

Teil I

Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse

Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz
(Pflicht)

Dreieck \leftrightarrow Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen
(Pflicht)

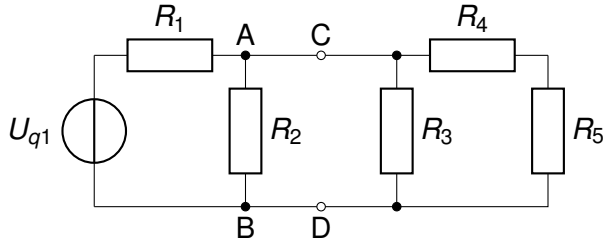
Knoten und Maschen

Kreisstromverfahren

Ersatzquellen

Zweipole

In der Schaltung unten sollen die Widerstände R_3 bis R_5 als ein virtuelles Bauteil dargestellt werden.



Werte für Berechnung

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$

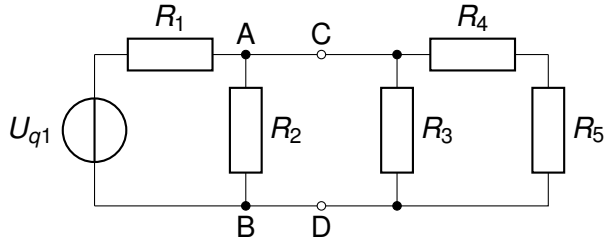
$$R_3 = 30\Omega$$

$$R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5V,$$

$$U_{q2} = 12V$$



Berechnung des Ersatzwiderstands

$$R_{45} = R_4 + R_5 \quad (1)$$

$$R_{45} = 40\Omega + 50\Omega \quad (2)$$

$$R_{45} = 90\Omega \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{90\Omega} \quad (5)$$

$$R_{3||45} = 22,5\Omega \quad (6)$$

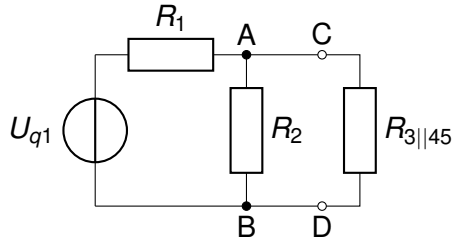


Abbildung: Berechnung des Ersatzwiderstands

Übungen zu Zweipole I

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a $R_1 = R_2 = 220\Omega$ $R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 470\Omega$

b $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 560\Omega$

c $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$ $R_3 = 120\Omega$

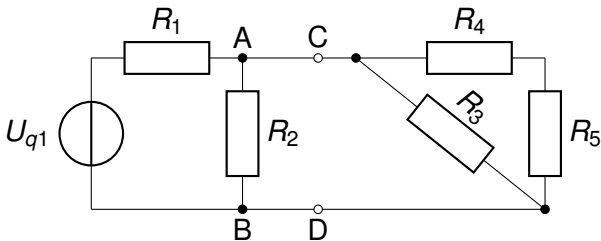


Abbildung: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1

Übungen zu Zweipole II

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a $R_1 = R_2 = 220\Omega$ $R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 470\Omega$

b $R_1 = R_2 = R_3 = 150\Omega$ $R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 560\Omega$

c $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$ $R_3 = 120\Omega$

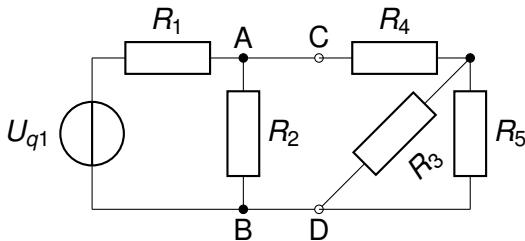
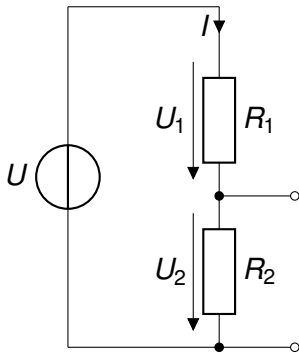


Abbildung: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2

Spannungsteiler



$$U = U_1 + U_2 \quad (7)$$

$$I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (8)$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \quad (9)$$

$$U_2 = I * R_2 \quad (10)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_{ges}} * R_2 \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} * R_2 \quad (12)$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (13)$$

Übungsaufgaben zu Spannungsteiler

U [V]	R ₁ [Ω]	R ₂ [Ω]	I _{R1}	I _{R2}
5	220	330	12 mA	10,4 mA
12	220	470		
12	220			
12	470			
	560	120	22 mA	
	470	1,5k	3,3 mA	

Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

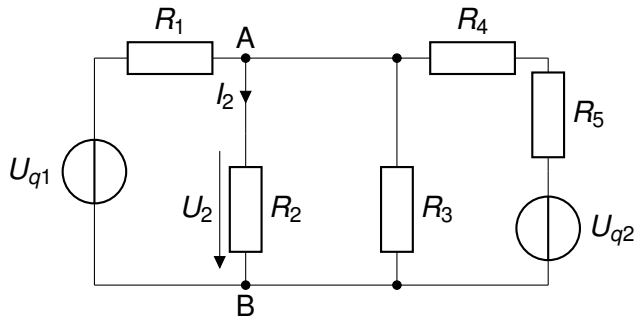
Aufgaben zu Überlagerung

Dreieck \leftrightarrow Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Knoten und Maschen

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

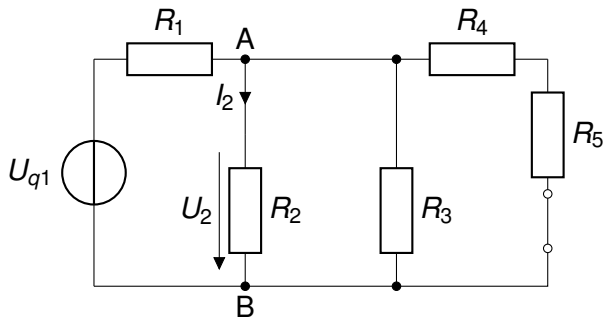
$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 1, Zwei Quellen aktiv

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Nur Quelle eins aktiv

Berechnung Ersatzwiderstand I

$$U_{2'} = I_2 * R_2 || R_3 || R_4 + R_5 \quad (14)$$

$$U_{2'} = I_2 * \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} \quad (15)$$

I_2 ist nicht bekannt.

Berechnung Ersatzwiderstand II

$$U_{q1} = U_1 + U_2 \quad (16)$$

$$U_2 = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (17)$$

Einsetzen I

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (18)$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}} \quad (19)$$

$$(20)$$

Einsetzen II

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}}$$

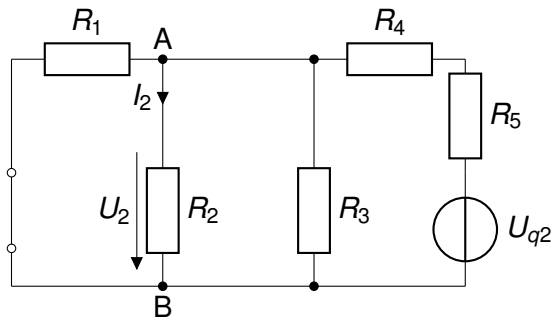
$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}$$

$$U_{2'} = 5 \text{ V} * \frac{10,59 \Omega}{10 \Omega + 10,59 \Omega} \quad (21)$$

$$U_{2'} = 5 \text{ V} * 0,514 \quad (22)$$

$$U_{2'} = 2,57 \text{ V} \quad (23)$$

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Nur Quelle zwei aktiv

Quelle 2, Einsetzen I

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (24)$$

(25)

Quelle 2, Einsetzen II

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (26)$$

$$U_{2''} = 12 \text{ V} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{30 \Omega}}}{40 \Omega + 50 \Omega + \frac{1}{\frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{30 \Omega}}} \quad (27)$$

$$U_{2''} = 12 \text{ V} * 0,057 \quad (28)$$

$$U_{2''} = 0,685 \text{ V} \quad (29)$$

Addition

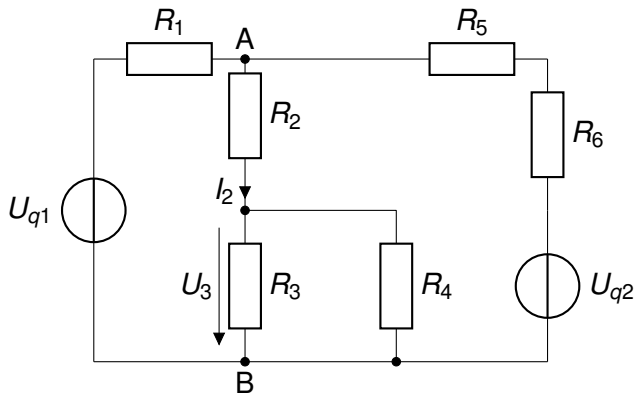
Zum Abschluss werden die beiden Teilspannungen addiert.

$$U_2 = U_{2'} + U_{2''} \quad (30)$$

$$U_2 = 2,57 \text{ V} + 0,685 \text{ V} \quad (31)$$

$$U_2 = 3,26 \text{ V} \quad (32)$$

Schaltung 2



$$R_1 = 100\Omega, R_2 = 220\Omega$$

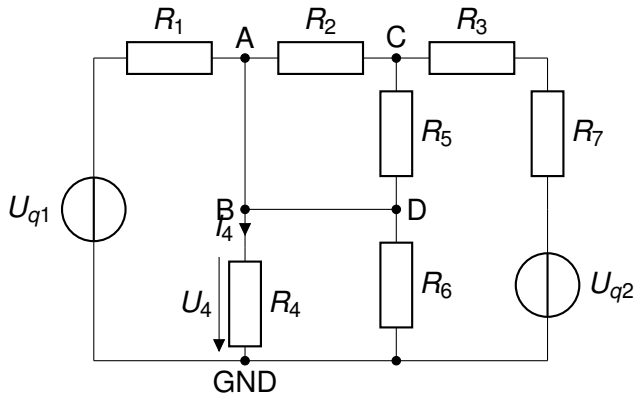
$$R_3 = 270\Omega, R_4 = 470\Omega$$

$$R_5 = 560\Omega, R_6 = 180\Omega$$

$$U_{q1} = 12\text{ V}, U_{q2} = 15\text{ V}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 2

Schaltung 3



$$\begin{aligned} R_1 &= 100 \, \Omega, & R_2 &= 220 \, \Omega \\ R_3 &= 270 \, \Omega, & R_4 &= 470 \, \Omega \\ R_5 &= 470 \, \Omega, & R_6 &= 560 \, \Omega \\ R_7 &= 120 \, \Omega \\ U_{q1} &= 12 \, \text{V}, & U_{q2} &= 15 \, \text{V} \end{aligned}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 3

Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Dreieck \leftrightarrow Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Knoten und Maschen

Kreisstromverfahren

Messbrücke

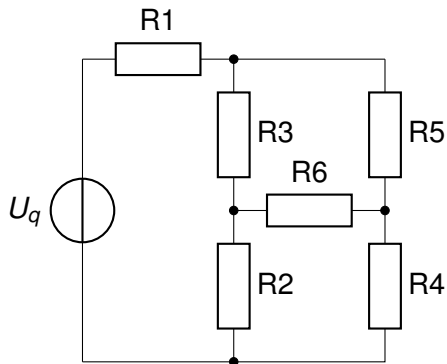


Abbildung: Messbrücke

Messbrücke

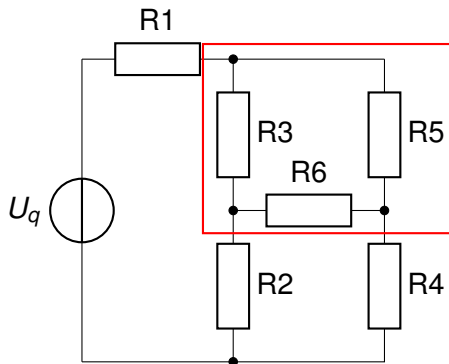
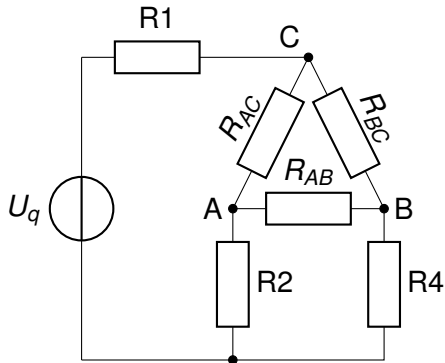


Abbildung: Messbrücke

Messbrücke - Stern-Dreieck



$$R_{AC} = R_3$$

$$R_{AB} = R_6$$

$$R_{BC} = R_5$$

Abbildung: Messbrücke

Umwandlung Dreieck \rightarrow Stern

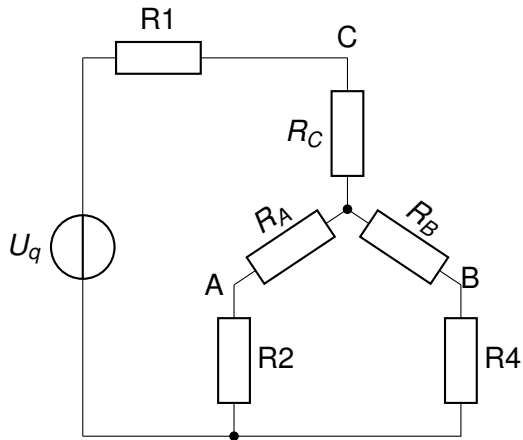


Abbildung: Messbrücke

Umwandlung Dreieck → Stern

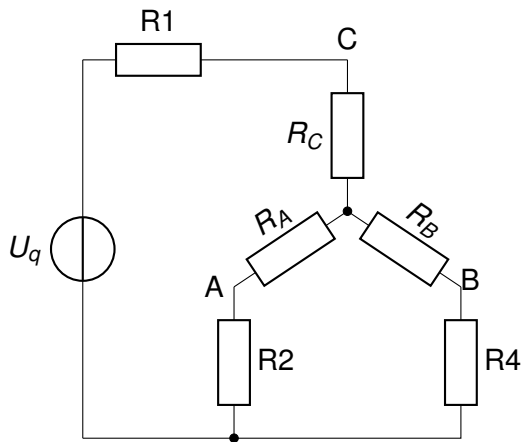


Abbildung: Messbrücke

$$R_A = \frac{R_{AC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

Umwandlung - Stern \rightarrow Dreieck

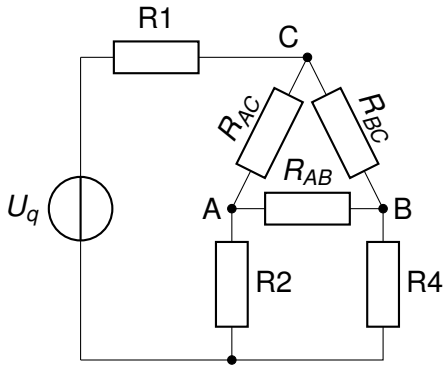


Abbildung: Messbrücke

Umwandlung - Stern \rightarrow Dreieck

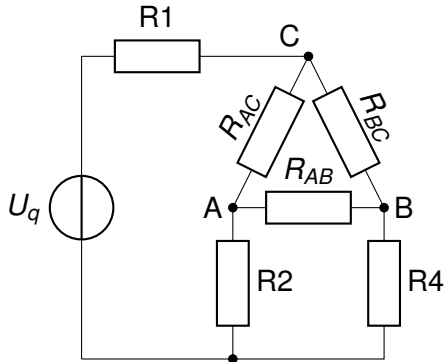


Abbildung: Messbrücke

$$R_{AB} = \frac{R_A \cdot R_B}{R_C} + R_A + R_B$$

$$R_{AC} = \frac{R_A \cdot R_C}{R_B} + R_A + R_C$$

$$R_{BC} = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A} + R_B + R_C$$

Aufgabe: Messbrücke

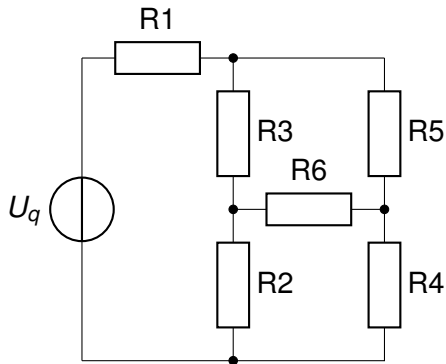


Abbildung: Messbrücke

$$R_1 = 220 \, \Omega$$

$$R_2 = 470 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

$$R_4 = 330 \, \Omega$$

$$R_5 = 560 \, \Omega$$

$$R_6 = 390 \, \Omega$$

$$U_q = 5 \, \text{V}$$

$$R_4 = R_{\text{Mess}}$$

gesucht: Strom und Spannung an R_6 , R_4 und R_5

Lösung zu Messbrücke

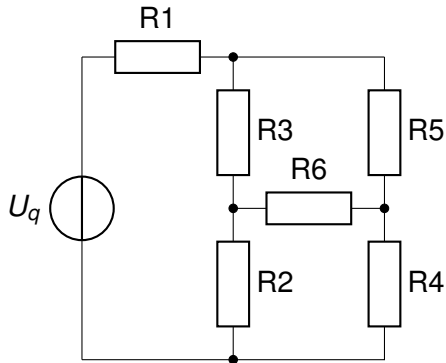


Abbildung: Messbrücke

$$R_1 = 220 \, \Omega$$

$$R_2 = 470 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

$$R_4 = 330 \, \Omega$$

$$R_5 = 560 \, \Omega$$

$$R_6 = 390 \, \Omega$$

$$U_q = 5 \, V$$

$$I_4 = 4,2 \, mA, \quad I_5 = 3,3 \, mA, \quad I_6 = 890 \, \mu A$$

$$U_4 = 1,4 \, V,$$

$$U_5 = 3,6 \, V,$$

$$U_6 = 0,35 \, V$$

Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Dreieck <-> Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Spannungsteiler

Knoten und Maschen

Schaltung - Maschen

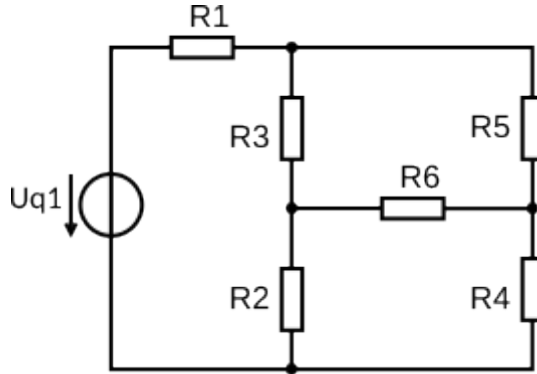


Abbildung: Messbrücke

Schaltung - Maschen

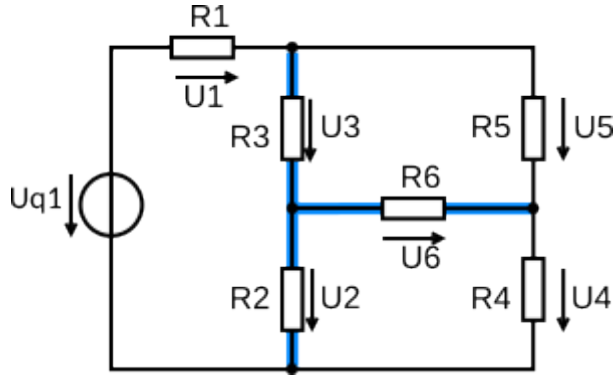


Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum

Schaltung - Maschen

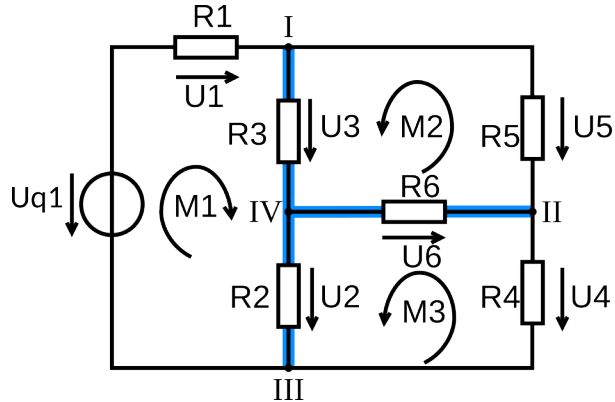


Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Gleichungen für Maschen und Knoten

$$M_1 : -U_{q1} + U_1 + U_3 + U_2 = 0 \quad (33)$$

$$M_2 : U_3 + U_6 - U_5 = 0 \quad (34)$$

$$M_3 : U_2 - U_4 - U_6 = 0 \quad (35)$$

$$(36)$$

Knotengleichungen:

$$\text{I: } I_1 - I_3 - I_5 = 0 \quad (37)$$

$$\text{II: } I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad (38)$$

$$\text{III: } I_2 + I_4 - I_1 = 0 \quad (39)$$

$$\text{IV: } I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad (40)$$

Berechnung der Ströme

$$-U_{q1} + I_1 * R_1 + I_3 * R_3 + I_2 * R_2 = 0 \quad (41)$$

$$I_3 * R_3 + I_6 * R_6 - I_5 * R_5 = 0 \quad (42)$$

$$I_2 * R_2 - I_6 * R_6 - I_4 * R_4 = 0 \quad (43)$$

LGS aufstellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = 220\Omega, R_2 = 470\Omega, R_3 = 330\Omega, R_4 = 330\Omega, R_5 = 560\Omega, R_6 = 390\Omega$$

$$U_q = 5V$$

Gekürzte Darstellung der Matrix

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & U_{q1} \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 & 0 \end{array} \right)$$

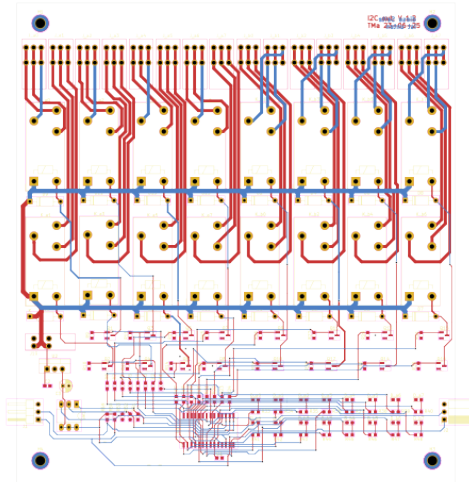
Gekürzte Darstellung mit Werten der Widerstände

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 220\Omega & 470\Omega & 330\Omega & 0 & 0 & 0 & U_{q1} \\ 0 & 470\Omega & 0 & 330\Omega & 0 & 390\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 330\Omega & 0 & 560\Omega & 390\Omega & 0 \end{array} \right)$$

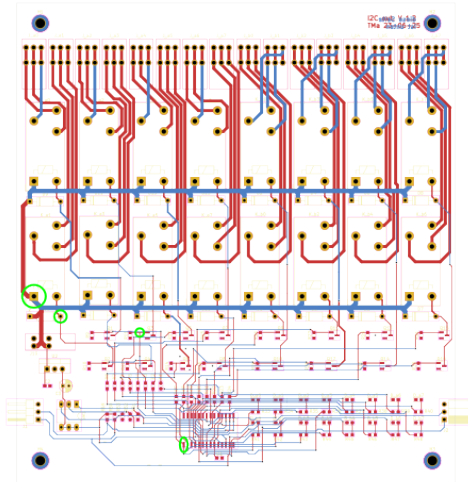
Stufenform - Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Knoten und Maschen



Knoten und Maschen



Knoten und Maschen

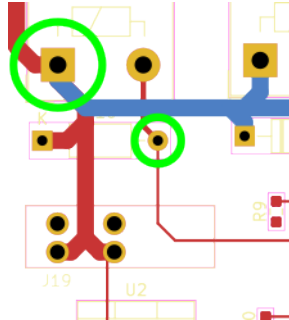


Abbildung: Platine Ausgang

Knoten und Maschen

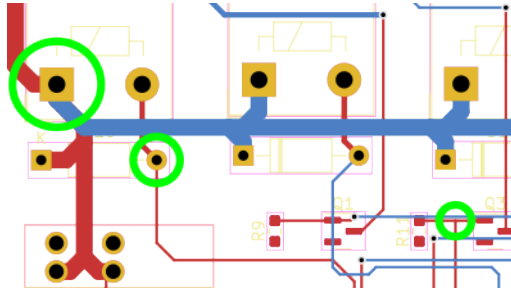


Abbildung: Platine Ausgang

Knoten und Maschen

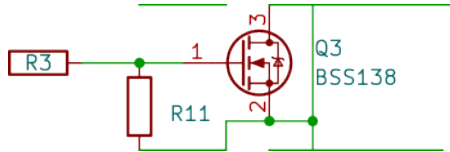
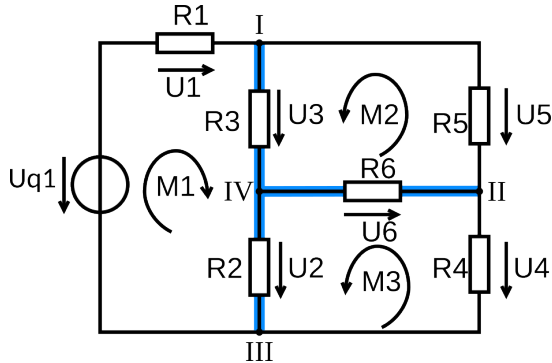


Abbildung: Schaltplan Ausgang

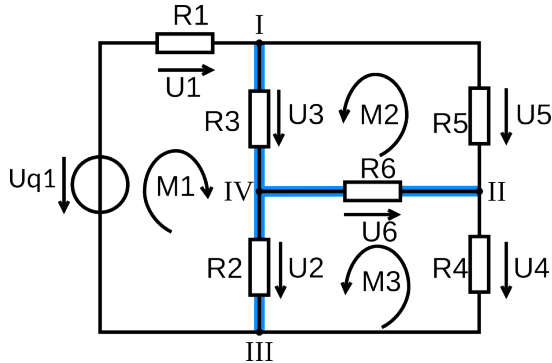
Kreisstromverfahren - Baum I



1. Baum festlegen (alle Knoten berühren, kein Umlauf).
2. Maschen einzeichnen (Umlaufsinn ist willkürlich)
3. Gleichungen aufstellen.

Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Kreisstromverfahren - Baum II

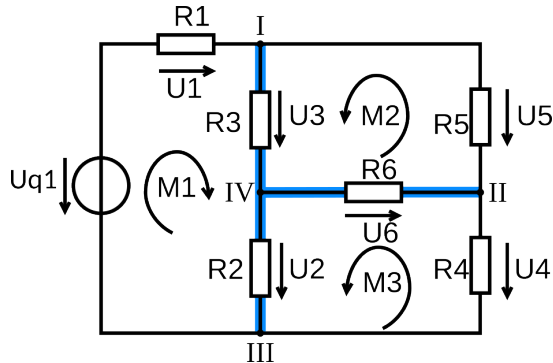


Gleichungssystem

1. Hauptdiagonale: R_s in der Masche
2. Nebendiagonalen: Verbindungs- R_s
3. Quelle in Quellen-Vektor

Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Kreisstromverfahren - Gleichungssystem



Gleichungssystem >

$$\begin{pmatrix} R1 + R2 + R3 & R3 & R3 \\ R3 & R3 + R5 + R6 & -R6 \\ R2 & -R6 & R2 + R4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Kreisstromverfahren - Gleichungssystem

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \text{M1} & \text{M2} & \text{M3} \\
 \text{M1} & R1 + R2 + R3 & R3 & R2 \\
 \text{M2} & R3 & R3 + R5 + R6 & -R6 \\
 \text{M3} & R2 & -R6 & R2 + R4 + R6
 \end{array}
 * \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen:

- per Hand - z.B. gaußsches Eliminationsverfahren
Matrix und Spannungs-Vektor in Dreiecksform bringen.
- im Taschenrechner - LGS Solver
Matrix und Spannungsvektor eintippen.
Ergebnis ist Strom Vektor (von oben nach unten).
- mit dem PC z.B. octave (open source) - Eingabe vergleichbar mit Taschenrechner

Umwandlung Stromquelle \rightarrow Spannungsquelle I

Ideale Stromquelle

- liefert definierten, konstanten Strom
- Spannung ist unerheblich
- Innenwiderstand (R_i) ist parallel geschaltet.

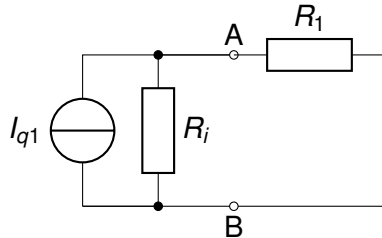


Abbildung: Stromquelle

Umwandlung Stromquelle \rightarrow Spannungsquelle II

Stromquelle in Spannungsquelle

- Wert von R_i bleibt,
- R_i geht in Reihe zu U_q
- Spannung: $U_I = I_k \cdot R_i$

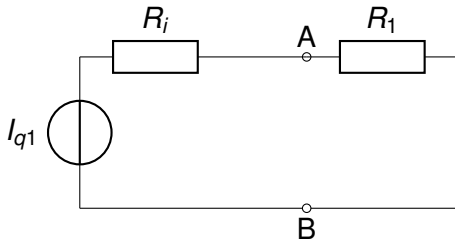


Abbildung: Spannungsquelle

Umwandlung Spannungsquelle \rightarrow Stromquelle

Spannungsquelle in Stromquelle

- Wert von R_i bleibt
- R_i ist jetzt parallel zu I_q
- Strom: $I_k = \frac{U_I}{R_i}$

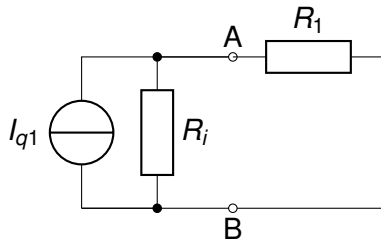


Abbildung: Stromquelle

Stromquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Stromquelle

- R_i ist parallel zu I_q

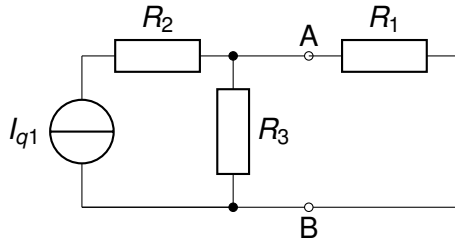


Abbildung: Stromquelle

Stromquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Stromquelle

- R_i ist parallel zu I_q
- R_2 ist irrelevant

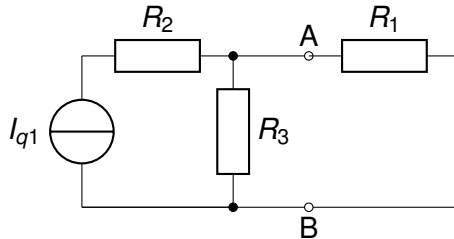


Abbildung: Stromquelle

Spannungsquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Spannungsquelle

- R_i ist in Reihe zu U_q

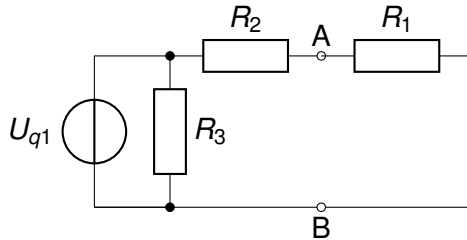


Abbildung: Spannungsquelle

Spannungsquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Spannungsquelle

- R_i ist in Reihe zu U_q
- R_3 ist irrelevant

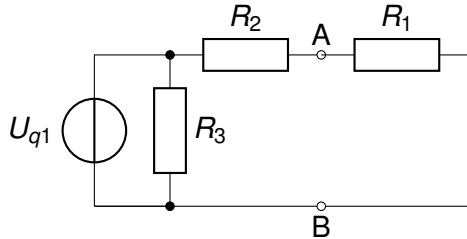


Abbildung: Spannungsquelle