Отчет по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Дмитрий Сергеевич Шестаков

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

- Научиться решать линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.
- Построить модель линейного гармонического осциллятора без затухания/ с затуханием/ с действием внешней силы.
- Построить фазовые портреты всех моделей.
- Отработать навыки решения систем дифференциальных уравнений на языке Julia, Openmodelica

2 Задание

1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания.
2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.
3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

3 Теоретическое введение

Гармонический осциллятор - система, которая при выведении ее из положения равновесия испытывает действие возращающей силы F, пропорциональной смещению x:

$$F = -kx$$

Если F — единственная сила, действующая на систему, то систему называют **простым** или **консервативным гармоническим осциллятором**. Свободные колебания такой системы представляют собой периодическое движение около положения равновесия (гармонические колебания). Частота и амплитуда при этом постоянны, причём частота не зависит от амплитуды.

Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения (вязкое трение), то такую систему называют **затухающим** или **диссипативным осциллятором**. Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение — синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой. Частота свободных колебаний затухающего осциллятора оказывается несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения.

Если осциллятор предоставлен сам себе, то говорят, что он совершает **свободные колебания**. Если же присутствует внешняя сила (зависящая от времени), то говорят, что осциллятор испытывает **вынужденные колебания**.

Механическими примерами гармонического осциллятора являются математический маятник (с малыми углами отклонения), груз на пружине, торсионный маятник и акустические системы. Среди немеханических аналогов гармонического осциллятора можно выделить электрический гармонический осциллятор. [1]

Для *консервативного гармонического осциллятора*, используя второй закон Ньютона, имеем [2]:

$$F = -kx \iff a = -\frac{k}{m}x$$

Обозначим ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$ и подставим

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Для *затухающего гармонического осциллятора*, используя второй закон Ньютона, имеем [2]:

$$F = -kx - \alpha v \iff a = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}v$$

Обозначим ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$, $2\gamma = \frac{\alpha}{m}$ и подставим

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x + 2\gamma\dot{x} = 0$$

Для *вынужденных колебаний*, используя второй закон Ньютона, имеем [1]:

$$ma = -kx + F_0 cos(\Omega t) \iff a = -\frac{k}{m} + \frac{F_0}{m} cos(\Omega t)$$

Обозначим ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$, $\Phi_0 = \frac{F_0}{m}$ и подставим

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = \Phi_0 cos(\Omega t)$$

Для решения данных дифференциальных уравнений будем составлять систему, в которой обозначим $\dot{x}$ за y, будем оставлять без изменений.

Например, для затухающих гармонических колебаний имеем:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -{\omega_0}^2 x - 2\gamma y \end{cases}$$

Фазовая плоскость — координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка.

Каждая точка фазовой плоскости отражает одно некоторое состояние системы и называется *фазовой, изображающей или представляющей* точкой

Изменение состояния системы отображается на фазовой плоскости движением этой точки. След от движения изображающей точки называется **фазовой траекторией**.

Полная совокупность всевозможных различных фазовых траекторий — это **фазовый портрет**.

В нашей задаче на оси абсцисс фазовой плоскости откладываются значения параметра x, например, величина отклонения от равновесия; на оси ординат откладываются значения первой производной x по времени(y) — скорости перемещения. [3]

4 Выполнение лабораторной работы

1. Построим решение уравнения гармонического осциллятора без затухания. В нашем случае оно имеет вид

$$\ddot{x} + 2x = 0$$

Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 1.5 \\ y(0) = 1.1 \end{cases}$$

Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

```
unction ode_fn_1(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = y
    du[2] = -2*x
end
```

```julia
t_begin = 0.0
t_end = 44
tspan = (t_begin, t_end)

#Initial condition
x_init = 1.5
y_init = 1.1

prob1 = ODEProblem(ode_fn_1, [x_init, y_init], tspan)

sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)
x_sol_1 = [u[1] for u in sol1.u]
y_sol_1 = [u[2] for u in sol1.u]

plot(x_sol_1, y_sol_1,
    linewidth = 2,
    title = "Фазовый портрет №1",
    xaxis = "x",
    yaxis = "y",
    legend = false)
savefig("report/image/First.png")
```

Получим фазовый портрет

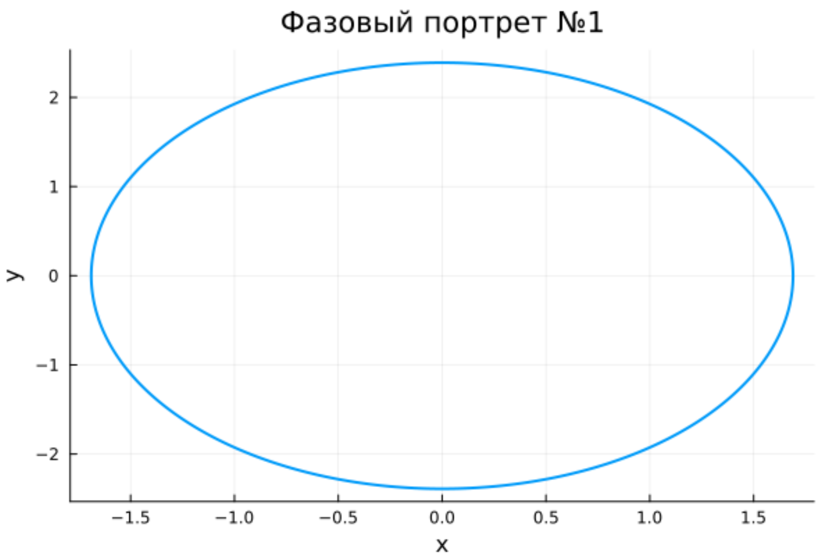

Рис. 4.1: Фазовый портрет №1(Julia)

Теперь проделаем те же самые действия в Openmodelica

```
model Oscilliator
  Real x, y, t;
initital equation
  x = 1.5;
  y = 1.1;
  t = 0;
equation
  der(t) = 1;
  der(x) = y;
  der(y) = -2*x;
end
```

Получим фазовый портрет

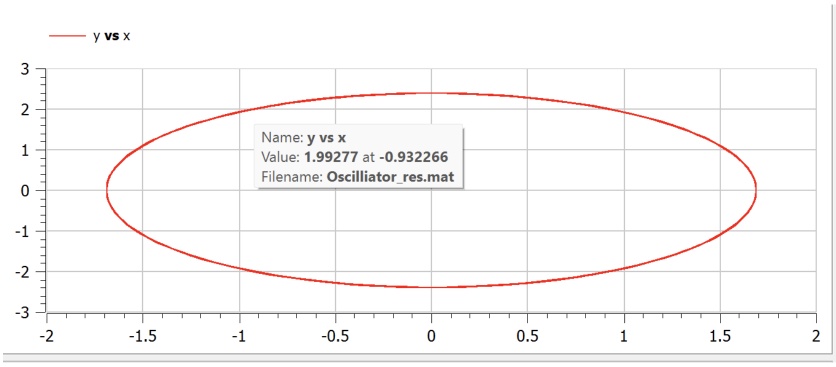

Рис. 4.2: Фазовый портрет №1(OM)

Как выидим, фазовые портреты полученнные на Julia и Openmodelica, изображенные на рис. 4.1 и рис. 4.2, совпадают.

2. Построим решение уравнения для колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. В нашем случае оно имеет вид

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 0$$

Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -3y - 3x \end{cases}$$

Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 1.5 \\ y(0) = 1.1 \end{cases}$$

Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

```
function ode_fn_2(du, u, p, t)
```

```
    x, y = u
    du[1] = y
    du[2] = -3*x - 3*y
end

t_begin = 0.0
t_end = 44
tspan = (t_begin, t_end)

#Initial condition
x_init = 1.5
y_init = 1.1

prob1 = ODEProblem(ode_fn_2, [x_init, y_init], tspan)

sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)
x_sol_1 = [u[1] for u in sol1.u]
y_sol_1 = [u[2] for u in sol1.u]

plot(x_sol_1, y_sol_1,
    linewidth = 2,
    title = "Фазовый портрет №2",
    xaxis = "x",
    yaxis = "y",
    legend = false)

savefig("report/image/Second.png")
```

Получим фазовый портрет

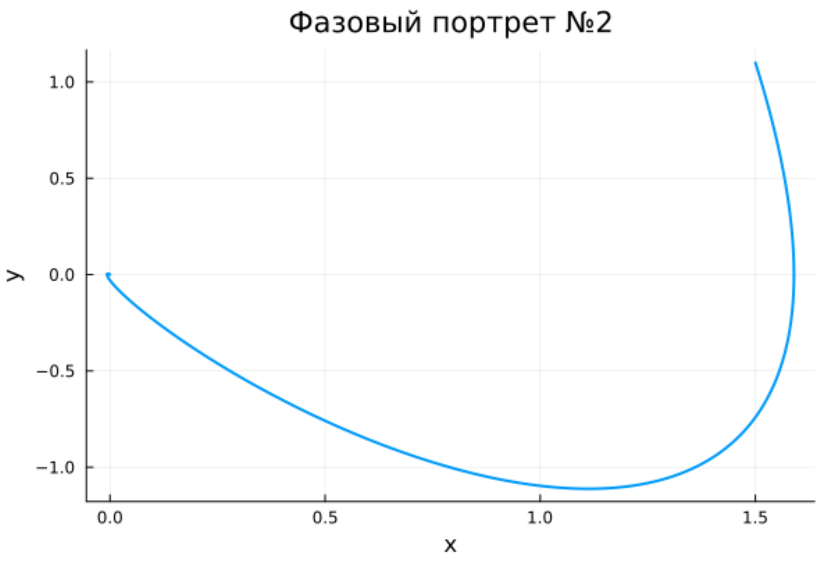

Рис. 4.3: Фазовый портрет №2(Julia)

Теперь проделаем те же самые действия в Openmodelica

```
model Oscilliator
  Real x, y, t;
initital equation
  x = 1.5;
  y = 1.1;
  t = 0;
equation
  der(t) = 1;
  der(x) = y;
  der(y) = -3*x - 3*y;
end
```

Получим фазовый портрет

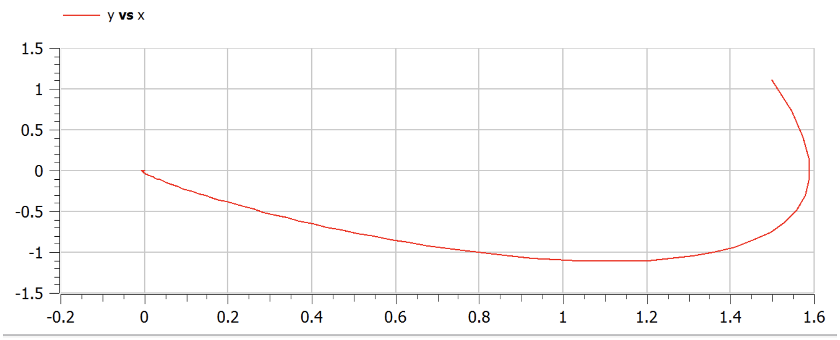

Рис. 4.4: Фазовый портрет №2(OM)

Как выидим, фазовые портреты полученнные на Julia и Openmodelica, изображенные на рис. 4.3 и рис. 4.4, совпадают.

3. Построим решение уравнения для колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. В нашем случае оно имеет вид

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = sin(4*t)$$

Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -3y - 3x + sin(4*t) \end{cases}$$

Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 1.5 \\ y(0) = 1.1 \end{cases}$$

Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

```
function ode_fn_3(du, u, p, t)
```

```
    x, y = u
    du[1] = y
    du[2] = -3*x - 3*y - sin(4*t)
end

t_begin = 0.0
t_end = 44
tspan = (t_begin, t_end)

#Initial condition
x_init = 1.5
y_init = 1.1

prob1 = ODEProblem(ode_fn_3, [x_init, y_init], tspan)

sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)
x_sol_1 = [u[1] for u in sol1.u]
y_sol_1 = [u[2] for u in sol1.u]

plot(x_sol_1, y_sol_1,
    linewidth = 2,
    title = "Фазовый портрет №3",
    xaxis = "x",
    yaxis = "y",
    legend = false)
savefig("report/image/Third.png")
```

Получим фазовый портрет

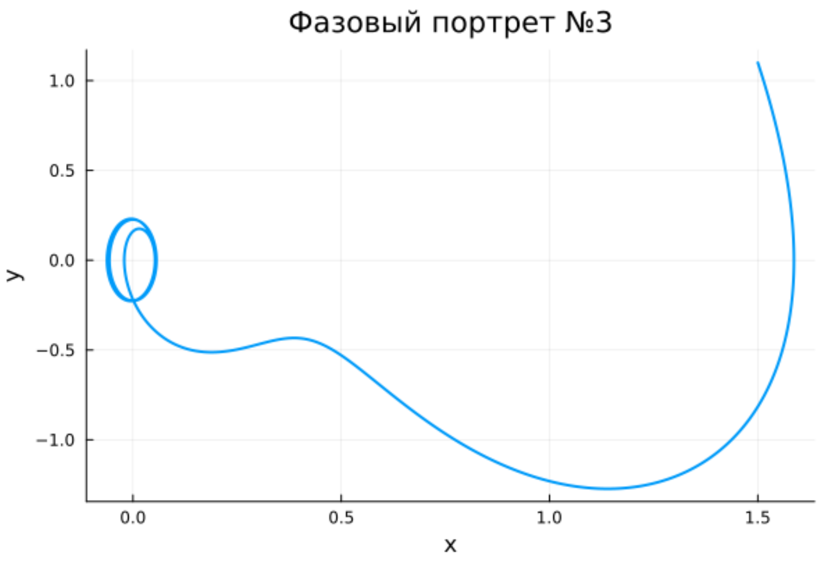

Рис. 4.5: Фазовый портрет №3(Julia)

Теперь проделаем те же самые действия в Openmodelica

```
model Oscilliator
  Real x, y, t;
initital equation
  x = 1.5;
  y = 1.1;
  t = 0;
equation
  der(t) = 1;
  der(x) = y;
  der(y) = -4*x - 4*y + sin(4*t);
end
```

Получим фазовый портрет

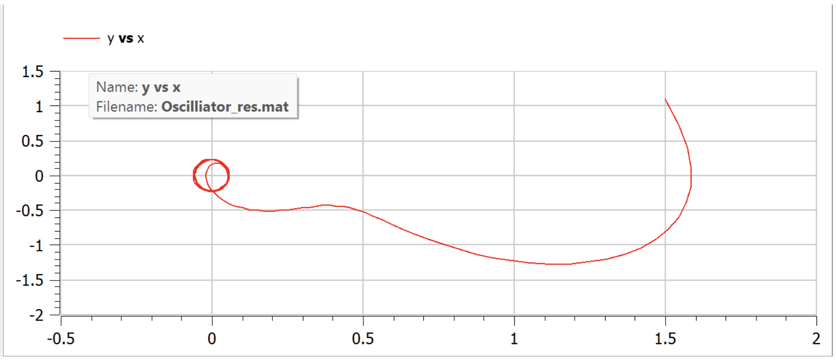

Рис. 4.6: Фазовый портрет №3(OM)

Как выидим, фазовые портреты полученнные на Julia и Openmodelica, изображенные на рис. 4.5 и рис. 4.6, совпадают.

5 Ответы на вопросы

1. Простейшая модель гармонических колебаний:

$$x = A * cos(\omega t + \phi_0)$$

2. Осциллятор - система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

3. Модель математического маятника:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} sin(\theta) = 0$$

4. Для перехода от дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка, необходимо в уравнении заменить все производные первого порядка на новую переменную, а также записать дополнительное уравнения, в котором будет обозначено, что первая производная равна новой переменной

5. **Фазовый портрет** — это геометрическое представление траекторий динамической системы на фазовой плоскости

6. **Фазовая траектория** - кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

6 Выводы

- Научились решать линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.
- Построиили модель линейного гармонического осциллятора без затухания/ с затуханием/ с действием внешней силы.
- Построили фазовые портреты всех моделей. Увидели, что при реализации на Julia и Openmodelica портреты совпадают.
- Отработали навыки решения систем дифференциальных уравнений на языке Julia, Openmodelica

Список литературы

1. Википедия. Гармонический осциллятор [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонический_осциллятор.
2. Кулябов Д.С. Модель гармонических колебаний [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971570/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%203.pdf.
3. Википедия. Фазовая плоскость [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Фазовая_плоскость.