Vektorový prostor

Vektorový prostor – brutálně zjednodušená verze

Co si představit pod pojmem vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

Za vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ můžeme považovat neprázdnou množinu V určitých objektů, které lze „rozumně“ sčítat mezi sebou a násobit reálnými čísly, přičemž

- $\overline{u} + \overline{v} \in V \quad \forall \overline{u}, \overline{v} \in V$,
- $\alpha \cdot \overline{u} \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \overline{u} \in V$

Místo $\mathbb{R}$ můžeme pracovat také s $\mathbb{C}$ nebo s $\mathbb{Z}_n$ (viz IDM).

Vektorový prostor – brutálně zjednodušená verze

Co si představit pod pojmem vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

Za vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ můžeme považovat neprázdnou množinu V určitých objektů, které lze „rozumně" sčítat mezi sebou a násobit reálnými čísly, přičemž

- $\overline{u} + \overline{v} \in V \quad \forall \overline{u}, \overline{v} \in V$,
- $\alpha \cdot \overline{u} \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \overline{u} \in V$

Místo $\mathbb{R}$ můžeme pracovat také s $\mathbb{C}$ nebo s $\mathbb{Z}_n$ (viz IDM).
Prvky množiny V mohou být např.

- uspořádané n-tice reálných čísel, tj. klasické vektory
- reálné matice daných rozměrů
- funkce reálné proměnné

Vektorový prostor – brutálně zjednodušená verze

Co si představit pod pojmem vektorový prostor nad $\mathbb{R}$

Za vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ můžeme považovat neprázdnou množinu V určitých objektů, které lze „rozumně“ sčítat mezi sebou a násobit reálnými čísly, přičemž

- $\overline{u} + \overline{v} \in V \quad \forall \overline{u}, \overline{v} \in V$,
- $\alpha \cdot \overline{u} \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \overline{u} \in V$

Místo $\mathbb{R}$ můžeme pracovat také s $\mathbb{C}$ nebo s $\mathbb{Z}_n$ (viz IDM).
Prvky množiny V mohou být např.

- uspořádané n-tice reálných čísel, tj. klasické vektory
- reálné matice daných rozměrů
- funkce reálné proměnné

Ale co se myslí tím „rozumným“ sčítáním a násobením??

Co už dobře víme o sčítání reálných čísel

Pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

- $a + b \in \mathbb{R}$ (uzavřenost, výsledek sčítání leží opět v $\mathbb{R}$)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita)
- $a + 0 = 0 + a = a$ (existuje neutrální prvek, zde 0)
- $a + (-a) = -a + a = 0$
  (ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek)
- $a + b = b + a$ (komutativita)

Co už dobře víme o sčítání reálných čísel

Pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

- $a + b \in \mathbb{R}$ (uzavřenost, výsledek sčítání leží opět v $\mathbb{R}$)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita)
- $a + 0 = 0 + a = a$ (existuje neutrální prvek, zde 0)
- $a + (-a) = -a + a = 0$
  (ke každému $a \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek)
- $a + b = b + a$ (komutativita)

Zobecnění – grupa

Množina F s operací $\circ$, která má všechny výše uvedené vlastnosti kromě poslední, se nazývá grupa. Jestliže platí i poslední podmínka, nazývá se Abelova (komutativní) grupa.
Lépe a podrobněji uvidíte v IDM!

Co už dobře víme o násobení reálných čísel

Pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

- $a \cdot b \in \mathbb{R}$ (uzavřenost, výsledek násobení leží opět v $\mathbb{R}$)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativita)
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (existuje neutrální prvek, zde 1)
- $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ s výjimkou $a = 0$
  (ke každému $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje inverzní prvek)
- $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita)

Co už dobře víme o násobení reálných čísel

Pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

- $a \cdot b \in \mathbb{R}$ (uzavřenost, výsledek násobení leží opět v $\mathbb{R}$)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativita)
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (existuje neutrální prvek, zde 1)
- $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ s výjimkou $a = 0$
  (ke každému $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje inverzní prvek)
- $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita)

Tedy množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ s operací násobení je Abelova grupa.

Kombinace sčítání a násobení; pole neboli těleso

- $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova grupa
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ (distributivní zákon)

Kombinace sčítání a násobení; pole neboli těleso

- $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova grupa
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$ (distributivní zákon)

Zobecnění – pole neboli těleso

Množina F se dvěma operacemi $\oplus$ a $\odot$ se nazývá pole nebo též těleso, jestliže platí

- $(F, \oplus)$ je Abelova grupa
- $(F \setminus \{0\}, \odot)$, kde 0 je neutrální prvek vzhledem k operaci $\oplus$, je Abelova grupa
- $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$ pro každé $a, b, c \in F$ (distributivní zákon)

Lépe a podrobněji uvidíte v IDM!

Vektorový prostor – oficiální definice

Vektorový prostor

Nechť je dána neprázdná množina V (vektory) a pole F (skaláry) s operacemi

- $+$ z $V \times V$ do V („součet“ dvou vektorů),
- $\cdot$ z $F \times V$ do V („násobek“ vektoru skalárem),

přičemž platí

- $(V, +)$ je Abelova grupa,
- $\alpha\cdot(\overline{u}+\overline{v}) = \alpha\cdot\overline{u}+\alpha\cdot\overline{v} \quad \forall\alpha \in F, \overline{u}, \overline{v} \in V$,
- $(\alpha+\beta)\cdot\overline{u} = \alpha\cdot\overline{u}+\beta\cdot\overline{u} \quad \forall\alpha, \beta \in F, \overline{u} \in V$,
- $\alpha\cdot(\beta\cdot\overline{u}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\overline{u} \quad \forall\alpha, \beta \in F, \overline{u} \in V$,
- $1\cdot\overline{u} = \overline{u} \quad \forall\overline{u} \in V$.

Pak řekneme, že $V(F)$ je vektorový prostor nad polem F.

Nulový vektor a některé vlastnosti vektorového prostoru

Nulový vektor

Neutrální prvek grupy $(V, +)$ budeme nazývat nulovým vektorem a označíme jej $\overline{o}$.

Některé základní vlastnosti vektorových prostorů

V každém vektorovém prostoru V nad polem F platí

- $0 \cdot \overline{u} = \overline{o} \quad \forall \overline{u} \in V$,
- $\alpha \cdot \overline{o} = \overline{o} \quad \forall \alpha \in F$,
- Je-li $\alpha \cdot \overline{u} = \overline{o}$, pak $\alpha = 0$ nebo $\overline{u} = \overline{o}$,
- $(-1) \cdot \overline{u} = -\overline{u} \quad \forall \overline{u} \in V$.

Příklady vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$

- $V = \mathbb{R}^n$, tj. uspořádané n-tice reálných čísel s obvyklým sčítáním a násobením skalárem:

$$\begin{aligned} [u_1, u_2, \ldots, u_n] + [v_1, v_2, \ldots, v_n] &= [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n], \\ \alpha \cdot [u_1, \ldots, u_n] &= [\alpha \cdot u_1, \ldots, \alpha \cdot u_n] \end{aligned}$$

- $V = \mathbb{R}^{2\times 2} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ (nebo matice jiných pevně daných rozměrů) se sčítáním matic a násobením matice skalárem zavedeným zde dříve
- $V = \mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (polynomy max. druhého stupně) s obvyklým sčítáním a násobením skalárem:

$$\begin{aligned} (a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) &= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2, \\ k(ax^2 + bx + c) &= kax^2 + kbx + kc \end{aligned}$$

Příklady můžeme zobecnit pro libovolné pole F místo $\mathbb{R}$.

Vektorový podprostor

Vektorový podprostor

Buď $V(F)$ vektorový prostor na polem F a $W \subseteq V$ neprázdná podmnožina V. Jestliže W s operacemi $+$ a $\cdot$ je opět vektorový prostor nad polem F, řekneme, že $W(F)$ je vektorový podprostor prostoru $V(F)$.

Co stačí ověřit

$W(F)$ je vektorový podprostor $V(F)$ právě tehdy, když $\emptyset \neq W \subseteq V$ a

- $\overline{u} + \overline{v} \in W$ pro každé $\overline{u}, \overline{v} \in W$,
- $\alpha \cdot \overline{u} \in W$ pro každé $\alpha \in F$, $\overline{u} \in W$.

Každý vektorový podprostor musí obsahovat nulový vektor!

I další pojmy zavedené v $\mathbb{R}^n$ lze zobecnit

Pojmy, které jsme zde dříve definovali pro vektorový prostor $V_n(\mathbb{R})$, lze zobecnit pro libovolný vektorový prostor.

Analogicky jako v $\mathbb{R}^n$ jsou definovány pojmy:

- lineární závislost a nezávislost
- generátory vektorového prostoru, resp. prostor generovaný množinou
- báze vektorového prostoru
- dimenze vektorového prostoru

Příklad na lineární závislost a nezávislost

Příklad

Rozhodněte, zda jsou polynomy $p, q, r \in \mathcal{P}_2$ lineárně závislé, nebo nezávislé.

$$p = x^2 + 1, \quad q = x - 2, \quad r = x^2 - 3x + 7$$

Stejně jako v $\mathbb{R}^n$ zjistíme, jestli z rovnice $c_1 p + c_2 q + c_3 r = \overline{o}$ plyne jedině $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, nebo zda existuje i jiné řešení. V roli nulového vektoru $\overline{o}$ je zde nulový polynom, tj. 0. Řešíme tedy rovnici

$$c_1(x^2 + 1) + c_2(x - 2) + c_3(x^2 - 3x + 7) = 0, \quad \text{t.j.} \quad (c_1 + c_3)x^2 + (c_2 - 3c_3)x + (c_1 - 2c_2 + 7c_3) = 0$$

Pozor, zde nehledáme kořeny kvadratické rovnice! Chceme, aby byl výsledný polynom identicky nulový, tj. roven nule pro každé $x \in \mathbb{R}$. Proto musí platit

$$\begin{array}{rcrcrl} c_1 & & & + & c_3 & = 0 \\ & & c_2 & - & 3c_3 & = 0 \\ c_1 & - & 2c_2 & + & 7c_3 & = 0 \end{array}$$

Soustavu upravíme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{rcrcrl} c_1 & & & + & c_3 & = 0 \\ & & c_2 & - & 3c_3 & = 0 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, např. $c_1 = -1, c_2 = 3, c_3 = 1$, tzn. $-p + 3q + r = 0$, tj. $p = 3q + r$.

Polynomy p, q, r jsou lineárně závislé.

Příklady na bázi a dimenzi

Příklad

Určete dimenzi a uveďte příklad báze daného vektorového prostoru.

- $V = \mathcal{P}_2$ ... polynomy stupně max. 2
- $V = \mathcal{P}$ ... všechny polynomy
- $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ ... matice 2×2

- Bázi tvoří např. polynomy $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$. Tyto polynomy jsou lineárně nezávislé a jakýkoli polynom z $\mathcal{P}_2$ lze jednoznačně vyjádřit jako jejich lineární kombinaci:
  Je-li $q = ax^2 + bx + c$, pak $q = cp_1 + bp_2 + ap_3$.
  Dimenze prostoru $\mathcal{P}_2$ je tedy 3.
- Bázi tvoří např. $1, x, x^2, \dots$. Bázových polynomů je nekonečně mnoho, a proto je prostor nekonečnědimenzionální,
$$\dim \mathcal{P} = \infty.$$
- Bázi mohou tvořit např. následující matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  Dimenze je proto 4.

Všechny báze z tohoto příkladu byly analogiemi standardní báze $\mathbb{R}^n$. V každém prostoru jsme však mohli volit i jinou bázi.

Příklady na vektorové podprostory

Příklad

Rozhodněte, zda dané množiny tvoří vektorové podprostory daného prostoru V nad polem reálných čísel. Pokud se o vektorový prostor jedná, určete jeho dimenzi a uveďte příklad báze.

a) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, W je množina všech symetrických matic typu 2×2

b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, W je množina všech regulárních matic typu 2×2

c) $V = \mathcal{P}_2$, $W = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}, a + b + c = 0\}$ (tzn. graf polynomu prochází bodem $[1, 0]$)

Příklady na vektorové podprostory

Příklad

Rozhodněte, zda dané množiny tvoří vektorové podprostory daného prostoru V nad polem reálných čísel. Pokud se o vektorový prostor jedná, určete jeho dimenzi a uveďte příklad báze.

a) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, W je množina všech symetrických matic typu 2×2

b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, W je množina všech regulárních matic typu 2×2

c) $V = \mathcal{P}_2$, $W = \{ax^2 + bx + c;\, a, b, c \in \mathbb{R}, a + b + c = 0\}$ (tzn. graf polynomu prochází bodem $[1, 0]$)

a) Ano: Sečteme-li dvě symetrické matice, výsledkem je symetrická matice. Stejně tak pro reálné násobky, včetně nulového. Bázi W tvoří např. matice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \dim W = 3$$

b) Ne: Součet dvou regulárních matic zdaleka nemusí být regulární, např.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ano: Jsou-li $p = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $q = a_2x^2 + b_2x + c_2$ dva prvky W, pak
$p + q = a_3x^2 + b_3x + c_3$, kde $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2$, $c_3 = c_1 + c_2$. Aby $p + q$ ležel ve W, musíme ověřit, že $a_3 + b_3 + c_3 = 0$. To platí: $a_3 + b_3 + c_3 = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0 + 0 = 0$.
Podobně pro $r = \alpha p = \alpha a_1x^2 + \alpha b_1x + \alpha c_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, platí
$\alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1 = \alpha(a_1 + b_1 + c_1) = \alpha \cdot 0 = 0$.
Tedy $\alpha p \in W$ a W je vektorový podprostor $\mathcal{P}_2$. Při sestavování polynomu z W si dva koeficienty můžeme vybrat libovolně, ale třetí už je vázaný podmínkou $a + b + c = 0$. Dimenze je proto 2 a příklad báze je $p_1 = x^2 - 1$, $p_2 = x - 1$ (získáno volbou $a = 1$, $b = 0$, resp. $a = 0$, $b = 1$).

Generování prostoru – příklady v $\mathbb{Z}_n$

Příklad

Jaký prostor na polem $\mathbb{Z}_3$ je generován množinou $M = \{[1, 2, 1]\}$?

Generování prostoru – příklady v $\mathbb{Z}_n$

Příklad

Jaký prostor na polem $\mathbb{Z}_3$ je generován množinou $M = \{[1, 2, 1]\}$?

Veškeré výpočty provádíme $\mod 3$. Prvky prostoru $\langle M \rangle$ jsou:

$$0 \cdot [1, 2, 1] = [0, 0, 0], \quad 1 \cdot [1, 2, 1] = [1, 2, 1], \quad 2 \cdot [1, 2, 1] = [2, 1, 2]$$

Tedy $\langle M \rangle = \{[0, 0, 0], [1, 2, 1], [2, 1, 2]\}$

Generování prostoru – příklady v $\mathbb{Z}_n$

Příklad

Jaký prostor na polem $\mathbb{Z}_3$ je generován množinou $M = \{[1,2,1]\}$?

Veškeré výpočty provádíme $\mod 3$. Prvky prostoru $\langle M \rangle$ jsou:

$$0 \cdot [1,2,1] = [0,0,0], \quad 1 \cdot [1,2,1] = [1,2,1], \quad 2 \cdot [1,2,1] = [2,1,2]$$

Tedy $\langle M \rangle = \{[0,0,0],[1,2,1],[2,1,2]\}$

Příklad

Jaký prostor na polem $\mathbb{Z}_2$ je generován množinou $M = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$?

$$\overline{u}_1 = [1,0,1,0], \quad \overline{u}_2 = [1,1,0,1]$$

Generování prostoru – příklady v $\mathbb{Z}_n$

Příklad

Jaký prostor na polem $\mathbb{Z}_3$ je generován množinou $M = \{[1, 2, 1]\}$?

Veškeré výpočty provádíme $\mod 3$. Prvky prostoru $\langle M \rangle$ jsou:

$0 \cdot [1, 2, 1] = [0, 0, 0], \quad 1 \cdot [1, 2, 1] = [1, 2, 1], \quad 2 \cdot [1, 2, 1] = [2, 1, 2]$

Tedy $\langle M \rangle = \{[0, 0, 0], [1, 2, 1], [2, 1, 2]\}$

Příklad

Jaký prostor na polem $\mathbb{Z}_2$ je generován množinou $M = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}$?

$$\overline{u}_1 = [1, 0, 1, 0], \quad \overline{u}_2 = [1, 1, 0, 1]$$

Veškeré výpočty provádíme $\mod 2$. Prvky prostoru $\langle M \rangle$ jsou:

$$\begin{aligned} 0\overline{u}_1 + 0\overline{u}_2 &= [0, 0, 0, 0], & 1\overline{u}_1 + 0\overline{u}_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ 0\overline{u}_1 + 1\overline{u}_2 &= [1, 1, 0, 1], & 1\overline{u}_1 + 1\overline{u}_2 &= [0, 1, 1, 1] \end{aligned}$$