H30

[I] 基礎数学

[1]

(1) 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値を取るとする。

$f_x(a,b) = \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)$ とおくと $f_x(a,b)$ が存在して

$$f_x(a,b) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a},$$

十分に小さい正の数 δ について

$a-\delta < x < a$ のとき $f(a,b)$ を極大とするとき

$$\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \geqq 0,$$

$a < x < a+\delta$ のとき

$$\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \leqq 0.$$ であるので

$$f_x(a,b) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \geqq 0 \\ \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \leqq 0 \end{cases}.$$

つまり $f_x(a,b) = 0$,

これは

$f_y(a,b)$ についても

$b-\delta < y < b$ のとき $\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \leqq 0$, $b < y < b+\delta$ のとき $\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \geqq 0$.

つまり

$$\lim_{y \to a-0} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \leqq 0, \quad \lim_{y \to a+0} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \geqq 0$$

$$f_y(a.b) = \lim_{y \to a-0} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{y \to a+0} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = 0$$

よって極大値をとると $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ となる。

No.
Date

(1)の続き.

次に、十分に小さい正の数 h, k を用いると
　$f(a+h, b+k)$ は $f(a,b)$ の近傍の点である。
又、テイラーの定理を用いると

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)f(a,b) + R_2$$

ここで f の勾配が零より $\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)f(a,b) = 0$.
つまり

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = R_2 \quad \cdots ①$$

ここで

$$R_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(a+\theta h, b+\theta k) \quad (0<\theta<1)$$

h と k は十分に小さいので
$f(a+\theta h, b+\theta k) \to f(a,b)$ と近似できる。
又、$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(a,b)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)$ をそれぞれ A, B, C とすると

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(a,b) \\ &= \frac{1}{2}(h^2A + 2khB + k^2C) \\ &= \frac{k^2}{2}\left\{A\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2B\left(\frac{h}{k}\right) + C\right\} \end{aligned}$$

①より
$f(a+h, b+k) - f(a,b)$ の正負は R_2 の正負によって決定される。
そして $f(a,b)$ で極大, もしくは極小値をとるとき
　$f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0$ 　(極大値)
　$f(a+h, b+k) - f(a,b) > 0$ 　(極小値)
となる必要がある。

R_2 について判別式 $\frac{D}{4} = B^2 - AC$ とすると.
　$\frac{D}{4} \geqq 0$ のとき R_2 の正負が定まらないので

$f(a,b)$ は極値を必ずしもとらない。

つまり勾配が零でも極値は必ずしもとらない.

1010 4 4 7 123 -2

[1] 0110 01 1 1

[1] 0001 0001

(2) (1) より

$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) > 0$ が 点 x_0 で 極小値をとる条件である。

ここで 任意の非零ベクトル $x = (x, y)'$ に対して.

$$
\begin{aligned}
x'Ax &= x^2A + 2xyB + y^2C \\
&= y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2A + 2\left(\frac{x}{y}\right)B + C\right) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

$y^2 > 0$ より $\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2A + 2\left(\frac{x}{y}\right)B + C\right\} > 0$ である

判別式 $\frac{D}{4} = B^2 - AC$, これは (1) のものと等しい。

つまり $x'Ax > 0$ ならば $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) > 0$ となり極小値をとる。

[2]

(1) 線形関係式 $c_1a + c_2b + c_3c + c_4d = 0$ について

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 10 & 0 \\ 3 & 10 & 13 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\longrightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0 .
$$

よって a, b, d は線形独立であり,

$c = a + b$ である。

つまり

$A_1 = (a\ a\ a)$, $A_2 = (a\ b\ c)$, $A_3 = (a\ b\ d)$

Date

(2) A_1 と A_2 は 非自明な解 $x \neq 0$ を持つ.

<理由>

A_3 に関しては 階数が未知数に等しいので 自明な解 $x=0$ をもつ.

次に $A_2 x = 0$ について考えると.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$ となり, $x+z=0$, $y+z=0$.

$z=k$ とおくと $x=-k$, $y=-k$ となり.

$$x = k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ となり 非自明な解をもつことが分かる.

又、 $A_1 x = 0$ についても

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$ より $x+y+z=0$.

$y=k$, $z=h$ とおくと $x=-k-h$

$$x = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ となり 非自明な解をもつ

(3) $B = A_2$ なので
(2) より

$Bx = 0$ の解は $x = k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, つまり ~~非零要素~~ は

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である

//

[1]
[2]
(3) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して、$x, y \in \ker(B)$ のとき、

$x = k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$　$y = t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$　とすると

$$\alpha x + \beta y = \alpha k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= (\alpha k + \beta t)\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$(\alpha k + \beta r) \in \mathbb{R}$ より

$(\alpha k + \beta r)\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \in \ker(B)$ である。

(4).
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & -1\\2 & 8 & 10 & -2\\3 & 10 & 13 & -3\end{array}\right)$$ 変形して

2 9 6　+2.
3 6 9　−3.

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$x + z = -1$, $y + z = 0$.
$z = k$ とおくと $x = -1-k$, $y = -k$

つまり一般解は

$$x = \begin{pmatrix}-1-k\\-k\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

No.

Date

$P \Rightarrow Q$ ◯

② 情報数学

[1]

(1) PとQが原子式より $P \wedge Q$は論理式
$P \wedge Q$が論理式ならば $\neg(P \wedge Q)$は論理式
$(\neg P \wedge Q)$とQが論理式より、$((\neg P \wedge Q) \Rightarrow Q)$
は論理式である。

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow R)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
1
1
1
1
1
1
1
1

1
1
1
0

$P \vee Q$ $\overline{\bar{P} \wedge \bar{Q}}$

よって恒真命題

(3) 論理結合子 $\neg$, $\wedge$, $\vee$ に対して 論理式P, Qについて
(i) $\neg P$ は $P|P$ と表すことができる。
(ii) $P \wedge Q$ は $(P|Q)|(P|Q)$ と表すことができる。
(iii) $P \vee Q$ は $(P|P)|(Q|Q)$ と表すことができる

(i)(ii)(iii)より $\neg$, $\wedge$, $\vee$ は論理結合子 $|$ のみで表すことができる。ここで論理結合子 $\neg$, $\vee$, $\wedge$ の3つで十分であるため、論理結合子 $|$ 1つだけで十分である。

H30 $|a|+|b| \geqq |a+b|$

[2]

[2]

(1) $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqq i \leqq 2$ とする.

$d(A,B)+d(B,C) \geqq |a_i-b_i|+|b_i-c_i| \geqq |a_i-c_i|$, …①

ここで $d(A,C)=\max\{|a_1-c_1|, |a_2-c_2|\}$ であるが,
$i=1$ の場合も $i=2$ の場合も ① は成り立つので
$d(A,C)$ は $|a_1-c_1|$, $|a_2-c_2|$ どちらの値をとっても
① より
$d(A,B)+d(B,C) \geqq d(A,C)$ が成り立つ

(2)

(i) $d(A,B)=\max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$,
$|a_1-b_1| \geqq 0$, $|a_2-b_2| \geqq 0$ より $d(A,B) \geqq 0$ である。

× $d(A,B)=0$ のとき $|a_1-b_1|=0$, $|a_2-b_2|=0$ より
$a_1=b_1$, $a_2=b_2$ となり、 $A=B$ である。

(ii) $d(A,B)=\max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$
$=\max\{|b_1-a_1|, |b_2-a_2|\}$
$=d(B,A)$

よって $d(A,B)=d(B,A)$

(iii) (1) より 成り立つ.

(i)(ii)(iii) より 関数 d は距離関数である。

[2]

(3) $\hat{d}(A,B) = \min\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$

(i) $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqq i \leqq 2$ とすると
$\hat{d}(A,B) = \min_i |a_i - b_i| \geqq 0$ より $\hat{d}(A,B) \geqq 0$,

$\hat{d}(A,B)=0$ とすると、$|a_1-b_1|=0$ 又は $|a_2-b_2|=0$.
となる。しかし、$|a_1-b_1|=0$ のとき $|a_2-b_2| \neq 0$ もしくは
$|a_2-b_2|=0$ の時 $|a_1-b_1|\neq 0$ となってよい。

つまり $\hat{d}(A,B)=0$ であっても $a_1 \neq b_1$ 又は $a_2 \neq b_2$ となる場合があるため $A=B$ には必ずしもなりえない。

よって $\hat{d}(A,B)$ は距離関数ではない。

3 確率

[1]

(1)
$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$
$$= np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!\{(n-1)-i\}!} p^i (1-p)^{(n-1)-i}$$
$$= np$$
//

(2)
$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$
$$= \lambda$$
//

[2]

(1) $P_{X|N}(x|n) = \dfrac{P(x,n)}{P_N(n)}$ より

$P_N(n) P_{X|n}(x|n) = P(x,n)$,

又、 $\sum_{n=0}^{\infty} P(x,n) = P_X(x)$ より

(右辺) $= \sum_{n=0}^{\infty} P_N(n) P_{X|N}(x|n)$
$= \sum_{n=0}^{\infty} P(x,n)$
$= P_X(x)$
$=$ (左辺)　　よって　(右辺) = (左辺) となり

$P_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_N(n) P_{X|N}(x|n)$ が成り立つ

No.

Date . .

3 (2)

(2)

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= E[E[X|N]] \\
&= E\left[\sum_{x=0}^{\infty} x P_{X|N}(x|N)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \sum_{x=0}^{\infty} x P_{X|N}(x|n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} nx \frac{p(x,n)}{P_N(n)}
\end{aligned}
$$

1430

四

[1]

(1) 100

$= 64 + 32 + 4$

$= 2^6 + 2^5 + 2^2$

$= 1100100$ //

(2) 111

$= 64 + 32 + 8 + 4 + 2 + 1$

$= 1101111_{(2)}$

よって111の8ビット2の補数表現は

01101111 //

(3) 86

$= 64 + 16 + 4 + 2$

$= 1010110_{(2)}$

86は 01010110 である.

-86は 10101010 //

(4) 111 - 86 は

(2), (3) より

```
  01101111
+)10101010
 X00011001
```

00011001 //

[2]

(a) 0.000×10^2　　(b) 情報落ち

(c) 0.100　　(d) 桁落ち

[3]

1	F	D	E	W			
2		F	D	E	W		
3			F	D	E	W	
4				F	D	E	W
5					F	D	E W

(1) 80 ms

(2) $(I + D - 1) \times P$ //

No.

Date

[4]

(1)

1	1	4
2	1	1
3	1	3
4	0	
5	1	2
⋮		
m		

(2) FIFOとLRUの動作を簡易的に示す

参照順 2 → 4 → 3 → 1 → 3 → 4 → 5 → 4 → 3 → 1 → 4

FIFOの動作	2	4	3	1	1	1	5	4	3	1	1
		2	4	3	3	3	1	5	4	3	3
			2	4	4	4	3	1	5	4	4
FIFOページフォルト	○	○	○	○	×	×	○	○	○	○	×

LRUの動作	2	4	3	1	3	4	5	4	3	1	4
		2	4	3	1	3	4	5	4	3	1
			2	4	4	1	3	3	5	4	3
LRUのページフォルト	○	○	○	○	×	×	○	×	×	○	×

FIFOはページフォルト8回，LRUはページフォルト6回であり この条件ではLRUの方がページフォルトが2回少ない。

H30

⑤ プログラミング

[1]

(1) (ア) s[j].cloudy = 1

(イ) (s[j].sprinkler == 0) && (s[j].rain == 1)

(2) (ウ) struct sample samples[NSAMPLES]

(エ) samples , NSAMPLES

(オ) (samples[i].wet == 1) && (samples.cloudy == 1)

[2]

(1) (カ) *p == NULL

(キ) p->right = add_tree(p->right , w)

(2) (ク) tree_print (p -> right)

(3)

(ケ) sub[j] = string[i+j]

(コ) root , sub