

北海道大学 大学院情報科学研究科

情報理工学専攻 修士課程入学試験

平成 27 年 8 月 20 日 10:00-12:00

専門科目 1

受験上の注意

- 本冊子内の五問，問 1（基礎数学），問 2（情報数学），問 3（確率・統計），問 4（コンピュータ基礎工学），および問 5（プログラミング）から三問選択し解答せよ。
- 選択問題チェック票に受験番号を記入し，選択した三問に○印をつけること。
- すべての答案用紙に，受験番号および選択した問題番号（例えば，問 3 など）を必ず記入すること。
- 答案用紙は 3 枚である。この他に下書き用の草案紙 3 枚を配付する。
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙に記入すること（裏面を使用してもよい。答案用紙が不足したり，破損したりした場合には試験監督員に申し出て受け取ること）。
- 問題ごとの答案用紙が複数枚にわたる時は，1/2，2/2 のように答案用紙にページ番号を必ず付し，受験番号，選択した問題番号を各ページに記入すること。
- 問題冊子，草案紙は持ち帰り，選択問題チェック票とすべての答案用紙を提出すること。
- 机の上に置いてよいものは，筆記用具（鉛筆，消しゴム，鉛筆削りなど），時計，および特に指示があったもののみである。時計は計時機能のみを使用し，アラームの使用を禁ずる。携帯電話，スマートフォン，タブレットコンピュータ等は電源を切ってかばんの中にしてしまうこと。電卓，電子辞書などは使用不可である。

専門科目 1
選択問題チェック票

1. 受験番号を記入すること.
2. 問 1 から問 5 のうち選択した三問について以下の表中に○を記入せよ. なお, 選択した問題番号と答案用紙に記入した問題番号が一致していることを十分よく確かめること.
3. 本チェック票は答案用紙と一緒に提出すること.

受験番号	
------	--

問 1	基礎数学		選択した 三問に○ を記入す ること
問 2	情報数学		
問 3	確率・統計		
問 4	コンピュータ基礎工学		
問 5	プログラミング		

問1. 基礎数学

[1] 微分・積分に関する以下の問いに答えよ. ただし, $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底とする.

(1) 次の極限値を求めよ.

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \qquad \text{ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n+1) + \log(n+2)^2 - \log(n+3)^3)$$

(2) 次の計算をせよ.

$$\text{i)} \quad \frac{d}{dx} e^{(e^x+1)} \qquad \text{ii)} \quad \int_1^e \log x dx$$

(3) 次の多重積分を $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ という変数変換を用いて計算せよ.

$$\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} e^{(x^2+y^2)} dx dy$$

(4) 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, a, b は相異なる非零の実数とする.

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - (a+b) \frac{d}{dx} f(x) + ab f(x) = 0$$

[2] 線形代数に関する以下の問いに答えよ.

(1) 次の行列 A, B に対し, 以下の行列式 i)~iii) を求めよ. ただし, a, b, c は実数とする.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{i)} \quad |A| \qquad \text{ii)} \quad |B| \qquad \text{iii)} \quad |AB^{-1}|$$

(2) 2次の実正方行列全体からなる集合 $M_2(\mathbf{R})$ は, 行列の和とスカラー倍に対して, 実数 \mathbf{R} 上のベクトル空間となることが知られている. このとき, 以下の問い i), ii) に答えよ.

i) 2次の実対称行列全体からなる集合が $M_2(\mathbf{R})$ の線形部分空間であることを示せ.

ii) 2次の実正則行列全体からなる集合が $M_2(\mathbf{R})$ の線形部分空間ではないことを示せ.

(3) 次の行列 A について, 線形独立な二つの固有ベクトルを任意に選んだとき, それらが必ず直交するものとする. このとき実数 θ が満たすべき条件を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

問2. 情報数学

[1] 2項関係に関する以下の問いに答えよ.

文字 a, b , 文字列の先頭を示す特殊文字 ε および終端を示す特殊文字 $\$$ からなる3つの文字列 $\varepsilon aa\$, \varepsilon abb\$, $\varepsilon ab\$$ を与え, さらに, 特殊文字も含めた文字間の位置を非負整数で併せて示した下記の表記を考える.$

$$\varepsilon^0 a^1 a^2 \$ \quad \varepsilon^3 a^4 b^5 b^6 \$ \quad \varepsilon^7 a^8 b^9 \$$$

この表記により, 例えば 位置2の直前の文字は a , 直後の文字は $\$$ であることがわかる. このとき, 位置の集合 $X = \{0, 1, \dots, 9\}$ の要素間につぎのように三つの関係 R_1, R_2, R_3 を定める.

$i, j \in X$ に対して

$$i R_1 j \Leftrightarrow j \equiv i + 1 \pmod{10},$$

$$i R_2 j \Leftrightarrow i \text{ と } j \text{ の前後各一文字とも同じである,}$$

$$i R_3 j \Leftrightarrow i \text{ と } j \text{ の前 (一文字) は同じ文字である, あるいは,} \\ i \text{ と } j \text{ の後ろ (一文字) は同じ文字である.}$$

例えば, 前後一文字が共に a と b なので $4 R_2 8$ であり, 後ろ一文字が共に $\$$ なので $2 R_3 6$ である. このとき, 三つの関係 R_k ($k = 1, 2, 3$) について以下の真偽を判定し, 偽の場合は反例を挙げよ.

- (1) 関係 R_k は関数である.
- (2) 関係 R_k は反射的である.
- (3) 関係 R_k は対称的である.
- (4) 関係 R_k は推移的である.

[2] 論理に関する次の問題に答えよ. ただし, \neg は否定, \wedge は論理積, \vee は論理和, \rightarrow は含意 (ならば) を表し, 論理式 A, B に対して $A \rightarrow B$ は $\neg A \vee B$ と同値である.

- (1) 下記の命題論理の論理式がトートロジー, すなわち恒真式であるか否かを, 真理値表を用いて説明せよ.

i) $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q.$

ii) $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p.$

- (2) すべての正の整数からなる集合を \mathbb{N} , すべての素数からなる集合を \mathbb{P} とし, 述語 $p(x, y)$ は「 x は y で割り切れる」を意味するとき, 1 は素数ではないことに注意して, つぎの論理式の真偽を説明せよ. ただし, \forall は全称記号, \exists は存在記号である.

i) $(\forall x \in \mathbb{P} \exists y \in \mathbb{N} p(x, y)) \rightarrow (\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{P} p(x, y)).$

ii) $(\forall x \in \mathbb{P} \exists y \in \mathbb{P} p(x, y)) \rightarrow (\exists y \in \mathbb{P} \forall x \in \mathbb{P} p(x, y)).$

問3. 確率・統計

確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が各々独立に、同じ分布 d に従うものとする.

[1] 以下の各問に答えよ.

分布 d が、平均 μ 、分散 σ^2 を持つとき、 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ とすると、任意の実定数 z に対して、以下が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \phi(z)$$

ここに、 $P(A)$ は事象 A の確率、 $\phi(z)$ は標準正規分布の累積分布関数である. なお、必要に応じて、 $\phi(1) = 0.8413$, $\phi(1.6) = 0.9452$, $\phi(1.65) = 0.9505$, $\phi(1.96) = 0.9750$, $\phi(2) = 0.9772$, $\phi(2.58) = 0.9951$ を用いること.

- (1) 上で示されている定理の名称を答えよ.
- (2) 高校や大学の受験の指標に用いられる「偏差値」は、試験の得点を平均 50、標準偏差 10 となるように変換した値である. 受験者数が十分に多い模擬試験において、無作為に選んだ受験者 64 名の偏差値の平均が 52 以上となる確率を、本小問にある定理を用いて近似的に求めよ.
- (3) 1 から 6 までの数字が各面に記されている立方体を振り、上面に出た数字を記録する. これを 144 回行ったとき、奇数が 84 回記録された.
この立方体は、奇数と偶数が均等に上面に出現するサイコロとして不適當といえるか. 本小問にある定理を用い、有意水準 5% で検定せよ.

[2] 分布 d が区間 $[a, b]$ における一様分布である場合、以下の各問に答えよ.

- (1) d の確率密度関数 $f(x)$ と累積分布関数 $F(x)$ をそれぞれ示せ.
- (2) $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ の最大値 X_{\max} の累積分布関数 $F_{\max}(x)$ を求めよ.
- (3) $a \leq x \leq b$ である任意の実数 x について、確率 $P(X_{\max} = x)$ の値を答えよ.

問 4. コンピュータ基礎工学

[1] コンピュータにおける数の表現に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 10 進数の 11 を 2 進数で表せ.
- (2) 2 の補数表現を用いて, 10 進数の -6 (マイナス 6) を 5 ビットの 2 進数で表せ.
- (3) 固定小数点方式と浮動小数点方式の各々について, どのような数値表現方式か簡潔に記述せよ.

[2] キャッシュメモリに関する以下の問いに答えよ.

- (1) キャッシュメモリはキャッシュライン (キャッシュブロック) を単位として管理される. キャッシュメモリのデータ格納構造として, ダイレクトマップ方式, フルアソシアティブ方式がある. これらの二つの方式について両者の違いが分かるように簡潔に記述せよ.
- (2) キャッシュメモリのスラッシングとはどのような現象か, アプリケーションが受ける影響を含めて簡潔に記述せよ.

[3] プロセスのスケジューリングに関する以下の問いに答えよ.

表 1 に示される 4 つのプロセスを単一のプロセッサコアで処理するとき, 以下の (a) および (b) のスケジューリング方式を用いた場合, プロセスはどのような時間順に処理されるか図示し, 平均ターンアラウンドタイムを求めよ.

- (a) 到着順 (FCFS, FIFO)
 - (b) ラウンドロビン (タイムクウォンタムを 3 とする)
- なお, プロセスの切り替えに要するオーバーヘッドは無視してよいものとする.

表 1. プロセス一覧

名称	到着時刻	処理時間
P1	0	6
P2	2	2
P3	4	4
P4	9	5

問5. プログラミング

[1] 10000 より小さな素数を全て表示するC言語プログラムを作成したい.

(1) ソースコード1の(ア), (イ)を適切に埋めてプログラムを完成させよ.

(2) このプログラムの実行時間を短くするための方法を提案せよ.

ソースコード1

```
#include <stdio.h>

int isPrime(int n)
{
    int i;
    for(i = 2; i < n; i++) {
        if ( (ア) ) return 0;
    }
    return 1;
}

int main() {
    int i;
    for(i = 2; i < 10000; i++) {
        if( (イ) ) printf("%d は素数\n", i);
    }
    return 0;
}
```

[2] ソースコード2のC言語プログラムを作成し, 実行させたところ, 以下のよう
な実行結果(一部を抜粋)を得た. ただし, 他のプログラムは実行していないと仮
定する. 空欄(ア), (イ)を適切に埋めると共に, このような結果になった理由を説
明せよ.

ソースコード2

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>

int main()
{
    char *a, *b;
    int i;

    a = (char*) calloc(20, sizeof(char));
    b = (char*) calloc(20, sizeof(char));
    strcpy(a, "Graduate School of Information Science and Technology");
    for(i = 0; i < 20; i++)
        printf("b[%d] = %c\n", i, b[i]);
    return 0;
}
```

実行結果の一部

b[11] = T

b[12] = (ア)

b[13] = (イ)

次ページに続く

[3] データを分割することにより効率的に昇順に並べるマージソートのC言語プログラムを作成したい。ソースコード3の(ア)～(ウ)を適切に埋めてプログラムを完成させよ。(ア)には、部分的に並べ替えられたdata配列についてcacheを用いて昇順にマージする操作を定義すること。

ソースコード3

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>

void mergeSortedDataByCache(int *data, int *cache, int first, int last, int half)
{
    (ア)
}

void mergeSort(int *data, int *cache, int first, int last)
{
    int half;

    if(first == last) return;
    half = (first + last) / 2;
    mergeSort(data, cache, first, half);
    mergeSort(data, cache, half+1, last);
    mergeSortedDataByCache(data, cache, first, last, half);
}

int main(int argc, char *argv[])
{
    int i, count, maxSize, *data, *cache;
    FILE *fp;

    if(argc != 3){
        fprintf(stderr, "Usage: %s <maxSize> <filename> ¥n", argv[0]);
        return 1;
    }
    maxSize = atoi(argv[1]);
    if ((fp = fopen(argv[2], "r")) == NULL){
        fprintf(stderr, "File %s is not found.¥n", argv[1]);
        return 1;
    }
    if ((data = (イ)) == NULL){
        fprintf(stderr, "Out of memory.¥n");
        return 1;
    }
    if ((cache = (イ)) == NULL){
        fprintf(stderr, "Out of memory.¥n");
        return 1;
    }
    for(count = 0; count < maxSize; count++)
        if (fscanf(fp, "%d", &data[count]) == EOF)
            break;
    mergeSort((ウ));
    for(i = 0; i < count; i++)
        printf("%d¥n", data[i]);
    return 0;
}
```