# Transformace souřadnic

# Konec s řádkovými vektory

## Vektory budeme brát jako sloupce

Dosud jsme vektory zapisovali jako řádky. Bylo to z důvodu úspornosti textu a také to zatím ničemu nevadilo. Ve skutečnosti se s vektory obvykle pracuje jako se sloupci!

Proto budeme vektory zapisovat jako sloupce a kde by z psaného textu sloupce příliš vyčnívaly, napíšeme je jako řádek se symbolem transponování.

# Připomenutí – báze vektorového prostoru

## Báze vektorového prostoru

Množina vektorů $\{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n\}$ tvoří bázi vektorového prostoru $V$, jestliže

- $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ jsou lineárně nezávislé,
- $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ generují celý prostor $V$, tj. $V = \langle\{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n\}\rangle$.

## Standardní báze $\mathbb{R}^n$

Standardní báze prostoru $\mathbb{R}^n$ je tvořena vektory $\overline{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, které mají na $i$-té pozici jedničku a jinak samé nuly. Např. pro $\mathbb{R}^3$:

$$\overline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Souřadnice vektoru v bázi

## Každý vektor je kombinací bázových vektorů

Má-li vektorový prostor $V$ bázi tvořenou vektory $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$, pak libovolný vektor $\overline{v} \in V$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů:

$$\overline{v} = v_1\overline{a}_1 + \cdots + v_n\overline{a}_n.$$

## Souřadnice vektoru v bázi

Uspořádanou $n$-tici čísel $[v_1, \dots, v_n]^{\mathrm{T}}$ z výše uvedeného vyjádření vektoru $\overline{v}$ nazveme souřadnicemi vektoru $\overline{v}$ v bázi tvořené vektory $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$.

Protože musí být jasné, ke kterému bázovému vektoru se která souřadnice vztahuje, při určování souřadnic musíme brát bázi jako uspořádanou množinu, zde $A = [\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n]$.

# Souřadnice vektoru v bázi – pokračování

## Souřadnice vektoru v bázi – označení

To, že má vektor $\overline{v}$ v bázi $A = [\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n]$ souřadnice $[v_1, \dots, v_n]^{\mathrm{T}}$, budeme zapisovat jako

$$[\overline{v}]_A = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Napíšeme-li

$$\overline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

bez dalšího označení, budeme tím myslet souřadnice $\overline{v}$ ve standardní bázi.

# Maticový zápis

## Zápis souřadnic maticově

Vyjádření vektoru $\overline{v}$ jako lineární kombinace vektorů $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ lze zapsat maticově:

$$\overline{v} = v_1\overline{a}_1 + \cdots + v_n\overline{a}_n = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \ldots & \overline{a}_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = A\,[\overline{v}]_A\,,$$

kde $A$ teď myslíme matici, jejíž sloupce jsou bázové vektory $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$.

# Příklad

## Příklad

Najděte vektor $\overline{v}$ (tj. určete jeho souřadnice ve standardní bázi), který má v bázi

$$A = [\overline{a}_1, \overline{a}_2] = \left[ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

souřadnice $[\overline{v}]_A = [4, 2]^{\mathrm{T}}$.

Vektor $\overline{v}$ určíme snadno, ale ukážeme zde i výpočet pomocí matice.

$$\overline{v} = 4\overline{a}_1 + 2\overline{a}_2 = 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Pomocí matice:

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

# Příklad – pokračování

## Příklad

Dále najděte souřadnice téhož vektoru $\overline{v}$ v bázi

$$B = [\overline{b}_1, \overline{b}_2] = \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right].$$

Můžeme využít toho, že už známe vyjádření vektoru $\overline{v}$ ve standardní bázi, víme, že $\overline{v} = [0, 4]^{\mathrm{T}}$. Chceme jej teď zapsat jako

$$\overline{v} = v_{1B}\overline{b}_1 + v_{2B}\overline{b}_2,$$

což vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} v_{1B} + \phantom{3}v_{2B} &= 0 \\ v_{1B} + 3v_{2B} &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_{1B} &= -2 \\ v_{2B} &= \phantom{-}2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [\overline{v}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

# Převod souřadnic bez „zastávky“ u standardní báze

Předpokládejme, že známe souřadnice $\overline{v}$ v bázi $A = [\overline{a}_1, \overline{a}_2]$ a chceme najít jeho souřadnice v bázi $B = [\overline{b}_1, \overline{b}_2]$. Kdybychom věděli, jaké jsou souřadnice vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ v bázi $B$, bylo by to snadné. Je-li

$$\overline{v} = v_{1A}\overline{a}_1 + v_{2A}\overline{a}_2, \quad \overline{a}_1 = c_{11}\overline{b}_1 + c_{21}\overline{b}_2, \ \overline{a}_2 = c_{12}\overline{b}_1 + c_{22}\overline{b}_2,$$

stačí dosadit:

$$\overline{v} = v_{1A}(c_{11}\overline{b}_1 + c_{21}\overline{b}_2) + v_{2A}(c_{12}\overline{b}_1 + c_{22}\overline{b}_2) = (c_{11}v_{1A} + c_{12}v_{2A})\overline{b}_1 + (c_{21}v_{1A} + c_{22}v_{2A})\overline{b}_2$$

Souřadnice $\overline{v}$ v bázi $B$ jsou tedy

$$\begin{array}{rcl} v_{1B} & = & c_{11}v_{1A} + c_{12}v_{2A} \\ v_{2B} & = & c_{21}v_{1A} + c_{22}v_{2A} \end{array} \quad \text{neboli} \quad [\overline{v}]_B = \begin{bmatrix} v_{1B} \\ v_{2B} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_{1A} \\ v_{2A} \end{bmatrix} \quad \text{neboli} \quad [\overline{v}]_B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} [\overline{v}]_A$$

Všimněme si, že matice má ve <u>sloupcích</u> souřadnice vektorů $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ v bázi $B$. Je to tzv. matice přechodu od báze $B$ k bázi $A$.
Maticově můžeme zapsat:

$$\overline{a}_1 = (\overline{b}_1 \quad \overline{b}_2) \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}, \quad \overline{a}_2 = (\overline{b}_1 \quad \overline{b}_2) \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}, \quad (\overline{a}_1 \quad \overline{a}_2) = (\overline{b}_1 \quad \overline{b}_2) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad A = B \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

# Matice přechodu pro předchozí příklad

Najdeme souřadnice vektorů $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ v bázi $B = [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ z předchozího příkladu:

$$A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2] = \left[\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right], \quad B = [\bar{b}_1, \bar{b}_2] = \left[\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right].$$

Podobně jako při hledání souřadnic vektoru $\bar{v}$ v bázi $B$ budeme řešit dvě soustavy rovnic – jednou pro pravou stranu $\bar{a}_1$, podruhé pro $\bar{a}_2$. Obě soustavy můžeme řešit současně a použít podobný postup jako při hledání inverzní matice:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & -1 & 2\\1 & 3 & 1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & -1 & 2\\0 & 2 & 2 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 3\\0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)$$

Tedy

$$[\bar{a}_1]_B = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, [\bar{a}_1]_B = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}.$$

Matice přechodu od $B$ k $A$ je tedy

$$\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}, \qquad \text{platí} \quad \begin{pmatrix}\bar{a}_1 & \bar{a}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{b}_1 & \bar{b}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}$$

Souřadnice $\bar{v}$ v bázi $B$ proto z jeho souřadnic v bázi $A$ můžeme vypočítat jako

$$[\bar{v}]_B = \begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}[\bar{v}]_A, \quad \text{zde konkrétně} \quad [\bar{v}]_B = \begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

# Matice přechodu a jejich použití

## Matice přechodu

Jsou-li $A = [\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]$, $B = [\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n]$ dvě báze téhož vektorového prostoru $V$, pak maticemi přechodu mezi bázemi $A$ a $B$ nazveme matice $C_{(A,B)}$ a $C_{(B,A)}$, pro které platí

$$\begin{aligned} (\bar{b}_1 \quad \ldots \quad \bar{b}_n) &= (\bar{a}_1 \quad \ldots \quad \bar{a}_2)\, C_{(A,B)} \\ (\bar{a}_1 \quad \ldots \quad \bar{a}_n) &= (\bar{b}_1 \quad \ldots \quad \bar{b}_2)\, C_{(B,A)} \end{aligned}$$

Ve sloupcích matice $C_{(A,B)}$ jsou souřadnice vektorů $\bar{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$ v bázi $A$ a ve sloupcích matice $C_{(B,A)}$ jsou souřadnice vektorů $\bar{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$ v bázi $B$.

## Vztah mezi maticemi

$$C_{(A,B)} = C^{-1}_{(B,A)}$$

## Použití matic přechodu pro transformaci souřadnic

$$[\bar{v}]_A = C_{(A,B)}[\bar{v}]_B, \qquad [\bar{v}]_B = C_{(B,A)}[\bar{v}]_A$$

(Když znám $[\bar{v}]_B$ a chci $[\bar{v}]_A$, potřebuji k tomu vyjádření vektorů $\bar{b}_i$ v bázi $A$, a naopak.)

# Výpočet matic přechodu

Symboly $A, B$ zde podle kontextu budeme myslet buď báze $A = [\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n]$, $B = [\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_n]$, nebo matice, jejichž sloupce jsou tvořeny bázovými vektory $\overline{a}_i$, resp. $\overline{b}_i$, $i = 1, \dots, n$.

## První metoda

Hledáme-li matici $C_{(A,B)}$, tj. tu, pro kterou platí $B = AC_{(A,B)}$, napíšeme vedle sebe matice $A$ a $B$. Levou část upravíme na jednotkovou matici. Co dostaneme v pravé části, je matice přechodu:

$$\left(A \mid B\right) \sim \left(I \mid C_{(A,B)}\right)$$

## Druhá metoda

$$C_{(A,B)} = A^{-1}B$$

Matice přechodu v opačném směru se najde analogicky.

# Matice přechodu ke standardní bázi a od ní k jiné

## Matice přechodu mezi bází $A$ a standardní bází

Označme pro tento moment standardní bázi jako

$$E = [\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n].$$

Protože standardní bázi odpovídá jednotková matice $I$, platí

$$C_{(A,E)} = A^{-1}, \qquad C_{(E,A)} = A$$

# Příklad na matice přechodu – cesta tam

## Příklad

Najděte obě matice přechodu mezi bázemi

$$A = \left[ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \right], \quad B = \left[ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right]$$

Hledáme-li matici $C_{(A,B)}$, snažíme se vyjádřit $\overline{b}_i$ jako lineární kombinace $\overline{a}_j$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&2&0\\0&1&0&1&0&1\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&2&0\\0&1&0&1&0&1\\0&-1&2&-1&-2&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&2&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&2&0&-2&2\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&2&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad C_{(A,B)} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Sloupce této matice jsou souřadnice vektorů $\overline{b}_i$ v bázi $A$. Mělo by tedy platit:

$$\overline{b}_1 = \overline{a}_1 + \overline{a}_2, \quad \overline{b}_2 = \overline{a}_1 - \overline{a}_3, \quad \overline{b}_3 = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3$$

Snadno se přesvědčíme, že to opravdu platí.
Známe-li vyjádření vektoru $\overline{v}$ v bázi $B$, pomocí matice $C_{(A,B)}$ najdeme jeho souřadnice v bázi $A$.

# Příklad na matice přechodu – a zase zpátky

$$A = \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right], \quad B = \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

Nyní hledáme matici $C_{(B,A)}$ a snažíme se vyjádřit $\overline{a}_i$ jako lineární kombinace $\overline{b}_j$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad C_{(B,A)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sloupce této matice jsou souřadnice vektorů $\overline{a}_i$ v bázi $B$. Mělo by tedy platit:

$$\overline{a}_1 = -\overline{b}_1 + \overline{b}_2 + \overline{b}_3, \quad \overline{a}_2 = 2\overline{b}_1 - \overline{b}_2 - \overline{b}_3, \quad \overline{a}_3 = -\overline{b}_1 + \overline{b}_3$$

Opět se přesvědčíme, že to platí.
Známe-li vyjádření vektoru $\overline{v}$ v bázi $A$, pomocí matice $C_{(B,A)}$ najdeme jeho souřadnice v bázi $B$.

# Příklad – využití matice přechodu

**Příklad**

Báze $A$, $B$ bereme z předchozího příkladu.
Souřadnice vektoru $\overline{v}$ v bázi $A$ jsou $[\overline{v}]_A = [1, -1, 2]^{\mathrm{T}}$. Určete jeho souřadnice v bázi $B$ a pak také ve standardní bázi.

$$[\overline{v}]_B = C_{(B,A)}[\overline{v}]_A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Zkuste k témuž dojít i tak, že do vyjádření $\overline{v} = \overline{a}_1 - \overline{a}_2 + 2\overline{a}_3$ dosadíte za vektory $\overline{a}_i$ jejich vyjádření v bázi $B$ (viz předchozí příklad).
Souřadnice ve standardní bázi získáme jako

$$\overline{v} = -5\overline{b}_1 + 2\overline{b}_2 + 4\overline{b}_3 = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{nebo též} \quad \overline{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Pro kontrolu vypočítáme souřadnice ve standardní bázi i z vyjádření $\overline{v}$ v bázi $A$:

$$\overline{v} = \overline{a}_1 - \overline{a}_2 + 2\overline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{nebo též} \quad \overline{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$