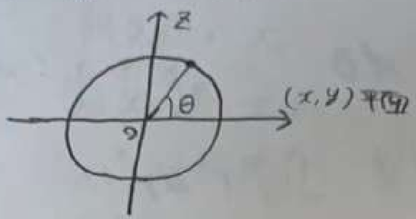
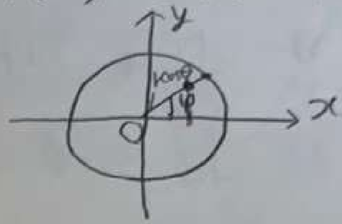
H29

Ⅰ 基礎 数学

[1]

(1) 座標 (x, y, z) は (r, φ, θ) で表すと





$z = r\sin\theta$,

x-y 平面に投影される原点からの距離値は

$r\cos\theta$,

つまり

$x = r\cos\theta\cos\varphi$,

$y = r\cos\theta\sin\varphi$,

よってまとめると

$$(x, y, z) = (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta) \quad (1)$$

(2) 写像 $M: (r, \varphi, \theta) \longrightarrow (x, y, z)$ のヤコビアンを J とすると

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^3\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos\theta\sin^2\varphi$$
$$-(-r^2\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\varphi - r^2\cos^3\theta\sin^2\varphi)$$
$$= r^2\cos^3\theta + r^2\sin^2\theta\cos\theta$$
$$= r^2\cos\theta \quad (2)$$

(3) できあがる回転体の領域をDとすると求める体積Vとして

$$V = \iiint_D 1 \, dx\,dy\,dz$$ となる。

ここで $E = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ \frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}$

とすると (2) で求めたヤコビアンJを用いて、

$$V = \iiint_E |J| \, dr\,d\varphi\,d\theta$$ とできるので、

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr$$

$$= [\sin\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \times [\varphi]_0^{2\pi} \times \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \times 2\pi \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{3}$$ (3)

[2] $H = H^*$ Hはエルミート行列. *は複素共役転置

(1) Hの任意の固有値をλ, 対応する固有ベクトルを x とおく

$Hx = \lambda x$ 両辺の複素共役転置.

$(Hx)^* = (\lambda x)^*$

$x^* H^* = x^* \bar{\lambda}$

$x^* H^* x = x^* \bar{\lambda} x$

$x^* H x = x^* \bar{\lambda} x$

$x^* \lambda x = x^* \bar{\lambda} x$ $x \neq 0$ より $x^* x = |x|^2$ より $|x|^2 > 0$

$\lambda = \bar{\lambda}$

つまり λは実数である。λは任意の固有値より

全ての固有値は実数となる.

[1] [2]

(2) $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$ とする.

Hの相異なる固有値を λ_i, λ_j, それぞれに対応する固有ベクトルを x_i, x_j とおく。

$$
\begin{aligned}
&(Hx_i) \cdot x_j \\
&= (Hx_i)^* x_j \\
&= x_i^* H^* x_j \\
&= x_i^* (Hx_j) \\
&= x_i \cdot (Hx_j)
\end{aligned}
$$

よって $(Hx_i) \cdot x_j = x_i \cdot (Hx_j)$

$$(\lambda_i x_i) \cdot x_j = x_i \cdot (\lambda_j x_j)$$

$$\lambda_i x_i \cdot x_j = \lambda_j x_i \cdot x_j$$

ここで $\lambda_i \neq \lambda_j$ より

$$x_i \cdot x_j = 0.$$

よって相異なる固有値に対応する固有ベクトル同士は直交する。

(3) (2)より 全ての固有値が異なる場合, 固有ベクトルを横に並べた行列は

$U = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ であり.

$U^* U = E$ となるので $U^* = U^{-1}$ である。

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ とするとき $U^{-1} H U = D$

$H = UDU^*$ と表すことができる。

$$
\begin{aligned}
&x^* H x \\
&= x^* U D U^* x \\
&= (U^* x)^* D (U^* x) \qquad \text{Dは対角行列より} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \qquad (y_i\text{は }U^*x\text{ の }i\text{ 行成分}) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

ここで (1)より $\lambda_i > 0$, 又 $|U^* x|^2 > 0$ であるので

$x^* H x > 0$ は示される。

(2)
(4)

$$H = UDU^*$$

$H^{-1} = UD^{-1}U^*$ より

$x^* H^{-1} x$

$= x^* U D^{-1} U^* x$

$= (U^* x)^* D^{-1} (U^* x)$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} y_i^2$ $\quad \frac{1}{\lambda_i} > 0$ より

> 0

よって

$x^* H^{-1} x > 0$ であることが示された.

[2] 情報数学

[1]

(1)

(i) $c_1, c_2, \cdots, c_k = 0$ のとき
$c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ka_k = 0$ となるので
$I \ni 0$,

(ii) $x, y \in I$ とすると $c_{1x}, \cdots, c_{kx} \in \mathbb{Z}$, $c_{1y}, \cdots, c_{ky} \in \mathbb{Z}$ として
$x = c_{1x}a_1 + c_{2x}a_2 + \cdots + c_{kx}a_k$,
$y = c_{1y}a_1 + c_{2y}a_2 + \cdots + c_{ky}a_k$ と表せる。
ここで
$x+y = c_{1x}a_1 + \cdots + c_{kx}a_k + c_{1y}a_1 + \cdots + c_{ky}a_k$
$= (c_{1x} + c_{1y})a_1 + (c_{2x} + c_{2y})a_2 + \cdots + (c_{kx} + c_{ky})a_k$

$c_{1x} + c_{1y}, c_{2x} + c_{2y}, \cdots, c_{kx} + c_{ky} \in \mathbb{Z}$ より
$I \ni x+y$.

(iii) $c \in \mathbb{Z}$, $x \in I$ とすると
$cx = c(c_{1x}a_1 + c_{2x}a_2 + \cdots + c_{kx}a_k)$
$= cc_{1x}a_1 + cc_{2x}a_2 + \cdots + cc_{kx}a_k$

ここで $cc_{1x}, cc_{2x}, \cdots, cc_{kx} \in \mathbb{Z}$ より
$I \ni cx$.

(i)(ii)(iii) より I は $\mathbb{Z}$ のイデアルである.

(2) $\forall i \in \mathbb{Z}$ s.t. $1 \leqq i \leqq k$ に対して
$a_i \in I$ より $\exists n \in \mathbb{Z}$ で $a_i = dn$ と表すことができる。つまり d は a_i の約数である。
又、m を $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の公約数とすると
$a_i = mb_i$ と表すことができる。
そして
$d = c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ka_k$ と表すことができ.
$d = m(c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_kb_k)$ より
m は d の約数 より $d \geqq m$,
つまり d は $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の最大公約数である

No.

Date

2

[1]

(3) 正の整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ に対して、

$I = \{c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ka_k \mid c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{Z}\}$

とする。

(1) (2) より $I = d\mathbb{Z}$ となる正の整数が存在し、

d は $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の最大公約数であるので

$$d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_k),$$

又、正の整数 $a_1, r_2, r_3, \cdots, r_k$ に対して

$I' = \{c_1'a_1 + c_2'r_2 + \cdots + c_k'r_k \mid c_1', c_2', \cdots, c_k' \in \mathbb{Z}\}$

とする。

ここで

$$c_1'a_1 + c_2'r_2 + \cdots + c_k'r_k$$

$$= c_1'a_1 + c_2'(a_2 - q_2a_1) + \cdots + c_k'(a_k - q_ka_1)$$

$$= (c_1' - c_2'q_2 - \cdots - c_k'q_k)a_1 + c_2'a_2 + \cdots + c_k'a_k.$$

ここで $c_1' - c_2'q_2 - \cdots - c_k'q_k \in \mathbb{Z}$ より

$I = I'$ であることが分かる。

つまり $I = I' = d\mathbb{Z}$ となる d が存在し、

d は $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の最大公約数であり、

$a_1, r_2, \cdots, r_k$ の最大公約数ともなる。

よって

$$d = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \gcd(a_1, r_2, \cdots, r_k).$$

$$\therefore \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \gcd(a_1, r_2, \cdots, r_k) \;//$$

[2]

[1]

(4) $\gcd(8413, 10561, 11993)$

$= \gcd(8413,\ 8413 \cdot 1 + 2148,\ 8413 \cdot 1 + 3580)$

$= \gcd(2148,\ 3580,\ 8413)$

$= \gcd(2148,\ 2148 \cdot 1 + 1432,\ 2148 \cdot 3 + 1969)$

$= \gcd(1432,\ 1969,\ 2148)$

$= \gcd(1432,\ 1432 \cdot 1 + 537,\ 1432 \cdot 1 + 716)$

$= \gcd(537,\ 716,\ 1432)$

$= \gcd(537,\ 537 \cdot 1 + 179,\ 537 \cdot 2 + 358)$

$= \gcd(179,\ 179 \cdot 2,\ 179 \cdot 3)$

$= \underline{179}$ //

[2]

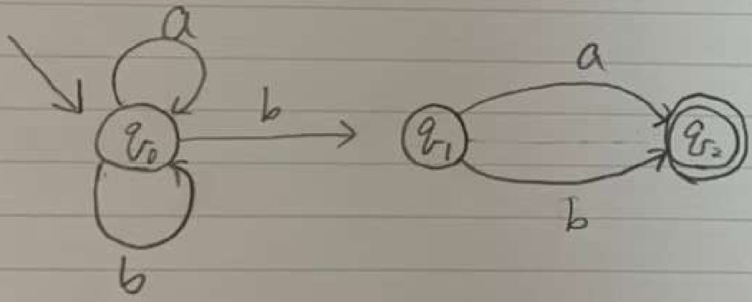
(1) (1-1)

$ba + ba \cdot (b+a)^* \cdot ba$

(1-2)

$(a+b)^* \cdot b \cdot (a+b)$

(2)



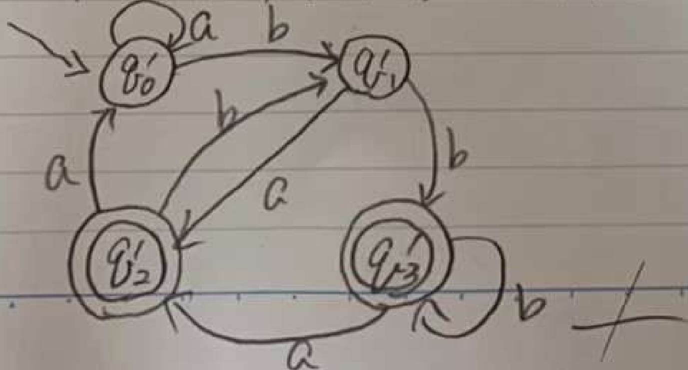
(3) $\delta(q_0, a) = \{q_0\}$, $\delta(q_0, b) = \{q_0, q_1\}$

$\delta(\{q_0, q_1\}, a) = \{q_0, q_2\}$, $\delta(\{q_0, q_1\}, b) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\delta(\{q_0, q_2\}, a) = \{q_0\}$, $\delta(\{q_0, q_2\}, b) = \{q_0, q_1\}$

$\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, a) = \{q_0, q_2\}$, $\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, b) = \{q_0, q_1, q_2\}$.

よって $\{q_0\} = q'_0$, $\{q_0, q_1\} = q'_1$, $\{q_0, q_2\} = q'_2$, $\{q_0, q_1, q_2\} = q'_3$ とすると



R1

Date

3 確率・統計

[1]

A	B	C
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

当選する確率を $P(X)$，主催者が落選したと言う確率 $P(Y)$
求める確率は

$$P(X=A \mid Y=B) = \frac{P(Y=B \mid X=A)\, P(X=A)}{P(Y=B \mid X=A)P(X=A) + P(Y=B \mid X=C)\, P(X=C)}$$

ここで $P(X=A) = \frac{1}{4}$, $P(Y=B \mid X=A) = \frac{1}{2}$

$P(X=C) = \frac{1}{2}$, $P(Y=B \mid X=C) = 1$

$$P(X=A \mid Y=B) = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$ //

[2]

(1)
$$E[s^{x_i}] = \sum_{k=1}^{6} s^k P(x_i = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} s^k$$
$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{s}{6} s^{k-1}$$
$$= \frac{s}{6} \cdot \frac{1-s^n}{1-s}$$
$$= \frac{s(1-s^n)}{6(1-s)}$$ //

(2)

出た目の合計が 10 になる組み合わせは

(1, 1, 2, 6), (1, 2, 2, 5), (1, 2, 3, 4) (1, 1, 3, 5)
(1, 1, 4, 4), (1, 3, 3, 3) (2, 2, 2, 4), (2, 2, 3, 3)

全事象は 6^4 通り
又、上の組み合わせとなる回数は
$12 + 12 + 24 + 12 + 6 + 4 + 4 + 6 = 80$

よって求める確率は $\frac{80}{6\times6\times6\times6} = \frac{5}{81}$ //

2019

④ コンピュータ工学

[1]

(1) $256_{(8)}$

$= 2\times 2^6 + 5\times 2^3 + 6$

$= 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1$

$= 10101110_{(2)}$

(2) $CB_{(16)}$

$= 12\times 2^4 + 11$

$= (2^3+2^2)\times 2^4 + 2^3 + 2 + 1$

$= 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2 + 1$

$= 11001011_{(2)}$

(3) 50

$= 32 + 16 + 2$

$= 110010_{(2)}$ より

-50 の8ビット，2の補数表現は

11001110

(4) $99 \rightarrow 01100011$

$-75 \rightarrow 10110101$ より

$99 - 75 = 99 + (-75)$ であるので

$$\begin{array}{r} 01100011 \\ +)\ 10110101 \\ \hline 100011000 \end{array}$$

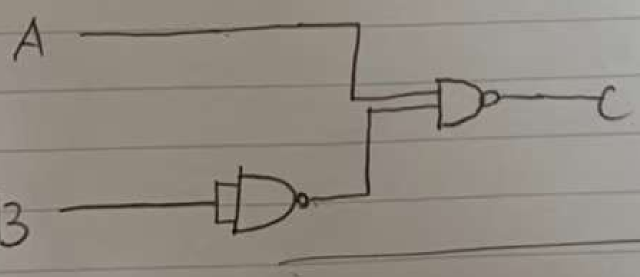
オーバーフローを無視して

結果は 00011000

[2]

$\overline{C} = A\cdot\overline{B}$

$C = \overline{A\cdot\overline{B}}$ より α は



2019

[4]

[2]

(2) $F = D\cdot\bar{E} + \bar{D}\cdot E$

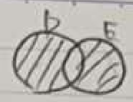
$= D\bar{D} + D\cdot\bar{E} + \bar{D}E + E\bar{E}$

$= D(\bar{D}+\bar{E}) + E(\bar{D}+\bar{E})$

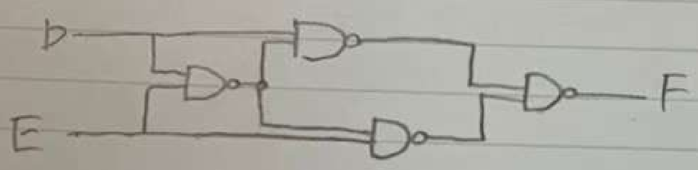
$= \overline{\overline{D(\bar{D}+\bar{E}) + E(\bar{D}+\bar{E})}}$

$= \overline{\overline{D(\bar{D}+\bar{E})}\cdot\overline{E(\bar{D}+\bar{E})}}$

$= \overline{\overline{D\cdot(\overline{D\cdot E})}\cdot\overline{E\cdot(\overline{D\cdot E})}}$ より.



$\bar{D}+\bar{E} = \overline{D\cdot E}$



[3]

(1) $8M = 2^3 \times 2^{20} = 2^{23}$　　$4G = 2^2 \times 2^{30} = 2^{32}$

仮想アドレス：32ビット，物理アドレス 23ビット

(2) 仮想アドレス空間上のページ数は $2^{32} \div 2^{12} = 2^{20}$，
ページテーブルのエントリ1つ当たりの大きさを2バイトより
$2^{20} \times 2 = 2^{21}$ バイト
2^{21} バイトがページテーブル全体の大きさ

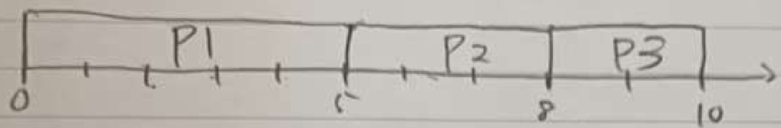
(3) 多重レベルページングが考えられる。
短所はページテーブル参照の回数が増えるので
メモリアクセスが増大する。

(4) 主記憶容量が十分でないとページの入れ替えが頻繁に
発生するため、処理速度が低下すること。

$\boxed{4}$

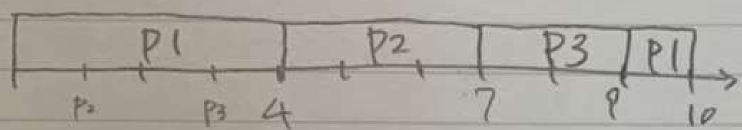
[4]

(1) (a)



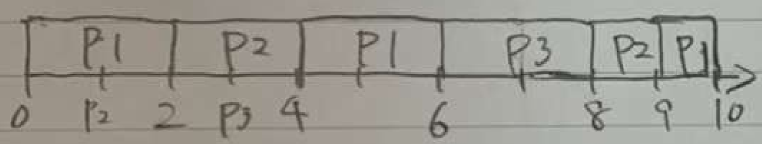
ターンアラウンドタイムは
$(5+7+7)\times\frac{1}{3}$
$= \frac{19}{3}$

(b) タイムクォンタム 4



$(10+6+6)\times\frac{1}{3}$
$= \frac{22}{3}$

(c) タイムクォンタム 2



$(10+8+5)\times\frac{1}{3}$
$= \frac{23}{3}$ //

(2) ア
全てのプロセスの処理時間を超えるタイムクォンタムを設定するとFCFSと同じ動作をし、

2019

[5] プログラミング

(1)

(ア) a, tmp, start, mid

(イ) a, tmp, mid, end

(2)

(ウ) a[i] < a[j]

(エ) tmp[k++] = a[j++];

(オ) while (i < mid) tmp[k++] = a[i++];

j-w[i] < 0

[2]

(カ) j < w[i]

(キ) dp[i][j-w[i]] + v[i]

(ク)

```
int i;
for (i=0; i<C+1; i++){
    dp[0][i] = 0
}
```

(ケ) dp[N][C]