問 1. 以下の文章それぞれについて，正しいと思うものに○，誤りと思うものに×をつけよ．**×とした場合でも理由は書かなくて良い**．

(ア) 「情報理論の父」と呼ばれているのはジョン・フォン・ノイマンである．
(イ) 自己情報量 $I(p)$ は区間 $0 < p \leq 1$ において単調増加な関数である．
(ウ) M 個の値を取る確率変数 X のエントロピー $H(X)$ は常に $\log_2 M$ 以下である．
(エ) 確率変数 X と Y について Y で条件つけた X のエントロピー $H(X|Y)$ が $H(X)$ と等しくなるのは，X と Y が独立であるときのみである．
(オ) 公平なコインを一度だけ投げて，表が出たときはすべての時点 t において $X_t = 1$，裏が出たときはすべての時点 t において $X_t = 0$ を出力する情報源を考えると，これは定常情報源である．
(カ) (オ) の情報源はエルゴード情報源でもある．
(キ) マルコフ情報源の状態遷移図において，過渡状態にいる確率は，十分時間が経過すると 0 に収束する．
(ク) 語頭条件を満たす符号は瞬時符号であるが，瞬時符号であるからといって語頭条件を満たすとは限らない．
(ケ) 情報源 S に対し一意復号可能なブロック 2 元符号化を行えば，1 情報源記号あたりの平均符号長が S の 1 次エントロピー $H_1(S)$ よりも真に小さい瞬時符号を作ることができる場合がある．
(コ) 6 元情報源 S に対して，各情報源記号に割り当てられる符号語の長さが $1, 2, 2, 3, 3, 3$ となるような 3 元符号で瞬時符号であるものが存在する．
(サ) 情報源 S をハフマン符号で符号化したとき，各情報源記号に割り当てられる符号語は一意に定まる．
(シ) 情報源アルファベットと符号アルファベットがともに $\{0, 1\}$ とし，情報源の出力の値を X，その復号後の値を Y としたとき，ひずみ測度を 0-1 損失関数として平均ひずみ $\bar{d}$ を計算すると，$\bar{d} = P_{X,Y}(1, 1) + P_{X,Y}(0, 0)$ である．
(ス) 2 元対称通信路の通信路行列は常に 2 重に一様である．
(セ) バースト誤りが生じるような通信路の誤り源は，典型的には記憶のある誤り源である．
(ソ) 通信路符号化において，誤りを検出するためには符号の冗長度 ρ は 0 より真に大きい値 (つまり $\rho > 0$) である必要がある．
(タ) 最尤復号法は，すべての符号語が等確率で送信される場合に，正しく復号される確率を最大にするような復号方法である．
(チ) 2 元情報源を長さ k の系列に区切り，長さ n の通信路符号化するとき，復号誤り率をいくらでも小さくするためには，通信路容量が kn よりも大きくなければならない．
(ツ) 単一パリティ検査符号の最小ハミング距離は情報ビットの個数に関わらず常に 1 である．
(テ) 2×2 水平垂直パリティ検査符号の最小ハミング距離は 4 である．
(ト) 2 元符号 C が線形符号であるならば，任意の符号語の (排他的論理) 和も C の符号語である．
(ナ) $(7, 4)$ ハミング符号の生成行列を G とすると，受信語 $\mathbf{y}$ に G の転置 G^T を右からかけることでシンドロームが計算できる．
(ニ) 線形符号であれば最小ハミング距離と最小ハミング重みは一致する．
(ヌ) 巡回符号は組織符号ではない．
(ネ) 多項式 $x^5 + x^2 + 1$ の周期は 5 である．
(ノ) 巡回ハミング符号は，任意の正整数 m について，原始多項式と呼ばれる周期が $2^m - 1$ である生成多項式を用いた符号長 $2^m - 1$ の巡回符号である．

問 2. 各時点の出力確率が $P(A) = 6/10, P(B) = 3/10, P(C) = 1/10$ で与えられるような記憶のない定常情報源 S の符号化を考える．情報源 S を符号アルファベット $\{0, 1\}$ を用いて 2 元符号化するときに，以下の小問に答えよ．**答えは小数で表し，小数点以下 3 桁目を四捨五入し，2 桁まで求めること**．また，以下の対数の近似値を用いても良い ($\log_2 3 = 1.585, \log_2 5 = 2.322$).

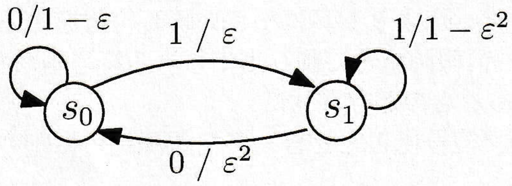
(1) S から発生する情報源系列に対し，1 情報源記号ごとに 2 元符号化するハフマン符号を求め，その 1 情報源記号あたりの平均符号長 L_1 を求めよ．

(2) S から発生する情報源系列を，2 情報源記号毎に 2 元符号化するブロックハフマン符号を求め，その 1 情報源記号あたりの平均符号長 L_2 を求めよ．

(3) S のエントロピー $H(S)$ を求め，L_1, L_2 との大小を比較せよ．

(4) S から発生する情報源系列を AAA, AAB, AAC, AB, AC, B, C の 7 つの系列に分割し符号化する．これらの系列に対し，1 情報源記号あたりの平均符号長ができるだけ小さい一意復号可能な**固定長符号**による符号化を求め，その 1 情報源記号あたりの平均符号長 L_3 を求めよ．

問 3. 誤り源 S_E が以下の図で表されるマルコフ情報源として表される加法的 2 元通信路を考える．$0 < \varepsilon < 1$ を仮定し，以下の小問に答えよ．



(1) S_E の定常分布における s_0, s_1 にいる確率 w_0, w_1 を ε を用いて表わせ．

(2) 定常状態の S_E において，この誤り源の出力 E とする．ビット誤り率 $P_E(1)$ を ε を用いて表わせ．

(3) 誤り源 S_E のエントロピー $H(S_E)$ をエントロピー関数 $\mathcal{H}$ と ε を用いて表わせ．

(4) (2) で求めたビット誤り率と同じビット誤り率を持つような**記憶の無い定常情報源**を誤り源として持つ加法的 2 元通信路の通信路容量 C' を $\mathcal{H}$ と ε を用いて表わせ．

(5) この問の通信路の通信路容量を C とする．$\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のときに，C と C' の大小を比較せよ．この問では，大小のみを比較すれば十分であり，具体的な通信路容量を求める必要は無い．(**ヒント**: ε は方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の解であることに注意せよ．)

問 4. 情報ビットが x_1, x_2, x_3, x_4 である系列に対して，以下の式によって定義される検査ビット c_1, c_2, c_3 を付加して得られる符号語 $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4, c_1, c_2, c_3)$ とする符号化は $(7, 4)$ ハミング符号である (ただし，$+$ は 2 の剰余系を考えるとする)．以下の小問に答えよ．

$$c_1 = x_1 + x_2 + x_4, \quad c_2 = x_1 + x_2 + x_3, \quad c_3 = x_2 + x_3 + x_4$$

(1) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 1)$ に対応する符号語を求めよ．

(2) この符号の生成行列 G を求めよ．

(3) この符号の効率 η と冗長度 ρ を求めよ．

(4) 受信語 $\mathbf{y} = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ に対するシンドロームを計算し，ちょうどひとつの誤りが生じたと仮定して，4 つの情報ビットの値を復元せよ．

(5) この符号の最小ハミング距離 $d_{\min}$ を求めよ．また，限界距離復号法を用いた場合に，誤りを訂正しないとしたときに (漏れなく全て検出可能な) 誤りの最大数を求めよ．