Matice a operace s nimi

Matice

Reálná matice typu $m \times n$

Maticí A typu $m \times n$ nad množinou reálných čísel budeme rozumět obdélníkové schéma o m řádcích a n sloupcích

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.
Čísla a_{ij} nazýváme prvky matice A.

Některé speciální typy matic

Čtvercová matice

$m = n$, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Obdélníková matice

$m \neq n$, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Horní) trojúhelníková

$a_{ij} = 0$ pro $i > j$, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonální matice

$a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Některé speciální typy matic

Nulová matice

$a_{ij} = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Můžeme značit O, např.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jednotková matice

Čtvercová matice, kde $a_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, jinak $a_{ij} = 0$.
Značíme I nebo E, případně se zdůrazněním rozměru I_n, resp. E_n, např.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sčítání a odčítání matic, násobení konstantou

Sčítání a odčítání matic

Matice sčítáme a odečítáme po složkách:
Jsou-li A, B matice typu $m \times n$, pak jejich součet, resp. rozdíl, je matice $C = A + B$, resp. $C = A - B$, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \text{resp. } c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Matice, které nejsou stejných rozměrů, sčítat a odečítat nelze.

Násobení matice konstantou

Matici s konstantou násobíme po složkách:
Je-li A matice typu $m \times n$ a $c \in \mathbb{R}$, pak $B = c \cdot A$ je matice typu $m \times n$ s prvky

$$b_{ij} = c \cdot a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Příklad na sčítání, odčítání a násobení konstantou

Příklad

Vypočtěte $A + B$ *a* $2A - 3B$ *pro matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad na sčítání, odčítání a násobení konstantou

Příklad

Vypočtěte $A + B$ *a* $2A - 3B$ *pro matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & -1-2 & 1+0 \\ 0+2 & 3+1 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

Matice transponovaná, symetrická matice

Matice transponovaná

Matice transponovaná k matici A typu $m \times n$ je matice $B = A^{\mathrm{T}}$ typu $n \times m$ s prvky

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Neboli: A^{T} vznikne z A záměnou řádků a sloupců.

Symetrická matice

Čtvercová matice A se nazývá symetrická, jestliže $A^{\mathrm{T}} = A$ neboli

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Příklad na transponování

Příklad

Vypočtěte matice $A^{\mathrm{T}}, B^{\mathrm{T}}$ *a* C^{T} *pro*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Je některá ze zadaných matic symetrická?

Příklad na transponování

Příklad

Vypočtěte matice A^{T}, B^{T} a C^{T} pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Je některá ze zadaných matic symetrická?

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Symetrická je matice C.

Násobení matic – předběžné připomenutí

Skalární součin vektorů – připomenutí ze SŠ

Skalární součin vektorů $\overline{u} = [u_1, u_2, u_3], \overline{v} = [v_1, v_2, v_3]$ vypočítáme jako

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

podobně pro vektory jiných rozměrů než z $\mathbb{R}^3$.

Násobení matic – předběžné připomenutí

Skalární součin vektorů – připomenutí ze SŠ

Skalární součin vektorů $\overline{u} = [u_1, u_2, u_3], \overline{v} = [v_1, v_2, v_3]$ vypočítáme jako

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

podobně pro vektory jiných rozměrů než z $\mathbb{R}^3$.

Příklad

Vypočtěte skalární součin vektorů

$$\overline{u} = [2, 1, -3], \quad \overline{v} = [4, -5, 1].$$

Násobení matic – předběžné připomenutí

Skalární součin vektorů – připomenutí ze SŠ

Skalární součin vektorů $\overline{u} = [u_1, u_2, u_3], \overline{v} = [v_1, v_2, v_3]$ vypočítáme jako

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

podobně pro vektory jiných rozměrů než z $\mathbb{R}^3$.

Příklad

Vypočtěte skalární součin vektorů

$$\overline{u} = [2, 1, -3], \quad \overline{v} = [4, -5, 1].$$

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 = 8 - 5 - 3 = 0$$

Ještě jedno připomenutí: Když vyšel skalární součin nulový, znamená to, že vektory $\overline{u}$ a $\overline{v}$ jsou

Násobení matic – předběžné připomenutí

Skalární součin vektorů – připomenutí ze SŠ

Skalární součin vektorů $\overline{u} = [u_1, u_2, u_3], \overline{v} = [v_1, v_2, v_3]$ vypočítáme jako

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

podobně pro vektory jiných rozměrů než z $\mathbb{R}^3$.

Příklad

Vypočtěte skalární součin vektorů

$$\overline{u} = [2, 1, -3], \quad \overline{v} = [4, -5, 1].$$

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 = 8 - 5 - 3 = 0$$

Ještě jedno připomenutí: Když vyšel skalární součin nulový, znamená to, že vektory $\overline{u}$ a $\overline{v}$ jsou kolmé.

Násobení a umocňování matic

Součin dvou matic

Je-li A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$, pak jejich součinem je matice $C = A \cdot B$ typu $m \times p$ s prvky

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p$$

Neboli: c_{ij} vznikne jako skalární součin i-tého řádku matice A s j-tým sloupcem matice B.

Součin AB existuje pouze tehdy, je-li počet sloupců matice A stejný jako počet řádků matice B. (Řádek A „pasuje“ na sloupec B.)

Druhá mocnina matice

Ke čtvercové matici A definujeme její druhou, případně n-tou ($n \in \mathbb{N}$), mocninu jako

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^n = \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{n\text{-krát}}.$$

Násobení matic

Příklad násobení matic typu 4×2 a 2×3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{b_{12}} & \boxed{b_{13}} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} & \boxed{b_{23}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32}} \\ a_{41} \quad a_{42} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}$$

Příklad na násobení matic

Příklad

Vypočítejte součiny AB, BA, AI_3, I_2A, AX a XA pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad na násobení matic

Příklad

Vypočítejte součiny AB, BA, AI_3, I_2A, AX a XA pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 15 \\ 10 & -2 & 12 \\ -7 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, I_2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, AX = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Součin XA nelze vypočítat.

Vlastnosti násobení matic

- Záleží na pořadí, v jakém matice násobíme!

  $$AB \text{ se většinou nerovná } BA.$$

  Násobení matic není komutativní.
- Násobení matic je asociativní:

  $$A(BC) = (AB)C$$

- Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání:

  $$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

- Násobení jednotkovou maticí původní matici nezmění:

  $$AI = A, \quad IA = A.$$

  Matice I funguje podobně jako jednička při násobení čísel.

Příklad na mocniny matice

Příklad

Vypočítejte A^2, A^3, A^n, $n \in \mathbb{N}$, *pro matici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad na mocniny matice

Příklad

Vypočítejte A^2, A^3, A^n, $n \in \mathbb{N}$, *pro matici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad na mocniny – pokračování

Zdá se, že by mohlo platit

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dokážeme to matematickou indukcí. Pro $n = 1, 2, 3$ výrok platí. Předpokládejme, že platí pro $n = k$, a dokážeme, že platí i pro $n = k + 1$:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naše hypotéza se tedy potvrdila.

Soustavy lineárních rovnic – maticový zápis

Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

můžeme zapsat jako

$$A\overline{x} = \overline{b},$$

kde A je matice soustavy, $\overline{x}$ je sloupcový vektor neznámých a $\overline{b}$ je sloupcový vektor pravých stran.

Násobení matic z jiného pohledu – kombinace sloupců

Příklad

Vypočtěte maticové součiny AS_1, AS_2 a AB, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}.$$

$$AS_1 = \begin{pmatrix} {\color{red}1} & {\color{blue}2} \\ {\color{red}3} & {\color{blue}4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} = x {\color{red}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} + y {\color{blue}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

Vznikla lineární kombinace sloupců matice A.
AS_2 bychom získali analogicky.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & u + 2v \\ 3x + 4y & 3u + 4v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS_1 & AS_2 \end{pmatrix}.$$

Sloupce výsledné matice jsou lineárními kombinacemi sloupců matice A. Způsob, jak sloupce A kombinovat, je určen sloupci matice B.

Násobení matic z jiného pohledu – kombinace řádků

Příklad

Vypočtěte maticové součiny R_1B, R_2B a AB, kde

$$R_1 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$R_1B = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Vznikla lineární kombinace řádků matice B.
R_2B bychom získali analogicky.

$$AB = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ u+3v & 2u+4v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1B \\ R_2B \end{pmatrix}.$$

Řádky výsledné matice jsou lineárními kombinacemi řádků matice B. Způsob, jak řádky B kombinovat, je určen řádky matice A.