Cramerovo pravidlo

Opakování

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcl l l} a_1x + a_2y & = & p & / \cdot b_2 & / \cdot (-b_1) \\ b_1x + b_2y & = & q & / \cdot (-a_2) & / \cdot a_1 \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = pb_2 - a_2q \quad \Rightarrow \quad x = \frac{pb_2 - a_2q}{a_1b_2 - a_2b_1} =$$

Opakování

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rclll} a_1x + a_2y & = & p & / \cdot b_2 & / \cdot (-b_1) \\ b_1x + b_2y & = & q & / \cdot (-a_2) & / \cdot a_1 \end{array}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x = pb_2 - a_2 q \quad \Rightarrow \quad x = \frac{pb_2 - a_2 q}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} p & a_2 \\ q & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Opakování

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcllll} a_1x + a_2y & = & p & / \cdot b_2 & & / \cdot (-b_1) \\ b_1x + b_2y & = & q & / \cdot (-a_2) & & / \cdot a_1 \end{array}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x = pb_2 - a_2 q \quad \Rightarrow \quad x = \frac{pb_2 - a_2 q}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} p & a_2 \\ q & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)y = a_1 q - pb_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_1 q - pb_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} =$$

Opakování

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcllll} a_1x + a_2y & = & p & / \cdot b_2 & / \cdot (-b_1) \\ b_1x + b_2y & = & q & / \cdot (-a_2) & / \cdot a_1 \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = pb_2 - a_2q \quad \Rightarrow \quad x = \frac{pb_2 - a_2q}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} p & a_2 \\ q & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1q - pb_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_1q - pb_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p \\ b_1 & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Opakování

Příklad (3 rovnice)

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rclr} a_1x + a_2y + a_3z & = & p & / \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) \\ b_1x + b_2y + b_3z & = & q & / \cdot (-a_2c_3 + a_3c_2) \\ c_1x + c_2y + c_3z & = & r & / \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) \end{array}$$

Vynásobením výše uvedenými výrazy a sečtením všech rovnic vyloučíme neznámé y a z a zbude

$$x(a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3) = pb_2c_3 + a_3qc_2 + a_2b_3r - a_3b_2r - pb_3c_2 - a_2qc_3$$

Tedy

$$x = \frac{pb_2c_3 + a_3qc_2 + a_2b_3r - a_3b_2r - pb_3c_2 - a_2qc_3}{\color{red}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}} = \frac{\begin{vmatrix} p & a_2 & a_3 \\ q & b_2 & b_3 \\ r & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Podobně bychom dostali y a z.

Cramerovo pravidlo

Z předchozích příkladů vidíme, že neznámé v soustavě lineárních rovnic lze vyjádřit jako podíly determinantů.

Cramerovo pravidlo

Z předchozích příkladů vidíme, že neznámé v soustavě lineárních rovnic lze vyjádřit jako podíly determinantů.

Cramerovo pravidlo

Je-li A čtvercová matice s nenulovým determinantem, pak pro řešení soustavy lineárních rovnic

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

platí

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

kde A_i je matice, která vznikla z matice A nahrazením i-tého sloupce vektorem pravých stran $\overline{b}$.

Příklad na použití Cramerova pravidla

Cramerovo pravidlo se výborně hodí na malé soustavy rovnic s „ošklivými“ koeficienty.

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 0{,}3x + 1{,}7y &= 2{,}2 \\ 1{,}1x + 2{,}4y &= 4{,}5 \end{aligned}$$

Příklad na použití Cramerova pravidla

Cramerovo pravidlo se výborně hodí na malé soustavy rovnic s „ošklivými“ koeficienty.

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 0{,}3x + 1{,}7y &= 2{,}2 \\ 1{,}1x + 2{,}4y &= 4{,}5 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2{,}2 & 1{,}7 \\ 4{,}5 & 2{,}4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}3 & 1{,}7 \\ 1{,}1 & 2{,}4 \end{vmatrix}} = \frac{-2{,}37}{-1{,}15} = \frac{237}{115} \doteq 2{,}061, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}3 & 2{,}2 \\ 1{,}1 & 4{,}5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}3 & 1{,}7 \\ 1{,}1 & 2{,}4 \end{vmatrix}} = \frac{-1{,}07}{-1{,}15} = \frac{107}{115} \doteq 0{,}930$$

Další příklad na použití Cramerova pravidla

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} ax - y \phantom{{}-az} &= a \\ 2x \phantom{{}-y} - az &= 5 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

Další příklad na použití Cramerova pravidla

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} ax - y &= a \\ 2x - az &= 5 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2a^2 - 2 = 2(a^2 - 1)$$

Musíme rozlišit případy, kdy je $|A| \neq 0$ a $|A| = 0$. Zřejmě

$$|A| = 0 \quad \text{pro} \quad a = \pm 1$$

Příklad – pokračování

Pro $a \neq \pm 1$ můžeme použít Cramerovo pravidlo:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -a \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3a + 2a^2 - 5, \quad x = \frac{2a^2+3a-5}{2(a-1)(a+1)} = \frac{2a+5}{2a+2}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & 5 & -a \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3a^2 - 3a, \quad y = \frac{3a^2-3a}{2(a-1)(a+1)} = \frac{3a}{2a+2}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6a + 6, \quad z = \frac{-6a+6}{2(a-1)(a+1)} = \frac{-3}{a+1}$$

Pro $a \neq \pm 1$ má soustava právě jedno řešení, a to

$$\left[\frac{2a+5}{2a+2}, \frac{3a}{2a+2}, \frac{-3}{a+1}\right].$$

Příklad – pokračování

Situaci pro $a = \pm 1$ vyšetříme zvlášť. Cramerovo pravidlo zde použít nelze.

Pro $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - y \phantom{{}-z} &= 1 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Můžeme zvolit např. $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, a pak

$$z = 2t - 3, \quad x = t + 1.$$

Množina všech řešení soustavy je

$$\{[t+1, t, 2t-3], t \in \mathbb{R}\}.$$

Příklad – pokračování

Pro $a = -1$ máme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - y \phantom{{}-z} &= 1 \\ 2y - z &= 3 \\ 0 &= 6 \end{aligned}$$

Tato soustava nemá žádné řešení.

Inverzní matice

Analogie s násobením reálných čísel

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Už víme, že jednotková matice I je analogie jedničky při násobení reálných čísel:

$$AI = IA = A \quad \text{podobně jako} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}$$

Analogie s násobením reálných čísel

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Už víme, že jednotková matice I je analogie jedničky při násobení reálných čísel:

$$AI = IA = A \quad \text{podobně jako} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}$$

Pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje číslo a^{-1}, pro které platí

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Je něco podobného možné i pro matice?

Inverzní matice, regulární a singulární matice

Inverzní matice

Buď A čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice B, pro kterou platí

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

nazveme ji inverzní maticí k matici A a označíme jako A^{-1}.

Tedy A^{-1} je matice, pro kterou platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Inverzní matice, regulární a singulární matice

Inverzní matice

Buď A čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice B, pro kterou platí

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

nazveme ji inverzní maticí k matici A a označíme jako A^{-1}.

Tedy A^{-1} je matice, pro kterou platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Regulární a singulární matice

Matice, ke které existuje inverze, se nazývá regulární nebo též invertibilní.
Čtvercová matice, ke které inverze neexistuje, se nazývá singulární.

Regularita nebo singularita matice úzce souvisí s determinantem, viz dál.

Návodný příklad, jak hledat inverzi

Příklad

Najděte (pokud existuje) inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Návodný příklad, jak hledat inverzi

Příklad

Najděte (pokud existuje) inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Hledáme matici

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{pro kterou} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{tj.} \quad \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 & y_1 - 3y_2 \\ -2x_1 + 8x_2 & -2y_1 + 8y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad – pokračování

Musíme vyřešit čtyři rovnice o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 8x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 - 3y_2 &= 0 \\ -2y_1 + 8y_2 &= 1 \end{aligned}$$

Rovnice s neznámými x_1, x_2 mají stejnou matici jako rovnice s neznámými y_1, y_2, liší se pouze pravou stranou.
Můžeme je proto řešit simultánně:

$$\left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ II + 2I \end{array}$$

Teď bychom sice již mohli neznámé vypočítat, ale pokračujeme v úpravách.

Příklad – pokračování

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right)_{\frac{1}{2}II} \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{array}\right)^{I+3II}$$

Upravené soustavy jsou nyní

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= 4 \qquad & y_1 \quad &= 3/2 \\ x_2 &= 1 & y_2 &= 1/2 \end{aligned}$$

$$\text{Pro } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \text{ je tedy } A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ověřte sami, že platí $AA^{-1} = I$ a $A^{-1}A = I$.

Výpočet inverzní matice pomocí eliminace

Postup, jak hledat inverzi

Inverzi k matici A můžeme hledat tak, že napíšeme vedle sebe matici A a jednotkovou matici. Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme A na jednotkovou matici. Napravo tím dostaneme matici inverzní.

$$(A|I) \sim (I|A^{-1})$$

V případě, že A na jednotkovou matici převést nelze, inverze neexistuje.

Příklad

Příklad

Najděte (pokud existuje) inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Příklad

Najděte (pokud existuje) inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \leftrightarrow II \\ \\ III - 2II \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 3II \end{array}$$

A na jednotkovou matici převést nelze, A je singulární matice a inverze k ní neexistuje.

Návodný příklad, jak hledat inverzi – jiná metoda

Příklad

Najděte (pokud existuje) inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Návodný příklad, jak hledat inverzi – jiná metoda

Příklad

Najděte (pokud existuje) inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

a podobné soustavy rovnic platí pro $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$.

Soustavu tentokrát vyřešíme Cramerovým pravidlem, při výpočtu x_i determinant rozvineme podle i-tého sloupce:

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Abychom získali první sloupec A^{-1}, počítáme algebraické doplňky (kofaktory) prvků z prvního řádku matice A. Podobně bychom vypočítali y_i a z_i, $i = 1, 2, 3$, tam bychom potřebovali kofaktory k prvkům ze druhého, resp. třetího, řádku.

Matice adjungovaná

Matice adjungovaná

Matici adjungovanou ke čtvercové matici A definujeme jako

$$\operatorname{adj} A = A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk (kofaktor) prvku a_{ij} :
$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} je determinant z matice vzniklé z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Neboli: A^* vznikne z A tak, že každý prvek nahradíme jeho kofaktorem a pak ještě matici transponujeme.

Výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované

Postup, jak hledat inverzi

Pro čtvercovou matici A s nenulovým determinantem platí

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

Je-li determinant matice A nulový, inverze neexistuje.

Inverze k matici druhého řádu

Speciálně pro matici druhého řádu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kde $|A| \neq 0$,

touto metodou dostáváme:

Výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované

Postup, jak hledat inverzi

Pro čtvercovou matici A s nenulovým determinantem platí

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*.$$

Je-li determinant matice A nulový, inverze neexistuje.

Inverze k matici druhého řádu

Speciálně pro matici druhého řádu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kde $|A| \neq 0$,

touto metodou dostáváme:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Dokončení příkladu

Hledáme inverzi k matici A pomocí determinantu a matice adjungované – nezapomenout na znaménka a na transponování!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |A| = 6$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

Příklad – řešení soustavy rovnic pomocí inverze

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

Příklad – řešení soustavy rovnic pomocí inverze

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

Soustavu lze přepsat jako $A\overline{x} = \overline{b}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rovnici $A\overline{x} = \overline{b}$ vynásobíme maticí A^{-1}, a to zleva:

$$A^{-1}A\overline{x} = A^{-1}\overline{b} \quad \Rightarrow \quad I\overline{x} = A^{-1}\overline{b} \quad \Rightarrow \quad \overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Příklad – řešení maticové rovnice pomocí inverze

Příklad

Najděte matici X, pro kterou platí

$$XB = C, \quad \text{kde} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad – řešení maticové rovnice pomocí inverze

Příklad

Najděte matici X, pro kterou platí

$$XB = C, \quad \text{kde} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rovnici vynásobíme maticí B^{-1}, a to zprava:

$$XBB^{-1} = CB^{-1} \quad \Rightarrow \quad XI = CB^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = CB^{-1}$$

Matice B je výsledek jednoho z předchozích příkladů,

$$B = A^{-1}, \quad \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Potřebujeme matici $B^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1}$, což je A.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice – shrnutí

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- K některým čtvercovým maticím inverze neexistuje.
- Pokud inverze existuje, je daná jednoznačně.
- Inverze k A existuje právě tehdy, když je $|A| \neq 0$.
- Pro regulární matici A platí $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Jsou-li A, B regulární matice, pak AB je také regulární a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Pro regulární matici A platí $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

Vlastnosti výpočetních metod

- Výpočet pomocí adjungované matice je vhodný především pro „malé" matice, zejména pro matice druhého řádu.
- Pro větší matice je zpravidla vhodnější metoda eliminační.
- Je-li A regulární matice, pak řešení soustavy $A\overline{x} = \overline{b}$ lze najít jako $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$.
  Tento postup je vhodný, když A^{-1} známe nebo když řešíme více soustav lišících se jen pravou stranou. Pro jednorázové vyřešení soustavy je efektivnější úprava na trojúhelníkový tvar.