

北海道大学 大学院情報科学院

情報科学専攻 修士課程

情報理工学コース

専門科目 1

10 : 00 ~ 12 : 00

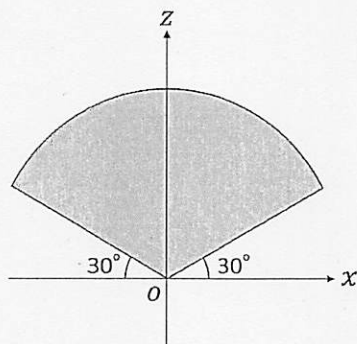
受験上の注意

- 本冊子内の5問、問1（基礎数学）、問2（情報数学）、問3（確率・統計）、問4（コンピュータ基礎工学）、および問5（プログラミング）から3問を選択し解答すること。
- すべての解答用紙に、受験番号、選択した問題番号(例えば、問3など)を記入すること。
- 選択問題チェック票に受験番号および、選択した科目に印を記入すること。
- 解答用紙は3枚である。この他に下書き用の草案紙3枚を配付する。
- 解答は、問題ごとに別々の解答用紙に記入すること(裏面を使用してもよい。解答用紙を破損したりした場合には試験監督員に申し出ること)。
- 問題冊子、草案紙は持ち帰り、選択問題チェック票とすべての解答用紙を提出すること。
- 机の上に置いてよいものは、筆記用具（黒鉛筆、消しゴム、鉛筆削り）、時計、および特に指示があったもののみである。時計は計時機能のみを使用し、アラームの使用を禁ずる。携帯電話、スマートフォン、タブレット、コンピュータ等は電源を切ってかばんの中にする。電卓、電子辞書などは使用を禁ずる。

問 1. 基礎数学

[1] 以下の問いに答えよ.

- (1) 原点を中心とする半径 r の球面上の点の座標 (x, y, z) を, 半径 r , z 軸回りの回転角 φ , x - y 平面からの仰角 θ の組 (r, φ, θ) を用いた極座標で表せ.
- (2) 前問で求めた写像 $M : (r, \varphi, \theta) \rightarrow (x, y, z)$ のヤコビアン (ヤコビ行列の行列式) を求めよ.
- (3) 下図に示す半径 1 の扇形を z 軸回りに回転させてできる回転体の体積を求めよ.



[2] 複素行列 H が $H = H^*$ を満たすとき, H をエルミート行列という. ここで, H^* は H の複素共役転置を表すものとする. n 行 n 列のエルミート行列 H について, 以下の問いに答えよ.

- (1) H の固有値が全て実数となることを証明せよ.
- (2) H の相異なる固有値に対応する固有ベクトル同士が直交することを証明せよ. ただし, 二つの n 項複素列ベクトル x, y の内積は, $(x, y) := y^* x$ で定義するものとする.
- (3) H の全ての固有値が相異なり, かつ, 正であるとき, 零ベクトルでない任意の n 項複素列ベクトル x に対して,

$$x^* H x > 0$$

が成り立つことを証明せよ.

- (4) H の全ての固有値が相異なり, かつ, 正であるとき, 零ベクトルでない任意の n 項複素列ベクトル x に対して,

$$x^* H^{-1} x > 0$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, H^{-1} は H の逆行列を表すものとする.

問2. 情報数学

[1] 整数全体の集合を \mathbb{Z} とし, $a \in \mathbb{Z}$ に対して, $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ と定義する. 整数 \mathbb{Z} の部分集合 I が次の条件を満たすとき, I は \mathbb{Z} のイデアルであるという.

- $0 \in I$ である.
- $x, y \in I$ ならば, $x + y \in I$ である.
- $c \in \mathbb{Z}, x \in I$ ならば, $cx \in I$ である.

以下の問いに答えよ.

(1) 正の整数 a_1, a_2, \dots, a_k に対して,

$$I = \{c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_ka_k \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{Z}\}.$$

とおく. このとき, I は \mathbb{Z} のイデアルであることを示せ.

- (2) (1) の I に関して, $I = d\mathbb{Z}$ となる正の整数 d が存在することが知られている. このとき d は a_1, a_2, \dots, a_k の最大公約数になることを示せ.
- (3) 正の整数 a_1, a_2, \dots, a_k ($a_1 \leq a_i, 2 \leq i \leq k$) に対して, 任意の j ($2 \leq j \leq k$) について, a_j を a_1 で割ったときの商を q_j , 余りを r_j , すなわち, $r_j = a_j - q_ja_1$ とするとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_k) = \gcd(a_1, r_2, \dots, r_k).$$

なお, $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_k)$ は, a_1, a_2, \dots, a_k の最大公約数を表す.

- (4) (3) を利用することで $\gcd(8413, 10561, 11993)$ を求めよ. 解答には (3) を利用した過程を示すこと.

[2] オートマトンと正規表現に関する以下の問いに答えよ. なお, アルファベット $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ 上の正規表現を, 以下の (i), (ii) で定義する.

- (i) $a_1, \dots, a_k, \varepsilon$ (空列), \emptyset (空集合) は正規表現であり, それぞれ集合 $\{a_1\}, \dots, \{a_k\}, \{\varepsilon\}, \emptyset$ を示す.
- (ii) r と s が正規表現のとき, $(r + s), (r \cdot s), (r^*)$ は正規表現であり, 集合演算として, $+$, \cdot , $*$ はそれぞれ和集合, 連接, クリーネ閉包に対応する.

また、決定性有限オートマトンは $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ で表される。ただし、 Q は状態の有限集合、 Σ は有限のアルファベット、 δ は遷移関数、 q_0 は開始状態、 F は最終状態の集合である。非決定性有限オートマトンも空列 ε を用いて同様に、 $(Q, \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \delta, q_0, F)$ で表される。

- (1) アルファベットを $\Sigma = \{a, b\}$ とし、次の言語を表す正規表現を書け。なお、演算の優先順位 $(+ < \cdot < *)$ を考慮して省略可能な場合には、括弧「 $()$ 」を省略してもよい。
 - (1-1) ba で始まり、 ba で終わる系列からなる言語
 - (1-2) 最後から 2 番目の記号が b である系列からなる言語
- (2) (1-2) の言語を受理する非決定性有限オートマトンを遷移図で示せ。なお、解答するオートマトンの状態を 3 つとし、開始状態は向きが斜めの矢印が指す状態とし、受理状態は 2 重丸とすること。
- (3) (1-2) の言語を受理する決定性有限オートマトンを遷移図で示せ。なお、解答するオートマトンの状態を 4 つとし、開始状態は向きが斜めの矢印が指す状態とし、受理状態は 2 重丸とすること。
- (4) 任意の正規表現が表す言語を受理する非決定性有限オートマトンが存在することを数学的帰納法を用いて構成的に証明せよ。

問 3. 確率・統計

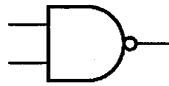
- [1] ある懸賞に応募した 3 人の応募者 A, B, C の中から, 主催者はそれぞれ確率 $1/4$, $1/4$, $1/2$ で 1 人だけ当選者を決定するとする. 応募者 A から主催者に, 「応募者 B か C のどちらか少なくとも 1 人は落選するはずなので, B と C のうちで落選した 1 人の名前を教えて欲しい」という質問があった. 主催者は「B は落選した」と答えた. この答を聞いた後での, A が当選する確率を求めよ. ただし, B と C の両方が落選している場合, 主催者は確率 $1/2$ でどちらかの名前を答えるとする.
- [2] 1 から 6 の目が書かれた公平なサイコロを 4 つ投げるとする.
- (1) 各サイコロの目を表わす確率変数を $X_i (i \in \{1, 2, 3, 4\})$ とするとき, $s^{X_i} (s \text{ は実数})$ の期待値を求めよ.
 - (2) 出た目の合計が 10 になる確率を求めよ.

問 4. コンピュータ基礎工学

[1] コンピュータの数値表現に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 8 進数の 256 を 2 進数で表せ。
- (2) 16 進数の CB を 2 進数で表せ。
- (3) 10 進数の -50 を 8 ビット, 2 の補数表現で表せ。
- (4) 10 進数の計算 $99 - 75$ を 8 ビット, 2 の補数表現で計算した場合の計算過程と結果を示せ。

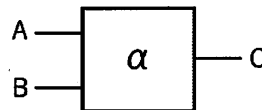
[2] NAND (否定論理積) ゲートのみからなる組み合わせ論理回路に関する以下の問いに答えよ。



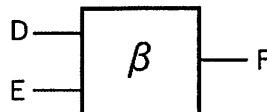
NANDゲート

- (1) 2 個の NAND ゲートのみを用いて, 以下の真理値表を満たす論理回路 α を構成せよ。複数の論理回路構成が考えられる場合には, そのうち一つだけを示すこと。

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



- (2) 4 個の NAND ゲートのみを用いて, 論理式 $F = D \cdot \bar{E} + \bar{D} \cdot E$ を表す論理回路 β を構成せよ。
ここで, $+$ は論理和, \cdot は論理積, $\bar{}$ は否定を表す。



[3] 物理アドレス空間 8M バイトの小規模な主記憶装置と十分な容量の補助記憶装置を用いて, 仮想アドレス空間 4G バイトのページング方式の仮想記憶を実現することを考える。ただしページサイズは 4K バイトとし, アドレスはバイト単位に割り当てたものとする。また, $1G = 2^{30}$, $1M = 2^{20}$, $1K = 2^{10}$ である。このとき以下の設問に答えよ。

- (1) 仮想アドレスと物理アドレスのビット幅はそれぞれ何ビットか。
- (2) 仮想記憶を 1 段ページングで実現すると仮定し, ページテーブルのエントリ 1 つ当たりの大きさを 2 バイトとすると, ページテーブル全体の大きさは何バイトになるか。
- (3) アドレス空間やページサイズは変更せずに, 主記憶上に置かれるページテーブルの領域を小さく抑えるためにはどのような方法が考えられるか。その方法の短所も含めて簡潔に説明せよ。
- (4) ページング方式の仮想記憶におけるスラッシングとは何か。簡潔に説明せよ。

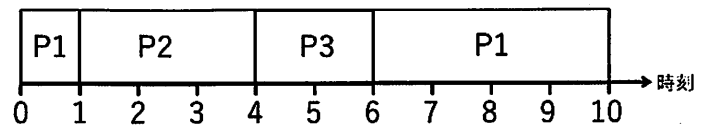
[4] ラウンドロビンによるプロセスのスケジューリングに関する以下の問いに答えよ。

- (1) 単一プロセッサコアを用いて、下表に示される3つのプロセス P1, P2, P3 をラウンドロビンで処理する。このとき、以下の条件(a), (b), (c)のそれぞれにおいて、右に示す例を参考にスケジューリング結果を図示するとともに、各プロセスのターンアラウンドタイム(プロセスの到着から処理完了までの所要時間)を求めよ。ただし、プロセス切り替えのオーバーヘッドは無視する。
- (a) タイムクォンタムを8とする。
 - (b) タイムクォンタムを4とする。
 - (c) タイムクォンタムを2とする。

プロセスの一覧表

プロセス	到着時刻	処理時間
P1	0	5
P2	1	3
P3	3	2

プロセスのスケジューリングの例



- (2) プロセスのターンアラウンドタイムに及ぼすタイムクォンタムの効果について、プロセスの処理時間と関連付けて簡潔に説明せよ。

問5. 計算機プログラミング

[1] マージソートは下記のアイデアに基づいて実現された、分割統治法によるソートのアルゴリズムである（なお、ここでは昇順ソートとする）。

ソート作業 与えられたデータ列を半分に分割し、それぞれに対してソート作業を再帰的に行う。二つのソート作業の結果に対して、マージ作業を行う。マージ作業が完了すると、データ列全体がソート済みとなる。

マージ作業 マージ作業に与えられる二つのデータ列はそれぞれソートされている。二つのデータ列の先頭を比較し、小さい方を一時作業領域となる結果のデータ列に追加し、列の要素を進めることで、マージ作業を行う。どちらかのデータ列の終端に到達した場合は、他方のデータ列の残りの要素を一時作業領域となるデータ列の末尾にコピーする。最後に、一時作業領域のデータ列の内容を元のデータ列に書き戻すことでマージ作業は完了する。

(1) 下記の (ア) と (イ) の空欄を適切に埋めて、ソート作業に対応する関数 `sort` を完成させよ。なお、(ア) と (イ) は入れ替え可能であり、どちらの場合も正解とする。

(2) 下記の (ウ), (エ), (オ) の空欄を適切に埋めて、マージ作業に対応する関数 `merge` を完成させよ。なお、(オ) の記述は複数行にわたっても構わない。

ソースコード 1:

```
#include <stdio.h>
```

```
void merge(int[], int[], int, int, int);
```

```
/* ソート作業：配列 a の [start,end) の範囲をソートする（配列 tmp はマージ作業で使用する）。 */
```

```
void sort(int a[], int tmp[], int start, int end) {
```

```
    int mid;
```

```
    if (end - start <= 1) return;
```

```
    mid = (start + end) / 2;
```

```
    sort( (ア) );
```

```
    sort( (イ) );
```

```
    merge(a, tmp, start, mid, end);
```

```
}
```

```
/* マージ作業：配列 a の [start,mid) と [mid,end) の二つの範囲を
```

```
一時作業領域 tmp を使用してマージする。 */
```

```
void merge(int a[], int tmp[], int start, int mid, int end) {
```

```
    int i = start;
```

```
    int j = mid;
```

```
    int k = 0;
```

```
    while (i < mid && j < end) {
```

```
        if ( (ウ) )
```

```
            tmp[k++] = a[i++];
```

```
        else
```

```
            (エ)
```

```
    }
```

次頁へ続く

```

    if (i == mid) {
        while (j < end) tmp[k++] = a[j++];
    } else {
        (オ)
    }
}

for (i = 0; i < k; i++)
    a[start + i] = tmp[i];
}

int main(void) {
    const int N = 10;
    int a[N] = {1, 5, 9, 7, 4, 6, 3, 8, 10, 2};
    int tmp[N];

    sort(a, tmp, 0, N);

    for (int i = 0; i < N; i++) printf("%d ", a[i]);
    printf("\n");

    return 0;
}

```

[2] ある人物 A は最大積載重量 C のトラック 1 台のみで配送業を営んでいる。ある地点 a から別の地点 b へ荷物を配送する過程で、それぞれの荷物の重量の配列が w (個数 N)、配送することによる報酬の配列が v で与えられた場合に、下記のソースコード 2 により、一度の配送で得られる報酬の総和 (以下、利益とする) を最大化したい。

(1) 下記の (カ) と (キ) の空欄を適切に埋めよ。なお、 $dp[i+1][j]$ は $0, \dots, i$ 番目までの荷物のうち、重さの総和が整数 j 以下 ($j \leq C$ である) となるように選んだときの利益の最大値とする。また、関数 \max は二つの引数のうち、最大値を返す関数とする。

(2) (ク) には、配列 dp の初期化処理が入る。(ク) を適切に埋めよ。なお、初期化の記述が複数行にわたっても構わない。

(3) (ケ) の空欄を適切に埋めて、得られる利益の最大値を出力するようにせよ。

ソースコード 2 (最大積載量 $C = 10$ 、荷物の個数 $N = 7$ の場合):

```

#include <stdio.h>

const int C = 10; /* 最大積載量 C */
const int N = 7; /* 荷物の個数 N */
int w[N] = {5, 1, 3, 2, 4, 7, 6}; /* それぞれの荷物の重量 (配列) w */
int v[N] = {7, 1, 4, 3, 5, 9, 8}; /* 荷物あたりの報酬 (配列) v */

int dp[N+1][C+1]; /* 荷物 i, 重さの総和 j までの利益の最大値 (表) */

void search() {
    int i, j;
    for (i = 0; i < N; i++) {

```

```

    for (j = 0; j <= C; j++) {
        if (  )
            dp[i+1][j] = dp[i][j];
        else
            dp[i+1][j] = max(dp[i][j],  );
    }
}

int main(void) {
    
    search();
    printf("%d\n",  );

    return 0;
}

```

専門科目 1

選択問題チェック票

1. 受験番号を記入すること.
2. 問 1 から問 5 のうち選択した 3 問について, 以下の表中に
○を記入し, 選択した問題番号と解答用紙に記入した問題
番号が一致していることを確かめること.
3. 本チェック票は解答用紙と一緒に提出すること.

受験番号	
------	--

問 1 基礎数学		選択した 3 問に○ を記入す ること
問 2 情報数学		
問 3 確率・統計		
問 4 コンピュータ基礎工学		
問 5 プログラミング		