北海道大学　大学院情報科学研究科

複合情報学専攻 修士課程入学試験

平成 23 年 8 月 18 日(木)　13:00~15:00

専門科目 1

受験上の注意

● 本問題冊子に問題が五問あり，問 1（計算機プログラミング）と問 2（コンピュータ工学）は必修問題である．問 3（情報数学），問 4（情報理論），および問 5（線形代数学）の三問から二問を選択し，合計四問について解答せよ．

● 選択問題チェック票に受験番号および，選択した科目に印を記入すること．

●解答用の答案用紙は 4 枚である．この他に下書き用の草案紙 4 枚を配付する．

●すべての答案用紙に，受験番号，選択した問題番号(例えば，問 3 など)を必ず記入すること．

●解答は，問題ごとに別々の答案用紙に記入すること(裏面を使用してもよい．答案用紙が不足したり，破損したりした場合には試験監督員に申し出て受け取ること)．

●解答が複数枚にわたる時は，1/2，2/2 のように答案用紙にページ番号を必ず付すこと，及び受験番号，選択した問題番号を各ページに記入すること．

●問題冊子，草案紙は持ち帰り，選択問題チェック票とすべての答案用紙とを提出すること．

●机の上に置いてよいものは，筆記用具（鉛筆，消しゴム，鉛筆削りなど），時計，および特に指示があったもののみである．時計は計時機能のみを使用し，アラームの使用を禁ずる．携帯電話等は電源を切っておくこと．電卓，電子辞書などは使用不可である．

問 1. 計算機プログラミング

[１] ～ [２]の各問いに答えよ．

[１] 8 クイーン問題とは，チェスの盤面（8×8）にクイーン（縦横斜めの 8 方向に遮るものがない限り進める）を 8 つ配置したときに，どのクイーンもほかのクイーンに取られることがない配置を求める問題であり，複数の解があることが知られている．ただし，ここでは盤面に方向があるものとする．8 クイーン問題の解の数を再帰によって求める C 言語プログラムを考える．図１はプログラム中で使われる盤面の各マスの番号と配置されたクイーンが移動できるマスの例であり，プログラムではマスの番号順にクイーンを置いて制約違反がないかチェックする．このプログラムについて，次の各問いについて答えなさい．

① プログラム中の (a) ～ (e) に入る整数をそれぞれ答えなさい．
② （ア）には，n が 0 であれば 0，それ以外であれば queen[n-1]+1 を返す条件演算子による処理が入る．そのコードを答えなさい．
③ （イ），（ウ）を適切に埋めてプログラムを完成させなさい．

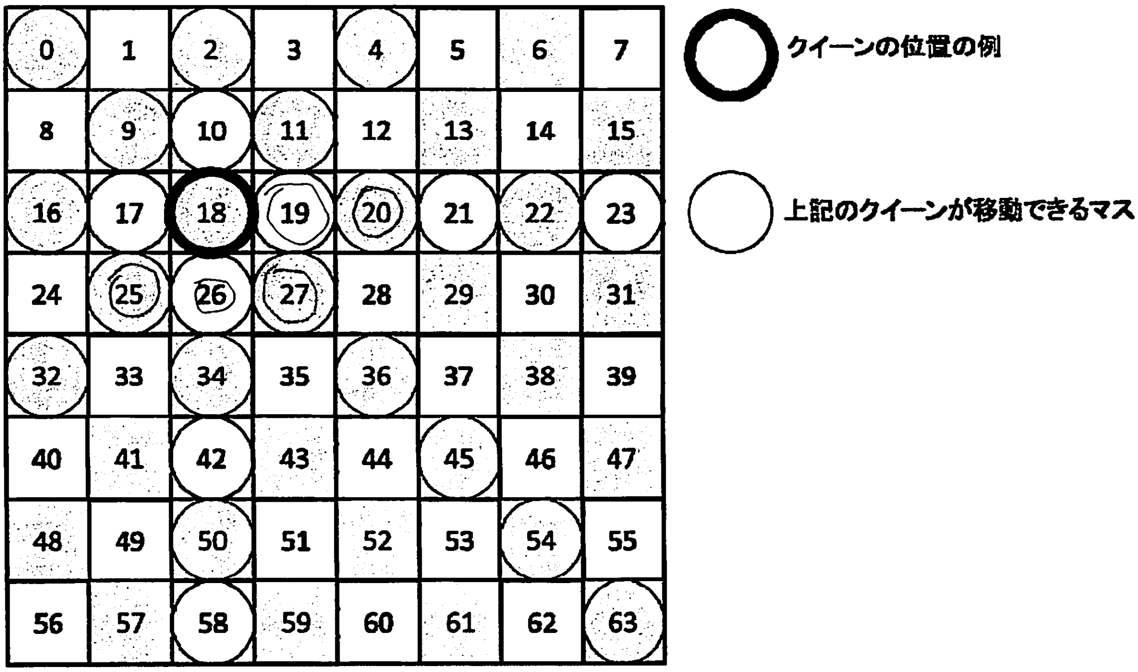


図１：盤面の例

プログラム

```
#include <stdio.h>
/* クイーンを n 個配置している状態と新たにクイーンを配置するマスの番号を受け取り，それ
が制約を満たしていれば 1，そうでなければ 0 を返す関数．ただし，新たに配置されるクイーン
のマスの番号はすでに配置されている n 個のクイーンの番号より大きいものとする */
int check(int *queen, int n, int pos){
  int i, flg=1;
  for(i=0; i<n; i++){                          よこ      たて
    if (queen[i]/[(a)]==pos/[(a)] || queen[i]%[(a)]==pos%[(a)] ||
        (queen[i]%[(b)]==pos%[(b)] && queen[i]%[(c)]<pos%[(c)]) ||  右ななめ
        (queen[i]%[(d)]==pos%[(d)] && queen[i]%[(e)]>pos%[(e)]))
                                                    左ななめ
      flg=0;
  }
  return flg;
}

/* クイーンを n 個配置している状態を受け取り，さらに残りのクイーンを配置して得られる解
の総数を返す関数 */
int solve(int *queen, int n){
  int i, pos, sum=0;
  if (n<8){
    for (pos=[   (ア)   ]; pos<64; pos++)
      if (check(queen, n, pos)){
        queen[n]=pos;
        sum+=solve (queen, n+1);
      }
  }
  else
    [  (イ)  ];

  return sum;
}

/* メイン関数 */
int main(){
  int queen[8];
  printf("The number of solutions is %d. ¥n",[   (ウ)   ] );
}
```

［2］単調な実関数$f(x)$が区間$[a, b]$で零点（$f(x)=0$ を満たすx）を持つとき，それを求めるプログラムを作りたい．次ページのプログラムは二分法でそのような零点を求める C 言語プログラムである．bisection 関数は与えられた関数が区間$[a, b]$に零点を持つ場合 1 を，持たない場合 0 を戻り値として返す．零点の値は引数を通して呼び出し元に返される．accuracy は精度を表す引数である．このプログラムについて，次の各問いに答えなさい．

① プログラム中の（ア）の部分に入れるべきものを以下の(a)～(d)から一つ選択しなさい．

(a)　f(double)　(b)　(*f)(double)　(c)　(**f)(double)　(d)　(&f)(double)

② プログラム中の（イ）の部分に入れるべきものを以下の(a)～(c)から一つ選択しなさい．

(a)　<　(b)　==　(c)　>

③ プログラム中の（ウ）の部分に入れるべきものを以下の(a)～(c)から一つ選択しなさい．

(a)　<　(b)　==　(c)　>

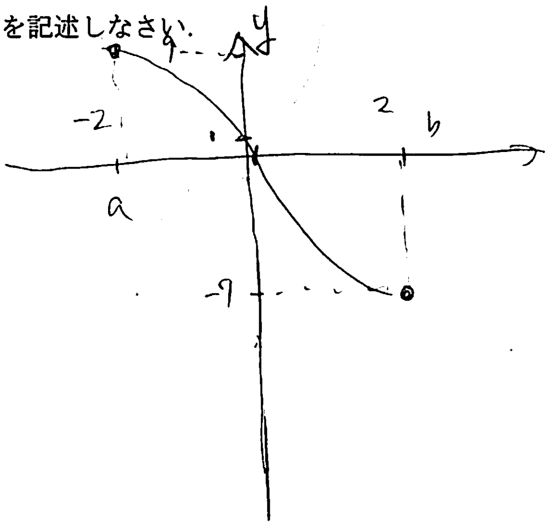
④ プログラム中の（エ）の部分に入れるべきものを以下の(a)～(d)から一つ選択しなさい．

(a)　x　(b)　*x　(c)　**x　(d)　&x

$-x^3+1=0$

$x^3=1$

⑤ プログラムを実行した際に印字される結果を記述しなさい．



プログラム

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

double f(double x)
{return -x*x*x+1;}

double bisection(double  (ア) , double *zeropoint, double a, double b,
double accuracy){
  double fa, fb, mid, fmid;

  fa=f(a);  fb=f(b);
  if (fa*fb  (イ)  0) return 0;
  if (fa==0) {*zeropoint=a; return 1;}
  if (fb==0) {*zeropoint=b; return 1;}

  while(1) {
    printf("%.3f %.3f¥n", a,b);

    mid=(a+b)*0.5;        mid=1
    if (mid-a <= accuracy || b-mid <= accuracy) break;
                           fmid=0
    fmid=f(mid);
    if (fmid==0) {*zeropoint=mid; return 1;}

    if (fa*fmid  (ウ)  0) {b=mid; fb=fmid;}
    else {a=mid; fa=fmid;}
  }
  *zeropoint=mid;
  return 1;
}

main()
{
  double x;
  if(bisection(f,  (エ) , -2.000, 2.000, 0.001))
   printf("%.3f¥n",x);
  else
   printf("零点はありません. ¥n");
}
```

問 2. コンピュータ工学

以下の問いに答えよ.

［1］ 以下の問いに答えよ．なお，説明の場合２００字以内で答えよ．

(1) 一般的なコンピュータアーキテクチャにおいて，ハードウェアの５大装置と呼ばれるものを全て列挙せよ．

(2) ジョブ管理において，デッドロックが生じる原因とその回避方法を説明せよ．

(3) 直接アドレス指定方式と間接アドレス指定方式の違いについて，ロード命令を例にとり説明せよ．

(4) グラフィック処理等の目的で Graphic Processing Unit (GPU)と呼ばれる専用のプロセッサが用いられることがあるが，汎用のプロセッサ(CPU)を用いず，専用の GPU を用いる必要性について説明せよ．

［2］論理回路による加算器の構成に関する以下の問いに答えよ．

(1) 1 ビット半加算器及び全加算器を NAND 素子のみを用いた論理回路として示せ．

(2) 2 ビット全加算器の入出力関係を示し，それを NAND 素子のみを用いた論理回路として示せ．

C

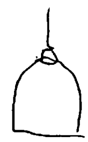
	0	1
0	0	1
1	1	0

NOR

半加算→くりあがり無視
全〃→〃考える

AND

	0	1
0	0	0
1	0	1



0 1
0 1
1 0

NAND

	0	1
0	1	1
1	1	0

問 3. 情報数学

以下の問いに答えよ．導出過程や根拠も記述すること．

（1） ブール代数における二項演算として，論理積$\wedge$，論理和$\vee$，排他的論理和$\oplus$を考える．これらの演算の真理値表を作成し，各演算がベキ等性を満たすかどうかを示せ．

（2） 0 から 9 までの数字のいずれか 1 つを書いたカードと，A から F までの英字アルファベットのいずれか 1 字を書いたカードを，十分な枚数用意する．これらを用いて，複数枚のカードからなる順列を考え，「カードの列」とよぶ．このとき，以下の各小問（ア）～（ウ）に答えよ．なお，「n桁のp進数」とは，0 から$p-1$までのカードn枚からなるカードの列とする．ただし，$n \geq 2$のとき，カードの列の左端（最上位桁）は 0 をとらないものとする．

（ア）同じ字のカードを 2 枚以上用いない（つまり，列を構成するすべてのカードには異なる字が書かれている）という条件のもとで得られるカードの列のうち，1 桁から 4 桁までの 16 進数とみなせるカードの列の総数を，10 進数で答えよ．

（イ）1 桁からn桁（ただし$n \geq 2$）までの 2 進数とみなせるカードの列を用いて，以下のような手順で無向グラフを作成する．

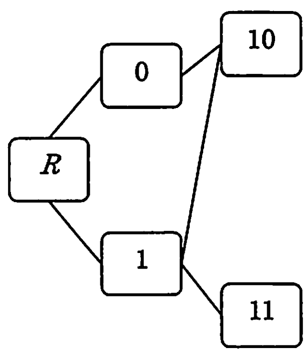
1. それぞれのカードの列を頂点とみなす．また，頂点Rを新たに置く．
2. 1 桁のカードの列（「0」と「1」）と，Rとの間に辺を張る．
3. k桁のカードの列について，左端あるいは右端のいずれか 1 枚を除いたカードの列に対応する$(k-1)$桁のカードの列との間に辺を張る．ただし，$k=2,\ldots,n$である．

例:

$k=2$の場合，2 桁の 2 進数とみなせる 2 枚のカードの列は「10」と「11」である．

「10」について，左端にある 1 を除いて得られる 1 枚のカードの列は「0」，右端にある 0 を除いて得られる 1 枚のカードの列は「1」であるから，「10」と「0」，「10」と「1」の間に辺を張る．

「11」について，同様に考えると，得られる 1 枚のカードの列は「1」だけなので，「11」と「1」の間に辺を張る．



例を参考に，$n=3$の場合のグラフを図示せよ．

（ウ）（イ）に示した方法で作成する無向グラフについて，$n \geq 3$での辺の総数を，nを用いた式で示せ．

問４． 情報理論

N 個のアルファベット $\mathcal{A} \equiv \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ の要素 x が確率 $P(X = x)$ で生成される情報源を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) $N = 2$ で，$P(X = x_1) = p, P(X = x_2) = 1 - p$ のとき，この情報源のエントロピー，すなわち，2 値エントロピー関数 $h(p)$ を求め，それを図示せよ．

(ii) 2 つの確率分布 $P(X = x), Q(X = x)$ 間のカルバック・ライブラ・ダイバージェンスは

$$D_{KL}(P||Q) = -\sum_{x\in\mathcal{A}} P(X = x) \log \left\{ \frac{Q(X = x)}{P(X = x)} \right\} \tag{1}$$

で定義される．このとき，$D_{KL}(P||Q)$ は非負値をとること，すなわち，$D_{KL}(P||Q) \geq 0$ を示せ．ただし，必要であれば，任意の凸関数 $f(x)$ について成立する不等式:

$$\mathbb{E}[f(x)] \leq f(\mathbb{E}[x]) \tag{2}$$

を用いてもよい．ここに，$\mathbb{E}[\cdots]$ は確率分布 $P(X = x)$ についての期待値:

$$\mathbb{E}[\cdots] = \sum_{x\in\mathcal{A}} P(X = x)(\cdots) \tag{3}$$

である．

(iii) 小問 (ii) で示した $D_{KL}(P||Q) \geq 0$ を用いることで，N 個のアルファベットからなる情報源のエントロピー $H(X)$ に対して不等式:

$$H(X) \leq \log N \tag{4}$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは，N 個のアルファベットの各々が等確率で生成される場合であることを示せ．

(iv) 情報源のアルファベットが正の整数 $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \cdots, \infty\}$ の場合，小問 (ii) で示した不等式において

- その期待値が m となるような情報源の生成確率分布を
  $P(X = x)$.
- p を $0 < p < 1$ を満たす定数とした場合の幾何分布:
  $(1 - p)p^{x-1}$ を $Q(X = x)$.

と選んだ場合，生成確率分布が $P(X = x)$ で与えられる情報源のエントロピー $H(X)$ に対して不等式:

$$H(X) \leq mh\left(\frac{1}{m}\right) \tag{5}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$h(\cdot)$ は小問 (i) で求めた 2 値エントロピー関数である．

問５．線形代数学

微分方程式は線形代数の初等的な知識を用いて解ける場合がある．そこで，次の連立常微分方程式とその行列表現について以下の問題に答えよ．ただし，x, y, z はそれぞれ t の関数とする．

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} &=& x+2y \\ \frac{dy}{dt} &=& 2x+y-z \\ \frac{dz}{dt} &=& -y+z \end{array}\right\} \tag{1}$$

(i) ３次元のベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で定義するとき，微分方程式を行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

と書き直す．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(ii) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と大きさ１で規格化された固有ベクトルを求め，固有ベクトルが互いに直交することを示せ．

(iii) 微分方程式 (2) を線形変換

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}$$

と変形したい．このような行列 $\boldsymbol{V}$ と対角行列 $\boldsymbol{P}$ をそれぞれ求めよ．

(iv) 上記の結果を用いて，連立微分方程式 (1) を $t=0$ において $x=z=0, y=1$ の初期条件下で解け．