情報エレクトロニクス学科共通科目・2年次・夏ターム〔必修科目〕

講義「情報理論」

第10回

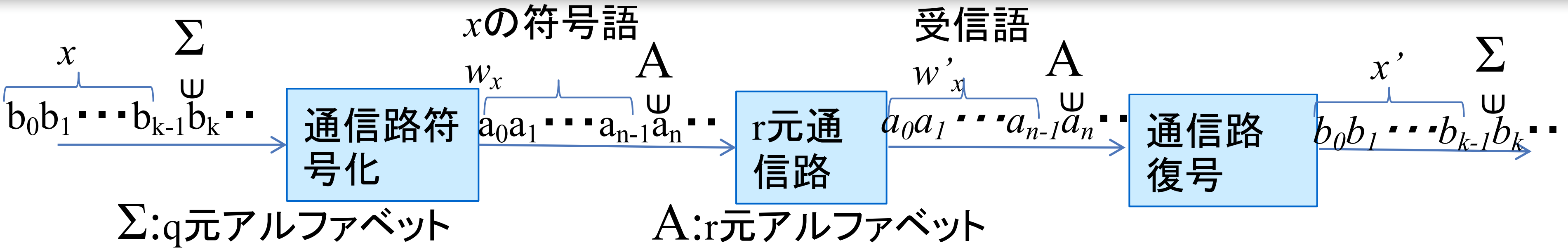
第7章 通信路符号化の限界(2)

通信路容量

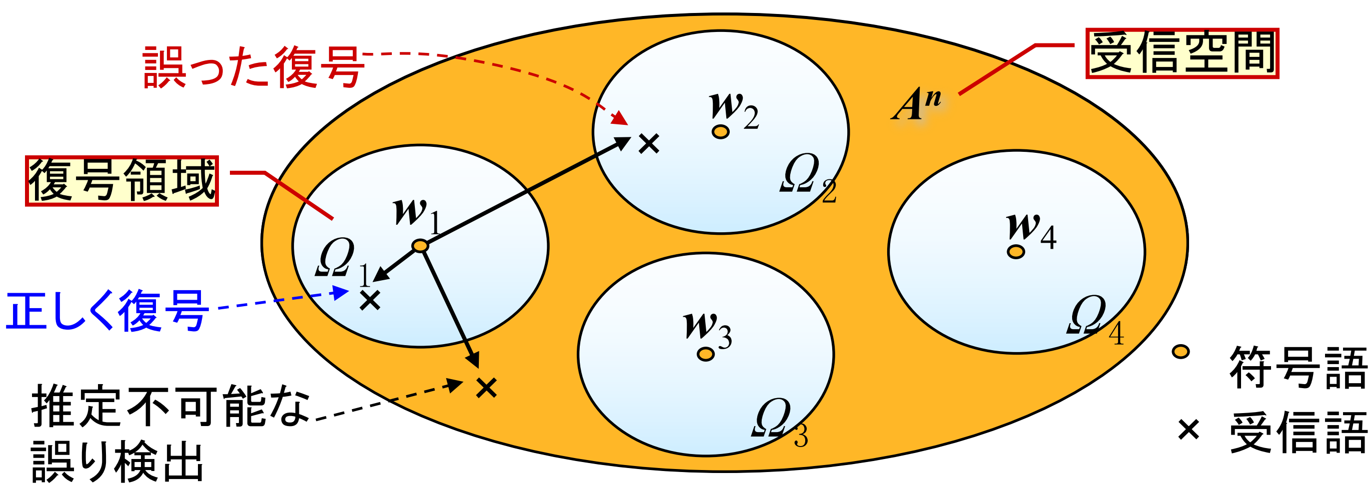
通信路符号化定理

通信システム全体としての情報伝達の限界

[復習]通信路符号の基礎概念(1)



- 通信路符号化の目的: 信頼性の向上　そのために→冗長性を付加
- 長さkのブロック$x\in\Sigma^k$を長さnの符号語$w_x\in A^n$に符号化
- $q^k < r^n$: 符号語としてA^nの一部のみ使用 (冗長性の付加)
- 通信路符号(または符号) : A^n の中から選ばれた系列の集合 C



[復習]情報速度と冗長度

- 符号Cの情報（伝達）速度 R:

$$R = \frac{\log_2 M}{n} \quad \text{（ビット／記号）}$$

符号Cを用いればどのくらいの速さで(1記号あたり何ビットの）情報を伝達できるか

ただし Mは符号C($\subseteq A^n$)に含まれる符号語の数

➢情報速度Rを用いれば、符号語数 M は

$$M = 2^{nR}$$

➢情報速度の最大値

$$R_{\max} = (\log_2 r^n) / n = \log_2 r$$

(A^n に含まれる r^n 個の系列すべてを符号語とした場合)

➢$R < R_{\max}$ とすることで、誤りの訂正や検出が可能となる。

- 情報速度Rの符号C の効率(符号化率) η :

$$\eta = R / R_{\max}$$

➢$0 < \eta < 1$

➢C の冗長度 ρ: $\rho = 1 - \eta$

通信路容量の定義(1)

入力アルファベット $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$の元 $p_i=P_X(a_i)$ $\xrightarrow{X}$ 記憶のない定常通信路 $\xrightarrow{Y}$ 出力アルファベット $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_s\}$の元 $q_j=P_Y(b_j)$

通信路行列

$T=[p_{ij}],\ \ p_{ij}=P(b_j\mid a_i)$

図6.1 記憶のない定常通信路のモデル

- 相互情報量 $I(X;Y)$ は、この通信路を介して伝送される1記号あたりの平均情報量
- XとYの間の相互情報量 $I(X;Y)$ は

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{r}p_i\sum_{j=1}^{s}p_{ij}\log_2(p_{ij}/q_j)$$

と書ける。ただし、

$$q_j=\sum_{i=1}^{r}p_i\,p_{ij}$$

$T=[p_{ij}]$と$p_1,\ldots,p_r$から計算できる

- この通信路で最大限どれだけの情報量が伝送できるだろうか？

通信路容量の定義(2)

- $T=[p_{ij}]$ は与えられるので、相互情報量 $I(X;Y)$ は $p_1,\ldots,p_r$ に依存して増減する。
- 入力確率分布を $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_r)$ と置く。このとき、

$$C=\max_{\mathbf{p}}\{I(X;Y)\}$$

をこの通信路の**通信路容量**(channel capacity)と呼ぶ。

単位は、**ビット**(またはナット、ハートレー)。

あるいは、1記号あたりの情報量ということを明示するために

ビット/通信路記号などと書く。

- 通信路に記憶がある場合には、情報源のエントロピーの場合と同様、拡大の手法を用いれば求められる。すなわち、長さ n の入力系列を X_n、出力系列を Y_nとし、$\mathbf{p}_n$ を X_n の確率分布とすれば

$$C=\lim_{n\to\infty}\left[\max_{\mathbf{p}_n}\{I(X_n;Y_n)/n\}\right]$$

により定義される。

記憶のない一様通信路の通信路容量

- 入力について一様な記憶のない通信路の通信路容量を求める。まず、

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y\mid X)$$

について、第2項目の $H(Y\mid X)$ は

$$H(Y\mid X)=\sum_{x}P(x)\left(-\sum_{y}P(y\mid x)\log_2 P(y\mid x)\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{r}p_i\sum_{j=1}^{s}p_{ij}\log_2 p_{ij}$$

$$=-\sum_{j=1}^{s}p_{1j}\log_2 p_{1j}$$

入力に対して一様なので、任意の i について2番目の和は同じ値をとる

と書ける。したがって、通信路容量は、

$$C=\max_{P}\{\,I(X;Y)\,\}=\max_{P}\{\,H(Y)-H(Y\mid X)\,\}$$

$$=\max_{P}\{\,H(Y)\,\}+\underbrace{\sum_{j=1}^{s}p_{1j}\log_2 p_{1j}}$$

通信路だけに依存する部分

≦0

となる。さらに、出力についても一様な場合（2重に一様な場合）、入力の確率分布を $p_1=p_2=\cdots=p_r$ とすると、出力の確率分布も $q_1=q_2=\cdots=q_s$ となり、$H(Y)$ はその最大値 $\log_2 s$ をとる。したがって、

$$C=\log_2 s+\sum_{j=1}^{s}p_{1j}\log_2 p_{1j}$$

[例]2元対称通信路の通信路容量

- ビット誤り率がpの2元対称通信路を考える。通信路行列は

$$T=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

であり、2重に一様だから、通信路容量Cは

$$C=1+p\log_2 p+(1-p)\log_2(1-p)$$
$$=1-\mathcal{H}(p)$$

となる（図）。

$p=0$ では、誤りは全く生じないから、$C=1$（ビット/記号）となる。

$p=0.5$ では、通信路の出力は入力と独立になってしまい、情報は全く伝わらず $C=0$ となる。

$p=1$ では、0 は必ず 1 になり、1 は必ず 0 になるから、出力側で 1, 0 を逆にすれば全く誤りなく情報が伝達される。ゆえに、$C=1$（ビット/記号）となる。

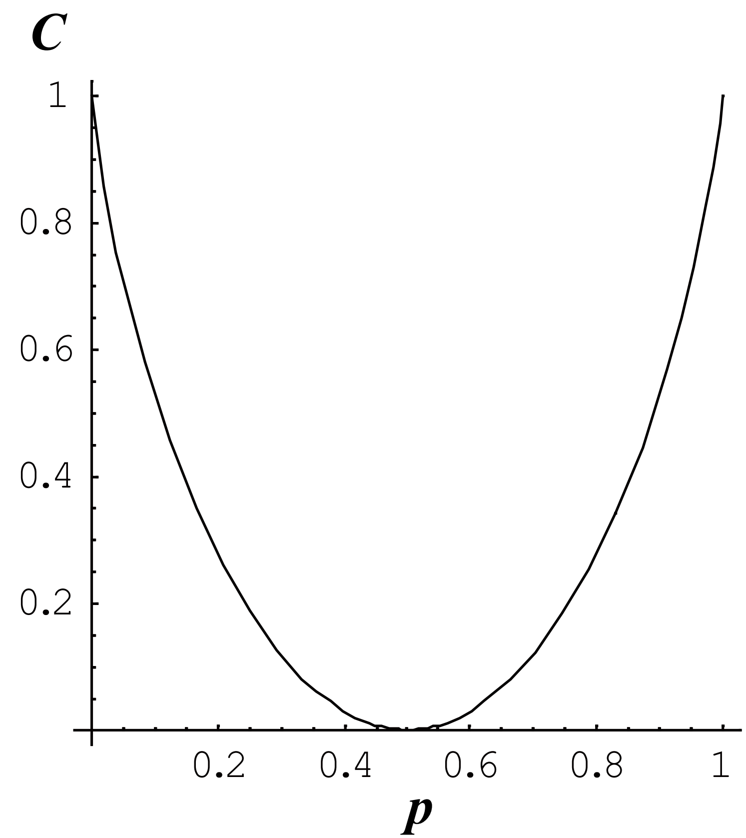


図 2元対称通信路の通信路容量

加法的2元通信路の通信路容量

誤りの発生は入力とは独立

- 図のような**加法的2元通信路**を考える。
  記憶のない通信路の場合、X と Y の
  相互情報量は、誤り源 E を用いれば、

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y \mid X) \\
&= H(Y) - H(X \oplus E \mid X) \\
&= H(Y) - H(E \mid X) \\
&= H(Y) - H(E)
\end{aligned}
$$

通信路のみに依存する部分

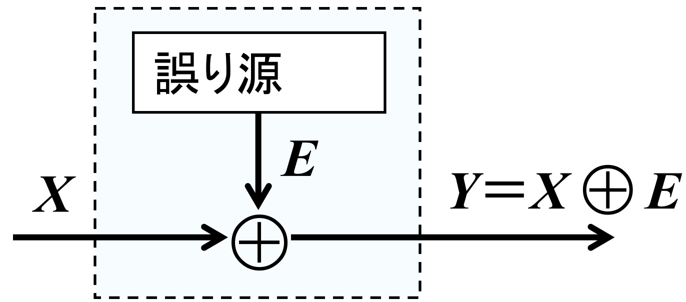


図 加法的2元通信路

と書ける。よって通信路容量 C を求めるには、入力 X の確率分布に関し、$H(Y)$ を最大にすればよい。ところが、$P_X(0)=P_X(1)=1/2$ とすれば、**E がどのようなものであっても**、$P_Y(0)=P_Y(1)=1/2$ となる。このとき、$H(Y)$ はその最大値 1 をとる。したがって、通信路容量は

$$C = 1 - H(E)$$

となる。

誤りがない場合に伝達し得る最大の情報量

誤り源のエントロピー $H(E)$（ビット/記号）

記憶のある場合にも
$C=1-H(S_E)$
が成り立つ。

[例]誤り源がマルコフ情報源の場合

- 誤り源が図のマルコフモデルで表されるものとする。このような誤り源S_Eのエントロピーは、

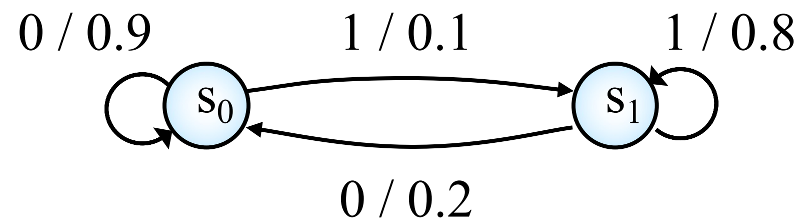


図6誤り源のモデル

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{S_E})=\boldsymbol{P}(\mathrm{s_0})\mathcal{H}(0.1)+\boldsymbol{P}(\mathrm{s_1})\mathcal{H}(0.8)$$

として求まる。ここに、$\boldsymbol{P}(\mathrm{s_0}), \boldsymbol{P}(\mathrm{s_1})$ は状態 $\mathrm{s_0}, \mathrm{s_1}$ の定常確率であり、それぞれ、2/3, 1/3 となる。これから、

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{S_E})=2/3\times0.4690+1/3\times0.7219$$
$$=0.5532$$

を得る。したがって、通信路容量$\boldsymbol{C}$ は、

$$\boldsymbol{C}=1-0.5532=0.4467 \quad \text{（ビット/記号）}$$

となる。

この通信路のビット誤り率は 1/3 なので、もし通信路に記憶がなく、ランダムに誤りを発生するのであれば、$\boldsymbol{C}_1=1-\mathcal{H}(1/3)=0.0817$（ビット/記号）であり、0.4467 よりはるかに小さい。

通信路容量と情報速度の関係についての考察

- 通信路が伝送できる1記号あたりの情報量（通信路容量C：ビット／記号）は通信路の統計的性質（通信路行列）から求められる。
- 冗長性を付加して情報を伝送した場合に、伝送できる1記号あたりの情報量（情報速度R：ビット／記号）も分かった。

- 情報速度R < 通信路容量C ならば、通信の信頼性を向上できそうだ！
  - では、どのくらい信頼性を向上できるのか？
  - R を C と比べて、どのくらい低くすれば良いだろうか？

通信路符号化定理

定理 7.4 [通信路符号化定理(Shannonの第2符号化定理)]

通信路容量がCである通信路に対し、$R < C$であれば、情報速度Rの符号で復号誤り率がいくらでも小さいものが存在する。$R > C$であれば、そのような符号は存在しない。

証明

[後半の証明] $R > C$であるとき、復号誤り率がいくらでも小さい符号が存在したとする。このとき、この通信路を通してR(ビット／記号)にいくらでも近い情報速度で情報が伝送されることになる。これは通信路容量Cは、通信路で伝送しうる最大の情報速度という定義に矛盾する。

[前半の証明] 略。ランダム符号化(受信空間からの独立な無作為抽出をM(=2^{nR})回繰り返すことによりM個の符号語を選択する符号化)によりできる符号の復号誤り率の平均が、符号語長nを$n\to\infty$とすれば0に近づくことを示す。平均が0に近づけば、平均以下のものが必ず存在するので、復号誤り率がいくらでも小さい符号が存在する。

通信の限界(1)

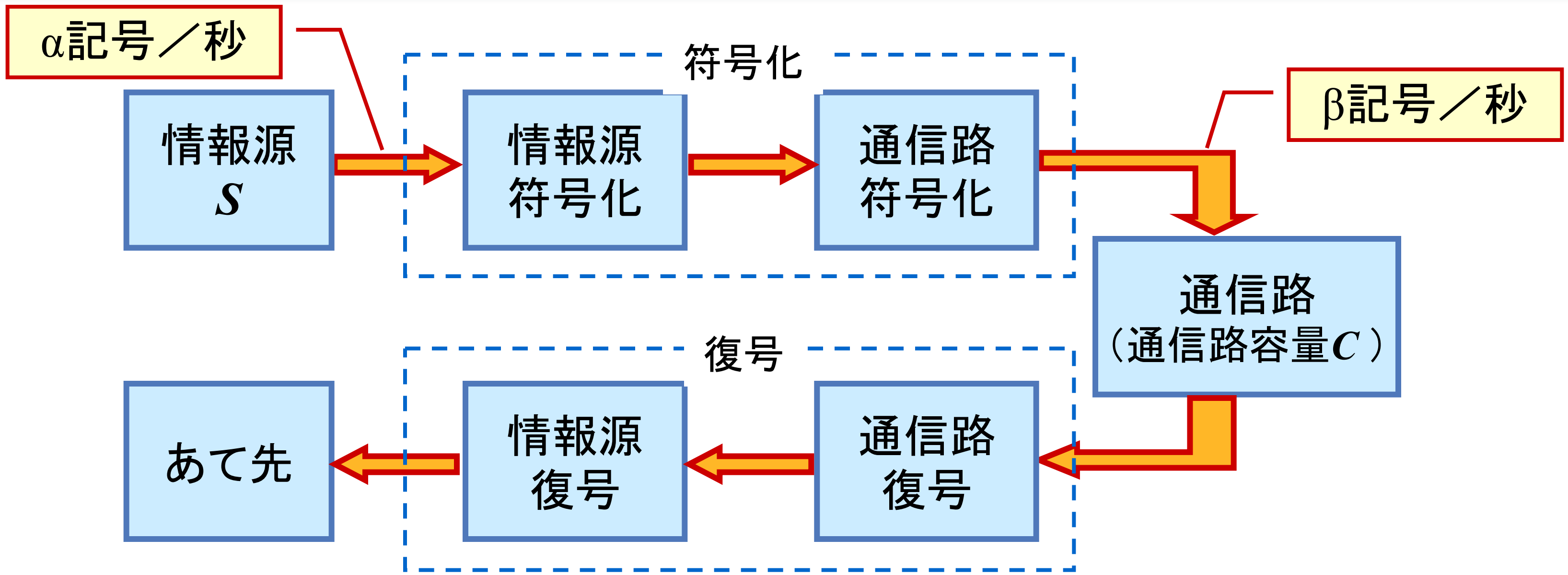


図: 通信システムのモデル

- 情報源と通信路が与えられたとき、どこまで良い通信ができるだろうか？
- 図の通信システムにおいて、情報源のエントロピーは $H(S)$ （ビット／情報源記号）であり、通信路容量は C（ビット／通信路記号）である。さらに、情報源から情報源記号が毎秒α個発生し、通信路では毎秒β個の通信路記号が伝送されているとする。

通信の限界(2)

- このとき、情報源からは

  $\mathcal{R}=\alpha \boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})$　（ビット／秒）

  の速度で情報が発生する。また、通信路容量は秒あたり

  $\mathcal{C}=\beta \boldsymbol{C}$　（ビット／秒）

  となる。もし、

  $\mathcal{R}<\mathcal{C}$

  ならば、任意に小さい誤り率で通報をあて先まで送ることができる。しかし、

  $\mathcal{R}>\mathcal{C}$

  の場合は、ひずみが生じる。

- 情報源S の速度・ひずみ関数を $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{D})$（ビット／情報源記号）とし、

  $\alpha \boldsymbol{R}(\boldsymbol{D}^*)=\mathcal{C}$

  を満たす $\boldsymbol{D}^*$ を考える。さらに、εを任意の正数とし、平均ひずみ $\boldsymbol{d}$ が $\boldsymbol{D}^*+\varepsilon$ 以下になるという条件の下で、情報源$\boldsymbol{S}$ の出力系列を符号化するものとする。

通信の限界(3)

- このとき、1情報源記号あたりの平均符号長が $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{D}^*)$ [$>\boldsymbol{R}(\boldsymbol{D}^*+\varepsilon)$]より小さく なるような符号化ができる。その際の情報速度を$\mathcal{R}(\boldsymbol{D}^*+\varepsilon)$ (ビット／秒)とすると、これは、

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{D}^*+\varepsilon)<\alpha \boldsymbol{R}(\boldsymbol{D}^*)=\mathcal{C}$$

を満たす。よって、情報源S からの通報をD* に任意に近い平均ひずみで送ることができる。

定理 7.6

情報速度$\mathcal{R}$(ビット／秒)で発生する情報を、通信路容量$\mathcal{C}$(ビット／秒)の通信路を介して送るとき、$\mathcal{R}<\mathcal{C}$であれば、任意に小さい誤り率で情報を伝送できる。

また、$\mathcal{R}>\mathcal{C}$であれば、情報源の速度･ひずみ関数の値が$\mathcal{R}(\boldsymbol{D}^*)=\mathcal{C}$(ビット/秒)を満たす $\boldsymbol{D}^*$ に対し、$\boldsymbol{D}^*$に任意に近い平均ひずみで情報を伝送できるが、$\boldsymbol{D}^*$ より小さい平均ひずみでは伝送できない。

例題7.3

- 1, 0 を 0.2, 0.8 の確率で発生する記憶のない情報源からの通報を、ビット誤り率が0.1 の2元対称通信路を通して送るものとする。
  情報源は1秒に1記号を発生し、通信路も1秒に1記号を伝送する。
  （すなわち、α＝β＝1）
  このとき、
  $$\mathcal{R}=\mathcal{H}(0.2)\fallingdotseq 0.7219 \quad \text{（ビット／秒）}$$
  $$\mathcal{C}=1-\mathcal{H}(0.1)\fallingdotseq 0.5310 \quad \text{（ビット／秒）}$$
  となる。$\mathcal{R}>\mathcal{C}$ であるから、ひずみなしには通報を送れない。
- ひずみ測度としてビット誤り率を使うと、この情報源の速度・ひずみ関数は
  $$R(\mathrm{D})=\mathcal{H}(\mathrm{P_X}(1))-\mathcal{H}(\mathrm{D})=\mathcal{H}(0.2)-\mathcal{H}(\mathrm{D})\fallingdotseq 0.7219-\mathcal{H}(\mathrm{D}) \text{ (ビット/秒)}$$
  であるから$R(\mathrm{D}_*)=\mathcal{C}$とすれば
  $$\mathcal{H}(\mathrm{D}_*)\fallingdotseq 0.7219-0.5310=0.1909$$
  よって
  $$\mathrm{D}_*=\mathcal{H}^{-1}(0.1909)=0.0293$$
  したがって復号誤り率の下限は0.0293である。