

Arbeitsunterlagen zu FOS Elektrotechnik, Technische Informatik, Mechatronik Themenfeld 12.1

Gleichstromnetzanalyse

Thomas Maul

V 0.1.2 - im Aufbau

Stand: 3. November 2025

Inhaltsverzeichnis

I. Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse	2
1. Zweipole	2
2. Spannungsteiler	4
3. Helmholtz	5
3.1. Nur Quelle U1 aktiv	5
3.2. Nur Quelle U2 aktiv	7
4. Dreieck <-> Stern	8
5. Pflicht-Themen, die noch offen sind	11
6. Literatur und Quellen	11

Teil I.

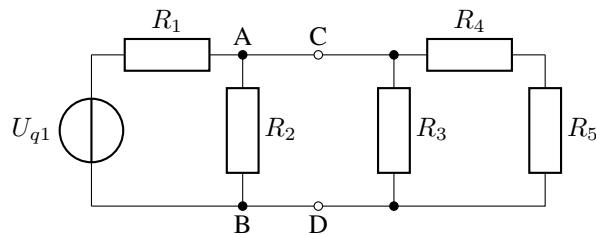
Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse

1. Zweipoltheorie (Pflicht)

In der Elektrotechnik werden Bauteile, die zwei Abschlüsse haben als Zweipole bezeichnet. Dies können jeweils einzelne Widerstände, Spulen und Kondensatoren sein. Manchmal ist es praktisch eine (Teil-)Schaltung als einen Zweipol darzustellen und in Berechnungen als ein virtuelles Bauteil zu verwenden.

Zweipole

In der Schaltung unten sollen die Widerstände R_3 bis R_5 als ein virtuelles Bauteil dargestellt werden. Es soll

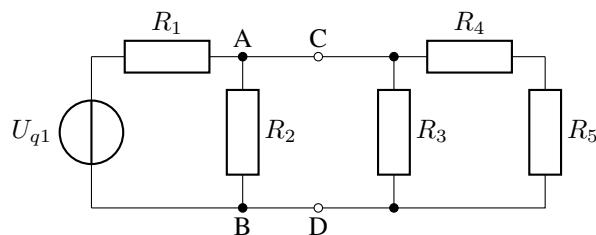


so aussehen, als ob nur ein Widerstand rechts von den Punkten C und D wäre. Durch Reihenschaltung von R_4 und R_5 zu R_{45} und anschließender Parallelschaltung mit R_3 kann ich dies erreichen (siehe Bild 1). Der Widerstand $R_{3||45}$ verhält sich für die Schaltung wie die Widerstände R_3 , R_4 und R_5 .

Ich lege für die Widerstände folgende Werte fest:

Werte für Berechnung

$$R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega \quad R_3 = 30\Omega \quad R_4 = 40\Omega \quad R_5 = 50\Omega \quad U_{q1} = 5V, \quad U_{q2} = 12V$$



Berechnung des Ersatzwiderstands

$$R_{45} = R4 + R5 \quad (1)$$

$$R_{45} = 40\Omega + 50\Omega \quad (2)$$

$$R_{45} = 90\Omega \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{90\Omega} \quad (5)$$

$$R_{3||45} = 22,5\Omega \quad (6)$$

Jetzt kann ich den Gesamtwiderstand $R_{3||45}$ berechnen. Ich kann jedoch nicht mehr einzelne Spannungen oder

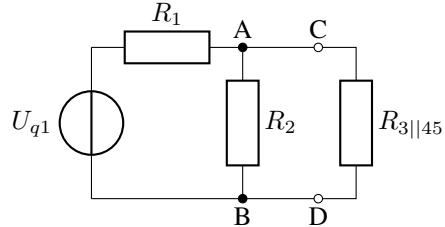


Abbildung 1: Berechnung des Ersatzwiderstands

Ströme messen oder darstellen.

Der virtuelle Widerstand $R_{3||45}$ ersetzt die Schaltung der drei Widerstände. Das Gleiche ist mit allen passiven Bauteilen möglich. Auch aktive Bauteile (Quellen, Transistor, FET, ...) kann man durch einen Zweipol ersetzen.

Übungen zu Zweipole I

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a $R1 = R2 = 220\Omega \quad R3 = R5 = 230\Omega \quad R4 = 470\Omega$

b $R1 = R2 = R3 = R5 = 230\Omega \quad R4 = 470\Omega$

c $R1 = R2 = R4 = R5 = 230\Omega \quad R3 = 470\Omega$

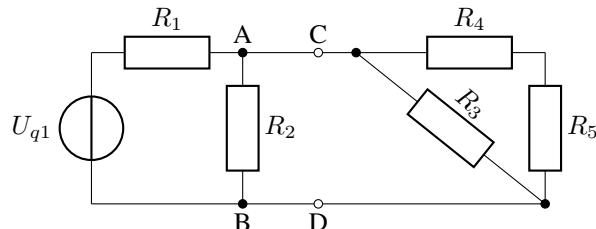


Abbildung 2: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1

Übungen zu Zweipole II

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a $R1 = R2 = 220\Omega \quad R3 = R5 = 230\Omega \quad R4 = 470\Omega$

b $R1 = R2 = R3 = R5 = 230\Omega \quad R4 = 470\Omega$

c $R1 = R2 = R4 = R5 = 230\Omega \quad R3 = 470\Omega$



Abbildung 3: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2

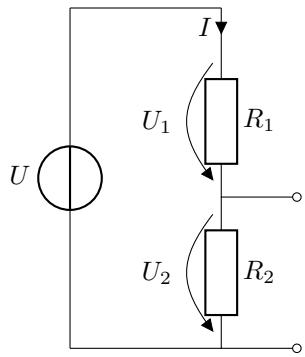
2. Spannungsteiler

Bei einem Spannungsteiler wird eine anliegende Spannung in mehrere Teilspannungen aufgeteilt.

Dies kann zum Beispiel mit Widerständen passieren. Der Strom I muss in Bild 8 durch alle Widerstände fließen. Es gibt keine Knoten, an denen er sich aufteilt. Die Spannung U der Quelle fällt an allen Widerständen ab. An jedem Widerstand fällt ein Teil der Spannung ab. Die Spannung an den Widerständen ist nur von der Größe des Widerstands abhängig, da der Strom in allen Widerstände identisch ist.

Die Summe aller Spannungen in einem Stromkreis, man spricht auch von einem Umlauf, muss null sein. Die Richtung der Spannung an der Spannungsquelle wird hier in umgekehrter Richtung zu den Spannungen an den Widerständen gezählt (Formel 7).

Spannungsteiler



$$U = U_1 + U_2 \quad (7)$$

$$I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (8)$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \quad (9)$$

$$U_2 = I * R_2 \quad (10)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_{ges}} * R_2 \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} * R_2 \quad (12)$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (13)$$

Formel 8 ist hier für die beiden Teilwiderstände der Schaltung aufgestellt. Bei einem Spannungsteiler mit mehreren Widerständen wären hier alle Widerstände genannt.

Formel 9 stellt den Zusammenhang zwischen dem gemeinsamen Strom und den Widerständen und Spannungen dar. Wenn man nur den zweiten und dritten Teil der Gleichung betrachtet, ergibt sich ein Verhältnis. Das Verhältnis aus U_1 zu R_1 entspricht dem Verhältnis aus U_2 zu I_2 . Mit dem Formeln 10 kann ich das Verhältnis aus der Gesamtspannung U und der Teilspannung - hier U_2 bestimmen. Dabei gilt: Die Teilspannung steht im Verhältnis zur Gesamtspannung, wie der Teilwiderstand zum Gesamtwiderstand.

Der Spannungsteiler in diesem Beispiel ist unbelastet, das bedeutet, dass außer den beiden Widerständen, die die Spannung U aufteilen keine weiteren Widerstände vorhanden sind. Wenn parallel zu R_2 ein weiterer Widerstand geschaltet wäre, wäre zu prüfen, wie groß der Widerstand ist, der parallel geschaltet ist. Wenn der parallele Widerstand viel größer ist (Faktor 100 und mehr) kann er vernachlässigt werden, da der Strom, der durch den Parallelwiderstand fließt, sehr klein ist im Verhältnis zu R_2 . Wenn die Widerstände annähernd die gleiche Größe hätten, würde man von einem belasteten Spannungsteiler sprechen. In diesem Fall müsste die Parallelschaltung unbedingt für die Berechnung berücksichtigt werden.

3. Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Wenn in einer Schaltung, man spricht auch von elektrischen Netzwerken, mehr als eine Quelle vorhanden ist, speisen alle Quellen gemeinsam die Schaltung mit Energie. Um in der Schaltung unten (Abbildung 4) zu berechnen, wie viel Strom durch den Widerstand R_2 fließt, muss ich wissen, wie viel Strom die Quelle U_1 und wie viel die Quelle U_2 an den Widerstand abgibt.

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2

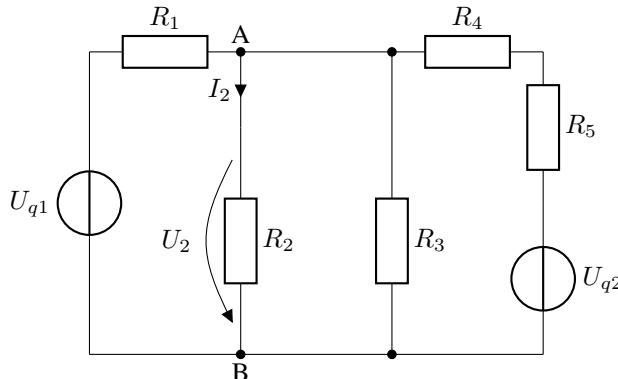


Abbildung 4: Zwei Quellen aktiv

$$R1 = 10\Omega, R2 = 20\Omega, R3 = 30\Omega, R4 = 40\Omega, R5 = 50\Omega$$

Mit einem Messgerät kann ich die Spannung an R_2 messen, den Strom, der durch R_2 fließt ebenfalls. Rechnerisch muss ich die Schaltung so verändern, dass jeweils nur die eine Quelle aktiv ist. Die anderen Spannungsquellen werden kurzgeschlossen. Wenn Stromquellen in der Schaltung sind, werden diese aufgetrennt. Innenwiderstände der Quellen (hier R_1 zu U_1 und R_5 zu U_2 bleiben dabei in der Schaltung. Die Teilspannung an R_2 , die ich jetzt errechnen kann, nenne ich $U_{2'}$.

3.1. Nur Quelle U_1 aktiv

Nur Quelle U_1 aktiv

$$U_{q1} = 5V, U_{Q2} = 12V, R1 = 10\Omega, R2 = 20\Omega, R3 = 30\Omega, R4 = 40\Omega, R5 = 50\Omega$$

R_2 wird jetzt mit dem Ersatzwiderstand $R_{3||45}$ parallel geschaltet.

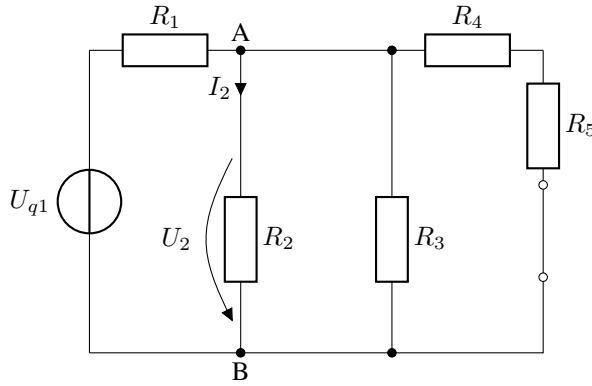


Abbildung 5: Nur Quelle 1 aktiv

Berechnung Ersatzwiderstand I

$$U_{2'} = I_2 * R_2 || R_3 || R_4 + R_5 \quad (14)$$

$$U_{2'} = I_2 * \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} \quad (15)$$

I_2 ist nicht bekannt. Zur Berechnung müssten jedoch entweder I_2 oder U_2 bekannt sein. Somit hilft diese Formel noch nicht endgültig. Bekannt sind die Widerstandswerte und die Spannung U_1 . Mit der Formel eines Spannungsteilers kann ich die Spannung an der Parallelschaltung ausrechnen, ohne I_2 zu kennen.

Berechnung Ersatzwiderstand II

$$U_{q1} = U_1 + U_2 \quad (16)$$

$$U_2 = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_4 || R_5}{R_1 + R_2 || R_3 || R_4 || R_5} \quad (17)$$

In der Festlegung 4 (Seite 2) habe ich die Werte für die Widerstände und die Spannungen der Quellen festgelegt. In Formel (6, Seite 3) habe ich den Ersatzwiderstand für $R_{3||45}$ berechnet. Hier setze ich die Werte in die Formeln ein:

Einsetzen I

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_4 || R_5}{R_1 + R_2 || R_3 || R_4 || R_5} \quad (18)$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}} \quad (19)$$

(20)

Einsetzen II

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R3 || R45}{R1 + R2 || R3 || R45}$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4+R_5}}}{R1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4+R_5}}}$$

$$U_{2'} = 5V * \frac{10,59\Omega}{10\Omega + 10,59\Omega} \quad (21)$$

$$U_{2'} = 5V * 0,514 \quad (22)$$

$$U_{2'} = 2,57V \quad (23)$$

3.2. Nur Quelle U2 aktiv

Jetzt schließe ich die Quelle 1 kurz und nur Quelle U_{Q2} ist aktiv. Damit kann ich den Teilstrom berechnen, der fließen würde, wenn in der Original-Schaltung nur diese Quelle vorhanden wäre.

Nur Quelle U2 aktiv

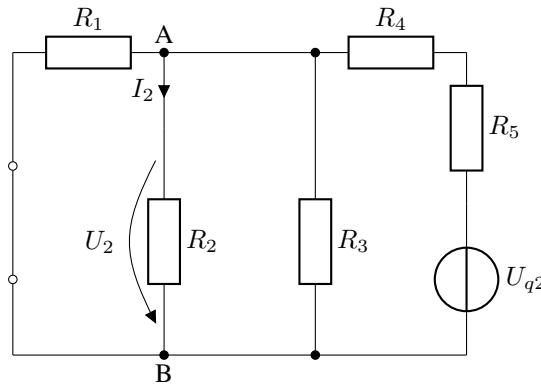


Abbildung 6: Nur Quelle zwei aktiv

$R1 = 10\Omega$, $R2 = 20\Omega$, $R3 = 30\Omega$, $R4 = 40\Omega$, $R5 = 50\Omega$ In diesem Fall ist $R2$ parallelgeschaltet mit $R1$ und $R3$.

Quelle 2, Einsetzen I

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R4 + R5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (24)$$

$$(25)$$

Quelle 2, Einsetzen II

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (26)$$

$$U_{2''} = 12V * \frac{\frac{1}{\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{30\Omega}}}{40\Omega + 50\Omega + \frac{1}{\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{30\Omega}}} \quad (27)$$

$$U_{2''} = 12V * 0,057 \quad (28)$$

$$U_{2''} = 0,685V \quad (29)$$

Addition

Zum Abschluss werden die beiden Teilspannungen addiert.

$$U_2 = U_{2'} + U_{2''} \quad (30)$$

$$U_2 = 2,57V + 0,685V \quad (31)$$

$$U_2 = 3,26V \quad (32)$$

$U_{2'}$ ist die Teilspannung, die von der Quelle U_{Q1} kommt, $U_{2''}$ ist von $U_{2''}$. U_2 ist die gesamte Spannung, die an Widerstand R_2 abfällt. Man spricht hier auch von der resultierenden Spannung. Die Spannung U_2 ist in der Schaltung messbar. die Teilspannungen $U_{2'}$ und $U_{2''}$ sind nicht direkt messbar. Oft sind Quellen in Schaltungen keine echten Spannungsquellen, sondern Bauteile, die eine Spannung liefern (Transistor, Operationsverstärker, Ausgang eines Logik-ICs, ...)

4. Dreieck <-> Stern-Umwandlung (Pflicht)

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Problematik, dass einige Schaltungen nicht alleine durch Reihenschaltung oder Parallelschaltung berechnet werden können. Im Bild 7 ist eine Messbrücke gezeichnet. Diese Brückenschaltung wird verwendet, um Spannungsänderungen an einem Sensor (z. B. Temperatursensor PT1000, DMS, ...) sehr klein zu machen. R_4 wäre zum Beispiel der Messwiderstand. R_6 wäre der Innenwiderstand des Messgeräts oder ein Widerstand, an dem der Spannungsabfall gemessen wird, um ihn durch Digitalisierung in einem Computer/Controller¹ zu verarbeiten. Durch eine Umwandlung zwischen einer Anordnung der Bauteile (hier Widerstände) im Dreieck und einer Anordnung in einem Stern können äquivalente Werte berechnet werden. Dadurch ist es möglich die entstandene Schaltung mithilfe von Reihenschaltung und Parallelschaltung zu berechnen. Nach der Umrechnung ist es nicht direkt möglich die Ströme und Spannungen der ursprünglichen Teilschaltung (hier R_3, R_5, R_6) zu berechnen. Es ist lediglich möglich die Ströme und Spannungen an R_1, R_2 und R_4 zu bestimmen.

Messbrücke

Bild 8 stellt dieselbe Schaltung dar, wie Bild 7.

Messbrücke - Stern-Dreieck

$$R_{AC} = R_3$$

$$R_{AB} = R_6$$

$$R_{BC} = R_5$$

In Bild 9 wurden die Widerstände des Dreiecks in Widerstände in einer sternförmigen-Anordnung umgerechnet. Die Ströme und Spannungen an den Punkten A, B, und C sind bei beiden Anordnungen identisch.

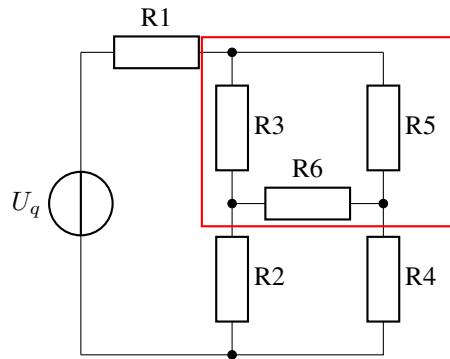


Abbildung 7: Messbrücke

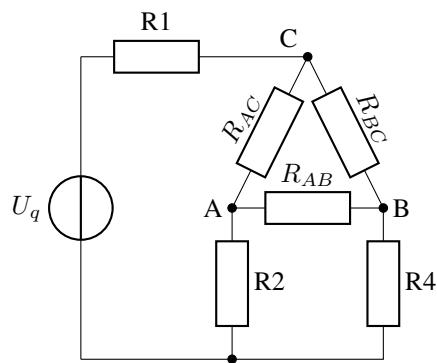


Abbildung 8: Messbrücke

Umwandlung Dreieck -> Stern

$$R_A = \frac{R_{AC}R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

In den folgenden Bildern ist der umgekehrte Weg von einem Stern zu einem Dreieck dargestellt. Die Herleitung der Formeln habe ich nicht geschrieben, sie ist auf der Seite <https://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Dreieck-Transformation> zu finden.

Umwandlung - Stern- > Dreieck

¹Auf einer Arduino R3-Platine ist ein AT_Mega32-IC. Dieser hat einen Eingang, der analoge Spannungen digitalisieren kann.

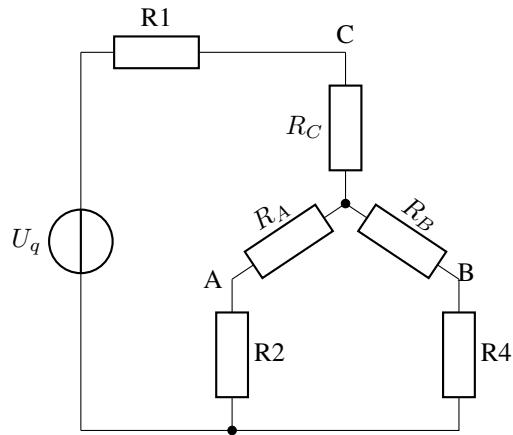


Abbildung 9: Messbrücke

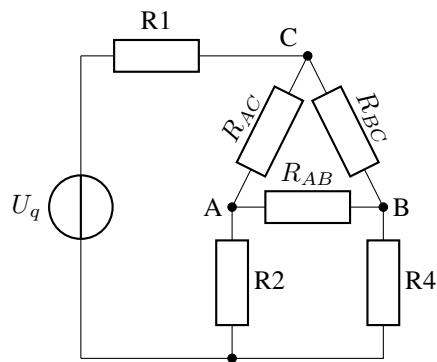


Abbildung 10: Messbrücke

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B}{R_C} + R_A + R_B$$

$$R_{AC} = \frac{R_A R_C}{R_B} + R_A + R_C$$

$$R_{BC} = \frac{R_B R_C}{R_A} + R_B + R_C$$

Messbrücke

$$R_1 = 220\Omega$$

$$R_2 = 470\Omega$$

$$R_3 = 330\Omega$$

$$R_4 = 330\Omega$$

$$R_5 = 560\Omega$$

$$R_6 = 390\Omega$$

$$U_q = 5 V$$

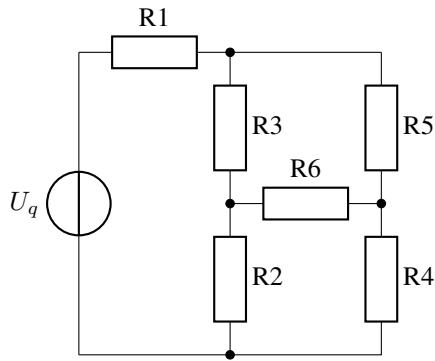


Abbildung 11: Messbrücke

$$R_4 = R_{\text{Mess}} \text{ gesucht: Strom und Spannung an } R_6, R_4 \text{ und } R_5 \quad I_4 = 4,2 \text{ mA}, \quad I_5 = 3,3 \text{ mA}, \quad I_6 = 890 \mu\text{A} \\ U_4 = 1,4 \text{ V}, \quad U_5 = 3,6 \text{ V}, \quad U_6 = 0,35 \text{ V}$$

5. Pflicht-Themen, die noch offen sind

Pflicht-Themen, die noch offen sind

Folgende Themen sind gemäß Prüfungserlass für die Prüfung 2026 Pflicht, aber noch nicht ausgearbeitet.

- Knoten- und Maschengleichungen
- Kreisstromverfahren
- Knotenspannungsverfahren

Die Themen folgen demnächst hier.

6. Literatur und Quellen

Literatur und Quellen

Wikibooks <https://de.wikibooks.org/wiki/Elektrostatik>

Marinescu, Marlene Elektrische und magnetische Felder, Eine praxisorientierte Einführung; A 3 (2012); Springer

Tutorial zu Simulation (Spice) <https://ngspice.sourceforge.io/ngspice-eeschema.html> (abgerufen: 03.11.25) und <https://www.kicad.org/>

Abbildungsverzeichnis

1. Berechnung des Ersatzwiderstands	3
2. Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1	3
3. Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2	4
4. Zwei Quellen aktiv	5
5. Nur Quelle 1 aktiv	6
6. Nur Quelle zwei aktiv	7
7. Messbrücke	9
8. Messbrücke	9
9. Messbrücke	10
10. Messbrücke	10
11. Messbrücke	11