

# Teil I

## Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse

# Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz  
(Pflicht)

Dreieck  $\leftrightarrow$  Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen  
(Pflicht)

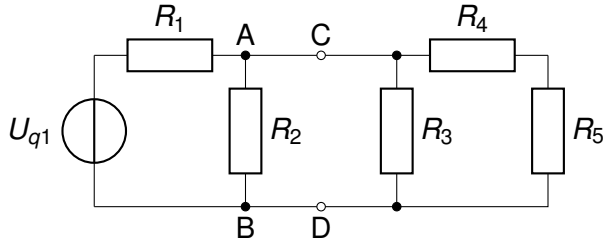
Knoten und Maschen

Kreisstromverfahren

Ersatzquellen

## Zweipole

In der Schaltung unten sollen die Widerstände  $R_3$  bis  $R_5$  als ein virtuelles Bauteil dargestellt werden.



## Werte für Berechnung

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$

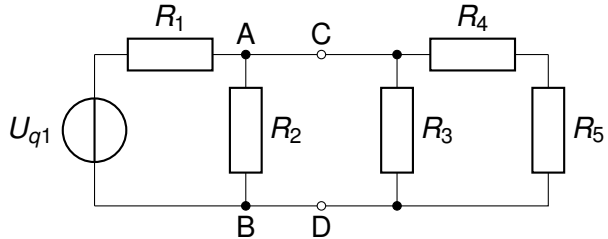
$$R_3 = 30\Omega$$

$$R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5V,$$

$$U_{q2} = 12V$$



## Berechnung des Ersatzwiderstands

$$R_{45} = R_4 + R_5 \quad (1)$$

$$R_{45} = 40\Omega + 50\Omega \quad (2)$$

$$R_{45} = 90\Omega \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{90\Omega} \quad (5)$$

$$R_{3||45} = 22,5\Omega \quad (6)$$

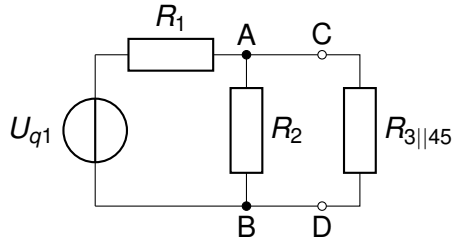


Abbildung: Berechnung des Ersatzwiderstands

## Übungen zu Zweipole I

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a  $R_1 = R_2 = 220\Omega$   $R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$

b  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 560\Omega$

c  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$   $R_3 = 120\Omega$

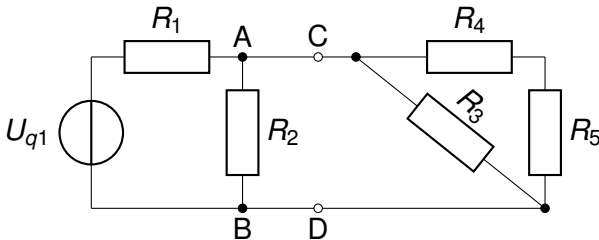


Abbildung: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1

## Übungen zu Zweipole II

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a  $R_1 = R_2 = 220\Omega$   $R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$

b  $R_1 = R_2 = R_3 = 150\Omega$   $R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 560\Omega$

c  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$   $R_3 = 120\Omega$

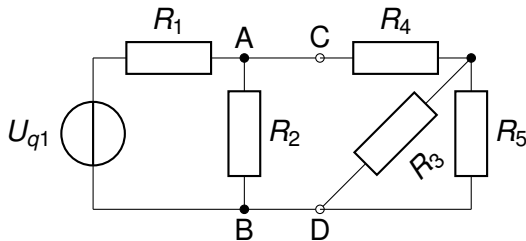
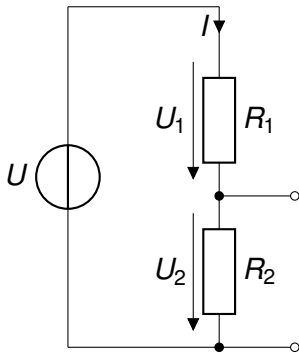


Abbildung: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2

## Spannungsteiler



$$U = U_1 + U_2 \quad (7)$$

$$I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (8)$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \quad (9)$$

$$U_2 = I * R_2 \quad (10)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_{ges}} * R_2 \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} * R_2 \quad (12)$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (13)$$



# Übungsaufgaben zu Spannungsteiler

U [V]	R <sub>1</sub> [Ω]	R <sub>2</sub> [Ω]	I <sub>R1</sub>	I <sub>R2</sub>
5	220	330	12 mA	10,4 mA
12	220	470		
12	220			
12	470			
	560	120	22 mA	
	470	1,5k	3,3 mA	

# Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

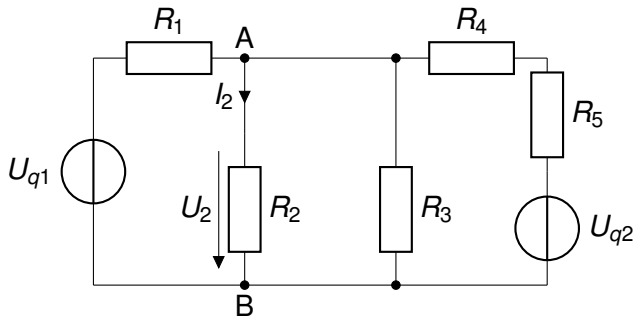
Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)  
Aufgaben zu Überlagerung

Dreieck  $\leftrightarrow$  Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Knoten und Maschen

## Zwei Spannungsquellen $U_1$ und $U_2$



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

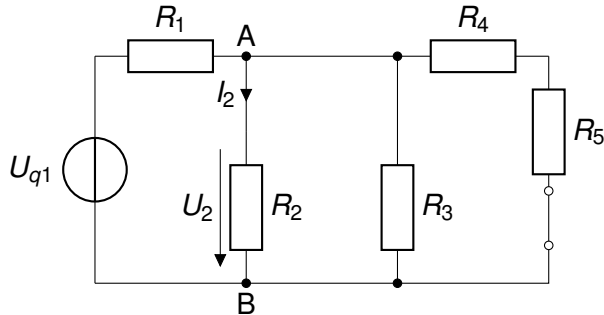
$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 1, Zwei Quellen aktiv

## Zwei Spannungsquellen $U_1$ und $U_2$



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Nur Quelle eins aktiv

## Berechnung Ersatzwiderstand I

$$U_{2'} = I_2 * R_2 || R_3 || R_4 + R_5 \quad (14)$$

$$U_{2'} = I_2 * \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} \quad (15)$$

$I_2$  ist nicht bekannt.

## Berechnung Ersatzwiderstand II

$$U_{q1} = U_1 + U_2 \quad (16)$$

$$U_2 = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (17)$$

## Einsetzen I

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (18)$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}} \quad (19)$$

$$(20)$$

## Einsetzen II

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}}$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}$$

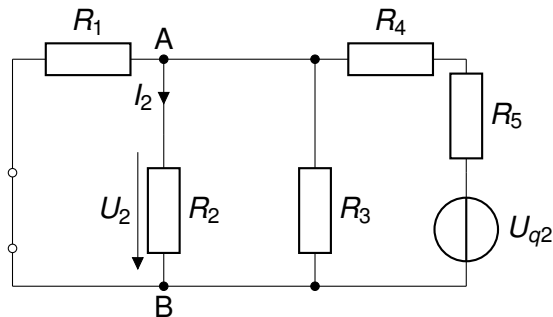
$$U_{2'} = 5 \text{ V} * \frac{10,59 \Omega}{10 \Omega + 10,59 \Omega} \quad (21)$$

$$U_{2'} = 5 \text{ V} * 0,514 \quad (22)$$

$$U_{2'} = 2,57 \text{ V} \quad (23)$$



## Zwei Spannungsquellen $U_1$ und $U_2$



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Nur Quelle zwei aktiv

## Quelle 2, Einsetzen I

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (24)$$

(25)

## Quelle 2, Einsetzen II

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (26)$$

$$U_{2''} = 12 \text{ V} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{30 \Omega}}}{40 \Omega + 50 \Omega + \frac{1}{\frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{30 \Omega}}} \quad (27)$$

$$U_{2''} = 12 \text{ V} * 0,057 \quad (28)$$

$$U_{2''} = 0,685 \text{ V} \quad (29)$$

## Addition

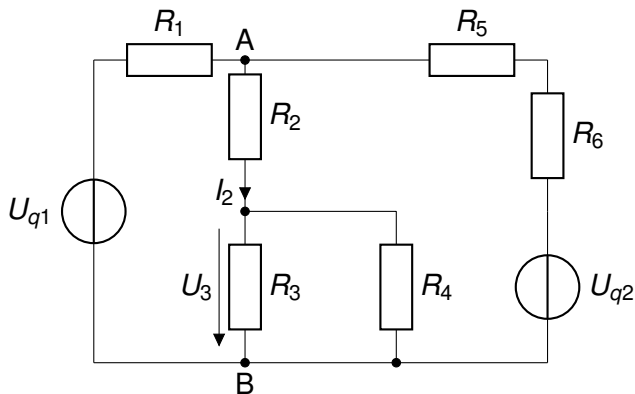
Zum Abschluss werden die beiden Teilspannungen addiert.

$$U_2 = U_{2'} + U_{2''} \quad (30)$$

$$U_2 = 2,57 \text{ V} + 0,685 \text{ V} \quad (31)$$

$$U_2 = 3,26 \text{ V} \quad (32)$$

## Schaltung 2



$$R_1 = 100\Omega, R_2 = 220\Omega$$

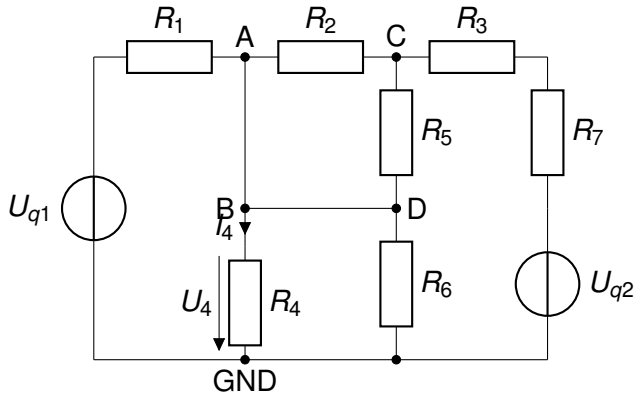
$$R_3 = 270\Omega, R_4 = 470\Omega$$

$$R_5 = 560\Omega, R_6 = 180\Omega$$

$$U_{q1} = 12\text{ V}, U_{q2} = 15\text{ V}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 2

## Schaltung 3



$$\begin{aligned} R_1 &= 100 \, \Omega, & R_2 &= 220 \, \Omega \\ R_3 &= 270 \, \Omega, & R_4 &= 470 \, \Omega \\ R_5 &= 470 \, \Omega, & R_6 &= 560 \, \Omega \\ R_7 &= 120 \, \Omega \\ U_{q1} &= 12 \, \text{V}, & U_{q2} &= 15 \, \text{V} \end{aligned}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 3

# Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Dreieck  $\leftrightarrow$  Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Knoten und Maschen

Kreisstromverfahren

## Messbrücke

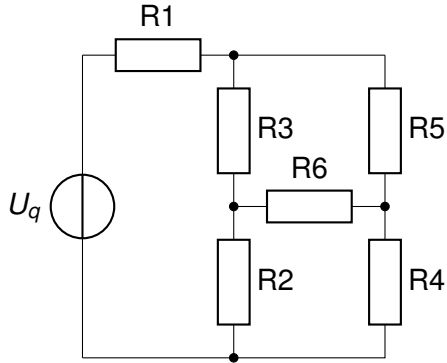


Abbildung: Messbrücke



## Messbrücke

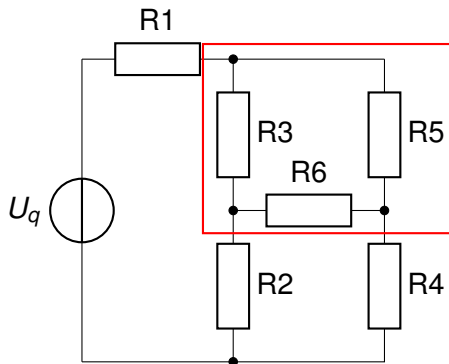
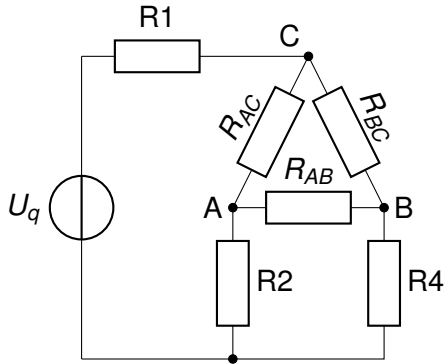


Abbildung: Messbrücke

## Messbrücke - Stern-Dreieck



$$R_{AC} = R_3$$

$$R_{AB} = R_6$$

$$R_{BC} = R_5$$

Abbildung: Messbrücke

## Umwandlung Dreieck $\rightarrow$ Stern

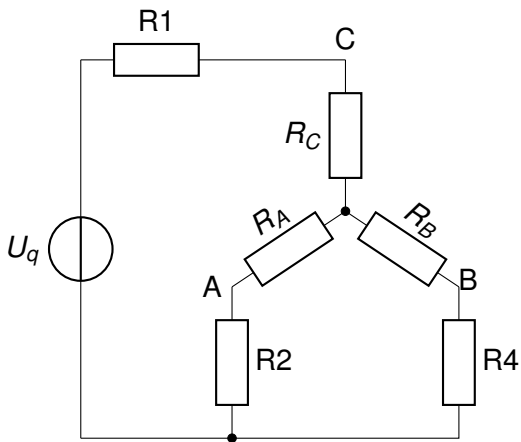


Abbildung: Messbrücke

## Umwandlung Dreieck -> Stern

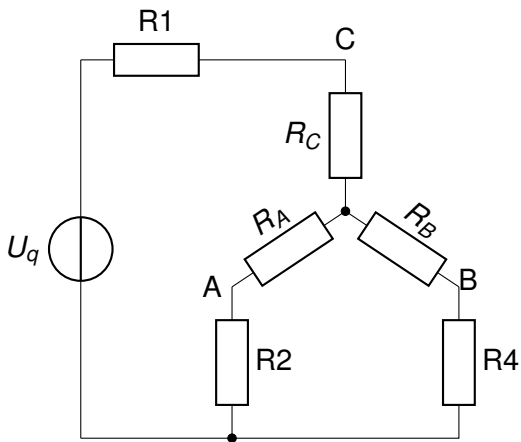


Abbildung: Messbrücke

$$R_A = \frac{R_{AC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

## Umwandlung - Stern- > Dreieck

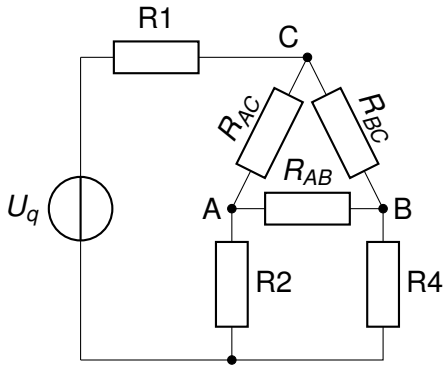


Abbildung: Messbrücke

## Umwandlung - Stern- > Dreieck

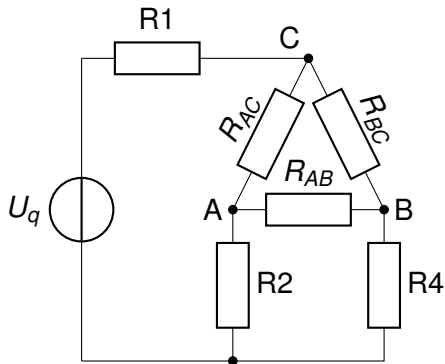


Abbildung: Messbrücke

$$R_{AB} = \frac{R_A \cdot R_B}{R_C} + R_A + R_B$$

$$R_{AC} = \frac{R_A \cdot R_C}{R_B} + R_A + R_C$$

$$R_{BC} = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A} + R_B + R_C$$

## Aufgabe: Messbrücke

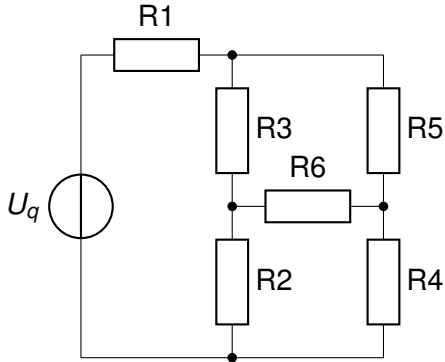


Abbildung: Messbrücke

$$R_1 = 220 \, \Omega$$

$$R_2 = 470 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

$$R_4 = 330 \, \Omega$$

$$R_5 = 560 \, \Omega$$

$$R_6 = 390 \, \Omega$$

$$U_q = 5 \, \text{V}$$

$$R_4 = R_{\text{Mess}}$$

gesucht: Strom und Spannung an  $R_6$ ,  $R_4$  und  $R_5$

## Lösung zu Messbrücke

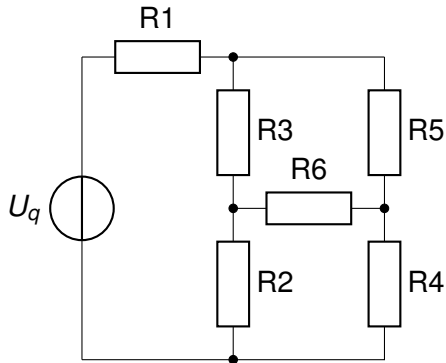


Abbildung: Messbrücke

$$R_1 = 220 \, \Omega$$

$$R_2 = 470 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

$$R_4 = 330 \, \Omega$$

$$R_5 = 560 \, \Omega$$

$$R_6 = 390 \, \Omega$$

$$U_q = 5 \, V$$

$$I_4 = 4,2 \, mA, \quad I_5 = 3,3 \, mA, \quad I_6 = 890 \, \mu A$$

$$U_4 = 1,4 \, V, \quad U_5 = 3,6 \, V, \quad U_6 = 0,35 \, V$$



# Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Dreieck  $\leftrightarrow$  Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Knoten und Maschen

Kreisstromverfahren

## Schaltung - Maschen

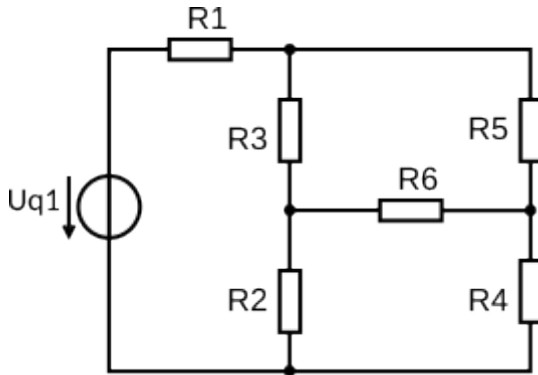


Abbildung: Messbrücke

## Schaltung - Maschen

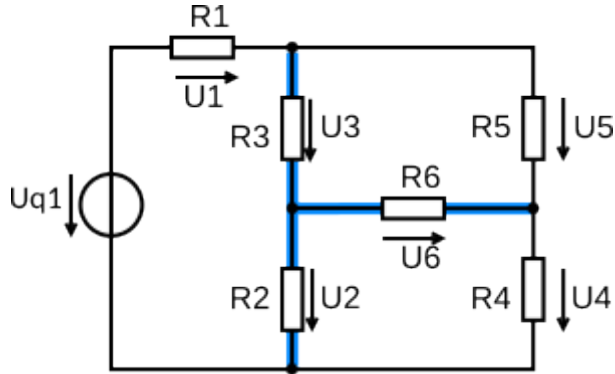


Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum

## Schaltung - Maschen

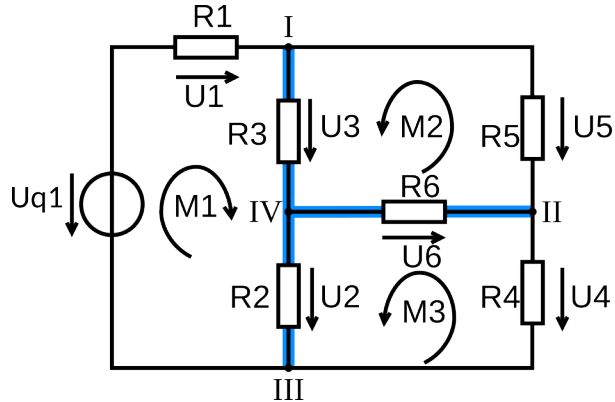


Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

## Gleichungen für Maschen und Knoten

$$M_1 : -U_{q1} + U_1 + U_3 + U_2 = 0 \quad (33)$$

$$M_2 : U_3 + U_6 - U_5 = 0 \quad (34)$$

$$M_3 : U_2 - U_4 - U_6 = 0 \quad (35)$$

$$(36)$$

Knotengleichungen:

$$\text{I: } I_1 - I_3 - I_5 = 0 \quad (37)$$

$$\text{II: } I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad (38)$$

$$\text{III: } I_2 + I_4 - I_1 = 0 \quad (39)$$

$$\text{IV: } I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad (40)$$

## Berechnung der Ströme

$$-U_{q1} + I_1 * R_1 + I_3 * R_3 + I_2 * R_2 = 0 \quad (41)$$

$$I_3 * R_3 + I_6 * R_6 - I_5 * R_5 = 0 \quad (42)$$

$$I_2 * R_2 - I_6 * R_6 - I_4 * R_4 = 0 \quad (43)$$

## LGS aufstellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = 220\Omega, R_2 = 470\Omega, R_3 = 330\Omega, R_4 = 330\Omega, R_5 = 560\Omega, R_6 = 390\Omega$$

$$U_q = 5V$$

## Gekürzte Darstellung der Matrix

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & Uq1 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 & 0 \end{array} \right)$$



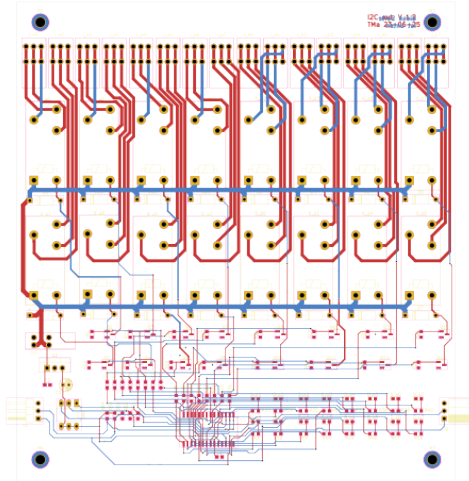
## Gekürzte Darstellung mit Werten der Widerstände

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 220\Omega & 470\Omega & 330\Omega & 0 & 0 & 0 & U_{q1} \\ 0 & 470\Omega & 0 & 330\Omega & 0 & 390\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 330\Omega & 0 & 560\Omega & 390\Omega & 0 \end{array} \right)$$

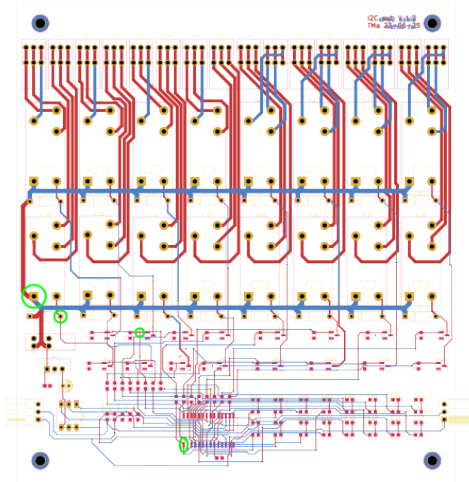
## Stufenform - Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## Knoten und Maschen



## Knoten und Maschen



## Knoten und Maschen

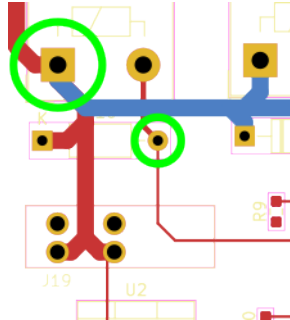


Abbildung: Platine Ausgang

## Knoten und Maschen

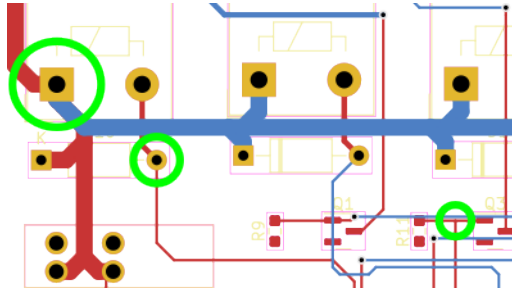
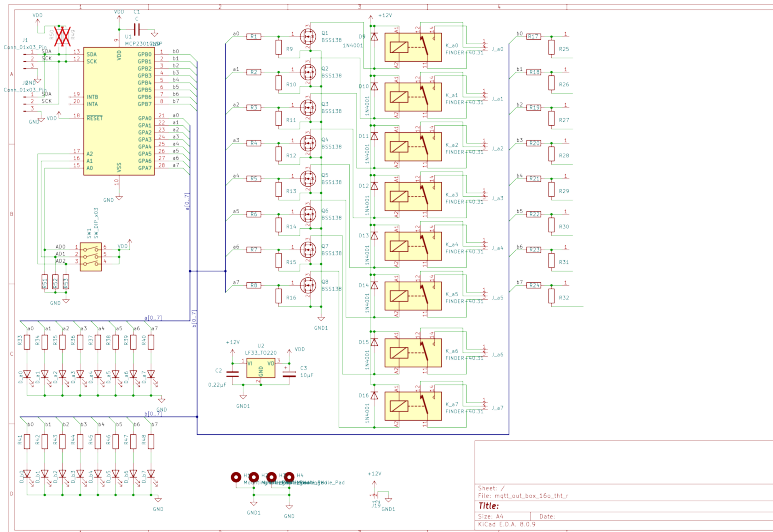


Abbildung: Platine Ausgang

# Knoten und Maschen



# Knoten und Maschen

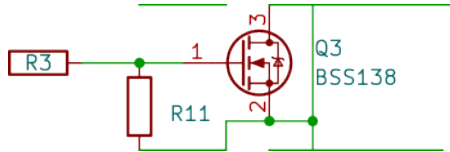
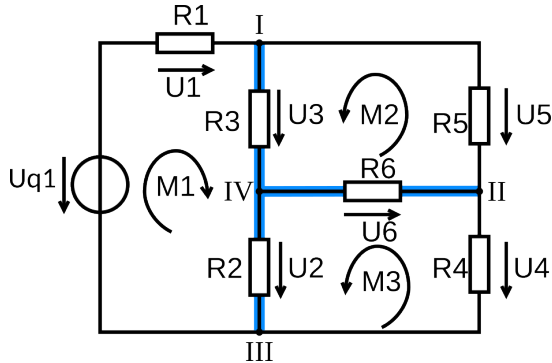


Abbildung: Schaltplan Ausgang



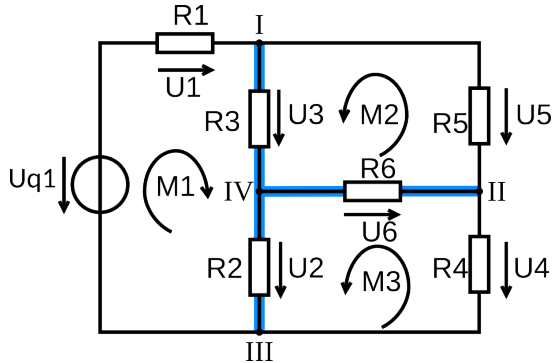
## Kreisstromverfahren - Baum I



1. Baum festlegen (alle Knoten berühren, kein Umlauf).
2. Maschen einzeichnen (Umlaufsinn ist willkürlich)
3. Gleichungen aufstellen.

**Abbildung:** Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

## Kreisstromverfahren - Baum II

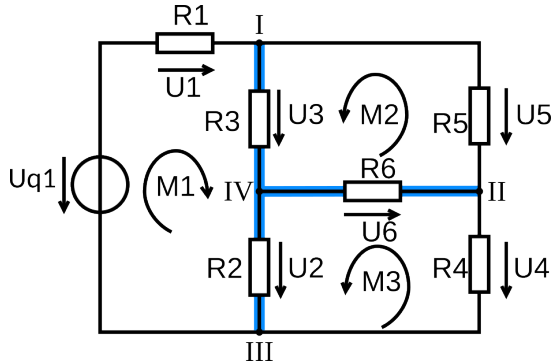


Gleichungssystem

1. Hauptdiagonale:  $R_s$  in der Masche
2. Nebendiagonalen: Verbindungs- $R_s$
3. Quelle in Quellen-Vektor

**Abbildung:** Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

## Kreisstromverfahren - Gleichungssystem



Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R1 + R2 + R3 & R3 & R3 \\ R3 & R3 + R5 + R6 & -R6 \\ R2 & -R6 & R2 + R4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Abbildung:** Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

## Kreisstromverfahren - Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R1 + R2 + R3 & R3 & R2 \\ R3 & R3 + R5 + R6 & -R6 \\ R2 & -R6 & R2 + R4 + R6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen:

- per Hand - z.B. gaußsches Eliminationsverfahren  
Matrix und Spannungs-Vektor in Dreiecksform bringen.
- im Taschenrechner - LGS Solver  
Matrix und Spannungsvektor eintippen.  
Ergebnis ist Strom Vektor (von oben nach unten).
- mit dem PC z.B. octave (open source) - Eingabe vergleichbar mit Taschenrechner

## Umwandlung Stromquelle $\rightarrow$ Spannungsquelle I

### Ideale Stromquelle

- liefert definierten, konstanten Strom
- Spannung ist unerheblich
- Innenwiderstand ( $R_i$ ) ist parallel geschaltet.

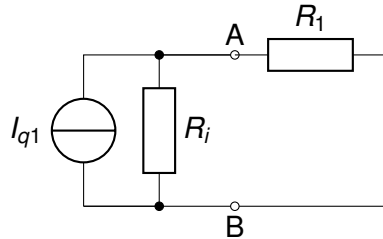


Abbildung: Stromquelle

## Umwandlung Stromquelle $\rightarrow$ Spannungsquelle II

### Stromquelle in Spannungsquelle

- Wert von  $R_i$  bleibt,
- $R_i$  geht in Reihe zu  $U_q$
- Spannung:  $U_I = I_k \cdot R_i$

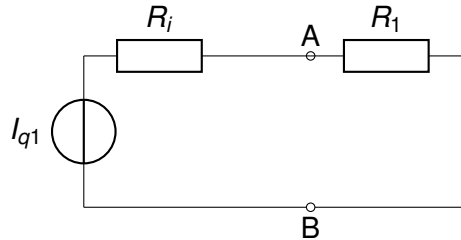


Abbildung: Spannungsquelle

## Umwandlung Spannungsquelle $\rightarrow$ Stromquelle

### Spannungsquelle in Stromquelle

- Wert von  $R_i$  bleibt
- $R_i$  ist jetzt parallel zu  $I_q$
- Strom:  $I_k = \frac{U_i}{R_i}$

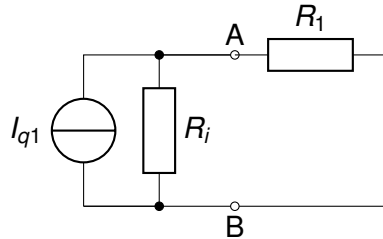


Abbildung: Stromquelle

## Stromquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Stromquelle

- $R_i$  ist parallel zu  $I_q$

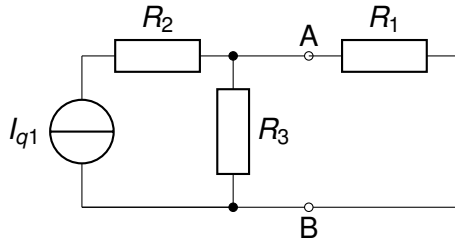


Abbildung: Stromquelle



## Stromquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Stromquelle

- $R_i$  ist parallel zu  $I_q$
- $R_2$  ist irrelevant

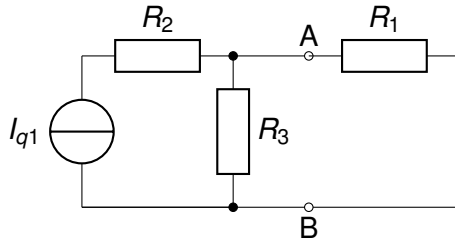


Abbildung: Stromquelle

# Spannungsquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Spannungsquelle

- $R_i$  ist in Reihe zu  $U_q$

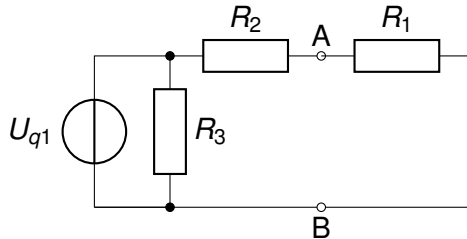


Abbildung: Spannungsquelle

## Spannungsquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

### Ideale Spannungsquelle

- $R_i$  ist in Reihe zu  $U_q$
- $R_3$  ist irrelevant

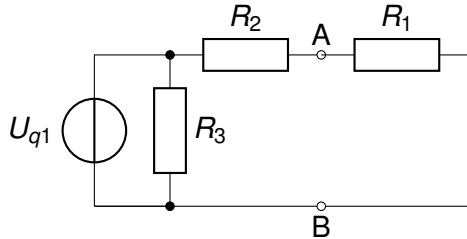


Abbildung: Spannungsquelle