

# **Arbeitsunterlagen zu FOS Elektrotechnik, Technische Informatik, Mechatronik**

## **Themenfeld 12.1**

### **Gleichstromnetzanalyse**

Thomas Maul

V 0.2.1 - im Aufbau

Stand: 6. Januar 2026

## **Inhaltsverzeichnis**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I. Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse</b> | <b>2</b>  |
| 1. Zweipole  | 2         |
| 2. Spannungsteiler                                 | 4         |
| 2.1. Übungen . . . . .                             | 5         |
| 3. Überlagerung                                    | 5         |
| 3.1. Aufgaben zu Überlagerung . . . . .            | 8         |
| 4. Dreieck <-> Stern                               | 9         |
| 5. Gleichungen                                     | 12        |
| 6. Knoten und Maschen                              | 15        |
| 7. Kreisstromverfahren                             | 15        |
| 8. Knotenspannungsverfahren                        | 16        |
| <b>A. Lösungen</b>                                 | <b>16</b> |
| A.1. Ersatzwiderstand . . . . .                    | 16        |
| A.1.1. Übungen zu Zweipole I . . . . .             | 16        |
| A.1.2. Übungen zu Zweipole II . . . . .            | 17        |
| A.2. Spannungsteiler . . . . .                     | 17        |
| A.3. Lösungsvorschlag zu Schaltung 2 . . . . .     | 17        |
| A.3.1. Schaltung 2 - nur Quelle 1 aktiv . . . . .  | 17        |
| A.3.2. Schaltung 2 - nur Quelle 2 aktiv . . . . .  | 20        |
| A.4. Lösungsvorschlag zu Schaltung 3 . . . . .     | 22        |
| A.4.1. Schaltung 3 - nur Quelle 1 aktiv . . . . .  | 22        |
| <b>B. Literatur und Quellen</b>                    | <b>22</b> |

# Teil I.

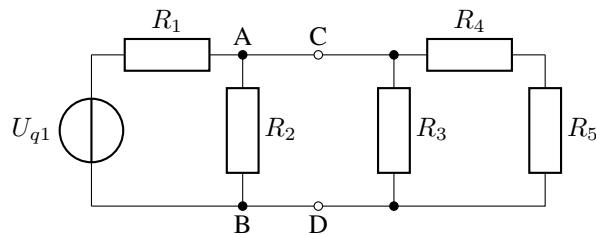
## Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse

### 1. Zweipoltheorie (Pflicht)

In der Elektrotechnik werden Bauteile, die zwei Abschlüsse haben als Zweipole bezeichnet. Dies können jeweils einzelne Widerstände, Spulen und Kondensatoren sein. Manchmal ist es praktisch eine (Teil-)Schaltung als einen Zweipol darzustellen und in Berechnungen als ein virtuelles Bauteil zu verwenden.

#### Zweipole

In der Schaltung unten sollen die Widerstände  $R_3$  bis  $R_5$  als ein virtuelles Bauteil dargestellt werden. Es soll

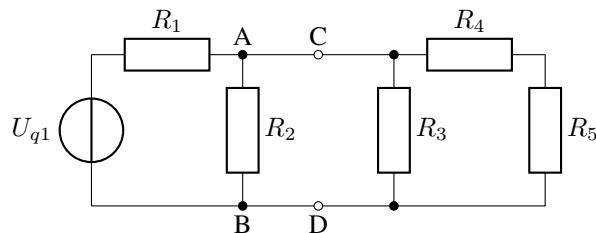


so aussehen, als ob nur ein Widerstand rechts von den Punkten C und D wäre. Durch Reihenschaltung von  $R_4$  und  $R_5$  zu  $R_{45}$  und anschließender Parallelschaltung mit  $R_3$  kann ich dies erreichen (siehe Bild 1). Der Widerstand  $R_{3||45}$  verhält sich für die Schaltung wie die Widerstände  $R_3$ ,  $R_4$  und  $R_5$ .

Ich lege für die Widerstände folgende Werte fest:

#### Werte für Berechnung

$$R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega \quad R_3 = 30\Omega \quad R_4 = 40\Omega \quad R_5 = 50\Omega \quad U_{q1} = 5V, \quad U_{q2} = 12V$$



#### Berechnung des Ersatzwiderstands

$$R_{45} = R_4 + R_5 \quad (1)$$

$$R_{45} = 40\Omega + 50\Omega \quad (2)$$

$$R_{45} = 90\Omega \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{90\Omega} \quad (5)$$

$$R_{3||45} = 22,5\Omega \quad (6)$$

Jetzt kann ich den Gesamtwiderstand  $R_{3||45}$  berechnen. Ich kann jedoch nicht mehr einzelne Spannungen oder

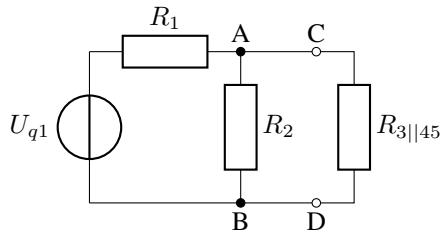


Abbildung 1: Berechnung des Ersatzwiderstands

Ströme messen oder darstellen.

Der virtuelle Widerstand  $R_{3||45}$  ersetzt die Schaltung der drei Widerstände. Das Gleiche ist mit allen passiven Bauteilen möglich. Auch aktive Bauteile (Quellen, Transistor, FET, ...) kann man durch einen Zweipol ersetzen.

### Übungen zu Zweipole I

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

**a**  $R_1 = R_2 = 220\Omega$   $R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$

**b**  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 560\Omega$

**c**  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$   $R_3 = 120\Omega$

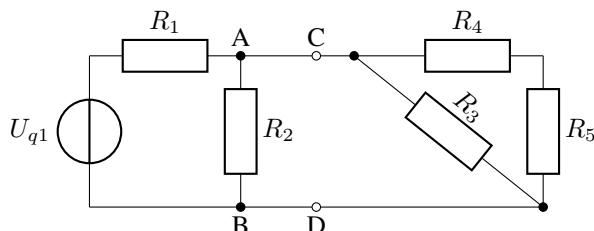


Abbildung 2: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1

Die Lösungen sind auf Seite 16

### Übungen zu Zweipole II

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

**a**  $R_1 = R_2 = 220\Omega$   $R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$

**b**  $R_1 = R_2 = R_3 = 150\Omega$   $R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 560\Omega$

**c**  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$   $R_3 = 120\Omega$



Abbildung 3: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2

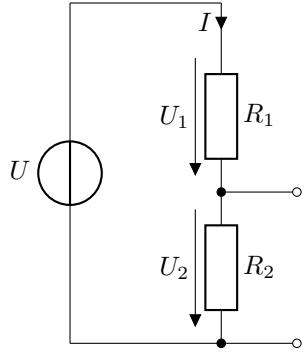
## 2. Spannungsteiler

Bei einem Spannungsteiler wird eine anliegende Spannung in mehrere Teilspannungen aufgeteilt.

Dies kann zum Beispiel mit Widerständen passieren. Der Strom  $I$  muss in Bild 8 durch alle Widerstände fließen. Es gibt keine Knoten, an denen er sich aufteilt. Die Spannung  $U$  der Quelle fällt an allen Widerständen ab. An jedem Widerstand fällt ein Teil der Spannung ab. Die Spannung an den Widerständen ist nur von der Größe des Widerstands abhängig, da der Strom in allen Widerstände identisch ist.

Die Summe aller Spannungen in einem Stromkreis, man spricht auch von einem Umlauf, muss null sein. Die Richtung der Spannung an der Spannungsquelle wird hier in umgekehrter Richtung zu den Spannungen an den Widerständen gezählt (Formel 7).

### Spannungsteiler



$$U = U_1 + U_2 \quad (7)$$

$$I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (8)$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \quad (9)$$

$$U_2 = I * R_2 \quad (10)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_{ges}} * R_2 \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} * R_2 \quad (12)$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (13)$$

Formel 8 ist hier für die beiden Teilwiderstände der Schaltung aufgestellt. Bei einem Spannungsteiler mit mehreren Widerständen wären hier alle Widerstände genannt.

Formel 9 stellt den Zusammenhang zwischen dem gemeinsamen Strom und den Widerständen und Spannungen dar. Wenn man nur den zweiten und dritten Teil der Gleichung betrachtet, ergibt sich ein Verhältnis. Das Verhältnis aus  $U_1$  zu  $R_1$  entspricht dem Verhältnis aus  $U_2$  zu  $I_2$ . Mit dem Formeln 10 kann ich das Verhältnis aus der Gesamtspannung  $U$  und der Teilspannung - hier  $U_2$  bestimmen. Dabei gilt: Die Teilspannung steht im Verhältnis zur Gesamtspannung, wie der Teilwiderstand zum Gesamtwiderstand.

Der Spannungsteiler in diesem Beispiel ist unbelastet, das bedeutet, dass außer den beiden Widerständen, die die Spannung  $U$  aufteilen keine weiteren Widerstände vorhanden sind. Wenn parallel zu  $R_2$  ein weiterer Widerstand geschaltet wäre, wäre zu prüfen, wie groß der Widerstand ist, der parallel geschaltet ist. Falls der parallele Widerstand viel größer ist (Faktor 100 und mehr) kann er vernachlässigt werden, da der Strom, der durch den Parallelwiderstand fließt, sehr klein ist im Verhältnis zu  $R_2$ . Wenn die Widerstände annähernd die gleiche Größe hätten, würde man von einem belasteten Spannungsteiler sprechen. In diesem Fall müsste die Parallelschaltung unbedingt für die Berechnung berücksichtigt werden.

## 2.1. Übungen

Gegen sei der Spannungsteiler aus Bild 8. Berechnen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle unten.

### Übungsaufgaben zu Spannungsteiler

| $U$ [V] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $R_2$ [ $\Omega$ ] | $I_{R1}$ | $I_{R2}$ |
|---------|--------------------|--------------------|----------|----------|
| 5       | 220                | 330                |          |          |
| 12      | 220                | 470                |          |          |
| 12      | 220                |                    | 12 mA    |          |
| 12      | 470                |                    |          | 10,4 mA  |
|         | 560                | 120                | 22 mA    |          |
|         | 470                | 1,5k               | 3,3 mA   |          |

Die Lösungen sind auf 17

## 3. Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Wenn in einer Schaltung, man spricht auch von elektrischen Netzwerken, mehr als eine Quelle vorhanden ist, speisen alle Quellen gemeinsam die Schaltung mit Energie. Um in der Schaltung unten (Abbildung 4) zu berechnen, wie viel Strom durch den Widerstand  $R_2$  fließt, muss ich wissen, wie viel Strom die Quelle  $U_1$  und wie viel die Quelle  $U_2$  an den Widerstand abgibt.

### Zwei Spannungsquellen $U_1$ und $U_2$

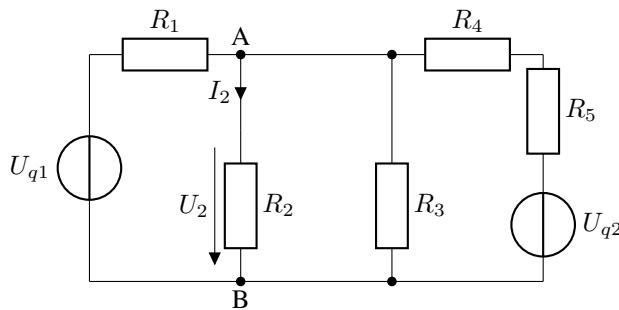


Abbildung 4: Überlagerung, Schaltung 1, Zwei Quellen aktiv

$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega, R_5 = 50\Omega, U_{q1} = 5V, U_{q2} = 12V$$

Mit einem Messgerät kann ich die Spannung an  $R_2$  messen, den Strom, der durch  $R_2$  fließt ebenfalls. Rechnerisch muss ich die Schaltung so verändern, dass jeweils nur die eine Quelle aktiv ist. Die anderen Spannungsquellen werden kurzgeschlossen. Wenn Stromquellen in der Schaltung sind, werden diese aufgetrennt. Innenwiderstände der Quellen (hier  $R_1$  zu  $U_{q1}$  und  $R_5$  zu  $U_{q2}$ ) bleiben dabei in der Schaltung. Die Teilspannung an  $R_2$ , die ich jetzt errechnen kann, nenne ich  $U_{2'}$ .

### Zwei Spannungsquellen $U_1$ und $U_2$

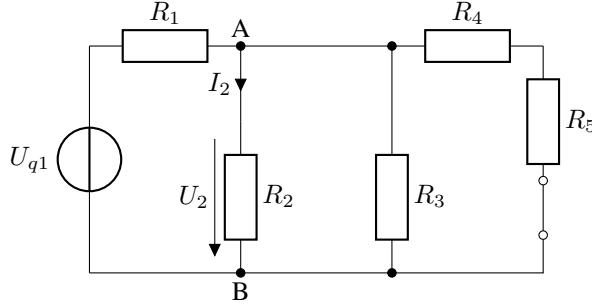


Abbildung 5: Nur Quelle eins aktiv

$R_1 = 10\Omega$ ,  $R_2 = 20\Omega$ ,  $R_3 = 30\Omega$ ,  $R_4 = 40\Omega$ ,  $R_5 = 50\Omega$ ,  $U_{q1} = 5V$ ,  $U_{q2} = 12V$   
 $R_2$  wird jetzt mit dem Ersatzwiderstand  $R_{3||45}$  parallel geschaltet.

### Berechnung Ersatzwiderstand I

$$U_{2'} = I_2 * R_2 || R_3 || R_4 + R_5 \quad (14)$$

$$U_{2'} = I_2 * \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} \quad (15)$$

$I_2$  ist nicht bekannt. Zur Berechnung müssten jedoch entweder  $I_2$  oder  $U_2$  bekannt sein. Somit hilft diese Formel noch nicht endgültig. Bekannt sind die Widerstandswerte und die Spannung  $U_{q1}$ . Mit der Formel eines Spannungsteilers kann ich die Spannung an der Parallelschaltung ausrechnen, ohne  $I_2$  zu kennen.

### Berechnung Ersatzwiderstand II

$$U_{q1} = U_1 + U_2 \quad (16)$$

$$U_2 = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (17)$$

In der Festlegung 4 (Seite 2) habe ich die Werte für die Widerstände und die Spannungen der Quellen festgelegt. In Formel (6, Seite 3) habe ich den Ersatzwiderstand für  $R_{3||45}$  berechnet. Hier setze ich die Werte in die Formeln ein:

### Einsetzen I

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (18)$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}} \quad (19)$$

$$(20)$$

## Einsetzen II

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}}$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}$$

$$U_{2'} = 5 V * \frac{10,59 \Omega}{10 \Omega + 10,59 \Omega} \quad (21)$$

$$U_{2'} = 5 V * 0,514 \quad (22)$$

$$U_{2'} = 2,57 V \quad (23)$$

## Nur Quelle U2 aktiv

Jetzt schließe ich die Quelle 1 kurz und nur Quelle  $U_{Q2}$  ist aktiv. Damit kann ich den Teilstrom berechnen, der fließen würde, wenn in der Original-Schaltung nur diese Quelle vorhanden wäre.

## Zwei Spannungsquellen U1 und U2

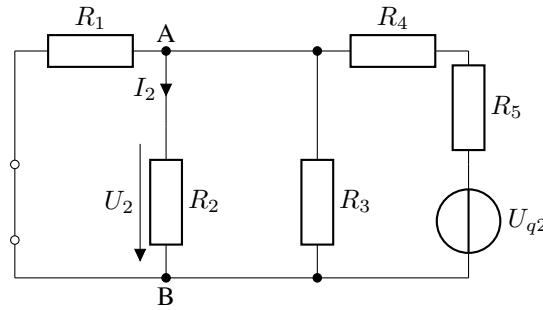


Abbildung 6: Nur Quelle zwei aktiv

$R_1 = 10\Omega$ ,  $R_2 = 20\Omega$   $R_3 = 30\Omega$ ,  $R_4 = 40\Omega$   $R_5 = 50\Omega$   $U_{q1} = 5 V$ ,  $U_{q2} = 12 V$   
In diesem Fall ist  $R_2$  parallelgeschaltet mit  $R_1$  und  $R_3$ .

## Quelle 2, Einsetzen I

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (24)$$

$$(25)$$

## Quelle 2, Einsetzen II

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}} \quad (26)$$

$$U_{2''} = 12 V * \frac{\frac{1}{10 \Omega + 20 \Omega + 30 \Omega}}{40 \Omega + 50 \Omega + \frac{1}{10 \Omega + 20 \Omega + 30 \Omega}} \quad (27)$$

$$U_{2''} = 12 V * 0,057 \quad (28)$$

$$U_{2''} = 0,685 V \quad (29)$$

### Addition

Zum Abschluss werden die beiden Teilspannungen addiert.

$$U_2 = U_{2'} + U_{2''} \quad (30)$$

$$U_2 = 2,57 V + 0,685 V \quad (31)$$

$$U_2 = 3,26 V \quad (32)$$

$U_{2'}$  ist die Teilspannung, die von der Quelle  $U_{Q1}$  kommt,  $U_{2''}$  ist von  $U_{Q2}$ .  $U_2$  ist die gesamte Spannung, die an Widerstand  $R_2$  abfällt. Man spricht hier auch von der resultierenden Spannung. Die Spannung  $U_2$  ist in der Schaltung messbar. Die Teilspannungen  $U_{2'}$  und  $U_{2''}$  sind nicht direkt messbar. Oft sind Quellen in Schaltungen keine echten Spannungsquellen, sondern Bauteile, die eine Spannung liefern (Transistor, Operationsverstärker, Ausgang eines Logik-ICs, ...)

### 3.1. Aufgaben zu Überlagerung

Berechnen Sie die Ströme und Spannungen an den Widerständen  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  und  $R_5$ . für die Schaltung in Abbildung 4.

### Schaltung 2

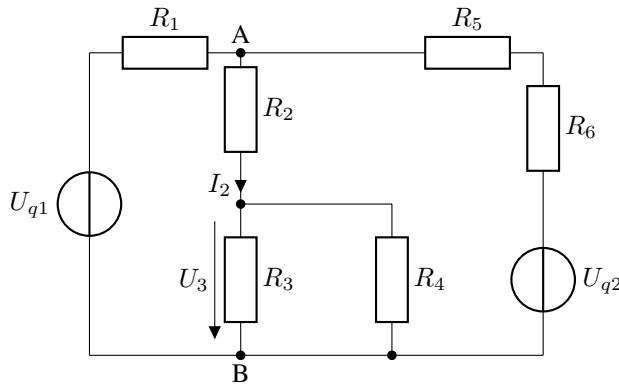


Abbildung 7: Überlagerung, Schaltung 2

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 220 \Omega, R_3 = 270 \Omega, R_4 = 470 \Omega, R_5 = 560 \Omega, R_6 = 180 \Omega, U_{q1} = 12 V, U_{q2} = 15 V$$

### Schaltung 3

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 220 \Omega, R_3 = 270 \Omega, R_4 = 470 \Omega, R_5 = 470 \Omega, R_6 = 560 \Omega, R_7 = 120 \Omega, U_{q1} = 12 V, U_{q2} = 15 V$$

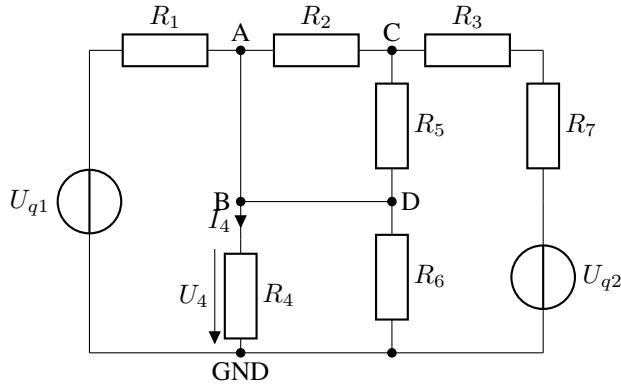


Abbildung 8: Überlagerung, Schaltung 3

#### 4. Dreieck <-> Stern-Umwandlung (Pflicht)

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Problematik, dass einige Schaltungen nicht alleine durch Reihenschaltung oder Parallelschaltung berechnet werden können. Im Bild 9 ist eine Messbrücke gezeichnet. Diese Brückenschaltung wird verwendet, um Spannungsänderungen an einem Sensor (z. B. Temperatursensor PT1000, DMS, ...) sehr klein zu machen.  $R_4$  wäre zum Beispiel der Messwiderstand.  $R_6$  wäre der Innenwiderstand des Messgeräts oder ein Widerstand, an dem der Spannungsabfall gemessen wird, um ihn durch Digitalisierung in einem Computer/Controller<sup>1</sup> zu verarbeiten. Durch eine Umwandlung zwischen einer Anordnung der Bauteile (hier Widerstände) im Dreieck und einer Anordnung in einem Stern können äquivalente Werte berechnet werden. Dadurch ist es möglich die entstandene Schaltung mithilfe von Reihenschaltung und Parallelschaltung zu berechnen. Nach der Umrechnung ist es nicht direkt möglich die Ströme und Spannungen der ursprünglichen Teilschaltung (hier  $R_3.R_5.R_6$ ) zu berechnen. Es ist lediglich möglich die Ströme und Spannungen an  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_4$  zu bestimmen.

##### Messbrücke

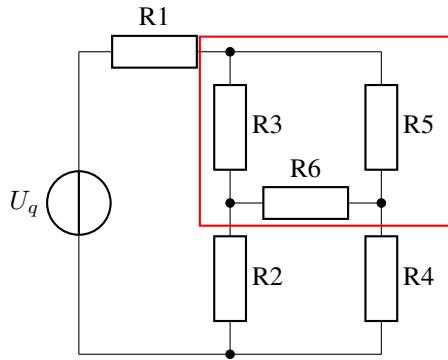


Abbildung 9: Messbrücke

Bild 10 stellt dieselbe Schaltung dar, wie Bild 9.

##### Messbrücke - Stern-Dreieck

$$\begin{aligned} R_{AC} &= R_3 \\ R_{AB} &= R_6 \\ R_{BC} &= R_5 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Auf einer Arduino R3-Platine ist ein AT\_Mega32-IC. Dieser hat einen Eingang, der analoge Spannungen digitalisieren kann.

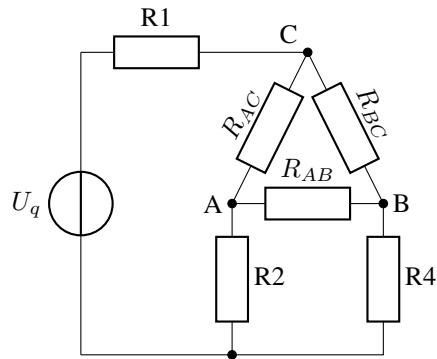


Abbildung 10: Messbrücke

In Bild 11 wurden die Widerstände des Dreiecks in Widerstände in einer sternförmigen-Anordnung umgerechnet. Die Ströme und Spannungen an den Punkten A, B, und C sind bei beiden Anordnungen identisch.

### Umwandlung Dreieck -> Stern

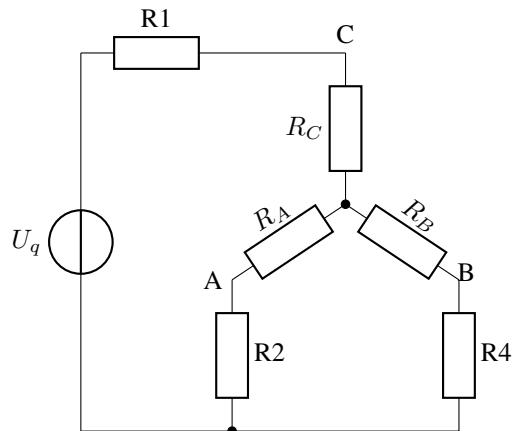


Abbildung 11: Messbrücke

$$R_A = \frac{R_{AC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

In den folgenden Bildern ist der umgekehrte Weg von einem Stern zu einem Dreieck dargestellt. Die Herleitung der Formeln habe ich nicht geschrieben, sie ist auf der Seite <https://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Dreieck-Transformation> zu finden.

### Umwandlung - Stern- > Dreieck

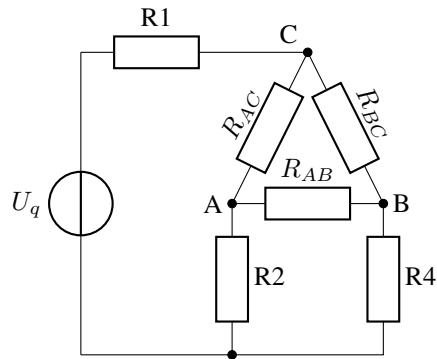


Abbildung 12: Messbrücke

$$R_{AB} = \frac{R_A \cdot R_B}{R_C} + R_A + R_B$$

$$R_{AC} = \frac{R_A \cdot R_C}{R_B} + R_A + R_C$$

$$R_{BC} = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A} + R_B + R_C$$

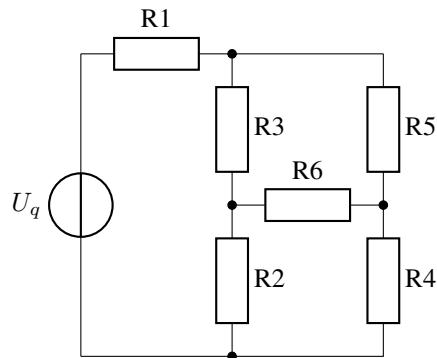


Abbildung 14: Messbrücke

$$R_1 = 220 \Omega$$

$$R_2 = 470 \Omega$$

$$R_3 = 330 \Omega$$

$$R_4 = 330 \Omega$$

$$R_5 = 560 \Omega$$

$$R_6 = 390 \Omega$$

$$U_q = 5 V$$

$$R_4 = R_{\text{Mess}}$$

gesucht: Strom und Spannung an  $R_6$ ,  $R_4$  und  $R_5$

## 5. Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Einige elektrische Schaltungen können mithilfe der Überlagerung gelöst werden. Bei komplexen Schaltungen ist dies entweder nicht möglich oder sehr aufwändig. Hier ist es unter Umständen günstiger Gleichungen für die Knoten der Schaltung aufzustellen oder für sogenannte Maschen.

Eine Masche Masche oder ein Umlauf in der Elektrotechnik bedeutet, dass alle Spannungen in einem festgelegten Kreis addiert werden. Nach den Kirchhoffschen Regeln ergibt die Summe aller Spannungen in einem Umlauf 0.  $\sum_{k=1}^n U_k = 0$

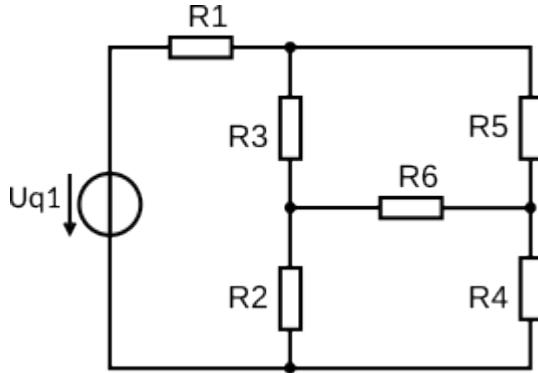


Abbildung 18: Messbrücke

Im ersten Schritt muss ein sogenannter Baum festgelegt werden. Der Baum muss alle Knoten verbinden, darf aber keinen geschlossenen Umlauf bilden.

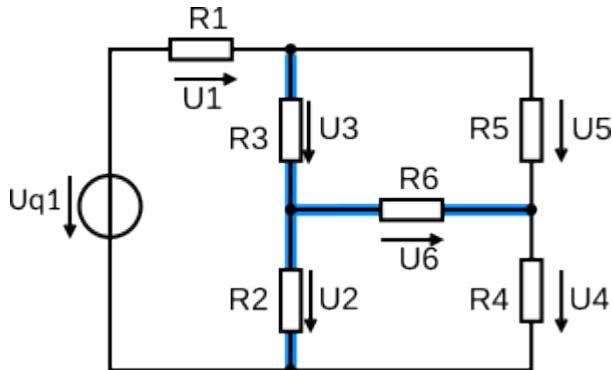


Abbildung 19: Messbrücke mit vollständigem Baum

Die Maschen M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub> und M<sub>3</sub> bestehen immer aus einer Sehne (ein Zweig, der nicht zum vollständigen Baum gehört) und Ästen, die zum Baum gehören.

Für das Gleichungssystem ist die Umlaufrichtung der Maschen relevant. M<sub>1</sub> dreht im Uhrzeigersinn, da hier die Quelle Uq1 in der Masche ist. Der Spannungspfeil der Quelle sollte möglichst gegen die Umlaufrichtung der Masche gerichtet sein.

Im nächsten Schritt stelle ich für alle Maschen und alle Knoten Gleichungen auf.

$$M_1 : -U_{q1} + U_1 + U_3 + U_2 = 0 \quad (33)$$

$$M_2 : U_3 + U_6 - U_5 = 0 \quad (34)$$

$$M_3 : U_2 - U_6 - U_4 = 0 \quad (35)$$

$$(36)$$

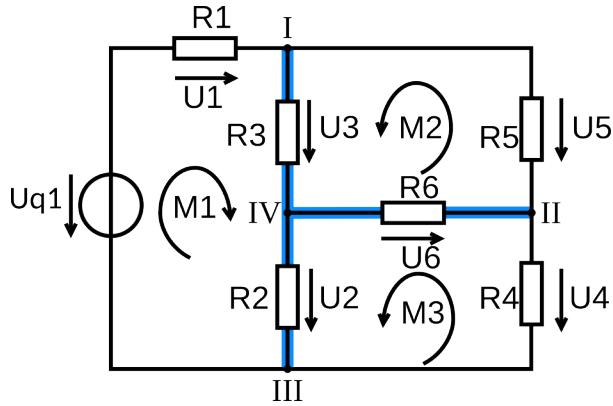


Abbildung 20: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Für die Knoten gilt, dass die Summe aller Ströme, die hineinfließen und die Summe aller Ströme, die hinausfließen null sein muss.  $\sum_{k=1}^n I_k = 0$

Knotengleichungen:

$$I: I_1 - I_3 - I_5 = 0 \quad (45)$$

$$II: I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad (46)$$

$$III: I_2 + I_4 - I_1 = 0 \quad (47)$$

Die Ströme seien gleich der Spannungspfeile an den Widerständen. Ich zähle Ströme, die in den Knoten hineinfließen positiv, Ströme, die aus dem Knoten heraus fließen negativ.

Zur Berechnung der Ströme und Spannungen kann ich die Gleichungen der Maschen und der Knoten zu einem linearen Gleichungssystem (LGS) zusammenfassen. Wichtig dabei ist, dass das Gleichungssystem nicht überbestimmt ist. Es dürfen nur die Gleichungen in das System übernommen werden, die linear unabhängig sind. Z. B. alle Maschengleichungen oder alle Knotengleichungen. Eine Kombination aus Maschengleichungen und Knotengleichungen ist auch möglich, solange alle Gleichungen des LGS linear unabhängig sind.

Mit Hilfe der Maschengleichungen und Widerstände in den Zweigen kann ich die Ströme in den Zweigen bestimmen:

### Berechnung der Ströme

$$-U_{q1} + I_1 * R_1 + I_3 * R_3 + I_2 * R_2 = 0 \quad (48)$$

$$I_3 * R_3 + I_6 * R_6 - I_5 * R_5 = 0 \quad (49)$$

$$I_2 * R_2 - I_6 * R_6 - I_4 * R_4 = 0 \quad (50)$$

Das LGS ist dabei in eine Stufenform zu überführen. Zur leichteren Berechnung verwende ich die Matrix-Schreibweise:

#### LGS aufstellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = 220\Omega, R_2 = 470\Omega, R_3 = 330\Omega, R_4 = 330\Omega, R_5 = 560\Omega, R_6 = 390\Omega, U_q = 5V$$

Für die Berechnung werden die Elemente der Matrix links (Widerstände) mit den Elementen des Spalten-Vektors (Ströme) einzeln multipliziert und anschließend addiert.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & = 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & = 0 \\
 -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & = 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & = 0 \\
 R_1 * I_1 & +R_2 * I_2 & +R_3 * I_3 & +0 * I_4 & +0 * I_5 & +0 * I_6 & = U_{q1} \\
 0 * I_1 & +0 * I_2 & +R_3 * I_3 & +0 * I_4 & +R_5 * I_5 & +R_6 * I_6 & = 0 \\
 0 * I_1 & +R_2 * I_2 & +0 * I_3 & +R_4 * I_4 & +0 * I_5 & +R_6 * I_6 & = 0
 \end{array}$$

Überführung in die Stufenform.

Im ersten Schritt vertausche ich Zeile fünf und sechs der Widerstands-Matrix und des Ergebnis-Vektors. Der Vektor mit den Strömen bleibt gleich.

$$\left( \begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \\
 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6
 \end{array} \right) * \left( \begin{array}{c}
 I_1 \\
 I_2 \\
 I_3 \\
 I_4 \\
 I_5 \\
 I_6
 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 U_{q1} \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right)$$

Oft schreibt man die verkürzte Darstellung. Der Vektor mit Strömen wird in diesem Fall nicht dargestellt, der Vektor mit den Spannungen wird durch eine senkrechte Linie vom Array der Widerstände bzw. Vorfaktoren der Ströme abgetrennt.

### Gekürzte Darstellung der Matrix

$$\left( \begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & U_{q1} \\
 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 & 0 \\
 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 & 0
 \end{array} \right)$$

### Gekürzte Darstellung mit Werten der Widerstände

$$\left( \begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 220\Omega & 470\Omega & 330\Omega & 0 & 0 & 0 & U_{q1} \\
 0 & 470\Omega & 0 & 330\Omega & 0 & 390\Omega & 0 \\
 0 & 0 & 330\Omega & 0 & 560\Omega & 390\Omega & 0
 \end{array} \right)$$

Mit dem gaußschen Eliminationsverfahren kann ich die Matrix (links der senkrechten Linie) in eine Dreiecks-Form bringen. Dazu kann ich jeweils zwei Zeilen vertauschen oder durch Multiplikation von Faktoren zwei Zeilen addieren, sodass in einzelnen Spalten 0-Werte gebildet werden. Ziel der Umrechnung ist, dass die Matrix etwa die Form

### Stufenform - Beispiel

$$\left( \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 0 & 3 & 2 \\
 0 & 0 & 3
 \end{array} \right)$$

erreicht. Das gaußsche Eliminationsverfahren stelle ich an dieser Stelle nicht vertieft dar. Bei Wikipedia ist ein ausführlicher Artikel zum Algorithmus des Verfahrens zu finden.

Wen ich die Matrix in die Dreiecks-Form überführt habe, kann ich von unten nach oben die Werte einsetzen und die Ströme berechnen. Da dieses Vorgehen aufwändig und fehleranfällig ist, kann man alternativ die Verfahren

der Maschenanalyse (Kreisstromverfahren) oder die Knotenanalyse (Knotenspannungsverfahren oder Knotenpotentialverfahren) verwenden.

## 6. Knoten und Maschen

Die Bilder sind in der Präsentation. Der Abschnitt ist im Artikel leer. Die Bilder sollen den Zusammenhang zwischen einer Platine und dem Schaltplan erklären.

## 7. Kreisstromverfahren

Bei diesem Verfahren werden virtuelle Ströme berechnet. In Teilen der Schaltung, in denen nur ein Kreisstrom fließt, ist der Strom des Zweigs identisch zum Kreisstrom der Masche. Wenn mehrere virtuelle Kreisströme durch denselben Zweig fließen, müssen sie entsprechend der Zählrichtung addiert werden. Wenn die Zählrichtung beider Ströme identisch ist, werden sie addiert, sonst subtrahiert. Wenn ein Strom negativ ist, bedeutet dies, dass die Zählrichtung der Masche entgegen der tatsächlichen Stromrichtung ist.

### Kreisstromverfahren - Baum I

1. Baum festlegen (alle Knoten berühren, kein Umlauf).
2. Maschen einzeichnen (Umlaufsinn ist willkürlich)
3. Gleichungen aufstellen.

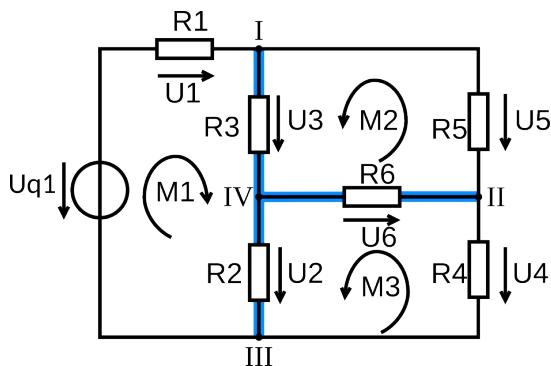


Abbildung 21: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Im Bild 21 ist die Brückenschaltung gezeichnet. In Blau ist der sogenannte Baum eingezeichnet. Der Baum in der Schaltung ist eine Markierung, die alle Knoten berührt. Gleichzeitig darf sie keinen geschlossenen Umlauf bilden. Die Markierungen der Knoten (römische Zahlen) sind für die Maschenstrom- oder Kreisstromanalyse nicht relevant.

Bei der Festlegung des Baums sollte man berücksichtigen, dass Spannungsquellen immer außerhalb des Baums sein sollen. Es wäre hier auch möglich, statt des Ast mit R3 den Ast über R5 zu wählen. Ebenso wäre statt R2 ein Teil des Baums über R4 möglich. Im vorliegenden Baum wäre es auch möglich statt des Ast R6 entweder R5 oder R4 zu wählen.

Nach der Festlegung des Baums werden die Maschen festgelegt. Eine Masche besteht immer aus einer Sehne, einem Teil der Schaltung, der nicht zum Baum gehört und den Ästen des Baums um den Umlauf zu schließen. Masche M1 besteht aus der Sehne mit der Quelle Uq1 und R1. Zusätzlich sind die Äste mit R3 und R2 Teil der Masche.

Der Umlaufsinn der Masche ist frei wählbar. Bei Maschen, die eine Quelle beinhalten sollte man den Umlaufsinn entgegen dem Zählpfeil der Quelle (Zählpfeil hier nach unten, daher sollte der Umlauf an der Stelle nach oben verlaufen). Bei den Maschen 2 und 3 ist der Umlaufsinn frei wählbar.

## Kreisstromverfahren - Baum II

Gleichungssystem

1. Hauptdiagonale:  $R_s$  in der Masche
2. Nebendiagonalen: Verbindungs- $R_s$
3. Quelle in Quellen-Vektor

Nach der Festlegung der Maschen werden die Widerstände in einer Matrix notiert. Auf der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) werden die Widerstände der Maschen eingetragen. An Position 1-1 (links oben) stehen die Widerstände der Masche 1, in der Mitte (Position 2-2) die Widerstände der Masche 2 und in der Position 3-3 die Widerstände der Masche 3.

An den anderen Positionen werden die Koppelwiderstände notiert. Masche 1 und Masche 2 haben den Koppelwiderstand  $R_3$ , da in beiden Maschen nur  $R_3$  gemeinsam ist. Das Vorzeichen für  $R_3$  ist von den Umlaufrichtungen der Maschen abhängig. Wenn die Umlaufrichtung (am betreffenden Widerstand / Ast) gleich ist, wird der Widerstand mit positiven Vorzeichen eingetragen. Wenn die Umlaufrichtungen gegenläufig sind, wird der Widerstand mit negativem Vorzeichen eingetragen.

Anschließend werden der Vektor für die Maschenströme (hier  $I_{M1}$  bis  $I_{M3}$ ) erstellt und - rechts vom Gleichheitszeichen - der Vektor mit den Spannungsquellen. Wenn in einer Masche keine Quelle vorhanden ist, wird dort 0 eingetragen. (siehe Gleichungssystem, unten)

## Kreisstromverfahren - Gleichungssystem

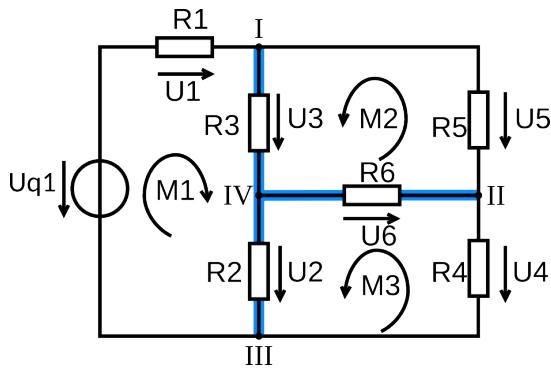


Abbildung 22: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & R_3 & R_2 \\ R_3 & R_3 + R_5 + R_6 & -R_6 \\ R_2 & -R_6 & R_2 + R_4 + R_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem kann per Hand gelöst werden. Alternativ ist eine Lösung mit einem geeigneten Taschenrechner oder z.B. octave auf dem Computer möglich. Octave ist open source.

## 8. Knotenspannungsverfahren

- Abschnitt folgt noch -

### A. Lösungen

#### A.1. Ersatzwiderstand

##### A.1.1. Übungen zu Zweipole I

a  $R_1 = R_2 = 220\Omega$   $R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$   $R_{3||45} = 173,12\Omega$

**b**  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 560\Omega$   $R_{3||45} = 178,14\Omega$

**c**  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$   $R_3 = 120\Omega$   $R_{3||45} = 85,71\Omega$

### A.1.2. Übungen zu Zweipole II

**a**  $R_1 = R_2 = 220\Omega$   $R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$   $R_{3||5+4} = 585,01\Omega$

**b**  $R_1 = R_2 = R_3 = 150\Omega$   $R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 560\Omega$   $R_{3||5+4} = 650,79\Omega$

**c**  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$   $R_3 = 120\Omega$   $R_{3||5+4} = 216,67\Omega$

### A.2. Spannungsteiler

Zu Aufgabe aus Abschnitt 2.1

| U [V] | $R_1[\Omega]$ | $R_2[\Omega]$ | $I_{R_1}$ | $I_{R_2}$ |
|-------|---------------|---------------|-----------|-----------|
| 5     | 220           | 330           | 9,09 mA   | 9,09 mA   |
| 12    | 220           | 470           | 17,39 mA  | 17,39 mA  |
| 12    | 220           | 780           | 12 mA     | 12 mA     |
| 12    | 470           | 683           | 10,4 mA   | 10,4 mA   |
| 14,96 | 560           | 120           | 22 mA     | 22 mA     |
| 6,5   | 470           | 1,5k          | 3,3 mA    | 3,3 mA    |

### A.3. Lösungsvorschlag zu Schaltung 2

Gegeben seien die Werte:  $R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 220\Omega$   $R_3 = 270\Omega$ ,  $R_4 = 470\Omega$   $R_5 = 560\Omega$ ,  $R_6 = 180\Omega$   $U_{q1} = 12 V$ ,  $U_{q2} = 15 V$

Da ich die Spannung an  $R_3$  berechnen soll, kann ich die Schaltung nur bis Bild 27 / 32 zusammenfassen.

#### A.3.1. Schaltung 2 - nur Quelle 1 aktiv

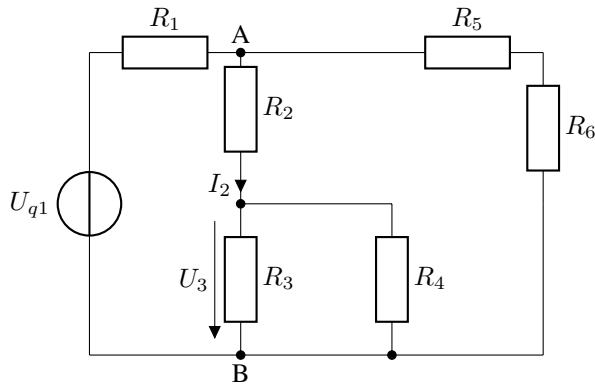


Abbildung 24: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.1)

In Schritt 1 (Bild 24) ist die Quelle 2 entfernt worden. Nur Quelle 1 ist jetzt aktiv. Dies ergibt die Teilspannung  $U'_3$ . Später berechne ich die Teilspannung  $U''_3$  und addiere die beiden Teilspannungen. Wenn drei oder mehr Quellen in der Schaltung sind, muss ich das verfahren für jede Quelle anwenden. Dabei ist immer nur eine Quelle zur selben Zeit aktiv. Ich muss jeweils die Schaltung zusammenfassen, um die gesuchte (Teil-)Spannung (hier  $U_3$  an  $R_3$ ) berechnen zu können.

In Schritt 1.2 (Bild 25) werden die Widerstände  $R_5$  und  $R_6$  zu einem Widerstand zusammengefasst.

In Schritt 1.3 (Bild 26) werden die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  zusammengefasst, da in der Parallelschaltung dieselbe Spannung anliegt.  $R_2$  kann nicht mit dem neuen Widerstand  $R_{3||4}$  zusammengefasst werden, da die Spannung an  $R_3$  gesucht wird. Bei einer Zusammenfassung von  $R_2$  und  $R_{3||4}$  kann die Teilspannung nicht mehr direkt bestimmt werden. Ich müsste dann mithilfe der Spannungsteiler-Regel die Teilspannung bestimmen.

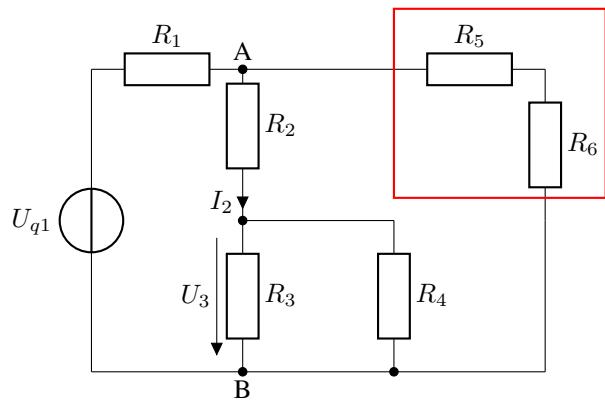


Abbildung 25: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.2)

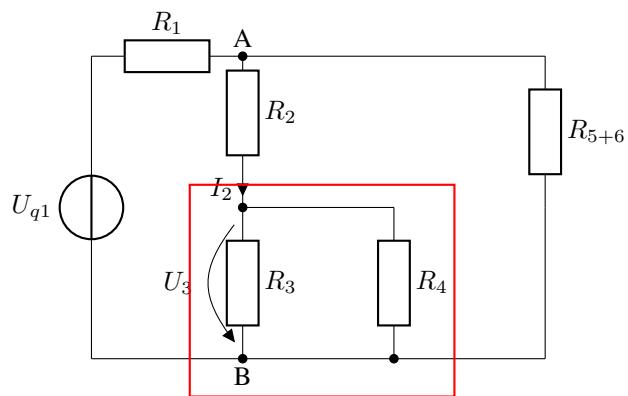


Abbildung 26: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.3)

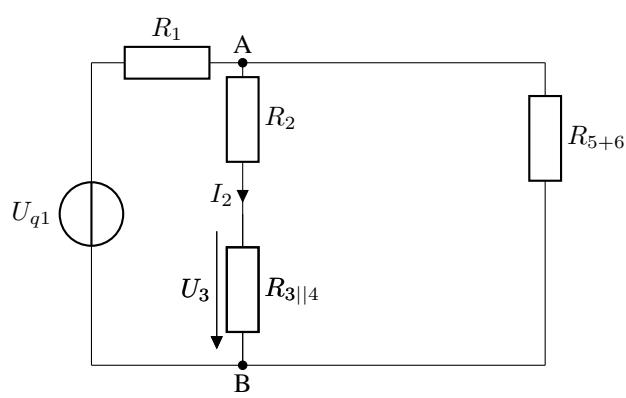


Abbildung 27: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.4)

### A.3.2. Schaltung 2 - nur Quelle 2 aktiv

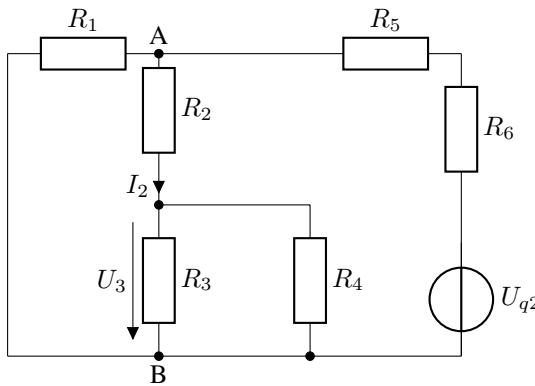


Abbildung 29: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.1)

$R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 220\Omega$   $R_3 = 270\Omega$ ,  $R_4 = 470\Omega$   $R_5 = 560\Omega$ ,  $R_6 = 180\Omega$   $U_{q1} = 12V$ ,  $U_{q2} = 15V$

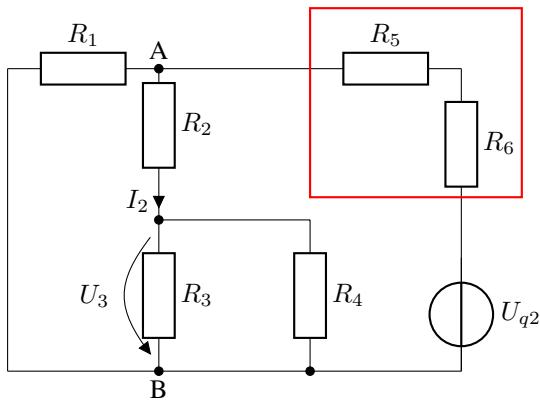


Abbildung 30: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.2)

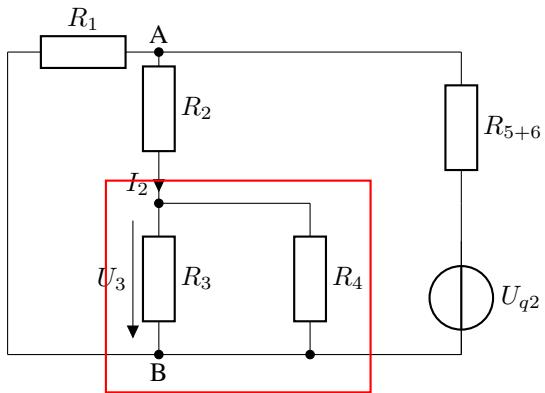


Abbildung 31: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.3)

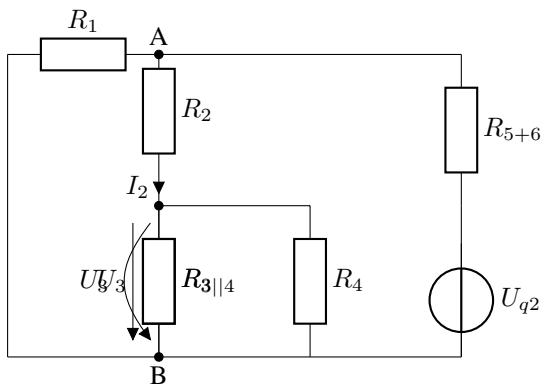


Abbildung 32: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.4)

## A.4. Lösungsvorschlag zu Schaltung 3

### A.4.1. Schaltung 3 - nur Quelle 1 aktiv

$R_1 = 100\Omega$ ,  $R_2 = 220\Omega$   $R_3 = 270\Omega$ ,  $R_4 = 470\Omega$   $R_5 = 470\Omega$ ,  $R_6 = 560\Omega$   $R_7 = 120\Omega$   $U_{q1} = 12V$ ,  $U_{q2} = 15V$

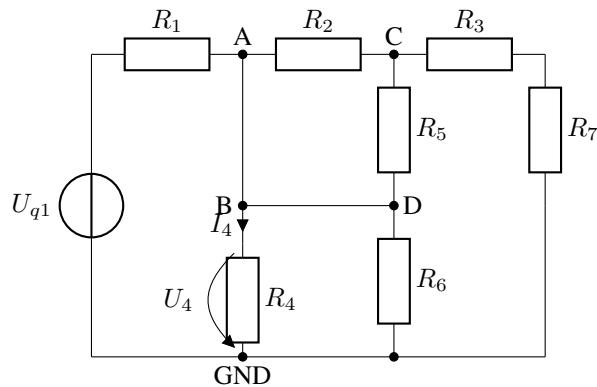


Abbildung 34: Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.1) Quelle Q2 entfernt

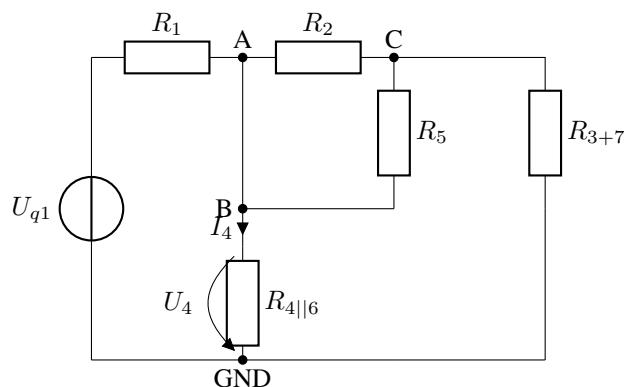


Abbildung 35: Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.2)

## B. Literatur und Quellen

### Literatur und Quellen

**Wikibooks** <https://de.wikibooks.org/wiki/Elektrostatik>

**Marinescu, Marlene** Elektrische und magnetische Felder, Eine praxisorientierte Einführung; A 3 (2012); Springer

**Tutorial zu Simulation (Spice)** <https://ngspice.sourceforge.io/ngspice-eeschema.html> (abgerufen: 03.11.25)

und <https://www.kicad.org/>

## Abbildungsverzeichnis

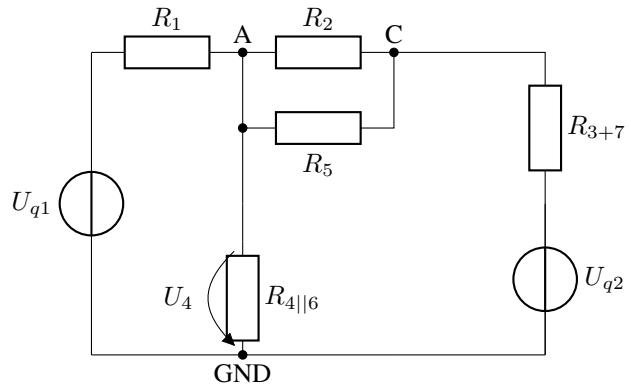


Abbildung 36: Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.4)

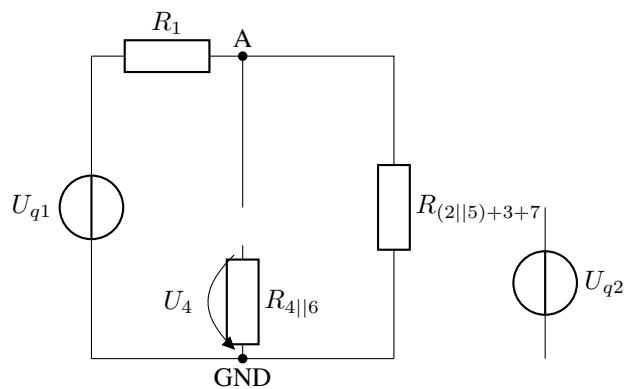


Abbildung 37: Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.5)

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.  | Berechnung des Ersatzwiderstands . . . . .                           | 3  |
| 2.  | Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1 . . . . .                  | 3  |
| 3.  | Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2 . . . . .                  | 4  |
| 4.  | Überlagerung, Schaltung 1, Zwei Quellen aktiv . . . . .              | 5  |
| 5.  | Nur Quelle eins aktiv . . . . .                                      | 6  |
| 6.  | Nur Quelle zwei aktiv . . . . .                                      | 7  |
| 7.  | Überlagerung, Schaltung 2 . . . . .                                  | 8  |
| 8.  | Überlagerung, Schaltung 3 . . . . .                                  | 9  |
| 9.  | Messbrücke . . . . .   | 9  |
| 10. | Messbrücke . . . . .   | 10 |
| 11. | Messbrücke . . . . .   | 10 |
| 12. | Messbrücke . . . . .   | 11 |
| 14. | Messbrücke . . . . .   | 11 |
| 18. | Messbrücke . . . . .   | 12 |
| 19. | Messbrücke mit vollständigem Baum . . . . .                          | 12 |
| 20. | Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen . . . . .              | 13 |
| 21. | Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen . . . . .              | 15 |
| 22. | Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen . . . . .              | 16 |
| 24. | Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.1) . . . . .                    | 17 |
| 25. | Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.2) . . . . .                    | 18 |
| 26. | Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.3) . . . . .                    | 18 |
| 27. | Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.4) . . . . .                    | 19 |
| 29. | Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.1) . . . . .                    | 20 |
| 30. | Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.2) . . . . .                    | 20 |
| 31. | Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.3) . . . . .                    | 21 |
| 32. | Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.4) . . . . .                    | 21 |
| 34. | Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.1) Quelle Q2 entfernt . . . . . | 22 |
| 35. | Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.2) . . . . .                    | 22 |
| 36. | Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.4) . . . . .                    | 23 |
| 37. | Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.5) . . . . .                    | 23 |