

北海道大学 大学院情報科学院

情報科学専攻 修士課程

情報理工学コース

専門科目 1

10 : 00 ~ 12 : 00

受験上の注意

- 本冊子内の4問, 問1 (基礎数学), 問2 (情報数学), 問3 (確率・統計), 問4 (情報理論) のうち, 基礎数学と情報数学を含む3問を選択し解答すること.
- すべての解答用紙に, 受験番号, 選択した問題番号(例えば, 問3など)を記入すること.
- 選択問題チェック票に受験番号および, 選択した科目に印を記入すること.
- 問題冊子はこのページを含めて6枚である.
- 解答用紙は3枚である. この他に下書き用の草案紙3枚を配付する.
- 解答は, 問題ごとに別々の解答用紙に記入すること(裏面を使用してもよい. 解答用紙を破損したりした場合には試験監督員に申し出ること).
- 問題冊子, 草案紙は持ち帰り, 選択問題チェック票とすべての解答用紙を提出すること.
- 机の上に置いてよいものは, 筆記用具 (鉛筆 (黒), 消しゴム, 鉛筆削り, シャープペンシル (黒)), 時計, および特に指示があったもののみである. 時計は計時機能のみを使用し, アラームの使用を禁ずる. 携帯電話, スマートフォン, タブレット, コンピュータ等は電源を切ってかばんの中にしまうこと. 電卓, 電子辞書等の使用を禁ずる.

専門科目 1

このページは白紙です。

問 1. (必須) 基礎数学

[1] 実行列 A, B と実ベクトル \mathbf{b} を以下のように定める. ただし, r は実数であるとする.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 2 & -r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

以下では, \mathbf{x}, \mathbf{y} を各成分が変数であるようなベクトルとし, ベクトル \mathbf{a} の転置を \mathbf{a}^T とする. 以下の小問に答えよ.

- (1) 線形方程式系 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす解 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ のうち, $x_3 = 1$ であるものをひとつ求めよ.
- (2) 線形方程式系 $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ の解 $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$ のうち, $y_2 = -11$ であるものをひとつ求め, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0$ が $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であることを確かめよ. ただし, \mathbf{x}_0 は (1) で求めた解とする.
- (3) $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ の任意の解 \mathbf{y}^* に対して, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}^*$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であることを示せ. ただし, \mathbf{x}_0 は (1) で求めた解とする.
- (4) 行列 B の固有値を全て求めよ.
- (5) 行列 B と正整数 $k \geq 1$ に対して, B^k を求めよ.

[2] 以下の小問に答えよ.

- (1) つぎの極限が収束するかどうか判定し, 収束する場合にはその値を求めよ.

$$(A) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{2 \log x}{x} dx$$

$$(B) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$$

- (2) つぎの微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} - y^2 + 2xy^2 + 2x - 1 = 0$$

問 2. (必須) 情報数学

[1] 集合と写像に関する以下の問いに答えよ.

(1) 130 名の学生のうち, 60 名が帽子を着用し, 51 名がマフラーを着用し, 54 名がセーターを着用している. 30 名が帽子とマフラーを着用している. セーターを着用している学生のうち 26 名が帽子を着用し, 21 名がマフラーを着用し, 12 名が帽子とマフラーを着用している.

- (i) 帽子もマフラーも着用していない学生は何名か.
- (ii) セーターを着用していない学生のうち, 帽子を着用しているが, マフラーを着用していない学生は何名か.
- (iii) セーターを着用していない学生のうち, 帽子もマフラーも着用していない学生は何名か.

(2) \mathbb{N} を非負整数全体の集合とする. \mathbb{N} と $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ.

[2] 命題論理とブール代数に関する以下の問いに答えよ.

(1) 以下の論理式 (i), (ii) について, それぞれ真理値表を作成しトートロジー (恒真式) であるか否かを答えよ. ただし, \wedge は論理積, \vee は論理和, \rightarrow は含意, \sim は否定を表し, 論理式 p, q に対して $p \rightarrow q$ は $\sim p \vee q$ と同値であり, $p \leftrightarrow q$ は $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ と同値である.

$$(i) \quad (p \rightarrow q) \vee \sim(p \leftrightarrow \sim q) \qquad (ii) \quad ((p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow q) \wedge r) \rightarrow (\sim p)$$

(2) 三つの入力端子 A, B, C と出力端子 Y を有する論理回路において, 出力 Y が入力 A, B, C の関数として $Y = ABC + A\bar{B}C + \bar{A}B$ と表現されたとする. ここで積は AND ゲート, 和は OR ゲート, 記号 $\bar{}$ は NOT ゲートに接続されていることを意味する. この論理回路にビット列 $A = 00001111$, $B = 00110011$, $C = 01010101$ が入力されたときの出力 Y のビット列を求めよ. 答えだけではなく導出の過程がわかるように解答すること.

[3] 形式言語とオートマトンに関する以下の問いに答えよ.

文字集合 $\Sigma = \{a, b\}$ を考える. Σ の要素である 2 種類の文字を, それぞれ 1 個以上含む文字列を受理し, そうでない文字列を受理しない Σ 上の決定性有限オートマトンのうち, 状態数が最小となるものを作図せよ.

問 3. (選択) 確率・統計

以下の問いに答えよ。ただし、導出の過程もわかるように解答すること。

- [1] ある学習塾において、50 点満点の小テストを実施した。この塾の 2 つのクラスの結果について、以下の各小問に答えよ。なお、得点は正規分布に従うものとみなし、必要に応じて、 $\sqrt{10} = 3.162$ 、および表 2 の片側 t 分布表（抜粋）を用いよ。

- (1) 小テストの結果は表 1 のとおりであった。クラス A とクラス B のそれぞれについて、平均点と不偏分散を求めよ。
- (2) クラス A の平均点とクラス B の平均点に統計的有意差があるか、有意水準 5 % で検定せよ。

表 1: 小テスト結果

	得点		得点
クラス A	24	クラス B	26
	26		27
	28		25
	25		26
	23		28
	27		29
	25		29
	23		28
	29		29
	30		33

表 2: 片側 t 分布表 (抜粋) (ν : 自由度, α : 有意水準)

	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$
$\nu = 8$	1.397	1.860	2.306
$\nu = 9$	1.383	1.833	2.262
$\nu = 10$	1.372	1.812	2.228
$\nu = 18$	1.330	1.734	2.101
$\nu = 19$	1.328	1.729	2.093
$\nu = 20$	1.325	1.725	2.086

[2]

- (1) 独立な 2 つの確率変数 X_1, X_2 について、期待値 $\mu_1 = E(X_1)$, $\mu_2 = E(X_2)$ および 分散 $\sigma_1^2 = V(X_1)$, $\sigma_2^2 = V(X_2)$ が得られている。これらを用いて、 $E(a_1X_1 + a_2X_2)$ および $V(a_1X_1 + a_2X_2)$ を表せ。ただし、 a_1, a_2 は実数とする。
- (2) 同一の確率分布に従う独立な確率変数 X_i ($i = 1, 2, \dots, N$; N は自然数) について、 $\mu = E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_N)$, $\sigma^2 = V(X_1) = V(X_2) = \dots = V(X_N)$ を用いて、
 $E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right)$, $V\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right)$ をそれぞれ表せ。
- (3) 確率分布における特性関数の定義を述べよ。
- (4) 確率変数 X_i ($i = 1, 2, \dots, N$; N は自然数) に対する特性関数を $\varphi_i(t)$ とする。
 X_1, X_2, \dots, X_N が独立な確率変数であるとき、 $\sum_{i=1}^N X_i$ の特性関数 $\varphi(t)$ を、 $\varphi_i(t)$ を用いて表せ。
- (5) 標準正規分布の特性関数を求めよ。
- (6) 中心極限定理を証明せよ。なお、確率分布と特性関数に 1 対 1 対応の関係があること、
 および $e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$ を用いてよい。

問 4. (選択) 情報理論

以下の問いに答えよ。ただし、必要に応じ $\log_2 3 = 1.58$ および $\log_2 5 = 2.32$ を用いて計算せよ。

- [1] 確率変数 X と Y の結合確率分布 $P(X, Y)$ が表 1 で与えられるとき、以下の問いに答えよ。

表 1: X と Y の結合確率分布

$P(X, Y)$		Y	
		1	0
X	1	$3/8$	$1/8$
	0	$1/4$	$1/4$

- (1) エントロピー $H(Y)$ の値を求めよ。
 - (2) 条件付エントロピー $H(Y|X)$ の値を求めよ。
 - (3) 相互情報量 $I(Y; X)$ の意味を説明し、その値を求めよ。
 - (4) $I(U; V) = I(V; U)$ が成立することを証明せよ。ただし、 U, V は有限の情報源アルファベットに値をとる任意の確率変数とする。
- [2] 図 1 の通信路線図で表される 2 元対称通信路があり、その送信記号および受信記号の確率変数をそれぞれ A, B とし、どちらも 0 と 1 の 2 値を取る。また、送信記号の生起確率を $p(A = 0) = 0.3$ および $p(A = 1) = 0.7$ とする。以下の問いに答えよ。

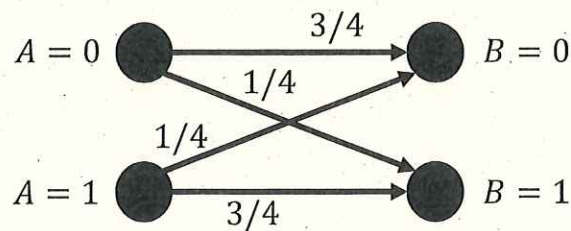


図 1: 2 元対称通信路

- (1) 受信記号の生起確率 $p(B = 0)$ および $p(B = 1)$ の値を求めよ。
- (2) 相互情報量 $I(A; B)$ の値を求めよ。
- (3) 図 1 の通信路の通信路容量を求めよ。
- (4) 通信路に雑音があり情報の伝送誤りが発生するとき、誤りなく情報を伝送するために通信路符号化を行う。伝送誤り率を任意に小さくできるという条件下における符号化法の情報伝送速度 R の上限について説明せよ。その際、必要に応じて「通信路符号化定理」という用語を用いよ。