Vektorový prostor

Začneme raději zlehka...

Vektory v $\mathbb{R}^n$

Zatím budeme pod pojmem vektor myslet uspořádanou n-tici reálných čísel. Prostor všech takových n-tic označíme např. $V_n(\mathbb{R})$ (ale lze použít i $\mathbb{R}^n$). Vektory budeme značit pruhem nahoře, např.

$$\overline{u} = [1, -2] \in V_2(\mathbb{R}), \overline{v} = [3, 0, 2] \in V_3(\mathbb{R}), \dots$$

S vektory se velmi často pracuje jako se sloupci, ale z úsporných důvodů je budeme zapisovat i jako řádky.

Násobení vektoru skalárem a součet vektorů

Pro $\overline{u}, \overline{v} \in V_n(\mathbb{R})$, $\overline{u} = [u_1, \dots, u_n], \overline{v} = [v_1, \dots, v_n]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\overline{u} + \overline{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n],$$

$$\alpha \cdot \overline{u} = [\alpha \cdot u_1, \dots, \alpha \cdot u_n].$$

Lineární kombinace vektorů

Lineární kombinace

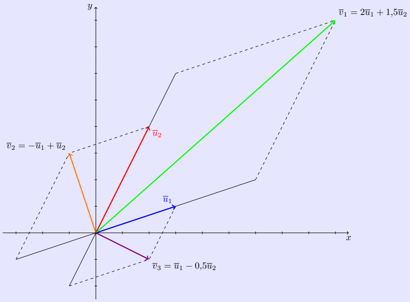
Řekneme, že vektor $\overline{v}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_m$, jestliže existují skaláry $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$\overline{v} = c_1\overline{u}_1 + c_2\overline{u}_2 + \cdots + c_m\overline{u}_m.$$

Příklad

Několik příkladů lineárních kombinací vektorů $\overline{u}_1 = [3,1], \overline{u}_2 = [2,4]$:

$\overline{v}_1 = 2\overline{u}_1 + 1{,}5\overline{u}_2 = [9,8]$
$\overline{v}_2 = -\overline{u}_1 + \overline{u}_2 = [-1,3]$
$\overline{v}_3 = \overline{u}_1 - 0{,}5\overline{u}_2 = [2,-1]$



Příklad na lineární kombinace

Příklad

Pro jakou hodnotu $k \in \mathbb{R}$ je vektor $\overline{v}$ lineární kombinací vektorů $\overline{u}_1, \overline{u}_2$?

$$\overline{v} = [1, 2, k], \qquad \overline{u}_1 = [1, 0, -2],\ \overline{u}_2 = [3, 1, 2]$$

Jaký je geometrický význam této úlohy?

Příklad na lineární kombinace

Příklad

Pro jakou hodnotu $k \in \mathbb{R}$ je vektor $\overline{v}$ lineární kombinací vektorů $\overline{u}_1, \overline{u}_2$?

$$\overline{v} = [1, 2, k], \qquad \overline{u}_1 = [1, 0, -2],\ \overline{u}_2 = [3, 1, 2]$$

Jaký je geometrický význam této úlohy?

Snažíme se vyjádřit $\overline{v}$ jako $c_1\overline{u}_1 + c_2\overline{u}_2$:

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & 3c_2 & = & 1 \\ & & c_2 & = & 2 \\ -2c_1 & + & 2c_2 & = & k \end{array} \qquad \text{z prvních dvou rovnic plyne} \qquad \begin{array}{rcr} c_1 & = & -5 \\ c_2 & = & 2 \end{array}$$

Aby třetí rovnice nebyla v rozporu s prvními dvěma, musí být $k = 14$.

Geometricky: Pro tuto hodnotu k leží vektor $\overline{v}$ v rovině, která prochází počátkem a je dána vektory $\overline{u}_1, \overline{u}_2$.

Lineární závislost a nezávislost

Lineární nezávislost a závislost

Řekneme, že vektory $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m \in V_n(\mathbb{R})$ jsou lineárně nezávislé, jestliže z rovnosti

$$c_1\overline{u}_1 + c_2\overline{u}_2 + \cdots + c_m\overline{u}_m = \overline{o}$$

plyne $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Jinými slovy: $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m$ jsou lineárně nezávislé, jestliže jediná možnost, jak získat nulový vektor jako jejich lineární kombinaci, je vynásobit všechny nulou.

V opačném případě jsou vektory lineárně závislé. V tomto případě najdeme $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, z nichž některé není rovno nule, taková že

$$c_1\overline{u}_1 + \cdots + c_m\overline{u}_m = \overline{o}.$$

Lineární závislost a nezávislost

Jak je to s nulovým vektorem?

Jakákoli množina vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá.

Jiná možnost, jak popsat závislost

Vektory $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m$ jsou lineárně závislé právě tehdy, je-li některý z nich lineární kombinací ostatních.

Tj., existuje-li $k \in \{1, \ldots, m\}$, pro které je

$$\overline{u}_k = \alpha_1 \overline{u}_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \overline{u}_{k-1} + \alpha_{k+1} \overline{u}_{k+1} + \cdots + \alpha_m \overline{u}_m$$

pro nějaké skaláry $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$.

Příklad na lineární závislost a nezávislost v $\mathbb{R}^2$

Příklad

Rozhodněte, zda jsou zadané vektory lineárně závislé nebo nezávislé.

a) $\overline{u}_1 = [2, 3], \overline{u}_2 = [6, 9]$

b) $\overline{u}_1 = [2, 3], \overline{u}_2 = [3, 2]$

Příklad na lineární závislost a nezávislost v $\mathbb{R}^2$

Příklad

Rozhodněte, zda jsou zadané vektory lineárně závislé nebo nezávislé.

a) $\overline{u}_1 = [2, 3], \overline{u}_2 = [6, 9]$

b) $\overline{u}_1 = [2, 3], \overline{u}_2 = [3, 2]$

a) Vidíme, že $\overline{u}_2 = 3\overline{u}_1$, a tedy jsou vektory lineárně závislé. Nebo též pomocí definice závislosti: $3\overline{u}_1 - \overline{u}_2 = \overline{o}$

b) Předvedeme pomocí definice – hledáme c_1, c_2 tak, aby $c_1\overline{u}_1 + c_2\overline{u}_2 = \overline{o}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 &= 0 \\ -5c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Jediné řešení je $c_1 = c_2 = 0$, vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

Příklad – pokračování

Příklad

c) $\overline{u}_1 = [2, 3], \overline{u}_2 = [3, 2], \overline{u}_3 = [4, 5]$

Příklad – pokračování

Příklad

c) $\overline{u}_1 = [2,3], \overline{u}_2 = [3,2], \overline{u}_3 = [4,5]$

c) Opět pomocí definice – hledáme c_1, c_2, c_3 tak, aby $c_1\overline{u}_1 + c_2\overline{u}_2 + c_3\overline{u}_3 = \overline{o}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 &= 0 \\ - 5c_2 - 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, jedno z nich dostaneme např. volbou $c_3 = -5$, pak $c_2 = 2$ a $c_1 = 7$. Tedy

$$7\overline{u}_1 + 2\overline{u}_2 - 5\overline{u}_3 = \overline{o}$$

nebo též

$$\overline{u}_3 = \frac{7}{5}\overline{u}_1 + \frac{2}{5}\overline{u}_2$$

Vektory $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ jsou lineárně závislé.

Závěry z předchozího příkladu

Kdy jsou dva vektory závislé?

Dva vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když je jeden z nich násobkem druhého.

Jak velkou skupinu nezávislých vektorů jsme schopni najít v $\mathbb{R}^2$?

Máme-li více než dva vektory z $\mathbb{R}^2$, jsou určitě lineárně závislé.

Jak je to ve vícerozměrných prostorech?

Máme-li více než dva vektory v $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, je situace složitější a závislost či nezávislost obvykle na první pohled rozeznat nelze.

Avšak je-li vektorů z $\mathbb{R}^n$ více než n, nemohou být lineárně nezávislé.

Příklad na lineární závislost a nezávislost v $\mathbb{R}^3$

Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_6$ lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou závislé, vyberte z nich co největší skupinu vektorů lineárně nezávislých.

$$\overline{u}_1 = [1, -1, 0], \quad \overline{u}_2 = [0, 1, 2], \quad \overline{u}_3 = [1, 0, 2], \quad \overline{u}_4 = [1, 2, 6], \quad \overline{u}_5 = [1, 0, -1], \quad \overline{u}_6 = [3, 1, 2]$$

Příklad na lineární závislost a nezávislost v $\mathbb{R}^3$

Příklad

Rozhodněte, zda jsou vektory $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_6$ lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou závislé, vyberte z nich co největší skupinu vektorů lineárně nezávislých.

$$\overline{u}_1 = [1,-1,0],\quad \overline{u}_2 = [0,1,2],\quad \overline{u}_3 = [1,0,2],\quad \overline{u}_4 = [1,2,6],\quad \overline{u}_5 = [1,0,-1],\quad \overline{u}_6 = [3,1,2]$$

Možná si něčeho všimneme na první pohled. Pokud ne, budeme postupovat algoritmicky a řešit, kdy je $c_1\overline{u}_1 + \cdots + c_6\overline{u}_6 = \overline{o}$. Protože na pravé straně jsou stále nuly, nebudeme už je zapisovat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1 \quad\; + c_3 + c_4 + c_5 + 3c_6 &= 0 \\ c_2 + c_3 + 3c_4 + c_5 + 4c_6 &= 0 \\ -3c_5 - 6c_6 &= 0 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, např. $[c_1, \dots, c_6] = [-1,-1,1,0,0,0]$ nebo $[-1,-3,0,1,0,0]$, atd. Vektory $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_6$ jsou tedy lineárně závislé.

Lineárně nezávislá je např. trojice vektorů $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_5$, protože v prvním, druhém a pátém sloupci vyšly pivoty – podrobněji bylo na přednášce.

Poznámka – redukovaný schodovitý tvar

V předchozím příkladu bychom matici mohli upravovat dále až na tzv. redukovaný schodovitý tvar.

Redukovaný schodovitý tvar (rref)

Matice je v redukovaném schodovitém tvaru (angl. reduced row echelon form), jestliže je ve schodovitém tvaru a navíc

- všechny pivoty jsou rovny 1,
- ve sloupcích nad pivoty jsou nuly.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Z původních vektorů $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_6$ jsou lineárně nezávislé ty, které jsou dány pozicemi pivotů, tj. zde první, druhý a pátý (na to nebylo potřeba schodovitý tvar redukovat). Navíc snadno vyčteme (podrobněji na přednášce), jakým způsobem jsou ostatní vektory závislé. Zde:

$$\overline{u}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \quad \overline{u}_4 = \overline{u}_1 + 3\overline{u}_2, \quad \overline{u}_6 = \overline{u}_1 + 2\overline{u}_2 + 2\overline{u}_5$$

Výběr lineárně nezávislých vektorů

Jak vybrat lineárně nezávislé vektory z větší skupiny

Vektory zapíšeme do matice jako sloupce, matici upravíme na schodovitý tvar. Z původních vektorů jsou lineárně nezávislé ty, které jsou na pozicích sloupců, kde vyšly pivoty.

Alternativní postup

V malém, „ručně“ řešeném příkladu si můžeme různých závislostí všimnout na první pohled.
Nebo: Vektory zapíšeme do matice jako řádky a matici upravíme na schodovitý tvar. Z původních vektorů jsou nezávislé ty, které jsou na pozicích nenulových řádků v upraveném tvaru. Nevýhodou je, že si musíme pamatovat případné výměny řádků.

Řádková a sloupcová hodnost matice

Řádková hodnost matice

Řádková hodnost matice A udává maximální počet lineárně nezávislých vektorů, které lze vybrat z řádků matice A.

Sloupcová hodnost matice

Sloupcová hodnost matice A je maximální počet lineárně nezávislých vektorů, které lze vybrat ze sloupců matice A.

Příklad na výpočet řádkové a sloupcové hodnosti

Příklad

Určete řádkovou a sloupcovou hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Příklad na výpočet řádkové a sloupcové hodnosti

Příklad

Určete řádkovou a sloupcovou hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Hodnosti poznáme úpravou matice na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix}$$

Třetí řádek se vynuloval, tzn. byl lineární kombinací prvních dvou, zde konkrétně rekapitulací úprav:

$$(\bar{r}_3 - \bar{r}_1) + (\bar{r}_2 - 2\bar{r}_1) = \bar{o}, \quad \text{tj.} \quad \bar{r}_3 = 3\bar{r}_1 - \bar{r}_2.$$

Zbývající řádky jsou lineárně nezávislé. Řádková hodnost je proto 2.

První dva sloupce jsou nezávislé, zatímco třetí a čtvrtý jsou jejich lineárními kombinacemi:

$$\bar{s}_3 = -\bar{s}_1 + 2\bar{s}_2, \quad \bar{s}_4 = 2\bar{s}_1 - 6\bar{s}_2$$

Sloupcová hodnost je proto také 2.

Obě hodnosti vyšly stejné. Je to náhoda, nebo zákonitost?

Hodnost matice

Řádková a sloupcová hodnost je stejná

Řádková a sloupcová hodnost matice A se sobě rovnají, a proto už dále mezi nimi nebudeme rozlišovat.

Hodnost matice – označení

Hodnost matice A označíme $h(A)$ nebo též $rank(A)$.

Jak hodnost určit

Hodnost matice A je počet nenulových řádků po úpravě A na schodovitý tvar.

Návrat k soustavám lineárních rovnic – Frobeniova věta

Frobeniova věta

Soustava lineárních rovnic $A\overline{x} = \overline{b}$ má alespoň jedno řešení právě tehdy, když je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy,

$$h(A|b) = h(A).$$

Řádkový pohled na věc

$\bullet \dots$ nenulové číslo, $* \dots$ jakékoli číslo

právě jedno řešení	více řešení (v $\mathbb{R}$ ∞ řešení)	žádné řešení
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccccc\|c} \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccccc\|c} \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{array}\right)$

Sloupcový pohled na věc

Soustava má řešení právě tehdy, je-li vektor $\overline{b}$ na pravé straně soustavy lineární kombinací sloupců matice A. Tj., pokud se jeho přidáním ke sloupcům nezvýší hodnost matice.

Příklad – počet řešení, $\mathbb{R}$ versus konečné pole

Příklad

Najděte všechna řešení zadané soustavy rovnic, a to a) v $\mathbb{R}$, b) v $\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Příklad – počet řešení, $\mathbb{R}$ versus konečné pole

Příklad

Najděte všechna řešení zadané soustavy rovnic, a to a) v $\mathbb{R}$, b) v $\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

a) Soustava má nekonečně mnoho řešení: $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$, $x_3 = t$, $x_2 = s$, $s \in \mathbb{R}$, $x_1 = 1 - s - t$. Množina všech řešení je

$$\{[1 - s - t, s, t, t]; t, s \in \mathbb{R}\}$$

b) V $\mathbb{Z}_2$ máme jen dvě možné volby pro parametr t a dvě volby pro parametr s: 0 a 1. Množina všech řešení je proto

$$\{[1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1], [0, 1, 0, 0], [1, 1, 1, 1]\}.$$

Čtvercové matice – přehled souvislostí

$A \ldots$ reálná čtvercová matice $n \times n$.

Regulární matice

- $|A| \neq 0$
- A^{-1} existuje
- $h(A) = n$
- řádky A jsou lineárně nezávislé
- sloupce A jsou lineárně nezávislé
- soustava $A\overline{x} = \overline{b}$ má právě jedno řešení pro každou pravou stranu $\overline{b}$
- soustava $A\overline{x} = \overline{o}$ má pouze nulové řešení

Singulární matice

- $|A| = 0$
- A^{-1} neexistuje
- $h(A) < n$
- řádky A jsou lineárně závislé
- sloupce A jsou lineárně závislé
- soustava $A\overline{x} = \overline{b}$ má buď nekonečně mnoho řešení, nebo žádné; záleží na $\overline{b}$
- soustava $A\overline{x} = \overline{o}$ má i nenulová řešení

Vektorový podprostor prostoru $V_n(\mathbb{R})$

Vektorový podprostor prostoru $V_n(\mathbb{R})$

Buď $W \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná množina. $W(\mathbb{R})$ je vektorový podprostor $V_n(\mathbb{R})$ právě tehdy, když

- $\overline{u} + \overline{v} \in W$ pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in W$,
- $\alpha \cdot \overline{u} \in W$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{u} \in W$.

Každý vektorový podprostor musí obsahovat nulový vektor!

Každý vektorový podprostor je sám o sobě vektorovým prostorem. (Bude vysvětleno podrobněji, až bude definován vektorový prostor obecně.)

Vektorové podprostory – příklady

Příklad

Rozhodněte, zda dané množiny tvoří vektorové podprostory daného prostoru V nad polem reálných čísel.

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{[x, y]; x \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{[x, y, 0]; x, y \in \mathbb{R}\}$

c) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{[1, y, z]; y, z \in \mathbb{R}\}$

Vektorové podprostory – příklady

Příklad

Rozhodněte, zda dané množiny tvoří vektorové podprostory daného prostoru V nad polem reálných čísel.

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{[x, y]; x \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{[x, y, 0]; x, y \in \mathbb{R}\}$

c) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{[1, y, z]; y, z \in \mathbb{R}\}$

a) Ne: např. $-1 \cdot [1, 1] = [-1, -1] \notin W$

b) Ano: Součet dvou vektorů typu $[x, y, 0]$ má opět třetí složku 0, tj. náleží do W. Stejně tak libovolný reálný násobek takového vektoru.

c) Ne: např. $[1, 2, 3] + [1, 4, 5] = [2, 6, 8] \notin W$. Množina W také neobsahuje nulový vektor, takže vektorovým podprostorem být nemůže.

Vektorové podprostory – příklady

Příklad

Rozhodněte, zda dané množiny tvoří vektorové podprostory daného prostoru V nad polem reálných čísel.

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{[x, y]; x \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{[x, y, 0]; x, y \in \mathbb{R}\}$

c) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{[1, y, z]; y, z \in \mathbb{R}\}$

a) Ne: např. $-1 \cdot [1, 1] = [-1, -1] \notin W$

b) Ano: Součet dvou vektorů typu $[x, y, 0]$ má opět třetí složku 0, tj. náleží do W. Stejně tak libovolný reálný násobek takového vektoru.

c) Ne: např. $[1, 2, 3] + [1, 4, 5] = [2, 6, 8] \notin W$. Množina W také neobsahuje nulový vektor, takže vektorovým podprostorem být nemůže.

Triviální podprostor

Každý vektorový prostor má triviální podprostor: jednoprvkovou množinu $\{\overline{o}\}$.

Také je každý prostor podprostorem sama sebe.

Množina generující prostor

Generátory vektorového prostoru

Buď V vektorový prostor a $M \subseteq V$ jeho podmnožina. Řekneme, že množina M generuje prostor V, jestliže každý vektor $\overline{v} \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků množiny M, tj. existují skaláry $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ a vektory $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_m \in V$, pro které platí

$$\overline{v} = c_1\overline{u}_1 + \cdots + c_m\overline{u}_m.$$

Množinu M pak nazveme systémem generátorů vektorového prostoru V a píšeme

$$V = \langle M \rangle .$$

V se také nazývá lineární obal množiny M a píšeme

$$V = \mathrm{span}\,(M).$$

Generování prostoru – příklad

Příklad

Jaké vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ jsou generovány danými množinami?

a) $M \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{[1, 2]\}$

b) $M \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{[1, 2], [-2, -4]\}$

c) $M \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{[1, 2], [-2, 4]\}$

d) $M \subset \mathbb{R}^3$, $M = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0]\}$

Generování prostoru – příklad

Příklad

Jaké vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ jsou generovány danými množinami?

a) $M \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{[1, 2]\}$
b) $M \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{[1, 2], [-2, -4]\}$
c) $M \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{[1, 2], [-2, 4]\}$
d) $M \subset \mathbb{R}^3$, $M = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0]\}$

a) $\langle M \rangle = \{c[1, 2]; c \in \mathbb{R}\}$, tj. přímka v rovině
b) Prvky M jsou tvaru $\overline{v} = c_1[1, 2] + c_2[-2, -4] = (c_1 - 2c_2)[1, 2]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Jedná se o tutéž přímku jako v a).
c) Prvky M jsou tvaru $\overline{v} = c_1[1, 2] + c_2[-2, 4] = [c_1 - 2c_2, 2c_1 + 4c_2]$. Tímto způsobem se podaří vyjádřit jakýkoli vektor z $\mathbb{R}^2$ (podrobněji na přednášce), proto $\langle M \rangle = \mathbb{R}^2$
d) $\langle M \rangle = \{[c_1, c_2, 0]; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, jedná se o rovinu xy v $\mathbb{R}^3$

Generování prostoru – příklad

Příklad

Rozhodněte, zda je vektor $\overline{v}$ prvkem $\langle\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\rangle$.

$$\overline{v} = [1, 2, 3], \qquad \overline{u}_1 = [1, 0, -2], \overline{u}_2 = [3, 1, 2], \overline{u}_3 = [1, 1, 6]$$

Generování prostoru – příklad

Příklad

Rozhodněte, zda je vektor $\overline{v}$ prvkem $\langle\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\rangle$.

$$\overline{v} = [1, 2, 3], \qquad \overline{u}_1 = [1, 0, -2], \overline{u}_2 = [3, 1, 2], \overline{u}_3 = [1, 1, 6]$$

Mělo by platit $\overline{v} = c_1\overline{u}_1 + c_2\overline{u}_2 + c_3\overline{u}_3$:

$$[c_1 + 3c_2 + c_3, \quad c_2 + c_3, \quad -2c_1 + 2c_2 + 6c_3] = [1,\ 2,\ 3]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení, a proto $\overline{v} \notin \langle\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}\rangle$.

Co kdyby měl vektor $\overline{u}_3$ poslední složku 7, a ne 6?
Co kdyby měl vektor $\overline{v}$ poslední složku 14, a ne 3?

Báze vektorového prostoru

Báze vektorového prostoru

Vektory $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V, jestliže

- $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$ jsou lineárně nezávislé,
- $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$ generují celý prostor V, tj. $V = \langle\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\}\rangle$.

Báze vektorového prostoru

Báze vektorového prostoru

Vektory $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V, jestliže

- $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n$ jsou lineárně nezávislé,
- $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n$ generují celý prostor V, tj. $V = \langle \{\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n\} \rangle$.

Příklad

Rozhodněte, zda zadané vektory tvoří bázi zadaného prostoru V. Pokud ne, lze je na bázi doplnit?

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\overline{u}_1 = [1, 0], \overline{u}_2 = [0, 1]$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\overline{u}_1 = [1, 2, 0], \overline{u}_2 = [1, 0, 1], \overline{u}_3 = [2, 2, 1]$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $\overline{u}_1 = [1, 2, 0], \overline{u}_2 = [1, 0, 1]$

d) $V = \mathbb{R}^3$, $\overline{u}_1 = [1, 2, 3], \overline{u}_2 = [0, 4, 5], \overline{u}_3 = [0, 0, 6]$

Báze vektorového prostoru

Báze vektorového prostoru

Vektory $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru V, jestliže

- $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$ jsou lineárně nezávislé,
- $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$ generují celý prostor V, tj. $V = \langle\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\}\rangle$.

Příklad

Rozhodněte, zda zadané vektory tvoří bázi zadaného prostoru V. Pokud ne, lze je na bázi doplnit?

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\overline{u}_1 = [1, 0], \overline{u}_2 = [0, 1]$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\overline{u}_1 = [1, 2, 0], \overline{u}_2 = [1, 0, 1], \overline{u}_3 = [2, 2, 1]$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $\overline{u}_1 = [1, 2, 0], \overline{u}_2 = [1, 0, 1]$

d) $V = \mathbb{R}^3$, $\overline{u}_1 = [1, 2, 3], \overline{u}_2 = [0, 4, 5], \overline{u}_3 = [0, 0, 6]$

a) Ano, je to tzv. standardní báze $\mathbb{R}^2$.
b) Ne, vektory jsou lineárně závislé, $\overline{u}_3 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$.
c) Ne, vektory jsou sice nezávislé, ale negenerují celý prostor $\mathbb{R}^3$, pouze jeho podprostor – rovinu. Přidáním např. vektoru $[0, 0, 1]$ dostaneme bázi $\mathbb{R}^3$.
d) Ano (podrobněji na přednášce).

Standardní báze, souřadnice vektoru v bázi

Standardní báze $\mathbb{R}^n$

Standardní báze prostoru $\mathbb{R}^n$ je tvořena vektory $\overline{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, které mají na i-té pozici jedničku a jinak samé nuly. Např. pro $\mathbb{R}^3$:

$$\overline{e}_1 = [1, 0, 0], \quad \overline{e}_2 = [0, 1, 0], \quad \overline{e}_3 = [0, 0, 1].$$

Každý vektor je kombinací bázových vektorů

Má-li vektorový prostor V bázi tvořenou vektory $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m$, pak libovolný vektor $\overline{v} \in V$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů:

$$\overline{v} = v_1\overline{u}_1 + \cdots + v_m\overline{u}_m.$$

Souřadnice vektoru v bázi

Uspořádanou m-tici čísel $[v_1, \ldots, v_m]$ z výše uvedeného vyjádření vektoru $\overline{v}$ v bázi $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m$ nazveme souřadnicemi vektoru $\overline{v}$ v bázi $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m$.

Příklad na určení souřadnic

Příklad

Určete souřadnice vektoru $\overline{v} = [3, -1]$

- ve standardní bázi $\mathbb{R}^2$,
- v bázi tvořené vektory $\overline{u}_1 = [1, 1], \overline{u}_2 = [0, 1]$.

Příklad na určení souřadnic

Příklad

Určete souřadnice vektoru $\overline{v} = [3, -1]$

- ve standardní bázi $\mathbb{R}^2$,
- v bázi tvořené vektory $\overline{u}_1 = [1, 1], \overline{u}_2 = [0, 1]$.

Souřadnice ve standardní bázi $\overline{e}_1 = [1, 0], \overline{e}_2 = [0, 1]$ jsou zřejmě $[v_1, v_2] = [3, -1]$, protože

$$\overline{v} = 3[1, 0] + (-1)[0, 1].$$

Označme souřadnice v bázi $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ jako $[v_1', v_2']$. Má platit

$$\overline{v} = v_1'\overline{u}_1 + v_2'\overline{u}_2,$$

rozepsáno

$$\begin{aligned} v_1' \phantom{{}+ v_2'} &= 3 \\ v_1' + v_2' &= -1 \end{aligned}$$

Tedy $\overline{v}$ má v bázi $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ souřadnice $[3, -4]$.

Poučení z předchozího příkladu

Jeden a týž vektor z $\mathbb{R}^2$ (obecně $\mathbb{R}^n$) může být popsán různými dvojicemi (obecně n-ticemi) čísel!

Záleží na tom, s jakou bází pracujeme.

Podrobněji se k tomu ještě vrátíme později.

Dimenze vektorového prostoru

Konečněrozměrný prostor

Vektorový prostor se nazývá konečněrozměrný (případně konečně generovaný) jestliže existuje konečná množina vektorů $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$, která tento prostor generuje.
V opačném případě je nekonečněrozměrný.

Mohou existovat báze o různých počtech prvků?

Je-li V konečněrozměrný prostor, pak všechny jeho báze mají stejný počet prvků.

Dimenze vektorového prostoru

Počet prvků báze konečněrozměrného prostoru V se nazývá dimenze tohoto prostoru, značíme $\dim V$.
Pro nekonečněrozměrný prostor V je $\dim V = \infty$.

Příklady na dimenzi a bázi

Dimenze a příklad báze $\mathbb{R}^n$

Prostor $\mathbb{R}^n$ má dimenzi n. Příkladem báze je báze standardní $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$, ale rozhodně to není jediná možná báze tohoto prostoru.

Příklad

Určete dimenzi a uveďte příklad báze podprostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory

$$\overline{u}_1 = [1, 2, -2, -1], \overline{u}_2 = [1, 1, -1, -1], \overline{u}_3 = [2, 3, -3, -2], \overline{u}_4 = [-1, 0, 0, 1].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z vektorů $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_4$ lze vybrat 2 lineárně nezávislé, např. $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ – tyto vektory tvoří bázi prostoru $\langle\{\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_4\}\rangle$. Existují ale i jiné báze tohoto prostoru, např. $\overline{u}_1, \overline{u}_3$ nebo $\overline{u}_2, \overline{u}_4$, atd.

Dimenze je tedy 2.

Součet a průnik vektorových prostorů

Součet a průnik vektorových prostorů

Jsou-li V_1, V_2 dva podprostory stejného vektorového prostoru, pak jejich součtem rozumíme množinu

$$V_1 + V_2 = \{\overline{w}; \overline{w} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2, \overline{v}_1 \in V_1, \overline{v}_2 \in V_2\}.$$

a jejich průnikem je množina

$$V_1 \cap V_2 = \{\overline{w}; \overline{w} \in V_1 \wedge \overline{w} \in V_2\}.$$

Vztah mezi dimenzemi

Součet a průnik dvou vektorových prostorů jsou opět vektorové prostory. Mezi dimenzemi platí vztah

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$