問1. 以下の文章それぞれについて，正しいと思うものに○，誤りと思うものに×をつけよ．完全に自信がない場合でも，よりふさわしいと思う答を記入せよ（×の場合でも理由を書かなくてよい）．

(ア) 非対称3×3行列Π，3成分の行ベクトルwに対し，$w\Pi$と$\left(\Pi w^{\top}\right)^{\top}$は必ず同じ行ベクトルになる．ただし，行ベクトルまたは列ベクトルvに対し$v^{\top}$はそれを転置したベクトルを表すものとする．

(イ) 情報理論の父とよばれているのは，クロード・シャノンである．

(ウ) 情報源符号化の目的は，通信の効率を高めることである．

(エ) 確率変数Xの値がつねに1つの決まった値をとる場合，Xのエントロピーは0ビットである．

(オ) 実際の天気をX，天気予報の天気をYとすれば，天気予報を知ったことにより得られるXについての情報量は条件付きエントロピー$H(X|Y)$である．

(カ) エントロピー関数$\mathcal{H}(x)$は，$\mathcal{H}(x)=-x\log_2 x$で定義される関数である．

(キ) 符号長がクラフトの不等式を満たす符号であっても，一意復号可能でない場合がある．

(ク) 2元定常情報源Sのエントロピー$H(S)$は，各情報源記号の発生確率から一意に定まる．

(ケ) 情報源 S を1情報源記号毎に2元符号化する場合，コンパクト符号の1情報源記号あたりの平均符号長が1次エントロピー$H_1(S)$より大きい場合がある．

(コ) 定常情報源 S に対し各情報源記号の発生確率によっては，ブロック2元符号化を行ってもコンパクト符号の1情報源記号あたりの平均符号長を短くすることができない場合がある．

(サ) k個の非等長な情報源系列の集合Vを選んで，情報源Sから発生する情報源系列をVに含まれる系列に一意に分解し，分解された系列毎にハフマン符号化する場合，1情報源記号当たりの平均符号長を短くするには，Vにより分解された系列の平均長が短くなるようにk個の要素から成るVを選べばよい．

(シ) ひずみを許す条件のもとでは，情報源 S に対する２元符号の1情報源記号あたりの平均符号長を，情報源のエントロピー$H(S)$の値にいくらでも近づけることができるが，それより小さくすることはできない．

(ス) 2元通信路において，受信語と送信語の間のハミング距離は，その受信語において誤っているビット数である．

(セ) 確率変数XとYの相互情報量は，$Y=X$のとき最大となる．

(ソ) 通信路行列の各列の和は必ず1になる．

(タ) 二元対称通信路は、入力に対して一様であるが出力に対して一様ではない．

(チ) 通信路容量がCビット/記号の定常2元通信路に記号 X を入力したとき記号 Y が出力される場合，$I(X;Y)\le C$が常に成り立つ．

(ツ) ２元通信路符号の場合，単位をビット/記号にとれば情報速度と効率は一致する．

(テ) 通信路容量を超える情報速度でデータを送る場合には，復号誤り率を 0.1 以下に抑える符号化はどのような場合にも存在しない．

(ト) 出力に対して一様な記憶のない定常通信路において，入力記号を等確率で入力したとき出力記号が等確率で出力されない場合がある．

(ナ) 符号の冗長度が 0 の場合には，誤り訂正はできないが誤り検出を行うことができる場合がある．

(ニ) 巡回符号は線形符号であるので，パリティ検査方程式で符号語か否かをチェックすることができる．

(ヌ) 生成多項式が$G(x)=x^{16}+x^{12}+x^{5}+1$の巡回符号では，長さが 16 までの任意のバースト誤りをすべて検出できる．

(ネ) 符号$\mathrm{C}=\{000,011,101,110\}$について，この符号は線形符号ではない．

(ノ) 最小ハミング距離が 8 の２元通信路符号では，すべての３重誤りまでを訂正でき，同時にすべての４重誤りの検出が可能である．

エントロピー関数表

x	$\mathcal{H}(x/16)$
1	0.337
2	0.544
3	0.696
4	0.811
5	0.896
6	0.954
7	0.989

問2. 0, 1 の 2 種類の情報源記号を，それぞれ 3/4, 1/4 で発生する記憶のない定常情報源 S を考える．このとき以下の問いに答えよ．ただし、L_1, L_2, L_3は分数で答えよ．答えは小数点以下３桁を四捨五入し２桁まで求めよ．

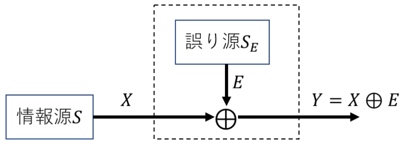
(ア) この情報源 S から発生する情報源系列を，1 情報源記号毎にアルファベット$\{0,1\}$を用いて２元符号化するハフマン符号を求め，その平均符号長 L_1 を求めよ．

(イ) この情報源Sから発生する情報源系列を，2 情報源記号毎にアルファベット$\{0,1\}$を用いて２元符号化するブロックハフマン符号を求め，その１情報源記号あたりの平均符号長L_2を求めよ．

(ウ) この情報源Sから発生する情報源系列を，3 情報源記号毎にアルファベット$\{0,1\}$を用いて２元符号化するブロックハフマン符号を求め，その１情報源記号あたりの平均符号長L_3を求めよ．

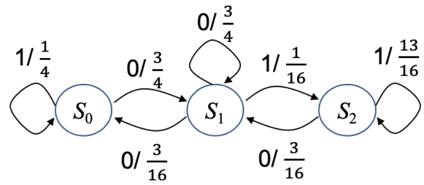
(エ) 一意復号可能な 2 元符号化における１情報源記号あたりの平均符号長の下限 L を求めよ．ページ右上のエントロピー関数表を用いて小数点以下３桁目を四捨五入して小数点以下２桁まで求めよ．

問3. 誤り源S_Eで表される右図のような加法的2元通信路を考える. この通信路に, 右図のように確率qで 1 を出力する無記憶定常2元情報源Sを接続した通信に関し, 以下の問いに答えよ. 確率は分数で答え, 情報量はページ右上のエントロピー関数表を用いて小数点以下３桁目を四捨五入して小数点以下２桁まで求めよ．



(ア) 誤り源S_Eとして１を出力する確率が$1/4$の無記憶定常情報源を用いた場合について以下の問に答えよ．

1. $q = 1/4$のとき，Yが１となる確率$P_Y(1)$，およびYのエントロピー$H(Y)$を求めよ．
2. Xで条件付けたYのエントロピー$H(Y|X)$を求めよ．
3. $q = 1/4$のとき，XとYの相互情報量$I(X;Y)$を求めよ．
4. この通信路の通信路容量Cを求めよ．



(イ) 誤り源S_Eとして左図の状態図で表されるマルコフ情報源を用いた場合について以下の問に答えよ．

1. S_Eの状態図で，定常分布において状態S_iにいる確率をw_iとして状態の定常分布(w_0, w_1, w_2)を求めよ．
2. この通信路のビット誤り率を求めよ。
3. 誤り源S_Eのエントロピー$H(S_E)$を求めよ。
4. この通信路の通信路容量Cを求めよ．

問4. 3 個の情報ビットx_1, x_2, x_3に対して，以下の式で定義される 4 個の検査ビットc_1, c_2, c_3, c_4を付加した$w = (x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, c_3, c_4)$ という形の(7,3)符号を考える．このとき以下の問いに答えよ．ただし，式の中における足し算はすべて 2 の剰余系（$0 + 0 = 1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1$）で考えるものとする．

$$\begin{cases} c_1 = x_1 + x_2 \\ c_2 = \quad\;\; x_2 + x_3 \\ c_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ c_4 = x_1 \quad\;\; + x_3 \end{cases}$$

(ア) この符号の１記号あたりの情報速度と冗長度を求めよ．

(イ) この符号を用いて, 情報ビット101 を符号化せよ.

(ウ) 長さ 7 の$\{0,1\}$−系列$w_1w_2w_3w_4w_5w_6w_7$に対するこの符号のパリティ検査方程式を示せ.

(エ) ある符号語を送ったとき，系列 0101001 を受信したとする．単一誤りが生じていると想定して，送信語の情報ビットを推定せよ．

(オ) この符号は生成多項式が$G(x) = x^4 + x^2 + x + 1$の巡回符号であることが知られている．このことを利用して受信した系列 1110001 に誤りがあるか否か調べよ．計算の過程も記述すること．

(カ) この符号の最小距離を求めよ．それに基づいて，この符号の誤り訂正・検出能力について説明せよ．