Programmier-Einführung mit Go

Rekursion

Reiner Hüchting

18. Februar 2026

Rekursion – Überblick

Rekursion
- Einleitung
- Beispiele
- Türme von Hanoi

Einleitung

Was gibt diese Funktion für $n = 3$ aus?

```
func CountDown(n int) {
  if n <= 0 {
    return
  }
  fmt.Println(n)
  CountDown(n - 1)
}
```

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$x + 0 = x$$
$$x + s(y) = s(x + y)$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$x + 0 = x$$
$$x + s(y) = s(x + y)$$

Anwendung der Gleichungen:

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$x + 0 = x$$
$$x + s(y) = s(x + y)$$

Anwendung der Gleichungen:

$$s(s(0)) + s(s(s(0)))$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x + s(y) &= s(x + y) \end{aligned}$$

Anwendung der Gleichungen:

$$s(s(0)) + s(s(s(0)))$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$x + 0 = x$$
$$x + s(y) = s(x + y)$$

Anwendung der Gleichungen:

$$s(s(0)) + s(s(s(0)))$$
$$s(\qquad s(s(0)) + s(s(0)) \qquad)$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x + s(y) &= s(x + y) \end{aligned}$$

Anwendung der Gleichungen:

$$s(s(0)) + s(s(s(0)))$$

$$s(\quad s(s(0)) + s(s(0)) \quad)$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$x + 0 = x$$
$$x + s(y) = s(x + y)$$

Anwendung der Gleichungen:

$$s(s(0)) + s(s(s(0)))$$
$$s(\qquad s(s(0)) + s(s(0)) \qquad)$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$x + 0 = x$$
$$x + s(y) = s(x + y)$$

Anwendung der Gleichungen:

$$s(s(0)) + s(s(s(0)))$$
$$s(\quad s(s(0)) + s(s(0)) \quad)$$
$$s(s(\quad s(s(0)) + s(0) \quad))$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= x \\
x + s(y) &= s(x + y)
\end{aligned}
$$

Anwendung der Gleichungen:

$$
\begin{array}{rcl}
 & s(s(0)) + s(s(s(0))) & \\
s(& s(s(0)) + s(s(0)) &) \\
s(s(& s(s(0)) + s(0) &))
\end{array}
$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x + s(y) &= s(x + y) \end{aligned}$$

Anwendung der Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} & s(s(0)) + s(s(s(0))) & \\ s(& s(s(0)) + s(s(0)) &) \\ s(s(& s(s(0)) + s(0) &)) \end{array}$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= x \\
x + s(y) &= s(x + y)
\end{aligned}
$$

Anwendung der Gleichungen:

$$
\begin{array}{rlr}
 & s(s(0)) + s(s(s(0))) & \\
s(& s(s(0)) + s(s(0)) &) \\
s(s(& s(s(0)) + s(0) &)) \\
s(s(s(& s(s(0)) + 0 &)))
\end{array}
$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x + s(y) &= s(x + y) \end{aligned}$$

Anwendung der Gleichungen:

$$\begin{array}{rlr} & s(s(0)) + s(s(s(0))) & \\ s(& s(s(0)) + s(s(0)) &) \\ s(s(& s(s(0)) + s(0) &)) \\ s(s(s(& s(s(0)) + 0 &))) \end{array}$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= x \\
x + s(y) &= s(x + y)
\end{aligned}
$$

Anwendung der Gleichungen:

$$
\begin{array}{rlr}
 & s(s(0)) + s(s(s(0))) & \\
s(& s(s(0)) + s(s(0)) &) \\
s(s(& s(s(0)) + s(0) &)) \\
s(s(s(& s(s(0)) + 0 &)))
\end{array}
$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= x \\
x + s(y) &= s(x + y)
\end{aligned}
$$

Anwendung der Gleichungen:

$$
\begin{array}{rlr}
 & s(s(0)) + s(s(s(0))) & \\
s(& s(s(0)) + s(s(0)) &) \\
s(s(& s(s(0)) + s(0) &)) \\
s(s(s(& s(s(0)) + 0 &))) \\
s(s(s(& s(s(0)) &)))
\end{array}
$$

Einleitung

Beispiel: Addition als Gleichungen spezifiziert

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= x \\
x + s(y) &= s(x + y)
\end{aligned}
$$

Anwendung der Gleichungen:

$$
\begin{array}{rlr}
 & s(s(0)) + s(s(s(0))) & \\
s(& s(s(0)) + s(s(0)) &) \\
s(s(& s(s(0)) + s(0) &)) \\
s(s(s(& s(s(0)) + 0 &))) \\
s(s(s(& s(s(0)) &)))
\end{array}
$$

Einleitung

Rekursive Addition als Go -Programm:

```
func Add1(x, y int) int {

  // Gleichungen für die Addition:
  // x + 0 = x
  // x + (y+1) = (x+y) + 1

  if y == 0 {
    return x
  }
  return Add1(x, y-1) + 1
}
```

Einleitung

Alternative Version (Tail-Recursion):

```
func Add2(x, y int) int {

  // Gleichungen für die Addition:
  // x + 0 = x
  // x + y = (x+1) + (y-1)

  if y == 0 {
    return x
  }
  return Add2(x+1, y-1)
}
```

Einleitung

Wozu Rekursion?

- Manches lässt sich kürzer und eleganter schreiben.

Einleitung

Wozu Rekursion?

- Manches lässt sich kürzer und eleganter schreiben.
- Beispiel Fakultät:

$$fac(n) = \prod_{i=1}^{n} i \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} fac(0) &= 1 \\ fac(n) &= n \cdot fac(n-1) \end{aligned}$$

Einleitung

Wozu Rekursion?

- Manches lässt sich kürzer und eleganter schreiben.
- Beispiel Fakultät:

$$fac(n) = \prod_{i=1}^{n} i \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} fac(0) &= 1 \\ fac(n) &= n \cdot fac(n-1) \end{aligned}$$

- Als iteratives Go -Programm:

```
func FactorialIter(n int) int {
  result := 1
  for i := 2; i <= n; i++ {
    result *= i
  }
  return result
}
```

Einleitung

Wozu Rekursion?

- Manches lässt sich kürzer und eleganter schreiben.
- Beispiel Fakultät:

$$fac(n) = \prod_{i=1}^{n} i \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} fac(0) &= 1 \\ fac(n) &= n \cdot fac(n-1) \end{aligned}$$

- Als rekursives Go -Programm:

```
func Factorial(n int) int {
  if n <= 1 {
    return 1
  }
  return n * Factorial(n-1)
}
```

Einleitung

Schema für rekursive Definitionen

- Ein oder mehrere Basisfälle (Rekursionsanfang, Anker).
- Ein oder mehrere rekursive Aufrufe (Rekursionsschritt).

Einleitung

Schema für rekursive Definitionen

- Ein oder mehrere Basisfälle (Rekursionsanfang, Anker).
- Ein oder mehrere rekursive Aufrufe (Rekursionsschritt).

Vergleich mit `while`-Schleifen

- Abbruchbedingung entspricht Rekursionsanfang.
- Schleifenrumpf entspricht Rekursionsschritt.

Beispiele

Beispiel: Fibonacci-Folge

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(1) &= \mathit{fib}(2) = 1 \\ \mathit{fib}(n) &= \mathit{fib}(n-1) + \mathit{fib}(n-2) \end{aligned}$$

Beispiele

Beispiel: Fibonacci-Folge

$$fib(1) = fib(2) = 1$$
$$fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)$$

die ersten 10 Fibonacci-Zahlen:

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$fib(n)$:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Beispiele

Beispiel: Hailstone-Folge

- Beginne mit einer *natürlichen Zahl* n.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n+1$.
- Wiederhole, bis der Zyklus $4, 2, 1$ erreicht ist.

Beispiele:

Beispiele

Beispiel: Hailstone-Folge

- Beginne mit einer *natürlichen Zahl* n.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n + 1$.
- Wiederhole, bis der Zyklus $4, 2, 1$ erreicht ist.

Beispiele:

$n = 1$: $1, 4, 2, 1$

Beispiele

Beispiel: Hailstone-Folge

- Beginne mit einer *natürlichen Zahl* n.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n+1$.
- Wiederhole, bis der Zyklus $4, 2, 1$ erreicht ist.

Beispiele:

$n = 1$: $1, 4, 2, 1$

$n = 2$: $2, 1, 4, 2, 1$

Beispiele

Beispiel: Hailstone-Folge

- Beginne mit einer *natürlichen Zahl* n.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n + 1$.
- Wiederhole, bis der Zyklus $4, 2, 1$ erreicht ist.

Beispiele:

$n = 1$: $1, 4, 2, 1$

$n = 2$: $2, 1, 4, 2, 1$

$n = 3$: $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

Beispiele

Beispiel: Hailstone-Folge

- Beginne mit einer *natürlichen Zahl n*.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n + 1$.
- Wiederhole, bis der Zyklus $4, 2, 1$ erreicht ist.

Beispiele:

$n = 1$: $1, 4, 2, 1$

$n = 2$: $2, 1, 4, 2, 1$

$n = 3$: $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

$n = 4$: $4, 2, 1$

Beispiele

Beispiel: Hailstone-Folge

- Beginne mit einer *natürlichen Zahl* n.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n+1$.
- Wiederhole, bis der Zyklus $4, 2, 1$ erreicht ist.

Beispiele:

$n = 1$: $1, 4, 2, 1$

$n = 2$: $2, 1, 4, 2, 1$

$n = 3$: $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

$n = 4$: $4, 2, 1$

$n = 5$: $5, 16, 8, 4, 2, 1$

Beispiele

Beispiel: Hailstone-Folge

- Beginne mit einer *natürlichen Zahl* n.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n + 1$.
- Wiederhole, bis der Zyklus $4, 2, 1$ erreicht ist.

Beispiele:

$n = 1$: $1, 4, 2, 1$

$n = 2$: $2, 1, 4, 2, 1$

$n = 3$: $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

$n = 4$: $4, 2, 1$

$n = 5$: $5, 16, 8, 4, 2, 1$

$n = 6$: $6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

Beispiele

Beispiel: Hailstone-Folge

- Beginne mit einer *natürlichen Zahl* n.
- Ist n gerade, so nimm als nächstes $n/2$.
- Ist n ungerade, so nimm als nächstes $3n + 1$.
- Wiederhole, bis der Zyklus $4, 2, 1$ erreicht ist.

Beispiele:

$n = 1$: $1, 4, 2, 1$

$n = 2$: $2, 1, 4, 2, 1$

$n = 3$: $3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

$n = 4$: $4, 2, 1$

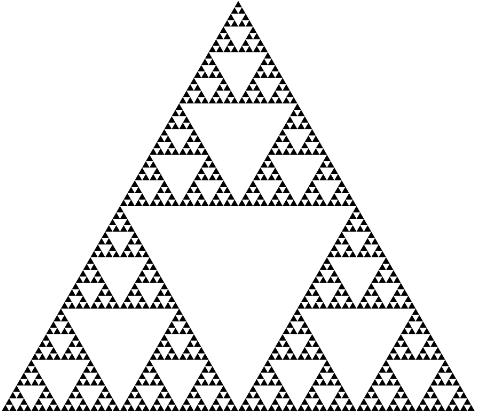
$n = 5$: $5, 16, 8, 4, 2, 1$

$n = 6$: $6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

$n = 7$: $7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$

Beispiele

Rekursion kann malen ...



Dieses Bild wird Sierpinski-Dreieck genannt.

Beispiele

Beispiel: Ackermann-Funktion

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{falls } m > 0 \text{ und } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{falls } m > 0 \text{ und } n > 0 \end{cases}$$

Beispiele

Beispiel: Ackermann-Funktion

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{falls } m > 0 \text{ und } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{falls } m > 0 \text{ und } n > 0 \end{cases}$$

Hintergrund

- Die Werte dieser Funktion wachsen extrem schnell!
- Die Funktion wurde erdacht, um zu beweisen, dass Schleifen ohne Laufzeitschranke beim Programmieren notwendig sind.
- Der Beweis hat die Wachstumsgeschwindigkeit der Ackermann-Funktion verwendet.

Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

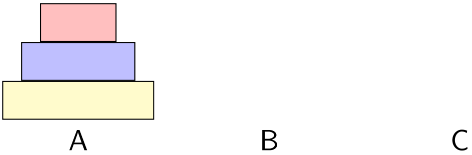
Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Beispiel mit 3 Steinen:



Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

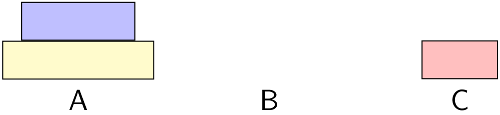
Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Beispiel mit 3 Steinen:



Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

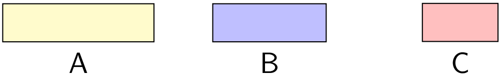
Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Beispiel mit 3 Steinen:



Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

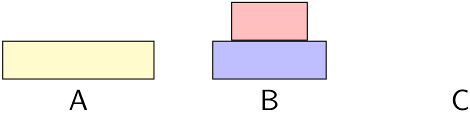
Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Beispiel mit 3 Steinen:



Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

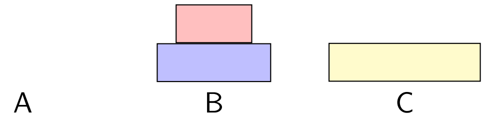
Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Beispiel mit 3 Steinen:



Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

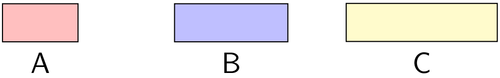
Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Beispiel mit 3 Steinen:



Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

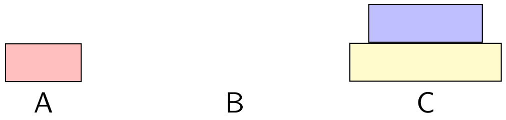
Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Beispiel mit 3 Steinen:



Türme von Hanoi

Aufgabe: Bewege einen Turm aus Spielsteinen von A nach C

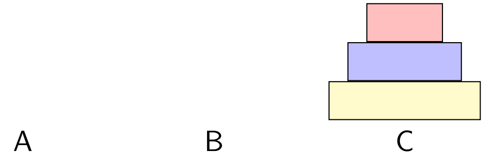
Gegeben:

- Spielsteine unterschiedlicher Größe.
- Drei Stellen A, B und C, an denen Spielsteine liegen können.

Spielregeln:

1. Die Steine werden einzeln bewegt.
2. Es wird niemals ein größerer Stein auf einen kleineren gelegt.

Beispiel mit 3 Steinen:



Türme von Hanoi

Frage: Wie bewegt man einen Turm der Höhe h von A nach C?

Türme von Hanoi

Frage: Wie bewegt man einen Turm der Höhe h von A nach C?

Naive Antwort:

1. Bewege alle bis auf die letzte Platte von A nach B
2. Bewege die letzte Platte von A nach C
3. Bewege den Turm von B nach C

Türme von Hanoi

Frage: Wie bewegt man einen Turm der Höhe h von A nach C?

Naive Antwort:

1. Bewege alle bis auf die letzte Platte von A nach B
2. Bewege die letzte Platte von A nach C
3. Bewege den Turm von B nach C

Überraschung: So naiv ist das gar nicht!

- Wir konstruieren einen Algorithmus auf Basis dieser Vorgehensweise.

Türme von Hanoi

Wir definieren stückweise eine Funktion, die das Problem löst.

- Bewegen einer einzelnen Platte
  von *Start* (s) über *Mitte* (m) nach *Ziel* (z):

```
func Move(s, z string) {
  fmt.Printf("Bewege Scheibe von %s nach %s.\n",
}
```

Türme von Hanoi

Wir definieren stückweise eine Funktion, die das Problem löst.

- Bewegen eines Turms der Höhe 1:

```
func Hanoi1(s, m, z string) {
  Move(s, z)
}
```

Türme von Hanoi

Konstruktion der Hanoi-Lösung (Fortsetzung)

- Bewegen eines Turms der Höhe 2:

```
func Hanoi2(s, m, z string) {
  Hanoi1(s, z, m)
  Move(s, z)
  Hanoi1(m, s, z)
}
```

Türme von Hanoi

Konstruktion der Hanoi-Lösung (Fortsetzung)

- Bewegen eines Turms der Höhe 3:

```
func Hanoi3(s, m, z string) {
  Hanoi2(s, z, m)
  Move(s, z)
  Hanoi2(m, s, z)
}
```

Türme von Hanoi

Konstruktion der Hanoi-Lösung (Fortsetzung)

- Bewegen eines Turms der Höhe 4:

```
func Hanoi4(s, m, z string) {
  Hanoi3(s, z, m)
  Move(s, z)
  Hanoi3(m, s, z)
}
```

Laaaaaaaaa...

Türme von Hanoi

Konstruktion der Hanoi-Lösung (Fortsetzung)

- Bewegen eines Turms der Höhe 5:

```
func Hanoi5(s, m, z string) {
  Hanoi4(s, z, m)
  Move(s, z)
  Hanoi4(m, s, z)
}
```

...aaaaaaang...

Türme von Hanoi

Konstruktion der Hanoi-Lösung (Fortsetzung)

- Bewegen eines Turms der Höhe 6:

```
func Hanoi6(s, m, z string) {
  Hanoi5(s, z, m)
  Move(s, z)
  Hanoi5(m, s, z)
}
```

...weeeeilig

Türme von Hanoi

Beobachtungen:

- Die Funktionen `hanoi2`, `hanoi3`, `hanoi4`, …sind alle gleich.
- Beim Aufruf wird nur die Zahl reduziert und dann wieder das Gleiche gemacht.
- Nur bei `hanoi1` wird kein `hanoi0` aufgerufen.

Türme von Hanoi

Beobachtungen:

- Die Funktionen `hanoi2` , `hanoi3` , `hanoi4` , ...sind alle gleich.
- Beim Aufruf wird nur die Zahl reduziert und dann wieder das Gleiche gemacht.
- Nur bei `hanoi1` wird kein `hanoi0` aufgerufen.

Schlussfolgerung: Wenn die Höhe als Argument übergeben wird, können wir alles in eine Funktion schreiben.

Türme von Hanoi

Rekursive Hanoi-Lösung

```
func Hanoi(h int, s, m, z string) {
  if h == 1 {
    Move(s, z)
  } else {
    Hanoi(h-1, s, z, m)
    Move(s, z)
    Hanoi(h-1, m, s, z)
  }
}
```