

Отчет по лабораторной работе №5

Модель хищник-жертва

Дмитрий Сергеевич Шестаков

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Теоретическое введение	7
4	Выполнение лабораторной работы	9
5	Выводы	14
	Список литературы	15

Список иллюстраций

4.1	Зависимость числа хищников от числа жертв(Julia)	11
4.2	Изменение числа хищников(Julia)	11
4.3	Изменение числа жертв(Julia)	12
4.4	Зависимость числа хищников от числа жертв(OM)	13
4.5	Изменение числа хищников(OM)	13
4.6	Изменение числа жертв(OM)	13

Список таблиц

1 Цель работы

Реализовать на языках программирования Julia и Openmodelica модель Лотки-Вольтерры, также известную как модель взаимодействия “хищник-жертва”.

2 Задание

В лесу проживают x число волков, питающихся зайцами, число которых в этом же лесу y . Пока число зайцев достаточно велико, для прокормки всех волков, численность волков растет до тех пор, пока не наступит момент, что корма перестанет хватать на всех. Тогда волки начнут умирать, и их численность будет уменьшаться. В этом случае в какой-то момент времени численность зайцев снова начнет увеличиваться, что повлечет за собой новый рост популяции волков. Такой цикл будет повторяться, пока обе популяции будут существовать. Помимо этого, на численность стаи влияют болезни и старение. Данная модель описывается следующим уравнением:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.59 * x(t) + 0.058 * x(t) * y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.57 * y(t) - 0.056 * x(t) * y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8$, $y_0 = 18$. Найти стационарное состояние системы. [1]

3 Теоретическое введение

Модель Лотки — Вольтерры (модель Лотки — Вольтерра) — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов (Лотка, 1925; Вольтерра 1926), которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга.

Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами.

В математической форме предложенная система имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta(y))x$$

$$\frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y$$

где x - количество жертв, y - количество хищников, t - время, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами.

Рассматривается закрытый ареал, в котором обитают два вида — травоядные («жертвы») и хищники. Предполагается, что животные не иммигрируют и не эмигрируют, и что еды для травоядных животных имеется с избытком. Тогда уравнение изменения количества жертв (без учёта хищников) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

где α - коэффициент рождаемости жертв, x - величина популяции жертв, $\frac{dx}{dt}$ -

скорость прироста популяции жертв.

Пока хищники не охотятся, они вымирают, следовательно, уравнение для численности хищников (без учёта численности жертв) принимает вид:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y$$

где γ - коэффициент убыли хищников, y - величина популяции хищников, $\frac{dy}{dt}$ - скорость прироста популяции хищников.

При встречах хищников и жертв (частота которых прямо пропорциональна величине xy) происходит убийство жертв с коэффициентом β , сытые хищники способны к воспроизводству с коэффициентом δ . С учетом этого, система уравнений модели такова:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta(y))x$$

$$\frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y$$

Для положения равновесия $\bar{x} > 0, \bar{y} > 0$ изменение численностей популяции равно нулю. Следовательно:

$$\alpha\bar{x} - \beta\bar{x}\bar{y} = 0$$

$$-\gamma\bar{y} + \delta\bar{x}\bar{y} = 0$$

из чего следует, что точка равновесия, вокруг которой происходят колебания, определяется следующим образом [2]:

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta}$$

$$\bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}$$

4 Выполнение лабораторной работы

1. На первом этапе смоделировали задачу, используя язык программирования Julia. Получили следующий код:

```
using Plots
using DifferentialEquations

function ode_fn_1(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -0.59*x + 0.058*x*y
    du[2] = 0.57*y - 0.056*x*y
end

t_begin = 0.0
t_end = 44
tspan = (t_begin, t_end)

#Initial condition
x_init = 8
y_init = 18

prob1 = ODEProblem(ode_fn_1, [x_init, y_init], tspan)

sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)
```

```

x_sol_1 = [u[1] for u in sol1.u]
y_sol_1 = [u[2] for u in sol1.u]

plot(x_sol_1, y_sol_1,
      linewidth = 2,
      title = "Зависимость числа хищников от числа жертв",
      xaxis = "x",
      yaxis = "y",
      legend = false)
savefig("report/image/x_y.png")

plot(sol1.t, x_sol_1,
      linewidth = 2,
      title = "Изменение числа хищников",
      xaxis = "t",
      yaxis = "x(t)",
      label = "Число хищников x(t)",
      legend = true)
savefig("report/image/x.png")

plot(sol1.t, y_sol_1,
      linewidth = 2,
      title = "Изменение числа хищников",
      xaxis = "t",
      yaxis = "y(t)",
      label = "Число хищников y(t)",
      legend = true)
savefig("report/image/y.png")

```

В результате работы программы получили следующие результаты

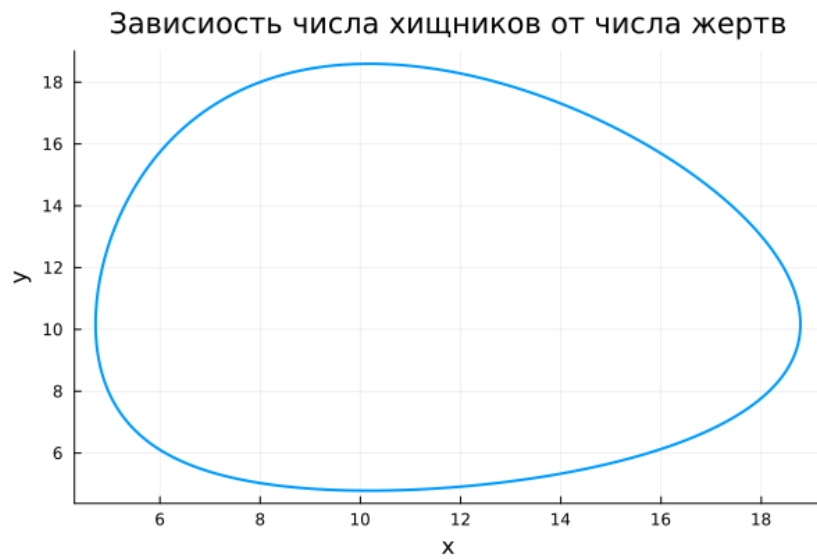


Рис. 4.1: Зависимость числа хищников от числа жертв(Julia)

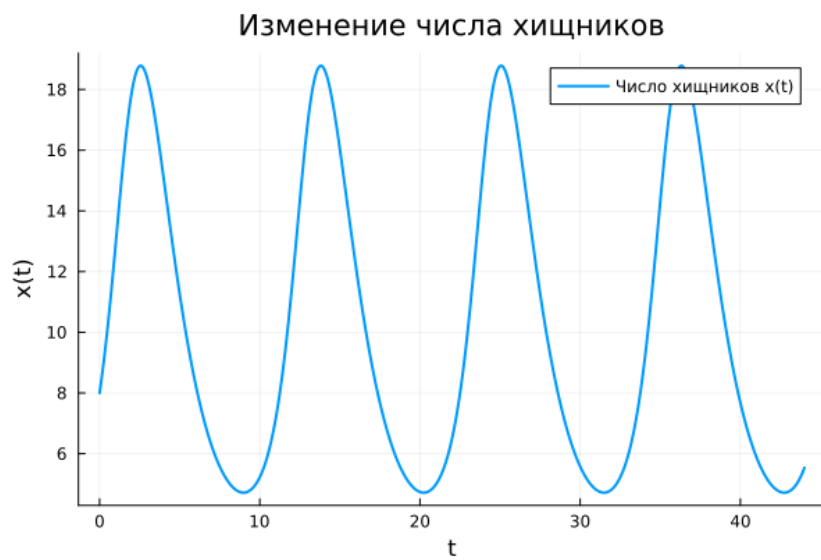


Рис. 4.2: Изменение числа хищников(Julia)

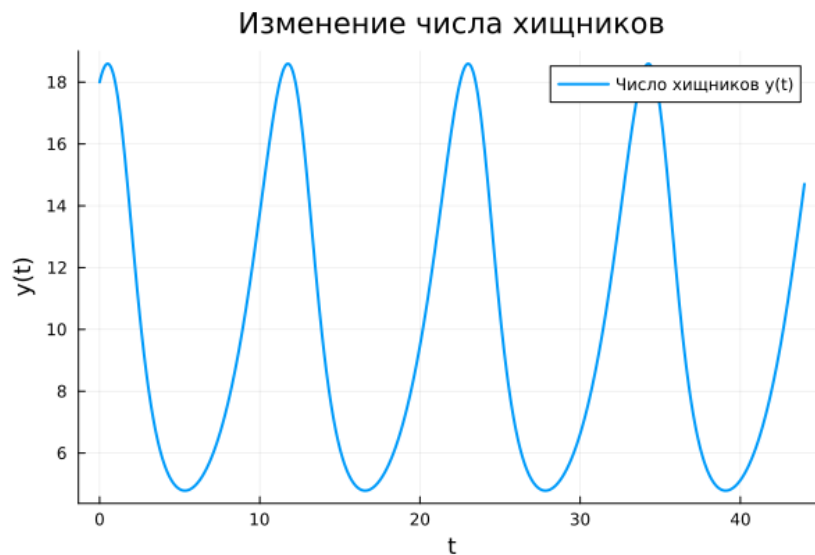


Рис. 4.3: Изменение числа жертв(Julia)

2. На втором этапе смоделировали задачу в среде моделирования Openmodelica. Получили следующие код:

```
model Predator
  Real x, y, t;
initial equation
  x = 8;
  y = 18;
equation
  der(t) = 1;
  der(x) = -0.59*x + 0.058*x*y;
  der(y) = 0.57*y - 0.056*x*y;
end;
```

В результате работы программы получили следующие результаты

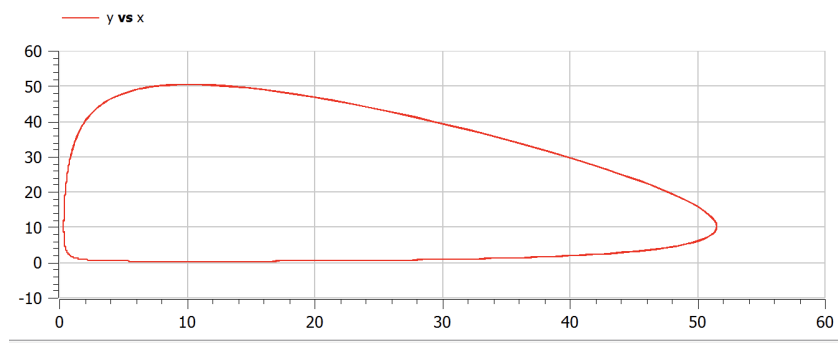


Рис. 4.4: Зависимость числа хищников от числа жертв(ОМ)

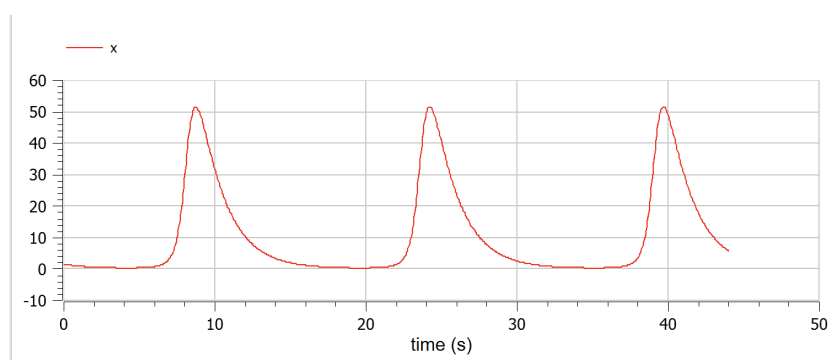


Рис. 4.5: Изменение числа хищников(ОМ)

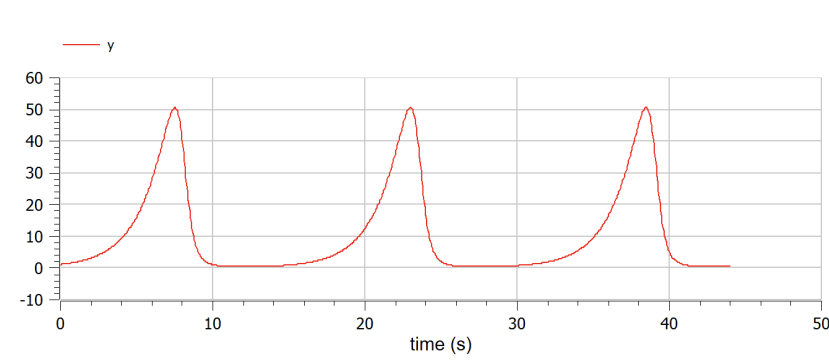


Рис. 4.6: Изменение числа жертв(ОМ)

5 Выводы

Программно реализовали модель Лотки-Вольтерры, также известную как модель взаимодействия “хищник-жертва”, на языках программирования Julia и Openmodelica. Получили графическое отображение зависимости числа хищников от числа жертв, изменения числа хищников, а также изменение числа жертв.

Список литературы

1. Кулябов Д.С. Модель хищник-жертва [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971574/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%204.pdf.
2. Википедия. Модель Лотки — Вольтерры [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Модель_Лотки_—_Вольтерры.