2v_1],\, v_1 \in \mathbb{R}.$$

Na vektor $\overline{u}$ jsou tedy kolmé např. vektory $[1, 2], [3, 6], [-1, -2], \ldots$
Jednotková kružnice v normě indukované tímto skalárním součinem je popsána rovnicí

$$4u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

Jedná se tedy o elipsu se středem v počátku a poloosami $1/2$ a 1.

Možný pohled na věc

Představme si, že si vektory nakreslíme na papír a pak se na tento papír podíváme zešikma. Úhly a délky se nám budou jevit jinak než při pohledu shora. Elipsa se z určitého úhlu bude jevit jako kružnice.

Poznámka – skalární součin funkcí

Pro funkce, například pro polynomy, se skalární součin dá definovat pomocí integrálu přes určitý interval. Např. v prostoru všech polynomů můžeme definovat skalární součin jako

$$p \cdot q = \int_a^b p(x)q(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\langle a, b\rangle$ je vybraný interval, např. $\langle 0, 1\rangle$.
Lze pak pracovat s polynomy, které jsou ortogonální vzhledem k tomuto skalárnímu součinu, atd.
Jelikož není jisté, jestli ze střední školy znáte integrály, příklad tu nebude.

Vektorový a smíšený součin

Vektorový součin

Pozn. Toto téma do kapitoly o prostorech se skalárním součinem tak úplně nepatří, ale vektorový součin se občas hodí...

Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$ definujeme jako vektor

$$\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v} = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right],$$

což lze přehledněji zapsat pomocí determinantu

$$\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

kde $\overline{e}_1 = [1, 0, 0], \overline{e}_2 = [0, 1, 0], \overline{e}_3 = [0, 0, 1]$.

Příklad

Příklad

Vypočítejte vektorové součiny $\overline{u} \times \overline{v}, \overline{v} \times \overline{u}, \overline{u} \times \overline{u}, (\overline{u} \times \overline{u}) \times \overline{v}$ a $\overline{u} \times (\overline{u} \times \overline{v})$ pro

$$\overline{u} = [1, 2, 3], \overline{v} = [4, 0, 5].$$

Determinant vypočítáme rozvojem podle prvního řádku:

$$\begin{aligned} \overline{u} \times \overline{v} &= \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \overline{e}_1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \overline{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \overline{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 10[1, 0, 0] - (-7)[0, 1, 0] + (-8)[0, 0, 1] = [10, 7, -8] \end{aligned}$$

Všimněme si, že je vektor $\overline{u} \times \overline{v}$ kolmý na oba vektory $\overline{u}, \overline{v}$.
Při výpočtu vektorového součinu $\overline{v} \times \overline{u}$ by se změnilo pořadí řádků v determinantu, a proto

$$\overline{v} \times \overline{u} = -\overline{u} \times \overline{v} = [-10, -7, 8].$$

Determinant pro výpočet $\overline{u} \times \overline{u}$ by obsahoval dva stejné řádky, a proto

$$\overline{u} \times \overline{u} = \overline{o} = [0, 0, 0].$$

Vektorový součin $(\overline{u} \times \overline{u}) \times \overline{v}$ je proto $\overline{o}$, zatímco

$$\overline{u} \times (\overline{u} \times \overline{v}) = [1, 2, 3] \times [10, 7, -8] = [-37, 38, -13].$$

Vlastnosti vektorového součinu

Vlastnosti vektorového součinu

- $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$ pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$
- Vektorový součin není asociativní, tj. rovnost $(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = \overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w})$ obecně neplatí.
- Jsou-li vektory $\overline{u}, \overline{v}$ lineárně závislé, je $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{o}$.
- Pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$ je $\overline{u} \times \overline{v}$ je kolmý na oba vektory $\overline{u}, \overline{v}$. Orientace $\overline{u} \times \overline{v}$ je dána pravidlem pravé ruky: Ukazují-li ukazováček a prostředníček na pravé ruce postupně vektory $\overline{u}, \overline{v}$, je směr jejich vektorového součinu dán palcem.
- Pro každé nenulové $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$ platí

  $$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\| \sin \varphi,$$

  kde φ je odchylka vektorů $\overline{u}, \overline{v}$.
- $\|\overline{u} \times \overline{v}\|$ je obsah rovnoběžníka daného vektory $\overline{u}, \overline{v}$.

Proč je $\overline{u} \times \overline{v}$ kolmé na $\overline{u}, \overline{v}$ a proč je to obsah

Vypočítáme skalární součin vektoru $\overline{u}$ s vektorem $\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v}$:

$$u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Podobně se ukáže, že skalární součin $\overline{v} \cdot (\overline{u} \times \overline{v}) = 0$.

Už víme, že objem rovnoběžnostěnu daného vektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ lze vypočítat pomocí determinantu. Ale také jej lze určit jako S_p (obsah podstavy) vynásobený výškou. Považujeme-li za podstavu rovnoběžník daný vektory $\overline{u}, \overline{v}$, je výška velikost vektoru $\overline{w}$ (protože tento vektor je na rovinu, v níž leží podstava, kolmý). Porovnáme-li tato dvě vyjádření, dostaneme

$$S_p \, \|\overline{w}\| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Determinant nyní rozvineme podle posledního řádku a vzpomeneme si, jak se počítají složky w_1, w_2, w_3 vektorového součinu:

$$w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = \|\overline{w}\|^2$$

Tedy

$$S_p \, \|\overline{w}\| = \|\overline{w}\|^2 \quad \Rightarrow \quad S_p = \|\overline{w}\| \, .$$

Další cesta, jak vypočítat obsah rovnoběžníka, je vynásobit délky jeho stran a sinus úhlu, který strany svírají, a proto také

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\| \; \|\overline{v}\| \sin \varphi .$$

Smíšený součin tří vektorů

Smíšený součin

Smíšený součin vektorů $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^3$ (v tomto pořadí) definujeme jako

$$\overline{u} \cdot (\overline{v} \times \overline{w}).$$

Smíšený součin je roven determinantu

Rozepíšeme-li smíšený součin, dostaneme

$$u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Jedná se tedy o orientovaný objem rovnoběžnostěnu daného vektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$.