Отчет по лабораторной работе №6

Задача об эпидемии

Дмитрий Сергеевич Шестаков

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Реализовать на языках программирования Julia и Openmodelica задачу об эпидемии. Улучшить навыки использования пакета DifferentialEquations.

2 Задание

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 10100$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 66$, а число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 26$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае [1]:

1) если $I(0) <= I^*$
2) если $I(0) > I^*$

3 Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы:

- Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$.
- Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$.
- Третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, I(t) > I^* \\ 0, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, I(t) > I^* \\ -\beta I, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая [2]:

- $I(0) \leq I^*$
- $I(0) > I^*$

4 Выполнение лабораторной работы

1. На первом этапе смоедлировали задачу, используя язык программирования Julia. Получили следующий код:

```
a = 0.01
b = 0.02
N = 10100
I_0 = 66
R_0 = 26

S_0 = N - I_0 - R_0

# I < I*
function ode_fn_1(du, u, p, t)
    x,y,z = u
    du[1] = 0*x
    du[2] = -b*y
    du[3] = b*y
end

t_begin = 0.0
t_end = 200
tspan = (t_begin, t_end)
```

```
prob1 = ODEProblem(ode_fn_1, [S_0, I_0, R_0], tspan)

sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)
x_sol_1 = [u[1] for u in sol1.u]
y_sol_1 = [u[2] for u in sol1.u]
z_sol_1 = [u[3] for u in sol1.u]

plot(sol1.t, x_sol_1,
    linewidth = 2,
    title = "Графики числа S(t), I(t), R(t) при I < I*",
    label = "S(t)",
    legend = true)
plot!(sol1.t, y_sol_1,
     linewidth = 2,
     label = "I(t)",
     legend = true)
plot!(sol1.t, z_sol_1,
     linewidth = 2,
     label = "R(t)",
     legend = true)
savefig("report/image/1.png")

function ode_fn_2(du, u, p, t)
    x,y,z = u
    du[1] = -a*x
    du[2] = a*x-b*y
    du[3] = b*y
end
```

```
prob2 = ODEProblem(ode_fn_2, [S_0, I_0, R_0], tspan)

sol2 = solve(prob2, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)
x_sol_2 = [u[1] for u in sol2.u]
y_sol_2 = [u[2] for u in sol2.u]
z_sol_2 = [u[3] for u in sol2.u]

plot(sol2.t, x_sol_2,
    linewidth = 2,
    title = "Графики числа S(t), I(t), R(t) при I > I*",
    label = "S(t)",
    legend = true)
plot!(sol2.t, y_sol_2,
     linewidth = 2,
     label = "I(t)",
     legend = true)
plot!(sol2.t, z_sol_2,
     linewidth = 2,
     label = "R(t)",
     legend = true)
savefig("report/image/3.png")
```

В результате работы программы получили следующие результаты

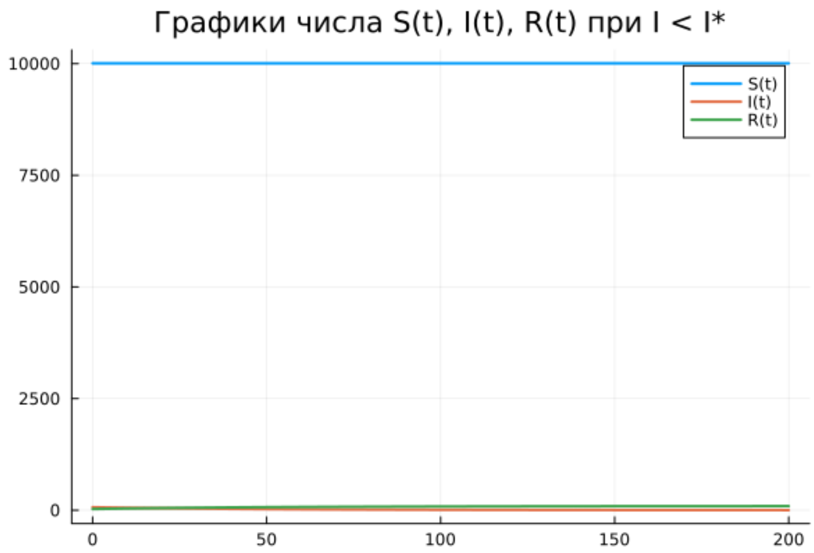

Рис. 4.1: Графики S(t), I(t), R(t) при $I \leq I^*$

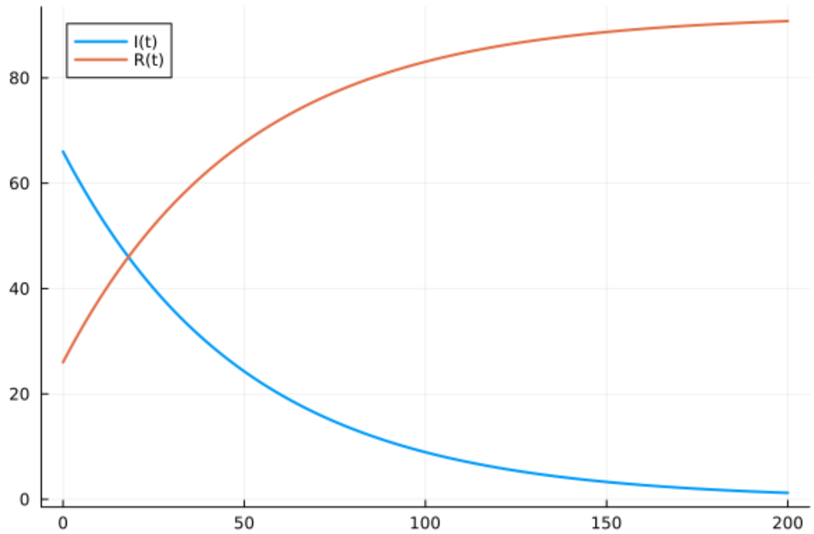

Рис. 4.2: Графики I(t), R(t) при $I \leq I^*$

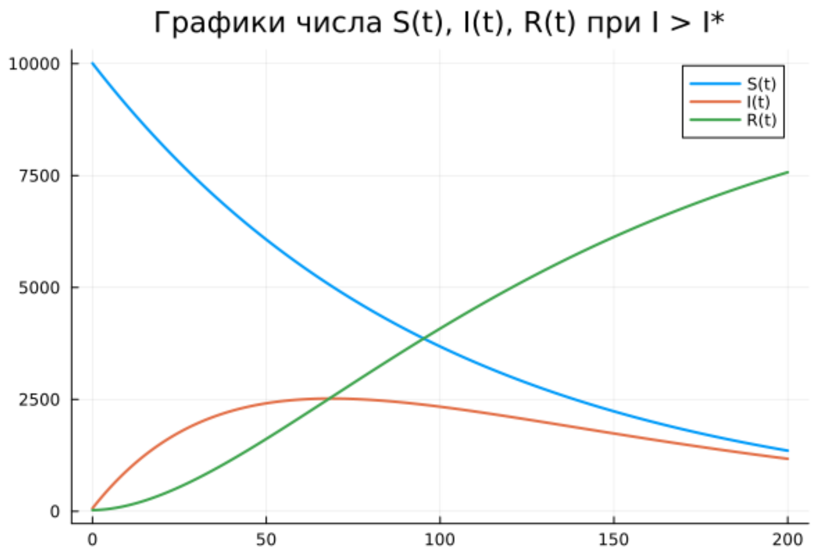

Рис. 4.3: Графики S(t), I(t), R(t) при $I > I^*$

2. На втором этапе смоделировали задачу в среде моделирования Openmodelica. Получили следующий код:

```
model Predator
  Real x, y, t, z;
initial equation
  x = 10008;
  y = 66;
  z = 26;
equation
  der(t) = 1;
  der(x) = 0*x;
  der(y) = -0.02*y;
  der(z) = 0.02*y;
end;

model Predator
  Real x, y, t, z;
```

```
initial equation
  x = 10008;
  y = 66;
  z = 26;
equation
  der(t) = 1;
  der(x) = -0.01*x;
  der(y) = 0.01*x-0.02*y;
  der(z) = 0.02*y;
end;
```

В результате работы программы получили следующие результаты

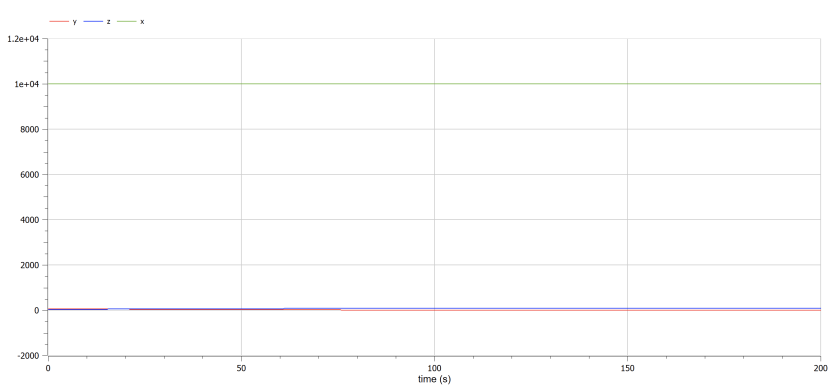

Рис. 4.4: Графики S(t), I(t), R(t) при $I \leq I^*$(OM)

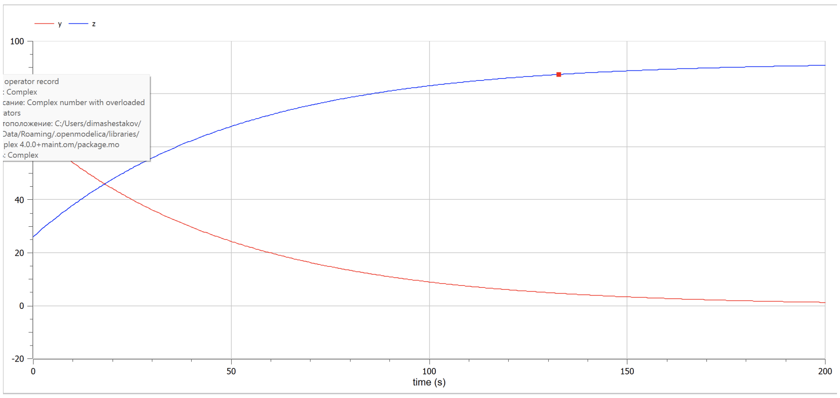

Рис. 4.5: Графики I(t), R(t) при $I \leq I^*()$

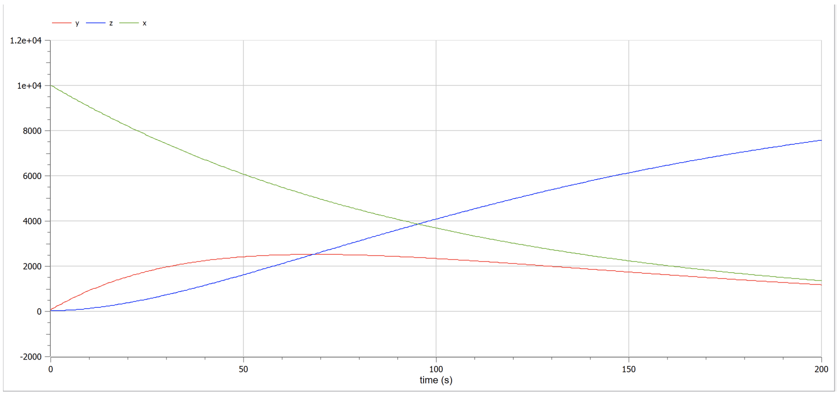

Рис. 4.6: Графики S(t), I(t), R(t) при $I > I^*$(OM)

5 Выводы

Программно реализовали задачу об эпидемии на языках программирования Julia и Openmodelica. Получили графическое отображение изменений числа здоровых, заболевших, с иммунитетом.

Список литературы

1. Кулябов Д.С. Задание к лабораторной работе №6 [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971579/mod_resource/content/2/Задание%20к%20лабораторной%20работе%20№%207%20%283%29.pdf.
2. Кулябов Д.С. Задача об эпидемии [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971578/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%205.pdf.