Explicación de Transformación

$$La\ integral\ original\ es:$$

$$\theta = \int_0^{\infty} \int_0^{x} e^{-(x+y)}\, dy\, dx$$

Primera integral

Lo primero es integrar la integral respecto a dy, que es la interna. Para esto, aplicaciones transformaciones con las siguientes ecuaciones:

$$\theta = \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\theta = \int_0^1 g(a + [b-a]\, y)(b-a)\, dy$$
$$= \int_0^1 h(y)\, dy$$

$$h(y) = (b-a) g(a+[b-a]\, y)$$

$$g(x) = \int_0^x e^{-(x+y)}\, dy \quad donde\ a = 0\ y\ b = x$$

$$h(z) = (b-a) * g(a + [b-a] * z)$$

$$h(z) = (b-a) * e^{-(x+(a+[b-a]*z))}$$

$$h(z) = (x-0) * e^{-\left(x+(0+[x-0]*z)\right)}$$

$$h(z) = xe^{-x-xz}$$

$$h(z) = xe^{-x(z+1)}$$

$$Luego\ sustituimos\ en\ la\ integral\ con\ límites\ nuevos$$

$$h(z) = \int_0^1 xe^{-x(z+1)}\, dz$$

$$El\ resultado\ de\ la\ integral\ definida\ es:$$

$$-e^{-2x} + e^{-x}$$

Segunda integral

Ahora, hacemos la integral externa. Pero con el nuevo valor que encontramos.

$$g(x) = \int_0^\infty -e^{-2x} + e^{-x}\, dx$$

Aplicamos las transformaciones con las siguientes equivalencias.

$$\theta = \int_0^\infty g(x)\, dx$$

$$h(y) = \frac{g\left(\frac{1}{y} - 1\right)}{y^2}$$

$$\theta = \int_0^1 h(y)\, dy$$

$$h(y) = \frac{-e^{-2\left(\frac{1}{y}-1\right)} + e^{-\left(\frac{1}{y}-1\right)}}{y^2}$$

La integral resultante sería

$$\int_0^1 \frac{-e^{-2\left(\frac{1}{y}-1\right)} + e^{-\left(\frac{1}{y}-1\right)}}{y^2}\, dy$$

Y el resultado es:

Definite integral:

Step-by-step solution

$$\int_0^1 \frac{-e^{-2(-1+1/x)} + e^{-(-1+1/x)}}{x^2}\, dx = \frac{1}{2} = 0.5$$

Visual representation of the integral: