

北海道大学 大学院情報科学研究科

複合情報学専攻 修士課程入学試験

平成 22 年 8 月 18 日(水) 13:00~15:00

専門科目 1

受験上の注意

- 本問題冊子に問題が五問あり，問 1（計算機プログラミング）と問 2（コンピュータ工学）は必修問題である．問 3（情報数学），問 4（情報理論），および問 5（線形代数学）の三問から二問を選択し，合計四問について解答せよ．
- 選択問題チェック票に受験番号および，選択した科目に印を記入すること．
- 解答用の答案用紙は 4 枚である．この他に下書き用の草案紙 4 枚を配付する．
- すべての答案用紙に，受験番号，選択した問題番号(例えば，問 3 など)を必ず記入すること．
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙に記入すること(裏面を使用してもよい．答案用紙が不足したり，破損したりした場合には試験監督員に申し出て受け取ること)．
- 解答が複数枚にわたる時は，1/2, 2/2 のように答案用紙にページ番号を必ず付すこと，及び受験番号，選択した問題番号を各ページに記入すること．
- 問題冊子，草案紙は持ち帰り，選択問題チェック票とすべての答案用紙とを提出すること．
- 机の上に置いてよいものは，筆記用具（鉛筆，消しゴム，鉛筆削りなど），時計，および特に指示があったもののみである．時計は計時機能のみを使用し，アラームの使用を禁ずる．携帯電話等は電源を切っておくこと．電卓，電子辞書などは使用不可である．

問 1. 計算機プログラミング

[1]～[3]の各問いに答えよ.

[1] 次の等式

$$2^{p-1} \bmod p = 1$$

を満たすような 2 以上 1000 以下の整数 p のうち, 素数ではないものを列挙して出力するプログラムを作成したい. 以下の C 言語ソースコードの (ア) ～ (オ) を適切に埋め, プログラムを完成させなさい. なお, このプログラムは, $(x \cdot y) \bmod p = ((x \bmod p) \cdot (y \bmod p)) \bmod p$ が成り立つことを利用している.

ソースコード

```
#include <stdio.h>

int fprime(int p){
    int t=1;
    int i;
    for(i=0;i<(ア);i++){
        t *= (イ);
        t %= p;
    }
    return t;
}

int prime(int n){
    int i;
    for(i=2;i<n;i++){
        if((ウ))
            return 0;
    }
    return 1;
}

int main(){
    int i;
    for(i=2;i<=1000;i++){
        if( fprime(i)==(エ) && prime(i)==(オ) )
            printf("%d¥n", i);
    }
    return 0;
}
```

[2] 集合 S が与えられたとき、 S のすべての部分集合を元とする集合 $P(S) := \{A \mid A \subseteq S\}$ を S のベキ集合という。集合 S が与えられた際、 $P(S)$ の要素すべてを出力する関数 `powerset` を下記のソースコードのように C 言語で作成した。`powerset` の第一引数 x は集合 S の要素を表す `char` 型の配列であり、第二引数 n はその要素数を表す。この関数では n ビットの二進数を考え、その各桁に集合 S の要素を対応させる。そして、1 となるビットに対応する要素を出力することをすべての二進数の組み合わせで行うことによりベキ集合を列挙するアルゴリズムとなっている。

このとき、以下の (ア) ~ (エ) を適切に埋めてプログラムを完成させなさい。なお、累乗を求める際には `pow` 関数を利用することが出来るものとする。

ソースコード

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

void powerset(char x[], int n){
    int i,j,a;

    for (i=0;i<(ア);i++){
        printf("{ ");
        a=i;
        for(j=0;j<(イ);j++){
            if ((ウ)) printf("%c ", x[j]);
            (エ);
        }
        printf("}¥n");
    }
}

int main(){
    char x[]={'a', 'b', 'c'};
    int n=3;
    powerset(x,n);
    return 0;
}
```

実行例

```
{ }
{ a }
{ b }
{ a b }
{ c }
{ a c }
{ b c }
{ a b c }
```

【3】下記のソースコードは二分木を構築する C 言語プログラムである。insert 関数は与えられた整数値を二分木に登録する。その際、構造体 NODE で作られる各節点の左側の子孫（ポインタ left の先の子孫）は常に自分より小さな値を、右側の子孫（ポインタ right の先の子孫）は常に自分より大きな値を持つようにする。同じ値を二重には登録しない。printnodes 関数は二分木に登録された整数値を出力する関数である。このプログラムについて、次の各問いに答えなさい。

(1) プログラムを実行した際に印字される整数値を、出力順に記述しなさい。

(2) 登録された整数値が、どのような場合でも昇順で出力されるように修正した printnodes 関数を記述しなさい。

ソースコード

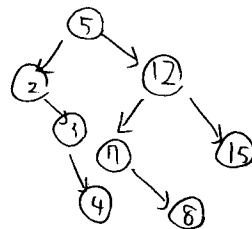
```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>

struct NODE { int value; struct NODE *left; struct NODE *right;};

void insert(struct NODE **p, int n){
    if (*p==NULL) {
        if ((*p=(struct NODE *)malloc(sizeof(struct NODE)))==NULL) exit(1);
        (*p)->value = n;
        (*p)->left=NULL;
        (*p)->right=NULL;
    }
    else {
        if ((*p)->value>n) insert(&(*p)->left,n);
        else if ((*p)->value<n) insert(&(*p)->right,n);
    }
}

void printnodes(struct NODE *q){
    if (q!=NULL) {
        printf("%d ", q->value);
        printnodes(q->left);
        printnodes(q->right);
    }
}

main(){
    int n;
    struct NODE *r=NULL;
    insert(&r, 5); insert(&r, 12); insert(&r, 2); insert(&r, 7);
    insert(&r, 15); insert(&r, 8); insert(&r, 3); insert(&r, 4);
    printnodes(r);
}
```



問 2. コンピュータ工学

以下の問いに答えよ。

[1] 以下の文章において、括弧内を埋めよ。ただし、(サ)については 200 字以内の文章で記述せよ。

ノイマン型計算機は、主記憶装置、(ア) 装置、演算装置、入力装置、出力装置から構成され、主記憶装置に内蔵した (イ) にしたがって処理を制御する。現在、用いられているプロセッサのほとんどがノイマン型計算機に基づいており、その内部は主に、演算部と (ア) 部からなっており、演算部は大きく演算実行部と (ウ) 実行部から構成されている。

プロセッサの内部を詳しく見ると、(ウ) 実行部の内部には (エ) と呼ばれる数バイト程度の小容量の記憶装置が複数用意されている。(エ) のうち、主記憶上でどの部分の (イ) を実行しているかを指し示す特別のものを (オ) と呼ぶ。また、(ウ) (エ) は主記憶から読み込まれた (イ) を解釈するために一時的に記憶しておくものであり、それを (カ) により解読し、(ア) 部へその内容を渡す。その内容に基づき、演算を実行する場合には演算部において処理を行う。特にその心臓部となるものが (キ) であり、加算、減算などの算術演算や、論理和、論理積などの論理演算を実行する。演算の実行にあたって、その対象となるデータを指定するアドレス方式について、命令に続くアドレス部をそのまま用いる (ク) アドレス方式や、(ケ) (エ) の内容をアドレス部に加えて実行アドレスを求めるインデックス修飾アドレス方式などがある。演算結果を保存するために用いられる (エ) を特に (コ) と呼ぶ。

プロセッサにおいて一回の演算を行う場合、その動作の流れは以下の通りである。(サ)

[2] オペレーティングシステムに関して下記の問いに答えよ。

(1) オペレーティングシステムの役割と効果について、次の 4 つに分類するとき、下記の使用語群をそれぞれ 3 つずつ対応する役割に分類し、役割の記号 (A~D) に対応する用語の記号 (a~l) を関連づけて答えよ。

- ~~(A)~~ ハードウェアの管理と有効利用
- ~~(B)~~ 多様な処理形態への対応
- (C) 応用ソフトウェアの負担軽減
- (D) ユーザの負荷軽減

△
令

(a) プリンタ制御、 (b) バッチ処理、 (c) タッチパネル、 (d) 言語プロセッサ、 (e) ガベージコレクション、 (f) ライブラリ管理、 (g) タイムシェアリング処理、 (h) 多重プログラミング、 (i) GUI、 (j) リアルタイム処理、 (k) プラグアンドプレイ、 (l) 仮想記憶

(2) オペレーティングシステムの基本構成要素の一つであるカーネルの主な機能として、プロセス管理、メモリ管理、ファイル管理、入出力管理がある。このうちの一つの機能について 50 字程度で説明せよ。

問 3. 情報数学

以下の問いに答えよ。導出過程や根拠も記述すること。

[1] 20 未満のすべての自然数を要素とする集合 $\{1, 2, \dots, 19\}$ を N とする。このとき、以下の小問に答えよ。なお、 $\#(A)$ は集合 A の要素の数である。

(1) N のベキ集合を B とする。 $\#(B)$ を指数表現または整数値で求めよ。

(2) B の部分集合として $C = \{x \mid x \in B, \#(x) > 0\}$ を考え、さらに、

$D = \{x \mid x \in C, (\forall y \in x: \text{ndiv}(y) = 2)\}$ を考える。ただし、 $\text{ndiv}(y)$ は、 y の正の約数の個数である。 $\#(D)$ を求めよ。

(3) D の任意の二つの要素（すなわち集合） P, Q ($P, Q \in D$) について以下の条件を満たす P, Q のペアの総数を求めよ。

$$(\#(P) - \#(Q) = 1) \text{ かつ } (Q \subset P).$$

[2] 変数 A と B はそれぞれ $\{0, 1\}$ のいずれかの値を取る。 A と B の値が異なる場合に 0、等しい場合に 1 とする演算を $M(A, B)$ で表す。また、 A, B の両方が 0 の時に限って 0 を、それ以外は 1 を返す演算を $N(A, B)$ と表す。このとき、以下の小問に答えよ。

(1) 演算 M が結合則を満たすことを示せ。

(2) 演算 M が演算 N に対して分配則を満たさないことを示せ。

問 4. 情報理論

(n, k) -二元線形符号に関して以下の問いに答えよ.

- [1] $(n - k) \times n$ 行列 $H = [P^T \ I_{n-k}]$ をパリティ検査行列とする. 先頭の k ビットがゼロである n 次元ベクトル:

$$\mathbf{x} = (0, \dots, 0, a_1, a_2, \dots, a_{n-k}), a_j = \{0, 1\}, j = 1, \dots, n - k$$

が受信されたとき, そのシンドローム \mathbf{s} を求めよ. ここで, P は $k \times (n - k)$ 行列であり, P^T はその転置を表し, I_{n-k} はサイズ $n - k$ の単位行列である.

- [2] 2つの異なる n 次元ベクトル \mathbf{x}, \mathbf{x}' がパリティ検査行列 H に対し, 共通のシンドロームを持つための必要十分条件は

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{z}$$

であることを示せ. ただし, \mathbf{z} はパリティ検査行列 H に対する符号語であり, そのシンドロームはゼロベクトルである.

- [3] (n, k) -二元線形符号が単一誤り訂正可能であるためには, 不等式:

$$n \leq 2^{n-k} - 1$$

の成立が必要であることを示せ.

- [4] 具体的にパリティ検査行列が

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる $(7, 4)$ -二元線形符号を構成し, 符号語 \mathbf{z} を送信したところ, 単一ビット誤り \mathbf{e} が発生し, ベクトル $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{e} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ が受信された. このとき, 符号語 \mathbf{z} を推定せよ.

問 5. 線形代数学

以下の問いについて答えよ.

[1] 次の 2×2 の対称行列:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A + b \\ a - b \end{aligned}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, $a \neq b$ であるものとする.

[2] 次の対角要素 a , 非対角要素 b の $n \times n$ 対称行列:

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

について, 以下の問い (1)~(3) に答えよ. ただし, $a \neq b$ であるものとする.

(1) すべての成分が 1 である n 次元ベクトル:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

は行列 A_n の固有ベクトルの一つであることを示し, その固有値を求めよ.

(2) $L = 1, \dots, n-1$ に対し, 次の関係式が成立することを, 等比級数の和およびオイラーの公式を利用して示せ.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \exp\left(k \frac{2\pi Li}{n}\right) = -1$$

$$e^x - x = x_{1,0,0,0,0,0} x_{1,0,0,0,0,0}$$

ただし, i は虚数単位とする.

$$\lambda = e^{-1}$$

(3) 問い (2) で示した関係式を用いて, 次の $n-1$ 個のベクトル:

$$z_L = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2\pi Li}{n}} \\ e^{2\frac{2\pi Li}{n}} \\ e^{3\frac{2\pi Li}{n}} \\ \vdots \\ e^{(n-1)\frac{2\pi Li}{n}} \end{pmatrix}, \quad L = 1, \dots, n-1$$

はすべて行列 A_n の固有ベクトルであることを示し, その固有値をすべて求めよ. また, これらの固有ベクトル z_L は, 問い (1) の固有ベクトル x と互いに直交することを示せ.

$$a - b$$