Отчет по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Дмитрий Сергеевич Шестаков

Содержание

# 1 Цель работы

* Научиться решать линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.
* Построить модель линейного гармонического осциллятора без затухания/ с затуханием/ с действием внешней силы.
* Построить фазовые портреты всех моделей.
* Отработать навыки решения систем дифференциальных уравнений на языке Julia, Openmodelica

# 2 Задание

1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания.
2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.
3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

# 3 Теоретическое введение

**Гармонический осциллятор** - система, которая при выведении ее из положения равновесия испытывает действие возращающей силы , пропорциональной смещению :

Если — единственная сила, действующая на систему, то систему называют **простым** или **консервативным гармоническим осциллятором**. Свободные колебания такой системы представляют собой периодическое движение около положения равновесия (гармонические колебания). Частота и амплитуда при этом постоянны, причём частота не зависит от амплитуды.

Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения (вязкое трение), то такую систему называют **затухающим** или **диссипативным осциллятором**. Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение — синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой. Частота свободных колебаний затухающего осциллятора оказывается несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения.

Если осциллятор предоставлен сам себе, то говорят, что он совершает **свободные колебания**. Если же присутствует внешняя сила (зависящая от времени), то говорят, что осциллятор испытывает **вынужденные колебания**.

Механическими примерами гармонического осциллятора являются математический маятник (с малыми углами отклонения), груз на пружине, торсионный маятник и акустические системы. Среди немеханических аналогов гармонического осциллятора можно выделить электрический гармонический осциллятор. [1]

Для *консервативного гармонического осциллятора*, используя второй закон Ньютона, имеем [2]:

Обозначим и подставим

Для *затухающего гармонического осциллятора*, используя второй закон Ньютона, имеем [2]:

Обозначим , и подставим

Для *вынужденных колебаний*, используя второй закон Ньютона, имеем [1]:

Обозначим , и подставим

Для решения данных дифференциальных уравнений будем составлять систему, в которой обозначим за , будем оставлять без изменений.

Например, для затухающих гармонических колебаний имеем:

**Фазовая плоскость** — координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка.

Каждая точка фазовой плоскости отражает одно некоторое состояние системы и называется *фазовой, изображающей или представляющей* точкой

Изменение состояния системы отображается на фазовой плоскости движением этой точки. След от движения изображающей точки называется **фазовой траекторией**.

Полная совокупность всевозможных различных фазовых траекторий — это **фазовый портрет**.

В нашей задаче на оси абсцисс фазовой плоскости откладываются значения параметра , например, величина отклонения от равновесия; на оси ординат откладываются значения первой производной по времени() — скорости перемещения. [3]

# 4 Выполнение лабораторной работы

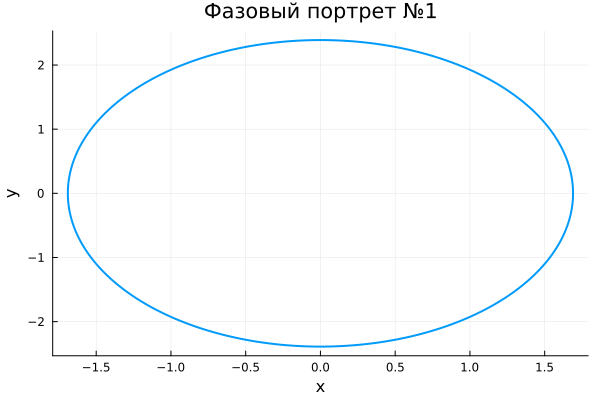
1. Построим решение уравнения гармонического осциллятора без затухания. В нашем случае оно имеет вид

* Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:
* Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:

Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

unction ode\_fn\_1(du, u, p, t)  
 x, y = u  
 du[1] = y  
 du[2] = -2\*x  
end  
  
t\_begin = 0.0  
t\_end = 44  
tspan = (t\_begin, t\_end)  
  
#Initial condition  
x\_init = 1.5  
y\_init = 1.1  
  
prob1 = ODEProblem(ode\_fn\_1, [x\_init, y\_init], tspan)  
  
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)  
x\_sol\_1 = [u[1] for u in sol1.u]  
y\_sol\_1 = [u[2] for u in sol1.u]  
  
plot(x\_sol\_1, y\_sol\_1,   
 linewidth = 2,  
 title = "Фазовый портрет №1",  
 xaxis = "x",  
 yaxis = "y",  
 legend = false)  
savefig("report/image/First.png")

Получим фазовый портрет

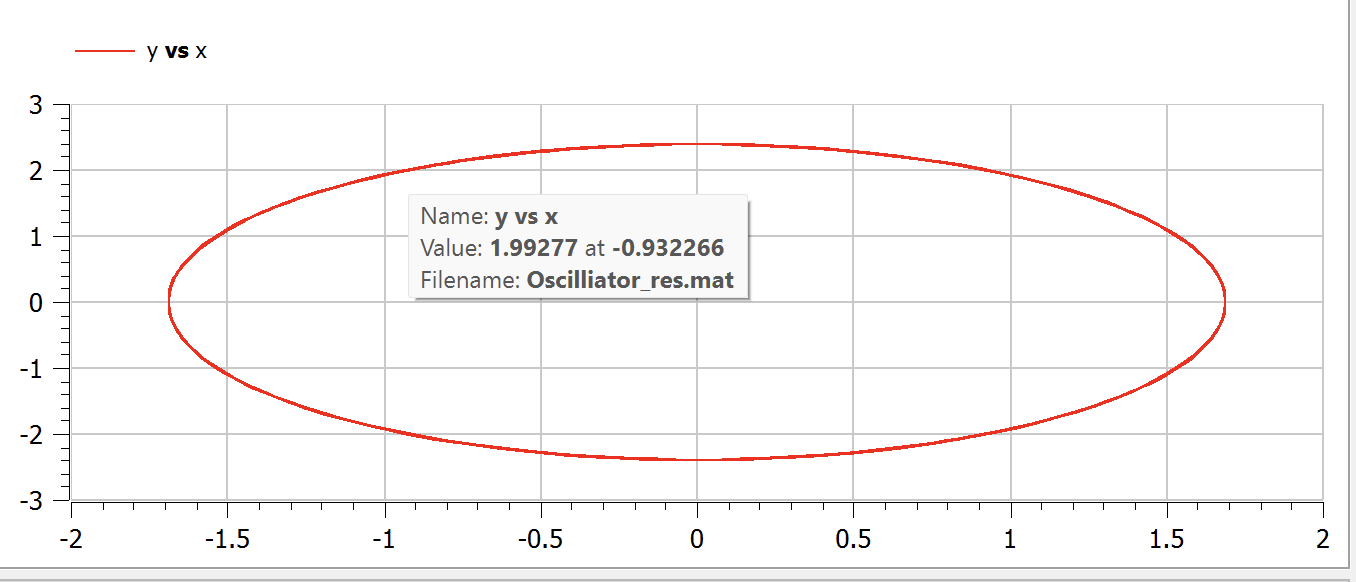


Фазовый портрет №1(Julia)

Теперь проделаем те же самые действия в Openmodelica

model Oscilliator  
 Real x, y, t;  
initital equation  
 x = 1.5;  
 y = 1.1;  
 t = 0;  
equation  
 der(t) = 1;  
 der(x) = y;  
 der(y) = -2\*x;  
end

Получим фазовый портрет



Фазовый портрет №1(OM)

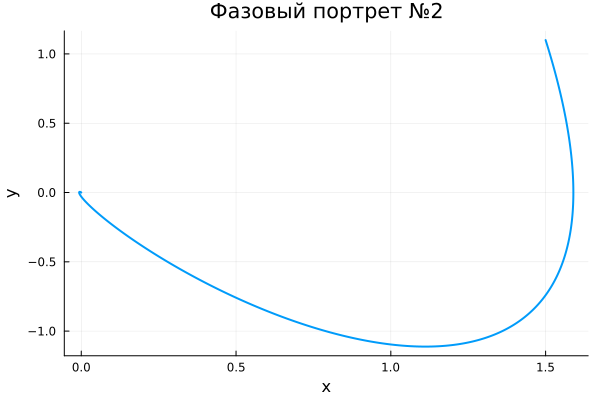
Как выидим, фазовые портреты полученнные на Julia и Openmodelica, изображенные на рис. ?? и рис. ??, cовпадают.

1. Построим решение уравнения для колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. В нашем случае оно имеет вид

* Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:
* Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:
* Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

function ode\_fn\_2(du, u, p, t)  
 x, y = u  
 du[1] = y  
 du[2] = -3\*x - 3\*y   
end  
  
t\_begin = 0.0  
t\_end = 44  
tspan = (t\_begin, t\_end)  
  
#Initial condition  
x\_init = 1.5  
y\_init = 1.1  
  
prob1 = ODEProblem(ode\_fn\_2, [x\_init, y\_init], tspan)  
  
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)  
x\_sol\_1 = [u[1] for u in sol1.u]  
y\_sol\_1 = [u[2] for u in sol1.u]  
  
plot(x\_sol\_1, y\_sol\_1,   
 linewidth = 2,  
 title = "Фазовый портрет №2",  
 xaxis = "x",  
 yaxis = "y",  
 legend = false)  
  
savefig("report/image/Second.png")

Получим фазовый портрет

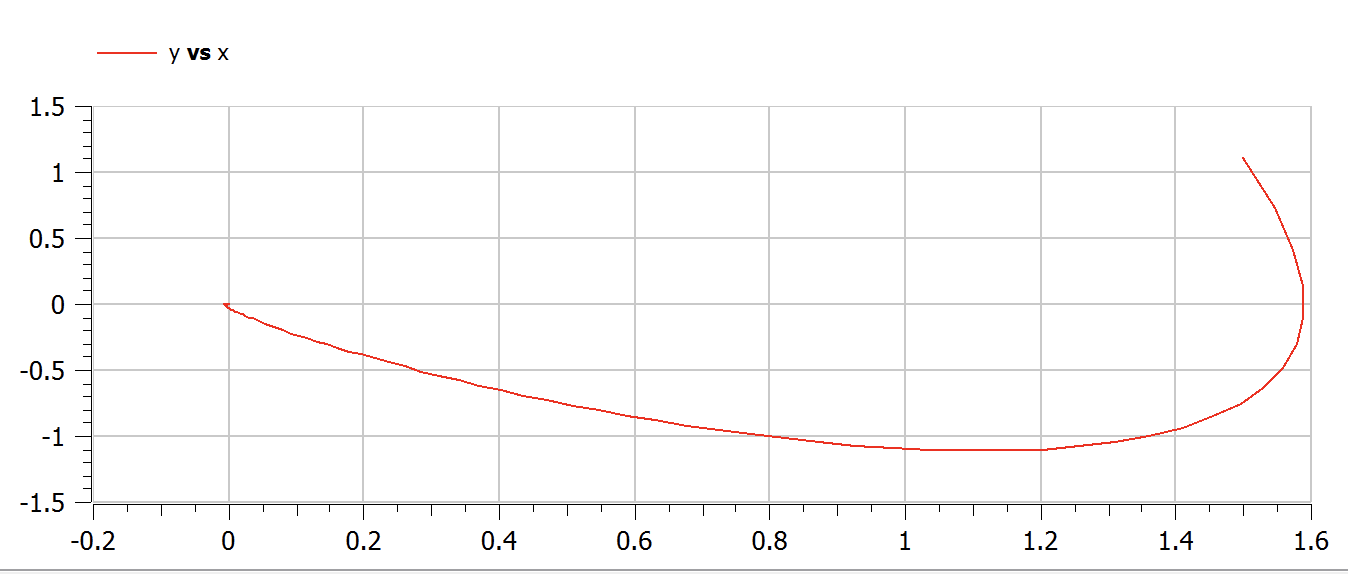


Фазовый портрет №2(Julia)

Теперь проделаем те же самые действия в Openmodelica

model Oscilliator  
 Real x, y, t;  
initital equation  
 x = 1.5;  
 y = 1.1;  
 t = 0;  
equation  
 der(t) = 1;  
 der(x) = y;  
 der(y) = -3\*x - 3\*y;  
end

Получим фазовый портрет



Фазовый портрет №2(OM)

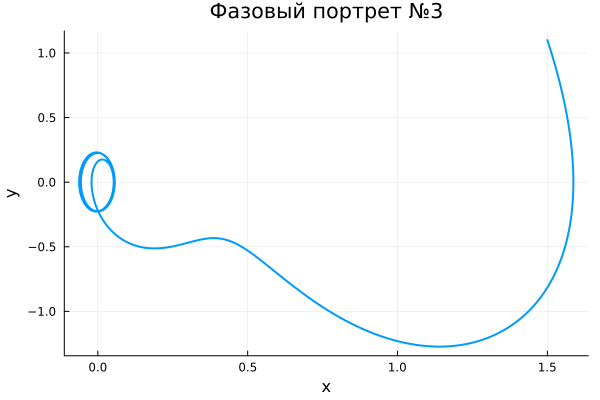
Как выидим, фазовые портреты полученнные на Julia и Openmodelica, изображенные на рис. ?? и рис. ??, cовпадают.

1. Построим решение уравнения для колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. В нашем случае оно имеет вид

* Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:
* Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:
* Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

function ode\_fn\_3(du, u, p, t)  
 x, y = u  
 du[1] = y  
 du[2] = -3\*x - 3\*y - sin(4\*t)  
end  
  
t\_begin = 0.0  
t\_end = 44  
tspan = (t\_begin, t\_end)  
  
#Initial condition  
x\_init = 1.5  
y\_init = 1.1  
  
prob1 = ODEProblem(ode\_fn\_3, [x\_init, y\_init], tspan)  
  
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-16, abstol=1e-16)  
x\_sol\_1 = [u[1] for u in sol1.u]  
y\_sol\_1 = [u[2] for u in sol1.u]  
  
plot(x\_sol\_1, y\_sol\_1,   
 linewidth = 2,  
 title = "Фазовый портрет №3",  
 xaxis = "x",  
 yaxis = "y",  
 legend = false)  
savefig("report/image/Third.png")

Получим фазовый портрет

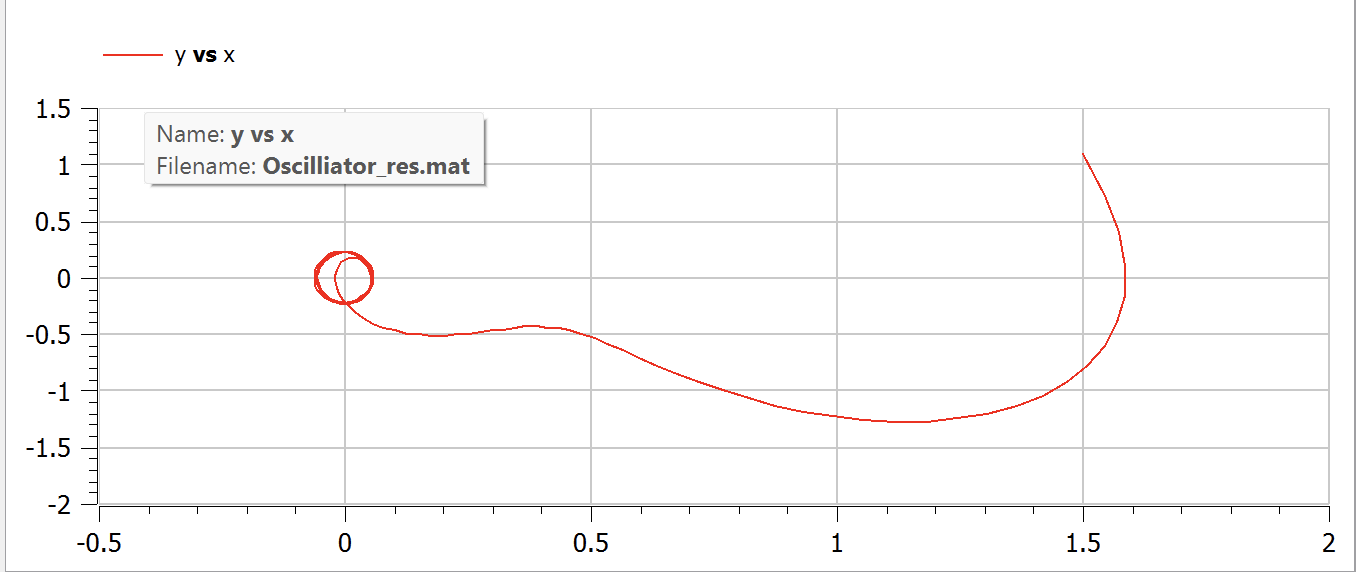


Фазовый портрет №3(Julia)

Теперь проделаем те же самые действия в Openmodelica

model Oscilliator  
 Real x, y, t;  
initital equation  
 x = 1.5;  
 y = 1.1;  
 t = 0;  
equation  
 der(t) = 1;  
 der(x) = y;  
 der(y) = -4\*x - 4\*y + sin(4\*t);  
end

Получим фазовый портрет



Фазовый портрет №3(OM)

Как выидим, фазовые портреты полученнные на Julia и Openmodelica, изображенные на рис. ?? и рис. ??, cовпадают.

# 5 Ответы на вопросы

1. Простейшая модель гармонических колебаний:
2. Осциллятор - система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.
3. Модель математического маятника:
4. Для перехода от дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка, необходимо в уравнении заменить все производные первого порядка на новую переменную, а также записать дополнительное уравнения, в котором будет обозначено, что первая производная равна новой переменной
5. **Фазовый портрет** — это геометрическое представление траекторий динамической системы на фазовой плоскости
6. **Фазовая траектория** - кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

# 6 Выводы

* Научились решать линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.
* Построиили модель линейного гармонического осциллятора без затухания/ с затуханием/ с действием внешней силы.
* Построили фазовые портреты всех моделей. Увидели, что при реализации на Julia и Openmodelica портреты совпадают.
* Отработали навыки решения систем дифференциальных уравнений на языке Julia, Openmodelica

# Список литературы

1. Википедия. Гармонический осциллятор [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонический_осциллятор>.

2. Кулябов Д.С. Модель гармонических колебаний [Электронный ресурс]. URL: <https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971570/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%203.pdf>.

3. Википедия. Фазовая плоскость [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Фазовая_плоскость>.