問 1

[1]

① (a). 8 (b). 9 (c). 64 (d). 7 (e). 64
② n == 0 ? 0 : (queen[n - 1] + 1)
③ sum = 0

[2]

(ア).　　(イ). (c)　　(ウ). (a)　　(エ). (d)

問 3

(1)

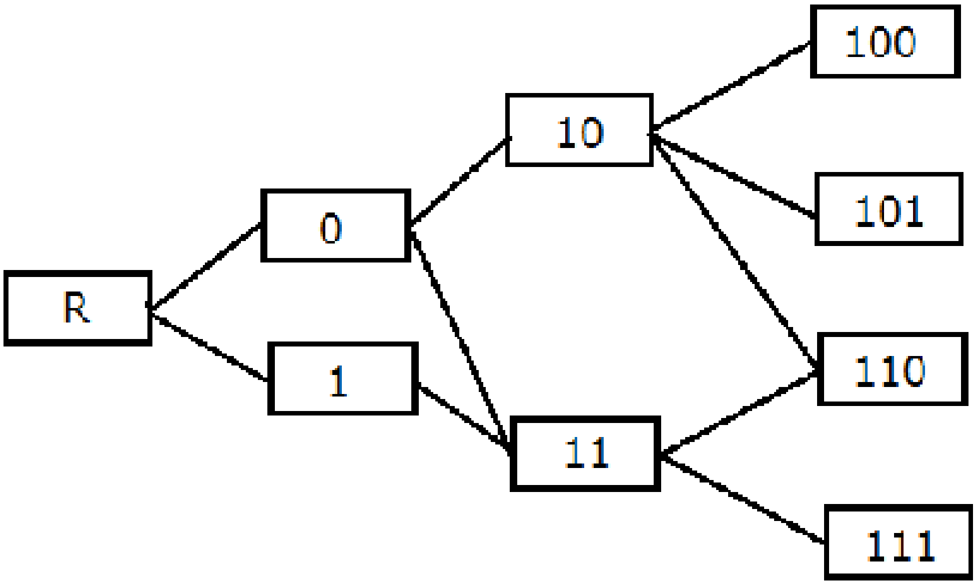
べき等性 … 複数回実行を繰り返しても値が変わらないもの。(例：絶対値、0, 1 の乗数など)

(2)

(ア)

- 1 桁：16
- 2 桁：(十の位：0 以外の数) $\times$ (一の位：十の位の数以外) $= 15 \times 15 = 225$
- 3 桁：(百の位：0 以外の数) $\times$ (十の位：百の位以外の数) $\times$ (一の位：百、十以外の数) $= 15 \times 15 \times 14 = 3150$
- 4 桁：(千の位：0 以外の数) $\times$ (百の位：千の位以外の数) $\times$ (十の位：千、百の位以外の数) $\times$ (一の位：千、百、十以外の数) $= 15 \times 15 \times 14 \times 13 = 40950$

(イ)



(ウ)

この条件のもとでは、n 桁目の整数 1 つにつき 1 桁目と n 桁目を除いた 2 つの数字が作られることが分かる。このなかで、2 つ数字が作れないものが存在する。それは、$111\cdots1$ と、$10\cdots$ の数字である。
前者は、どちらの桁をとっても同じ数字になり、後者は n 桁目をとった数字は存在しないことが分かる。
このことから、$(k \leq 3)$ の条件下において、n 桁目で増える本数の数は、

$$2^{k-1}(n\text{ 桁目における 2 進数で表すことのできる整数の数}) + (2^{n-2} - 1)$$

$$(n\text{ 桁目における }11\cdots\text{ であらわすことのできる整数から }11\cdots1\text{ を引いたもの})$$

となる。よって、n での辺の増加本数は、

$$\sum_{k=3}^{n} 2^{k-1} + (2^{k-2} - 1)$$

とあらわすことができる。これらは、公比 2 の等比数列の和であるので、

$$\sum_{k=3}^{n} 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{2} 2^{k-1} = 2^n - 1 - 3 = 2^n - 4$$

$$\sum_{k=3}^{n} 2^{k-2} - 1 = \sum_{k=3}^{n} 2^{k-2} - \sum_{k=3}^{n} k$$

$$= \sum_{k=2}^{n} 2^{k-2} - \sum_{k=2}^{2} 2^{k-2} - n + 2 = 2^(n-1) - 1 - 1 - n + 2 = 2^(n-1) - n$$

より、n 桁目における辺の総和は、

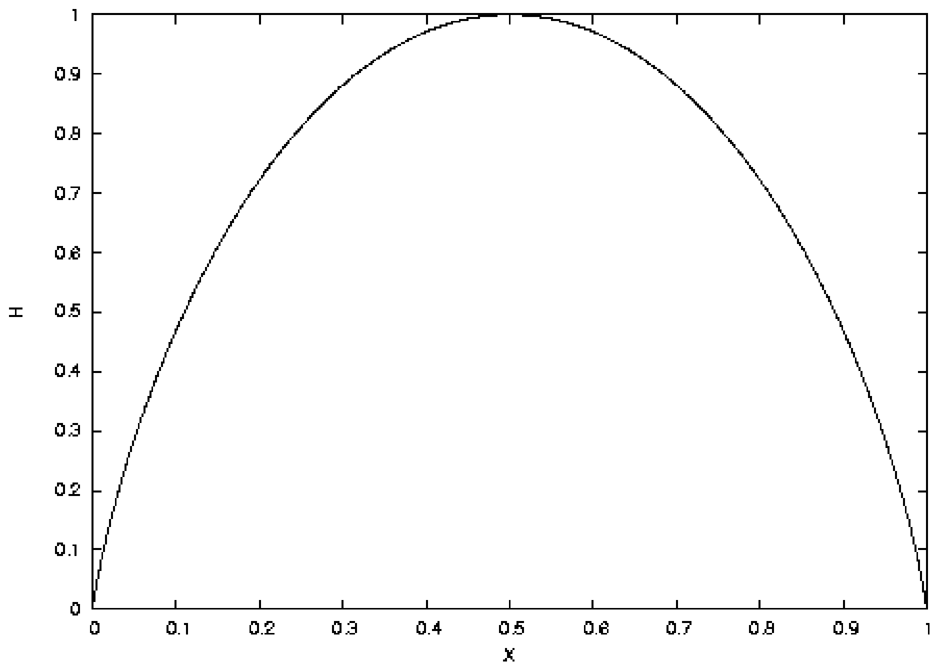
$$2^n + 2^{n-1} - n - 4 + (2+3)(1\text{ 桁目と 2 桁目の本数}) = 2^n + 2^{n-1} - n + 1$$

となる。

問4

(i)

エントロピー関数の求め方：$-$おこる確率 $\times$ log おこる確率 より、(log の底数はなんでも良いが、2 が一般的。今回のグラフは、底数を 2 とする)
この条件下では、$-p\log_2 p - (1-p)log_2 1 - p$ となる。よって、



(ii)

問5

(i)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$|A - tE| = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 2 & 1-t & -1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)\{(1-t)^2 - 3\} + 0 = (1-t)(t^2 - 2t - 2)$$

より、t = -1, $1 \pm \sqrt{5}$ となる。
t = 1 のとき、[A - E][x] = 0 を求める。

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上記の式から、

$$x_3 = 2x_1, x_2 = 0 \text{ より固有ベクトルは、} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{となる。大きさが 1 であるので、} \sqrt{1+2^2} \text{で割る。}$$

t $= 1 \pm \sqrt{5}$ のとき、

$$\begin{bmatrix} \pm\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2 & \pm\sqrt{5} & -1 \\ 0 & -1 & \pm\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上記の式を解くと、

$$t = 1-\sqrt{5} \text{のとき、} \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}, t = 1+\sqrt{5} \text{のとき、} \begin{bmatrix} -2 \\ -\sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる。どちらも、大きさを 1 にするため、$\sqrt{(-2)^2 + \sqrt{\pm 5}^2 + (1)^2}$ で割る。
これは、どの固有ベクトル同士を掛け合わせても 0 になるため、直交していることが分かる。

(iii)

条件の式に従って式変形をしていく。

$$\frac{d}{dt}r = Ar \to \frac{d}{dt}Vu = AVu \to \frac{d}{dt}u = V^{-1}AVu = Pu$$

よって、$V^{-1}AV = P$ となる行列 V, P を求めればよいことが分かる。
(ii) から、固有ベクトルを求めているので、それを使い A を対角化すればよい。よって、

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, V^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & -\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}$$

となる。これによって $P = V^{-1}AV$ より、

$$P = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

となる。

(iv)

(iii) から $\frac{d}{dt}\mathbf{u} = \mathbf{Pu}$ であることがわかった．このことから，

$$\frac{d}{dt}u_1 = u_1 \tag{1}$$
$$\frac{d}{dt}u_2 = 1+\sqrt{5}u_2 \tag{2}$$
$$\frac{d}{dt}u_3 = 1-\sqrt{5}u_3 \tag{3}$$

であることがわかる．この微分方程式を解くことによって，

$$u_1 = C_1e^t, u_2 = C_2e^{(1+\sqrt{5})t}, C_3e^{(1-\sqrt{5})t} (C_1, C_2, C_3 \text{は零ではない実数}) \tag{4}$$

であることがわかる．

ここで, (iii) より $\mathbf{r} = \mathbf{Vu}$ より,

$$
\begin{aligned}
r = \mathbf{Vu} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{(1+\sqrt{5})t} \\ C_3 e^{(1-\sqrt{5})t} \end{bmatrix} && (5) \\
&= \begin{bmatrix} C_1 e^t - 2C_2 e^{(1+\sqrt{5})t} - 2C_3 e^{(1-\sqrt{5})t} \\ \sqrt{5} C_2 e^{(1+\sqrt{5})t} - \sqrt{5} C_3 e^{(1-\sqrt{5})t} \\ 2C_1 e^t + C_2 e^{(1+\sqrt{5})t} + C_3 e^{(1-\sqrt{5})t} \end{bmatrix} && (6)
\end{aligned}
$$

となる．このことから,

$$
\begin{aligned}
x &= C_1 e^t - 2C_2 e^{(1+\sqrt{5})t} - 2C_3 e^{(1-\sqrt{5})t} && (7) \\
y &= \sqrt{5} C_2 e^{(1+\sqrt{5})t} - \sqrt{5} C_3 e^{(1-\sqrt{5})t} && (8) \\
z &= 2C_1 e^t + C_2 e^{(1+\sqrt{5})t} + C_3 e^{(1-\sqrt{5})t} && (9)
\end{aligned}
$$

となる． あとは初期条件を (7) から (9) に代入することで C_1, C_2, C_3 を求める． 計算を行うと $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}, C_3 = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$ となり, x, y, z はそれぞれ,

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{\sqrt{5}} e^{(1+\sqrt{5})t} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{(1-\sqrt{5})t} && (10) \\
y &= \frac{1}{2} e^{(1+\sqrt{5})t} + \frac{1}{2} e^{(1-\sqrt{5})t} && (11) \\
z &= \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{(1+\sqrt{5})t} - \frac{1}{2\sqrt{5}} e^{(1-\sqrt{5})t} && (12)
\end{aligned}
$$

となる．