2024年5月28日

アルゴリズムとデータ構造
期末試験

注意事項:

1. 大問［A］と［B］は，解答用紙を分けて 解答してください。
2. 最初に，解答用紙の左上（「解答用紙」と書いてある左側）に，1枚目は［A］，2枚目は［B］と 大きく 書いてください。
3. 次に，解答用紙2枚ともに，所属（コース），学生番号，氏名 を「丁寧に」書いてください。
4. 各大問の解答が表面におさまらない場合には，表面の下側に「裏面に続く」と書いた上で，裏面に続きを書いてください。

［A］

【A１】　アルゴリズムとデータ構造に関する次の文章が正しくなるように，空欄(ア)から(カ)に，下記の (a) ― (j) から語句を一つずつ選んで入れよ．

文章：

- （ア）は，入力に対して，どのような出力が答えとなるかを書いたものである．
- （イ）は，入力データから正しい出力を計算するために，一連の手順を記述したものである．
- （ウ）は，データの容れ物(data contener)を，それに適用される一組の操作で抽象的に定めたものである．
- （エ）は，入力長がNである全ての問題例の中で最大の計算量をとる評価法である．
- （オ）は，計算のために，記録領域上に効率良くデータを格納するための配置法である．
- （カ）は，すべての数を１つの語(a machine word)とみなし、どの基本命令も単位時間で実行できると仮定することをいう．

語句: a 計算問題, b 抽象データ型, c メモリ管理法, d データ構造, e アルゴリズム, f 対数コストモデル, g 定数（一様）コストモデル, h 最悪計算量, i 並列計算量, j 平均計算量.

【A２】　オーダー記法に関する以下の言明が正しいか（○），間違っているか（×）を答えよ．間違っている場合は，その理由も簡単に書くこと．

(1) $100^3n + 2n^2 + 5 = O(n)$

(2) $(n + 2\sqrt{n})(2m + 4) = O(nm)$

(3) $4^n = O(2^n)$

(4) $2\sqrt{n} + n\log(n^2) + 5 = O(n^2)$

(5) $5(\sin^2 n + \cos^2 n) - 1 = O(1)$

【A３】　基本的なデータ構造に関する次の問いに答えよ

(1) 抽象データ型としてみたとき，辞書(dictionary)が提供する3つの操作（演算）の名称を書け．

(2) (a)スタック（stack）と(b)キュー（queue, 待ち行列）は，抽象データ型としてみたとき，それぞれどのようなリストか，次の語句を用いて簡潔に説明せよ．（語句：要素，挿入，削除、FIFO、LIFO）

(3) Sを，挿入と削除の二つの演算をもつデータ構造と仮定し，５つの整数 3, 10, 6, 4, 1 をこの順番で，挿入演算を用いてSに格納した後で，Sのすべての要素を削除演算を用いてSから取り出したとする．このとき，(a)Sがスタック（stack）の場合と，(b)Sがキュー（queue, 待ち行列）の場合のそれぞれについて，Sから取り出された要素の順番を答えよ．

(4) 空の2分探索木（binary search tree）に，要素 5, 3, 1, 7, 10, 8, 6, 4を，先頭から順に挿入して得られる2分探索木Tを図示せよ．さらに，得られたTを，根から出発して深さ優先探索(depth-first search, DFS)したときに，(i) 行きがけ順（pre-order, 前順），(ii)通りがけ順（in-order, 中順），(iii)帰りがけ順（post-order, 後順）の巡回(traversal)で，それぞれ出力される要素の列を答えよ．

(5) 空の2分探索木に，n個の要素を順に挿入して得られた木をTとおく．このとき，(a)Tへの要素の挿入の時間計算量が，(a1) 最大となるときと，(a2) 最小となるときは，n個の要素がどのような順番で挿入されるときかを答えよ．(b)さらに，$n = 8$のとき，(b1) 最大となるときの例と(b2)最小となるときの例を，それぞれ図示せよ

【A４】　（選択問題）データ構造に関する次の (A) − (G) のトピックから一つ選択し，指定された項目について，150字から800字程度（1行30-35字として，5行から30行程度まで）で説明せよ．回答には，選択したトピックの番号を書くこと．ただし，図や疑似コードなどを用いても良く，それらは字数には含めないものとする．

A)　二つの正整数aとbの最大公約数$gcd(a, b)$を求めるユークリッドの互除法の(ア)アルゴリズムと，(イ)その計算量を説明せよ．ただし，入力サイズは，入力の整数 aとbのビット長の和とする．

B)　リストに関して，(ア)整列しない配列と，(イ)整列した配列，(ウ)双方向連結リストのそれぞれについて，(i) その実現法と，(ii) 挿入・削除・探索

の演算の計算量，（iii）それぞれの長所と短所を簡単に述べよ．

C) 特別なリストである(ア)スタックと(イ)キューのそれぞれについて，(i)配列を用いた実現方法と，(ii)挿入と削除の演算の計算量を説明せよ．（ウ）さらに，(ア)または（イ）の一つを選び，その応用について簡単に述べよ．

D) 空の2分探索木に，n個の要素を順に挿入したとき，探索と挿入の演算の最悪時間計算量を$O(\log n)$にするための（ア）工夫と（イ）最悪時間計算量がそのようになる理由を簡単に述べよ．

E) 空の2分探索木に，n個の要素を順に挿入したとき，(ア)挿入演算1回あたりの平均時間計算量をnのオーダー（ビッグオー）で与えよ．（イ）さらにその理由を説明せよ．

F) 辞書にn個の要素を順に挿入したとき，挿入演算1回あたりの平均時間計算量が$O(1)$となるデータ構造について，(ア)その名称と，（イ）実現方法，（ウ）時間計算量の解析について説明せよ．

G) ［自由問題］知っているデータ構造を一つ取り上げて，そのデータ構造について，（ア)その名称と，（イ）どのような演算をもつか，（ウ）基本的なアイディアと実現方法を簡単に説明すること．ただし，トピックは，上記のトピックで扱われているもの以外から選択すること．説明に次のどれかの説明を含む場合は加点する：（エ）計算量の解析，（オ）類似のデータ構造と比較した場合の長所と短所，（カ）応用例．

(大問[A]の終わり)

Supplementary: A Glossary for Problem [A]

The list (a glossary) below contains English translations of some keywords in Part [A]. We remark that this list is intended to help the English-speaking examinees understand a specific use of general scientific terms used in this course. It is *not intended to be* a comprehensive or precise explanation of technical terms.

【A１】

アルゴリズムとデータ構造(algorithm and data structure)；入力(input)，出力(output)；手順(procedure)；データの容れ物(data container)；操作/演算(operation)；問題例(problem instances)；計算量(computational complexity)；時間と領域(time and space)；記憶領域(memory)；配置法(arrangement)；命令(instruction)；単位時間(unit time)；計算問題(computational problem)；抽象(abstract)；メモリ管理(memory management)；対数(logarithmic)；一様(uniform)；最悪(worst-case)；平均(average)；並列(parallel)

【A２】None.

【A３】

例(example/instance)；格納(store)；要素(element)；順番(order)；先頭(head/start)；木(tree)；根(root)；探索(search)；深さ優先と幅優先(depth-first and breadth-first)；巡回(traversal)

【A４】

正整数(positive integer)；最大公約数(greatest common divisor)；ユークリッドの互除法(Euclid’s algorithm)；ビット長の和(sum of bit lengths)；配列(array)；整列しない(unsorted)；整列した(sorted)；双方向連結(doubly-linked)；長所と短所(merits and demerits/advantages and disadvantages)；応用(applications)；名称(name)；実現方法(implementation)；アイディア(idea)；解析(analysis)；類似の(similar)

(The end of Glossary for [A])

[B]

【B1】次の擬似コード (pseudo code) で表される整列アルゴリズム (sorting algorithm) Sort について，以下の問いに答えよ。ただし，整列の対象となる n 個の要素は配列 (array) $A = A[0, n-1]$ に格納されており（つまり配列 A のインデックス (index) は 0 始まり），$A[i]$ で配列 A の i 番目の要素にアクセスできるものとする。また，記号 $\leftarrow$ は値の代入を表す。

> 手続き Sort(配列 A, 整数 i, j)
> Step 1: $i \geq j$ ならば何もせずに戻る.
> Step 2: $a \leftarrow A[i]$, $\ell \leftarrow i$, $r \leftarrow j$.
> Step 3-1: $A[\ell] < a$ の間 $\ell \leftarrow \ell+1$ を繰り返す.
> Step 3-2: $A[r] > a$ の間 $r \leftarrow r-1$ を繰り返す.
> Step 3-3: $\ell < r$ ならば，$A[\ell]$ と $A[r]$ を入替え，
> $\ell \leftarrow \ell+1$, $r \leftarrow r-1$ として Step 3-1 へ.
> Step 4: Sort(A, i, $\ell-1$) と Sort(A, $r+1$, j) を実行.

(1) 8 つの整数 5, 10, 3, 7, 2, 1, 9, 2 がこの順番で配列 A に格納されているとする。このとき，手続き Sort(A, 0, 7) が初めて Step 4 を実行する直前の配列 A を示せ。

(2) 入力である配列 A の大きさ n に対し，整列法 Sort(A, 0, $n-1$) の時間計算量 (time complexity) が最悪 (worst-case) となるのは，どのような入力の時かを答えよ。

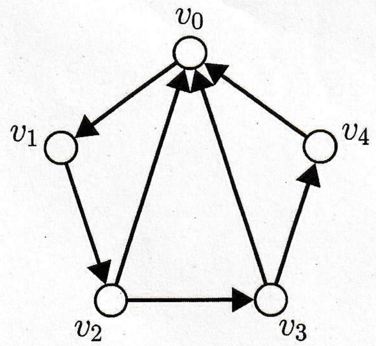
(3) 問 (2) の大きさ n の入力を与えた場合の整列法 Sort(A, 0, $n-1$) の時間計算量 (time complexity) が $T(n)$ であるとする。この時，$T(n)$ に関する漸化式 (recurrence relation) を，アルゴリズムの動作にもとづく説明とともに示せ。

(4) 問 (3) の $T(n)$ に関する漸化式を解き，$T(n)$ を n に関する $O()$ （オーダー表記）で示せ.

(5) 最悪時間計算量の観点から，手続き Sort よりも効率の良い整列法の名前を一つ挙げ，どのようなアイデアに基づいてソートするかを述べよ。また，その最悪時間計算量のオーダーを，理由を添えて答えよ。

【B2】グラフに関する以下の問いに答えよ。

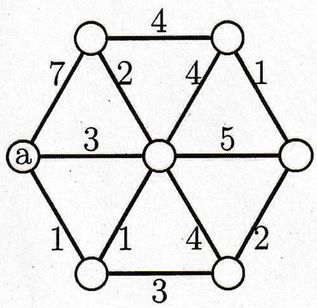
(1) 次の図に描かれた有向グラフ (directed graph) の隣接行列 (adjacency matrix) を求めよ。



(2) 次の表の隣接リスト (adjacency list) 表現で与えられる有向グラフ (directed graph) G を図示せよ。なお，表中の null は，その頂点に隣接する辺が無いことを表す。

頂点	隣接リスト
a	b, f, g, h
b	a, d, c, f
c	d, e
d	null
e	null
f	e
g	null
h	g

(3) 次の図の重み付きグラフ (weighted graph) G について，ダイクストラ (Dijkstra) のアルゴリズムにより，頂点 a を出発点 (source) とする最短路木 (shortest path tree) を一つ求めよ。なお，最短路木に辺が一つずつ加わる過程を，図を用いて説明すること。（単に図を示しただけでは，不十分です。）



図中の G の各辺に付いている正の整数 (positive integer) は，その辺の重み (weight) を示す。

（大問 [B] の終わり）