Introducción a los números aleatorios

CC3039 - 2020

Antes de empezar

Lean por su cuenta la **Sección 2.10** del libro Simulación (Sheldon M. Ross, 5ed).

Habla de variables aleatorias construidas a partir de dos variables aleatorias a través del operador "dado que" (condicional).

En una hoja de papel, escriban un número *aleatorio* en [1 y 10]

¿Qué hace a un número *aleatorio*? ¿qué de aleatorio tiene un número?

Números aleatorios

El bloque principal de la simulación es la habilidad de generar números aleatorios independientes y uniformemente distribuidos entre 0 y 1.

Math.rand()

Números pseudoaleatorios

Los humanos no somos muy buenos para generar números aleatorios uniformes e independientes. Resulta ser que las computadoras tampoco.

El acercamiento normal para generar números aleatorios uniformes es usar el siguiente algoritmo recursivo:

Xn = a*Xn-1 % **m** (Método congruencial Mul)

Xn = (**a***Xn-1 + **c**) % **m** (Método congruencial Mix)

Números pseudoaleatorios

Considerando los algoritmos anteriores, tenemos que elegir algunos **a**, **c** y **m** que satisfagan algunos criterios:

1. Para cualquier **Xo**, la serie debe parecer uniforme entre 0 y 1
2. Lara cualquier **Xo**, la cantidad de números aleatorios generados antes de que la serie se repita debe ser muy, MUY, grande.
3. **Xi** debe ser eficientemente calculable.

Números pseudoaleatorios

Resulta ser que si elegimos **m** tal que es un número primo muy grande (ej: **2^31 - 1**) y **a** = **7^5**, obtenemos un algoritmo con las propiedades deseadas.

Para nuestros propósitos, no demostraremos por qué lo anterior es verdad, bastará con considerar que dichos algoritmos son cajas negras que generan números aleatorios uniformes entre 0 y 1.

Ojo: los generadores anteriores dan un número entre $[0, m)$, ¿cómo hacemos para normalizarlo a $[0, 1)$?

Aplicaciones

Integración

Imaginémonos que queremos integrar:

$$\theta = \int_0^1 g(x)\, dx$$

Si nosotros calculamos el valor esperado de la función g sobre la variable aleatoria uniforme en (0, 1), habremos obtenido el valor buscado:

$$\theta = E\left[g(U)\right]$$

Integración

Como sabemos que cada Ui es uniforme e independiente en (0, 1), decimos que, **Por la ley de los números grandes**, podemos estimar theta como sigue:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{g(U_i)}{k} \to E[g(U)] = \theta \quad \text{as } k \to \infty$$

Integración

$$\theta = \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\theta = \int_0^1 g(a + [b-a]\,y)(b-a)\,dy$$
$$= \int_0^1 h(y)\,dy$$

$$h(y) = (b-a)g(a+[b-a]\,y)$$

$$\theta = \int_0^\infty g(x)\,dx$$

$$h(y) = \frac{g\left(\frac{1}{y} - 1\right)}{y^2}$$

$$\theta = \int_0^1 h(y)\,dy$$

Integración

Cuando g es multidimensional, las propiedades descritas anteriormente siguen cumpliéndose:

$$\theta = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

$$\theta = E\left[g(U_1, \ldots, U_n)\right]$$

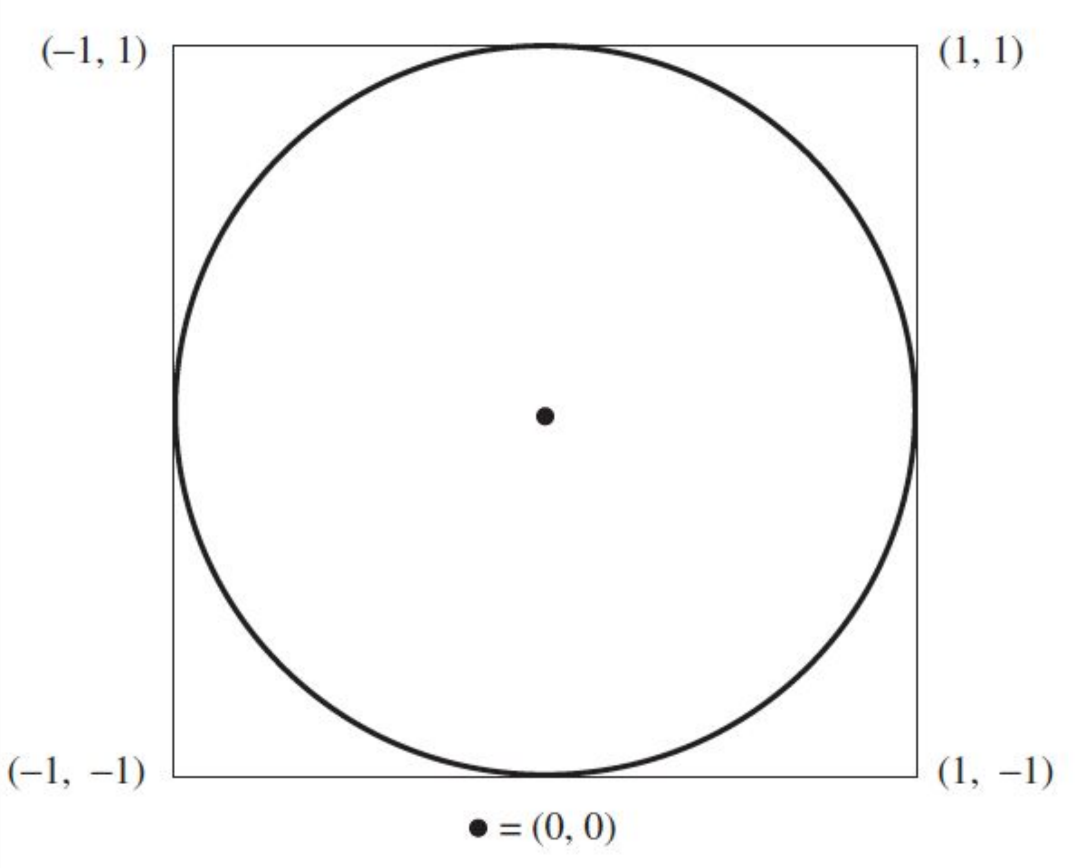
$$\sum_{i=1}^{k} g(U_1^i, \ldots, U_n^i)/k$$

Aproximación de PI

Vamos a estimar PI usando números aleatorios.

Considere el círculo unitario centrado en (0, 0) (le llamaremos C1), considere que este círculo está inscrito en el cuadrado unitario centrado en (0, 0) (**ver siguiente slide**).

¿Cuál es la probabilidad que un punto aleatorio, uniformemente generado esté dentro del círculo?


(–1, 1)
(1, 1)
(–1, –1)
(1, –1)
● = (0, 0)

Aproximación de PI

P({(X, Y) esté en el círculo }) =
área circulo / area cuadrado =
$PI*(1^2) / (2^2) =$ **PI / 4**

X y Y están uniformemente distribuidas en (-1, 1), sabemos que:
f(x) = 1/(1 - (-1)) = 1/2, y si las generamos independientes, sabemos que:

f(x, y) = 1/4, **-1 <= x <= 1**, **-1 <= y <= 1**

Aproximación de PI

Dado un (x, y), ¿cómo sabemos si está dentro del C1?

$$x^2 + y^2 <= 1$$

Definamos una tercera variable aleatoria para medir si un punto aleatorio está dentro del C1:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{if } X^2 + Y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Aproximación de PI

Sabemos que:

$$E[I] = P(X^2 + Y^2 <= 1) = \mathbf{PI/4}$$

y por lo tanto, si nosotros simulamos I (es decir, simulamos independientemente X y Y), y estimamos su valor esperado, podremos calcular:

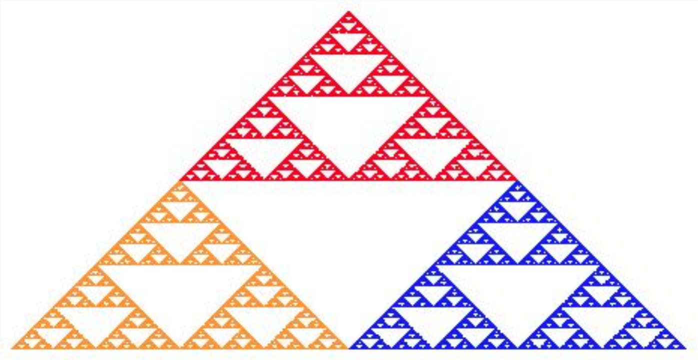
$$\mathbf{PI = 4 * E[I]}$$

Juegos de Caos

Un juego de caos es un algoritmo no determinístico usado para generar fractales, que consiste en partir de un punto dado, y dar saltos no determinísticos (regidos por una probablidad) hacia otros puntos en el plano.

Los saltos generalmente se hace utilizando un sistema de funciones iterativas. En cada punto evaluamos cuál de las funciones es la que se evaluará para el siguiente punto (simulamos una variable aleatoria discreta)

Juegos de caos (fractales)



Recursos para distraerse

- https://www.youtube.com/watch?v=SxP30euw3-0
- https://www.youtube.com/watch?v=sMb00lz-IfE
- https://www.youtube.com/watch?v=9rIy0xY99a0
- https://www.youtube.com/watch?v=noDSyLzVz2g