Determinant matice

Připravujeme si půdu pro zavedení determinantu...

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 2 \\ 7x + 5y &= 3. \end{aligned}$$

Připravujeme si půdu pro zavedení determinantu...

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 2 \\ 7x + 5y &= 3. \end{aligned}$$

Ze soustavy vyloučíme neznámou x: První rovnici vynásobíme mínus sedmi, druhou šesti a sečteme je. Tím získáme (úmyslně rozepsáno)

$$(6 \cdot 5 - 4 \cdot 7)y = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 7 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{6 \cdot 3 - 2 \cdot 7}{6 \cdot 5 - 4 \cdot 7} = 2$$

Podobně můžeme vyloučit y: První rovnici vynásobíme pěti, druhou mínus čtyřmi a sečteme:

$$(6 \cdot 5 - 4 \cdot 7)x = (2 \cdot 5 - 4 \cdot 3) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot 5 - 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 - 4 \cdot 7} = -1$$

Připravujeme si půdu pro zavedení determinantu ...

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= p \\ b_1x + b_2y &= q \end{aligned}$$

Připravujeme si půdu pro zavedení determinantu . . .

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcll} a_1x + a_2y & = & p & / \cdot (-b_1) \\ b_1x + b_2y & = & q & / \cdot a_1 \end{array}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)y = a_1 q - pb_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_1 q - pb_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Připravujeme si půdu pro zavedení determinantu . . .

Příklad

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rclll} a_1x + a_2y & = & p & /\cdot(-b_1) & /\cdot b_2 \\ b_1x + b_2y & = & q & /\cdot a_1 & /\cdot(-a_2) \end{array}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1q - pb_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_1q - pb_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = pb_2 - a_2q \quad \Rightarrow \quad x = \frac{pb_2 - a_2q}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

za předpokladu, že

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Připravujeme si půdu pro zavedení determinantu ...

Příklad (3 rovnice)

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcl} a_1 x + a_2 y + a_3 z & = & p \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z & = & q \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z & = & r \end{array}$$

Připravujeme si půdu pro zavedení determinantu ...

Příklad (3 rovnice)

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcll} a_1x + a_2y + a_3z & = & p & / \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) \\ b_1x + b_2y + b_3z & = & q & / \cdot (-a_2c_3 + a_3c_2) \\ c_1x + c_2y + c_3z & = & r & / \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) \end{array}$$

Připravujeme si půdu pro zavedení determinantu ...

Příklad (3 rovnice)

Najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcll} a_1x + a_2y + a_3z & = & p & / \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) \\ b_1x + b_2y + b_3z & = & q & / \cdot (-a_2c_3 + a_3c_2) \\ c_1x + c_2y + c_3z & = & r & / \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) \end{array}$$

Vynásobením výše uvedenými výrazy a sečtením všech rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} & x(a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2))+ \\ +& y(a_2(b_2c_3 - b_3c_2) - b_2(a_2c_3 - a_3c_2) + c_2(a_2b_3 - a_3b_2))+ \\ +& z(a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - b_3(a_2c_3 - a_3c_2) + c_3(a_2b_3 - a_3b_2)) = \\ =& p(b_2c_3 - b_3c_2) - q(a_2c_3 - a_3c_2) + r(a_2b_3 - a_3b_2)) \end{aligned}$$

Koeficienty u y a z se rovnají nule a zbude

$$x(a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3) = pb_2c_3 + a_3qc_2 + a_2b_3r - a_3b_2r - pb_3c_2 - a_2qc_3$$

Tedy

$$x = \frac{pb_2c_3 + a_3qc_2 + a_2b_3r - a_3b_2r - pb_3c_2 - a_2qc_3}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$$

za předpokladu, že $a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \neq 0$.
Podobně bychom dostali y a z, jmenovatel zlomku je vždy stejný.

Co jsme zatím zjistili:

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= p \\ b_1x + b_2y &= q \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Jmenovatel u x, y: $a_1b_2 - a_2b_1$

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= p \\ b_1x + b_2y + b_3z &= q \\ c_1x + c_2y + c_3z &= r \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Jmenovatel u x, y, z:

$a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$

Odhalíme nějakou zákonitost a zobecnění?

Permutace

Permutace

Permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, je uspořádaná n-tice $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, v níž se každé z čísel $1, \ldots, n$ vyskytuje právě jednou, tj. je to nějaké přeskupení prvků původní množiny. (Podobně se definuje permutace i jiných množin.)

Příklad

Vypište všechny permutace množiny $\{1, 2, 3\}$.

Permutace

Permutace

Permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, je uspořádaná n-tice $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, v níž se každé z čísel $1, \ldots, n$ vyskytuje právě jednou, tj. je to nějaké přeskupení prvků původní množiny. (Podobně se definuje permutace i jiných množin.)

Příklad

Vypište všechny permutace množiny $\{1, 2, 3\}$.

$$\begin{array}{ccc} (1,2,3) & (2,1,3) & (3,1,2) \\ (1,3,2) & (2,3,1) & (3,2,1) \end{array}$$

Počet permutací

Počet všech permutací n-prvkové množiny je roven $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Znaménko a parita permutace

Inverze v permutaci

Řekneme, že permutace $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ má inverzi (i_r, i_s) jestliže

$$r < s, \text{ ale přitom } i_r > i_s.$$

Neboli: Inverze v permutaci je výskyt většího čísla před menším.

Pozn. Nezaměnit s inverzní permutací, to je něco jiného!

Parita a znaménko permutace

Označme jako $\pi(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ počet inverzí v permutaci $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Permutace se nazývá sudá, resp. lichá, jestliže obsahuje sudý, resp. lichý počet inverzí.

Znaménko (signum) permutace je

$$\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (-1)^{\pi(i_1, i_2, \ldots, i_n)},$$

tzn. nabývá hodnoty $+1$ pro sudé permutace a -1 pro liché.

Příklad na určení znaménka permutace

Příklad

Určete znaménko permutace $\sigma = (4, 3, 2, 1)$.

Příklad na určení znaménka permutace

Příklad

Určete znaménko permutace $\sigma = (4, 3, 2, 1)$.

Budeme počítat inverze – kolikrát se vyskytuje větší číslo před menším.

$$\begin{array}{ccc} (4, 3, 2, 1) & (4, 3, 2, 1) & (4, 3, 2, 1) \\ (4, 3, 2, 1) & (4, 3, 2, 1) & (4, 3, 2, 1) \end{array}$$

Inverzí je celkem šest, jedná se tedy o sudou permutaci a

$$\operatorname{sgn}(4, 3, 2, 1) = (-1)^6 = +1.$$

Definice determinantu

Determinant matice

Pro čtvercovou matici A řádu n definujeme její determinant jako číslo

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

kde se sčítá přes všechny permutace $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ množiny $\{1, \ldots, n\}$.

Determinant matice řádu 1 a 2

Jediná permutace množiny $\{1\}$ je (1) se sudou paritou, a tedy:

Determinant řádu 1

Determinant matice $A = (a_{11})$ je $|A| = a_{11}$.

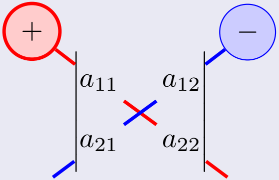
Permutace množiny $\{1,2\}$ jsou $(1,2)$ se sudou paritou a $(2,1)$ s lichou paritou, a tedy:

Determinant řádu 2 – křížové pravidlo

Determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



Příklad na determinant řádu 2

Příklad

Vypočítejte determinanty matic

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, jak spolu souvisí matice A a B a jakou vlastnost má matice C.

Příklad na determinant řádu 2

Příklad

Vypočítejte determinanty matic

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, jak spolu souvisí matice A a B a jakou vlastnost má matice C.

$$|A| = 2\cdot4 - 1\cdot3 = 5, \quad |B| = 3\cdot1 - 4\cdot2 = -5, \quad |C| = 2\cdot3 - 1\cdot6 = 0.$$

Determinant matice řádu 3

Permutace množiny $\{1,2,3\}$ s počty inverzí a se znaménky:

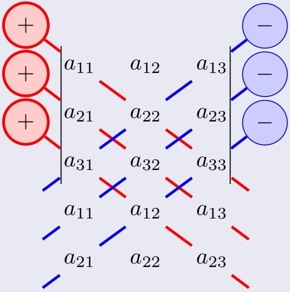
$$\pi(1,2,3) = 0:\ +1 \qquad \pi(2,1,3) = 1:\ -1 \qquad \pi(3,1,2) = 2:\ +1$$
$$\pi(1,3,2) = 1:\ -1 \qquad \pi(2,3,1) = 2:\ +1 \qquad \pi(3,2,1) = 3:\ -1$$

Determinant řádu 3 – Sarrusovo pravidlo

Determinant matice A třetího řádu je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



Příklad na determinant řádu 3

Příklad

Vypočtěte determinanty zadaných matic. Všimněte si, jaké jsou mezi jednotlivými maticemi a jejich determinanty vztahy.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad na determinant řádu 3

Příklad

Vypočtěte determinanty zadaných matic. Všimněte si, jaké jsou mezi jednotlivými maticemi a jejich determinanty vztahy.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 8 \\ 6 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 8\cdot 7\cdot 1 + 6\cdot 2\cdot 4 + 0\cdot 3\cdot 5 - 4\cdot 7\cdot 0 - 5\cdot 2\cdot 8 - 1\cdot 3\cdot 6 = 6 \\ |B| &= 16\cdot 7\cdot 1 + 6\cdot 2\cdot 8 + 0\cdot 6\cdot 5 - 8\cdot 7\cdot 0 - 5\cdot 2\cdot 16 - 1\cdot 6\cdot 6 = 12 \\ |C| &= 8\cdot 7\cdot 1 + 3\cdot 5\cdot 0 + 4\cdot 6\cdot 2 - 0\cdot 7\cdot 4 - 2\cdot 5\cdot 8 - 1\cdot 6\cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

Příklad na determinant řádu 3

Příklad

Vypočtěte determinanty zadaných matic. Všimněte si, jaké jsou mezi jednotlivými maticemi a jejich determinanty vztahy.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & b & c \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ d & e & f \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a+d & b+e & c+f \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad na determinant řádu 3

Příklad

Vypočtěte determinanty zadaných matic. Všimněte si, jaké jsou mezi jednotlivými maticemi a jejich determinanty vztahy.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & b & c \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ d & e & f \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a+d & b+e & c+f \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 2\cdot b\cdot 4 + a\cdot 5\cdot 3 + 6\cdot 1\cdot c - 3\cdot b\cdot 6 - c\cdot 5\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot a = \\ &= 11a - 10b - 4c \\ |B| &= 11d - 10e - 4f \\ |C| &= 11(a+d) - 10(b+e) - 4(c+f) = |A| + |B| \end{aligned}$$

Determinanty vyšších řádů

NEPOKOUŠEJTE SE O ŽÁDNÉ ANALOGIE KŘÍŽOVÉHO NEBO SARRUSOVA PRAVIDLA!

Nefunguje to: např. u matice řádu 4 vedlejší diagonále odpovídá permutace $(4, 3, 2, 1)$. Už víme, že je to permutace sudá, takže součin čísel na vedlejší diagonále se u matice čtvrtého řádu bere se znaménkem plus!

Determinanty vyšších řádů

NEPOKOUŠEJTE SE O ŽÁDNÉ ANALOGIE KŘÍŽOVÉHO NEBO SARRUSOVA PRAVIDLA!

Nefunguje to: např. u matice řádu 4 vedlejší diagonále odpovídá permutace $(4, 3, 2, 1)$. Už víme, že je to permutace sudá, takže součin čísel na vedlejší diagonále se u matice čtvrtého řádu bere se znaménkem plus!

Metody výpočtu determinantů

Determinant (jakéhokoli řádu) můžeme počítat:

- z definice – pro vyšší řády nevhodné
- pomocí Laplaceova rozvoje
- pomocí úpravy matice na trojúhelníkový tvar

Laplaceův rozvoj – příprava

Pro determinant 3. řádu platí

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Laplaceův rozvoj – příprava

Pro determinant 3. řádu platí

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Můžeme vytknout prvky z prvního řádku matice:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Laplaceův rozvoj – příprava

Pro determinant 3. řádu platí

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Můžeme vytknout prvky z prvního řádku matice:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Můžeme si vybrat i jiný řádek než první. Podobně můžeme vytknout prvky některého sloupce.

Laplaceův rozvoj – příprava

Pro determinant 3. řádu platí

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Můžeme vytknout prvky z prvního řádku matice:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Můžeme si vybrat i jiný řádek než první. Podobně můžeme vytknout prvky některého sloupce.

Pro druhý sloupec to dopadne takto:

$$\begin{aligned} |A| \quad = \quad & -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ & +a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - \\ & -a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Laplaceův rozvoj – příprava

Teď bychom chtěli spočítat determinant řádu 4 z definice.

Laplaceův rozvoj – příprava

Teď bychom chtěli spočítat determinant řádu 4 z definice.

Jak můžeme systematicky vypsat všechny permutace množiny $\{1, 2, 3, 4\}$?

Laplaceův rozvoj – příprava

Teď bychom chtěli spočítat determinant řádu 4 z definice.

Jak můžeme systematicky vypsat všechny permutace množiny $\{1, 2, 3, 4\}$?

Můžeme je rozdělit do čtyř skupin:

Laplaceův rozvoj – příprava

Teď bychom chtěli spočítat determinant řádu 4 z definice.

Jak můžeme systematicky vypsat všechny permutace množiny $\{1,2,3,4\}$?

Můžeme je rozdělit do čtyř skupin:

Na začátku je 1, následují všechny permutace množiny $\{2,3,4\}$.
Na začátku je 2, následují všechny permutace množiny $\{1,3,4\}$.
Na začátku je 3, následují všechny permutace množiny $\{1,2,4\}$.
Na začátku je 4, následují všechny permutace množiny $\{1,2,3\}$.

Laplaceův rozvoj – příprava

Teď bychom chtěli spočítat determinant řádu 4 z definice.

Jak můžeme systematicky vypsat všechny permutace množiny $\{1, 2, 3, 4\}$?

Můžeme je rozdělit do čtyř skupin:

Na začátku je 1, následují všechny permutace množiny $\{2, 3, 4\}$.
Na začátku je 2, následují všechny permutace množiny $\{1, 3, 4\}$.
Na začátku je 3, následují všechny permutace množiny $\{1, 2, 4\}$.
Na začátku je 4, následují všechny permutace množiny $\{1, 2, 3\}$.

Zdá se, že determinant řádu 4 bude možné spočítat pomocí čtyř determinantů řádu 3. Je ale nutno dát pozor na znaménka. Co sčítat a co odčítat?

Minory a kofaktory

Minor neboli subdeterminant

Mějme čtvercovou matici A. Determinant matice, která z A vznikla vynecháním některých řádků a některých sloupců (vynecháváme stejný počet řádků jako sloupců), se nazývá minor neboli subdeterminant matice A.

Minor (subdeterminant) příslušný prvku a_{ij} v matici A je determinant matice M_{ij}, která vznikla z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Kofaktor neboli algebraický doplněk

Kofaktor neboli algebraický doplněk prvku a_{ij} v matici A je číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceův rozvoj

Pro čtvercovou matici A řádu n a $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \\
|A| &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.
\end{aligned}
$$

Prvním vztahem je dán rozvoj podle i-tého řádku, druhým rozvoj podle j-tého sloupce matice A.

Pozor na střídání znamének u kofaktorů:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Znaménka jsou rozmístěna jako na šachovnici.

$$
\begin{vmatrix}
\overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} & \cdots \\
\overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} & \overset{-}{a_{23}} & \cdots \\
\overset{+}{a_{31}} & \overset{-}{a_{32}} & \overset{+}{a_{33}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{vmatrix}
$$

Příklad na determinant řádu 4

Příklad

Vypočtěte determinant matice A pomocí Laplaceova rozvoje.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad na determinant řádu 4

Příklad

Vypočtěte determinant matice A pomocí Laplaceova rozvoje.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 7 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejvýhodnější je použít rozvoj podle třetího sloupce:

$$\begin{aligned} |A| &= 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \\ &\quad +3\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 = 18 \end{aligned}$$

Příklad na determinant trojúhelníkové matice řádu 5

Příklad

Vypočtěte determinant matice A pomocí Laplaceova rozvoje.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad na determinant trojúhelníkové matice řádu 5

Příklad

Vypočtěte determinant matice A pomocí Laplaceova rozvoje.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinant rozvineme podle prvního sloupce a další determinanty pak opět počítáme rozvojem, vždy podle prvního sloupce.

Příklad na determinant trojúhelníkové matice řádu 5

Příklad

Vypočtěte determinant matice A pomocí Laplaceova rozvoje.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinant rozvineme podle prvního sloupce a další determinanty pak opět počítáme rozvojem, vždy podle prvního sloupce.
Nebo můžeme provádět rozvoje vždy podle posledního řádku.

Příklad – pokračování

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \\
&= -2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 = \\
&= -120
\end{aligned}
$$

Vlastnosti determinantu I

- Obsahuje-li matice nulový řádek, je její determinant nulový.
- Obsahuje-li matice dva stejné řádky, je její determinant nulový.
- Vznikla-li matice B z matice A výměnou dvou řádků, platí
$$|B| = -|A|.$$
- Vznikla-li matice B z matice A vynásobením jednoho jejího řádku konstantou $c \in \mathbb{R}$, platí
$$|B| = c|A|.$$

Vlastnosti determinantu II

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
- Přičtením násobku jednoho řádku k jinému řádku se determinant nezmění.
- Transponováním se determinant nezmění: $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$
- Všechny vlastnosti, které byly výše uvedeny pro řádky, platí i pro sloupce.

Vlastnosti determinantu III

- Determinant jednotkové matice je roven 1, $|I| = 1$.
- Determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

- Determinant součinu dvou matic je součinem jejich determinantů:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Příklad

Příklad

Vypočtěte determinant matice A, jestliže víme, že $|B| = 5$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & a-2 \\ b & 3 & b-4 \\ c & 3 & c-6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & c & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad

Příklad

Vypočtěte determinant matice A, jestliže víme, že $|B| = 5$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & a-2 \\ b & 3 & b-4 \\ c & 3 & c-6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & c & 3 \end{pmatrix}$$

Co se musí provést s maticí B, abychom dostali A?

- Vyměníme 1. a 2. sloupec $\Rightarrow$ změna znaménka.
- Druhý sloupec vynásobíme třemi $\Rightarrow$ determinant se $3\times$ zvětší.
- Třetí sloupec vynásobíme -2 $\Rightarrow$ determinant se vynásobí -2.
- Ke třetímu sloupci přičteme první $\Rightarrow$ žádná změna.

Celkově

$$|B| = -3 \cdot (-2) \cdot |A| = 30.$$

Výpočet determinantu pomocí eliminace

U matic vyšších řádů je často efektivnější výpočet pomocí úpravy na trojúhelníkový tvar.
Matici upravíme na trojúhelníkový tvar, z něj pak determinant vypočteme snadno.

Z dříve uvedených vlastností jsou teď důležité tyto tři:

- Výměnou pořadí řádků se změní znaménko determinantu.
- Vynásobením některého řádku konstantou se touto konstantou vynásobí celý determinant.
- Přičtením násobku jednoho řádku k jinému řádku se determinant nemění.

Při „ručním" výpočtu je možné obě metody (eliminaci a Laplaceův rozvoj) kombinovat.

Příklad na determinant 4 řádu pomocí eliminace

Příklad

Vypočtěte determinant matice A pomocí úpravy na trojúhelníkový tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad na determinant 4 řádu pomocí eliminace

Příklad

Vypočtěte determinant matice A pomocí úpravy na trojúhelníkový tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \; I \leftrightarrow II \quad = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \; \begin{matrix} \\ \\ III-2I \\ IV-I \end{matrix} \; =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -3 \end{vmatrix} \; 3IV \quad = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} \; IV-4III \quad =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-2)\cdot 3\cdot(-7) = -14$$

Příklad – dodatek

Při algoritmickém výpočtu na počítači nenastane problém s násobením řádku a nutností determinant zpětně vydělit. Postupovalo by se takto:

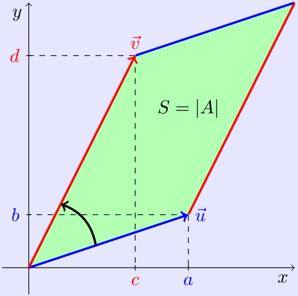
$$\cdots = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - \frac{4}{3} III \end{matrix} = -1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -14$$

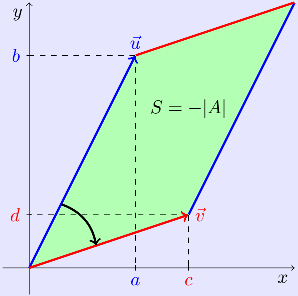
Výměny řádků jsou však potřeba i v počítači a je nutno si je vhodným způsobem zaznamenávat.

Geometrický význam determinantu druhého řádu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \vec{u} &= (a, b) \\ \vec{v} &= (c, d) \end{aligned}$$

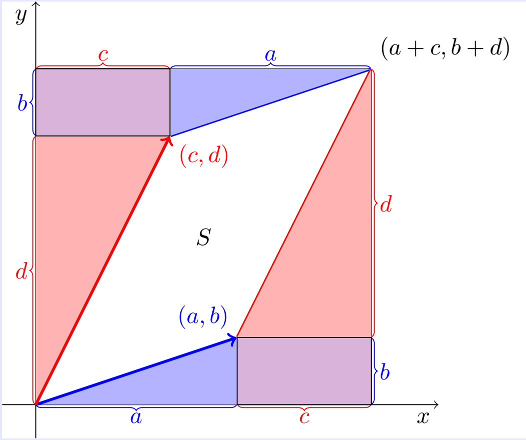
$|A|$ udává orientovaný obsah rovnoběžníka daného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Můžeme ale uvažovat i rovnoběžník daný sloupci matice A, tj. vektory (a, c) a (b, d).





Determinant a obsah – důkaz

$$(a+c)(b+d) = S + 2\left(\frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} + cb\right) \Rightarrow S = ad - bc$$



Geometrický význam determinantu třetího řádu

$|A|$ udává orientovaný objem rovnoběžnostěnu daného řádky, případně sloupci, matice A.