

# Arbeitsunterlagen zu FOS Elektrotechnik, Technische Informatik, Mechatronik Themenfeld 12.1

## Gleichstromnetzanalyse

Thomas Maul

V 0.1.0 - im Aufbau

Stand: 23. Oktober 2025

### Inhaltsverzeichnis

<b>I. Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse</b>	<b>2</b>
<b>1. Zweipole</b>	<b>2</b>
<b>2. Helmholtz</b>	<b>4</b>
2.1. Nur Quelle U1 aktiv . . . . .	4
2.2. Nur Quelle U2 aktiv . . . . .	6
<b>3. Dreieck &lt;-&gt; Stern</b>	<b>7</b>
<b>4. Pflicht-Themen, die noch offen sind</b>	<b>10</b>
<b>5. Literatur und Quellen</b>	<b>10</b>

# Teil I.

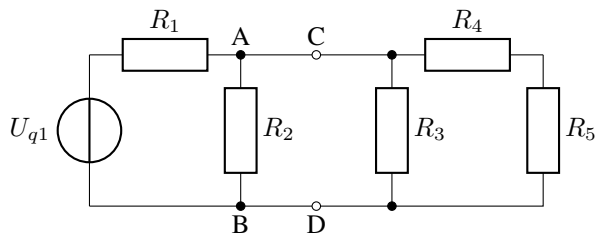
## Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse

### 1. Zweipoltheorie (Pflicht)

In der Elektrotechnik werden Bauteile, die zwei Abschlüsse haben als Zweipole bezeichnet. Dies können jeweils einzelne Widerstände, Spulen und Kondensatoren sein. Manchmal ist es praktisch eine (Teil-)Schaltung als einen Zweipol darzustellen und in Berechnungen als ein virtuelles Bauteil zu verwenden.

#### Zweipole

In der Schaltung unten sollen die Widerstände  $R_3$  bis  $R_5$  als ein virtuelles Bauteil dargestellt werden. Es soll

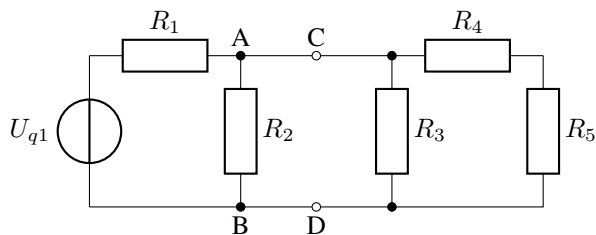


so aussehen, als ob nur ein Widerstand rechts von den Punkten C und D wäre. Durch Reihenschaltung von  $R_4$  und  $R_5$  zu  $R_{45}$  und anschließender Parallelschaltung mit  $R_3$  kann ich dies erreichen (siehe Bild 1). Der Widerstand  $R_{3||45}$  verhält sich für die Schaltung wie die Widerstände  $R_3$ ,  $R_4$  und  $R_5$ .

Ich lege für die Widerstände folgende Werte fest:

#### Werte für Berechnung

$$R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega \quad R_3 = 30\Omega \quad R_4 = 40\Omega \quad R_5 = 50\Omega \quad U_{q1} = 5V, \quad U_{q2} = 12V$$



#### Berechnung des Ersatzwiderstands

$$R_{45} = R_4 + R_5 \quad (1)$$

$$R_{45} = 40\Omega + 50\Omega \quad (2)$$

$$R_{45} = 90\Omega \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{90\Omega} \quad (5)$$

$$R_{3||45} = 22,5\Omega \quad (6)$$

Jetzt kann ich den Gesamtwiderstand  $R_{3||45}$  berechnen. Ich kann jedoch nicht mehr einzelne Spannungen oder

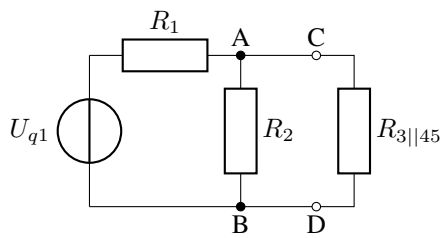


Abbildung 1: Berechnung des Erstatwiderstands

Ströme messen oder darstellen.

Der virtuelle Widerstand  $R_{3||45}$  ersetzt die Schaltung der drei Widerstände. Das Gleiche ist mit allen passiven Bauteilen möglich. Auch aktive Bauteile (Quellen, Transistor, FET, ...) kann man durch einen Zweipol ersetzen.

### Übungen zu Zweipole I

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

**a**  $R_1 = R_2 = 220\Omega$   $R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$

**b**  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$

**c**  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 230\Omega$   $R_3 = 470\Omega$

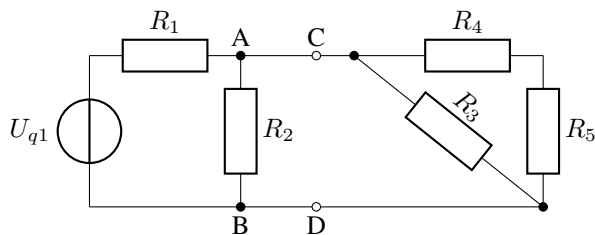


Abbildung 2: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1

### Übungen zu Zweipole II

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

**a**  $R_1 = R_2 = 220\Omega$   $R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$

**b**  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$   $R_4 = 470\Omega$

**c**  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 230\Omega$   $R_3 = 470\Omega$

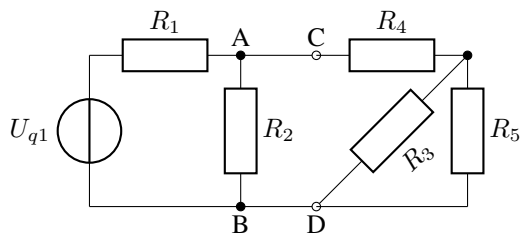


Abbildung 3: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2

## 2. Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Wenn in einer Schaltung, man spricht auch von elektrischen Netzwerken, mehr als eine Quelle vorhanden ist, speisen alle Quellen gemeinsam die Schaltung mit Energie. Um in der Schaltung unten (Abbildung 4) zu berechnen, wie viel Strom durch den Widerstand  $R_2$  fließt muss ich wissen, wie viel Strom die Quelle  $U_1$  und wie viel die Quelle  $U_2$  an den Widerstand abgibt.

### Zwei Spannungsquellen $U_1$ und $U_2$

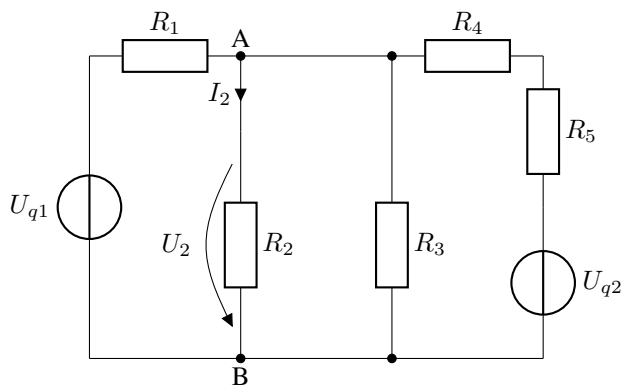


Abbildung 4: Zwei Quellen aktiv

$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega, R_5 = 50\Omega$$

Mit einem Messgerät kann ich die Spannung an  $R_2$  messen, den Strom, der durch  $R_2$  fließt ebenfalls. Rechnerisch muss ich die Schaltung so verändern, dass jeweils nur die eine Quelle aktiv ist. Die anderen Spannungsquellen werden kurzgeschlossen. Wenn Stromquellen in der Schaltung sind werden diese aufgetrennt. Innenwiderstände der Quellen (hier  $R_1$  zu  $U_1$  und  $R_5$  zu  $U_2$  bleiben dabei in der Schaltung. Die Teilspannung an  $R_2$ , die ich jetzt errechnen kann, nenne ich  $U_{2'}$ .

### 2.1. Nur Quelle $U_1$ aktiv

#### Nur Quelle $U_1$ aktiv

$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega, R_5 = 50\Omega$$

$R_2$  wird jetzt mit dem Ersatzwiderstand  $R_{3||45}$  parallel geschaltet.

#### Berechnung Ersatzwiderstand I

$$U_{2'} = I_2 * R_2 || R_3 || R_4 + R_5 \quad (7)$$

$$U_{2'} = I_2 * \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} \quad (8)$$

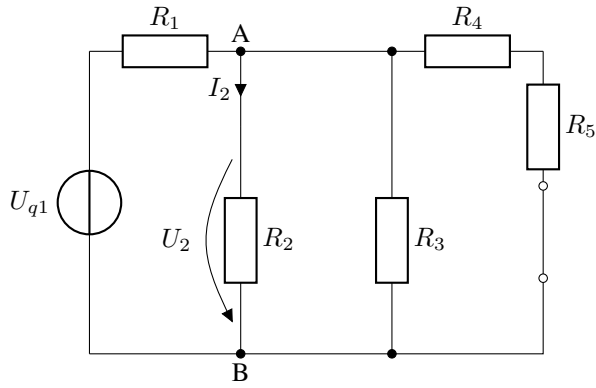


Abbildung 5: Nur Quelle 1 aktiv

$I_2$  ist nicht bekannt. Zur Berechnung müssten jedoch entweder  $I_2$  oder  $U_2$  bekannt sein. Somit hilft diese Formel noch nicht endgültig. Bekannt sind die Widerstandswerte und die Spannung  $U_1$ . Mit der Formel eines Spannungsteilers kann ich die Spannung an der Parallelschaltung ausrechnen ohne  $I_2$  zu kennen.

### Berechnung Ersatzwiderstand II

$$U_{q1} = U_1 + U_2 \quad (9)$$

$$U_2 = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_4 || R_5}{R_1 + R_2 || R_3 || R_4 || R_5} \quad (10)$$

In der Festlegung 5 (Seite 2) habe ich die Werte für die Widerstände und die Spannungen der Quellen festgelegt. In Formel (6, Seite 3) habe ich den Ersatzwiderstand für  $R_{3||45}$  berechnet. Hier setze ich die Werte in die Formeln ein:

### Einsetzen I

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_4 || R_5}{R_1 + R_2 || R_3 || R_4 || R_5} \quad (11)$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}} \quad (12)$$

$$(13)$$

### Einsetzen II

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_4 || R_5}{R_1 + R_2 || R_3 || R_4 || R_5}$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}$$

$$U_{2'} = 5V * \frac{22,5\Omega}{10\Omega + 22,5\Omega} \quad (14)$$

$$U_{2'} = 5V * 0,69 \quad (15)$$

$$U_{2'} = 3,46V \quad (16)$$

## 2.2. Nur Quelle U2 aktiv

Jetzt schlieÙe ich Quelle 1 kurz und nur Quelle  $U_{Q2}$  ist aktiv. Damit kann ich den Teilstrom berechnen, der fließen würde, wenn in der Original-Schaltung nur diese Quelle vorhanden wäre.

### Nur Quelle U2 aktiv

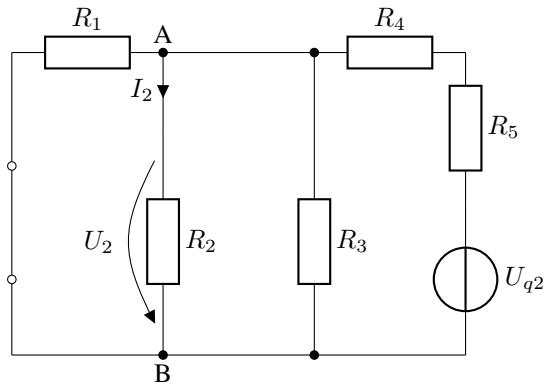


Abbildung 6: Nur Quelle zwei aktiv

$R1 = 10\Omega$ ,  $R2 = 20\Omega$ ,  $R3 = 30\Omega$ ,  $R4 = 40\Omega$ ,  $R5 = 50\Omega$  In diesem Fall ist  $R2$  parallelgeschaltet mit  $R1$  und  $R3$ .

### Quelle 2, Einsetzen I

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}}}{R4 + R5 + \frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}}} \quad (17)$$

$$(18)$$

### Quelle 2, Einsetzen II

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}}}{R4 + R5 + \frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}}} \quad (19)$$

$$U_{2''} = 12V * \frac{\frac{1}{\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{30\Omega}}}{40\Omega + 50\Omega + \frac{1}{\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{30\Omega}}} \quad (20)$$

$$U_{2''} = 0,24V \quad (21)$$

### Addition

Zum Abschluss werden die beiden Teilspannungen addiert.

$$U_2 = U_{2'} + U_{2''} \quad (22)$$

$$U_2 = 3,46V + 0,24V \quad (23)$$

$$U_2 = 3,7V \quad (24)$$

$U_{2'}$  ist die Teilspannung, die von der Quelle  $U_{Q1}$  kommt,  $U_{2''}$  ist von  $U_{2''}$ .  $U_2$  ist die gesamte Spannung, die an Widerstand  $R_2$  abfällt. Man spricht hier auch von der resultierenden Spannung. Die Spannung  $U_2$  ist in der Schaltung messbar. die Teilspannungen  $U_{2'}$  und  $U_{2''}$  sind nicht direkt messbar. Oft sind Quellen in Schaltungen keine echten Spannungsquellen sondern Bauteile, die eine Spannung liefern (Transistor, Operationsverstärker, Ausgang eines Logik-ICs, ...)

### 3. Dreieck <-> Stern-Umwandlung (Pflicht)

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Problematik, dass einige Schaltungen nicht alleine durch Reihenschaltung oder Parallelschaltung berechnet werden können. Im Bild 7 ist eine Messbrücke gezeichnet. Diese Brückenschaltung wird verwendet, um Spannungsänderungen an einem Sensor (z.B. Temperatursensor PT1000, DMS, ...) sehr klein sind.  $R_4$  wäre zum Beispiel der Messwiderstand.  $R_6$  wäre der Innenwiderstand des Messgeräts oder ein Widerstand, an dem der Spannungsabfall gemessen wird, um ihn durch Digitalisierung in einem Computer/Controller<sup>1</sup> zu verarbeiten. Durch eine Umwandlung zwischen einer Anordnung der Bauteile (hier Widerstände) im Dreieck und einer Anordnung in einem Stern können äquivalente Werte berechnet werden. Dadurch ist es möglich die entstandene Schaltung mit Hilfe von Reihenschaltung und Parallelschaltung zu berechnen. Nach der Umrechnung ist es nicht direkt möglich die Ströme und Spannungen der ursprünglichen Teilschaltung (hier  $R_3, R_5, R_6$ ) zu berechnen. Es ist lediglich möglich die Ströme und Spannungen an  $R_1, R_2$  und  $R_4$  zu bestimmen.

#### Messbrücke

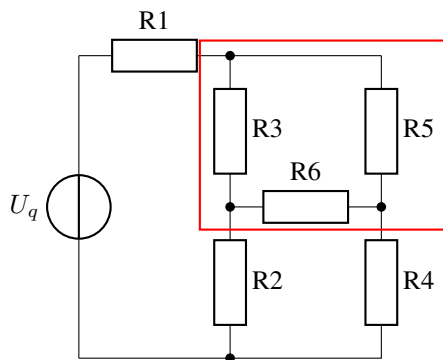


Abbildung 7: Messbrücke

Bild 8 stellt die selbe Schaltung dar, wie Bild 7.

#### Messbrücke - Stern-Dreieck

$$R_{AC} = R3$$

$$R_{AB} = R6$$

$$R_{BC} = R5$$

In Bild 9 wurden die Widerstände des Dreiecks in Widerstände in einer sternförmigen-Anordnung umgerechnet. Die Ströme und Spannungen an den Punkten A, B, und C sind bei beiden Anordnungen identisch.

<sup>1</sup>Auf einer Arduino R3-Platine ist ein AT\_Mega32-IC. Dieser hat einen Eingang, der analoge Spannungen digitalisieren kann.

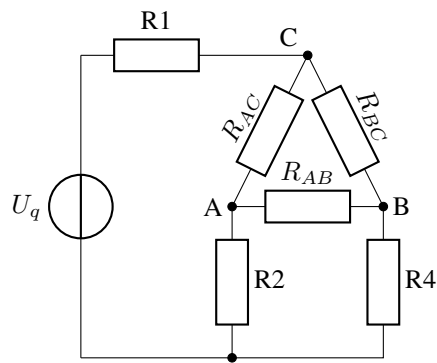


Abbildung 8: Messbrücke

### Umwandlung Dreieck -> Stern

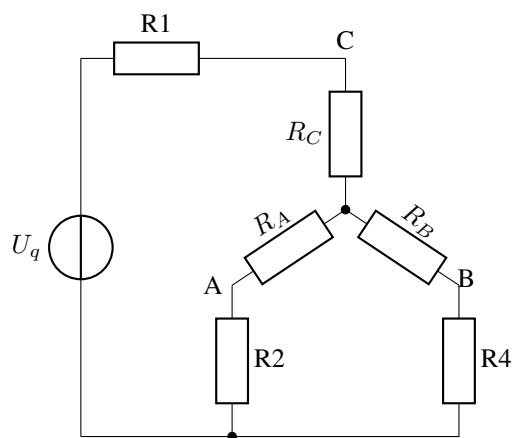


Abbildung 9: Messbrücke

$$R_A = \frac{R_{AC}R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

In den folgenden Bildern ist der umgekehrte Weg von einem Stern zu einem Dreieck dargestellt. Die Herleitung der Formeln habe ich nicht geschrieben, sie ist auf der Seite <https://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Dreieck-Transformation> zu finden.

### Umwandlung - Stern- > Dreieck



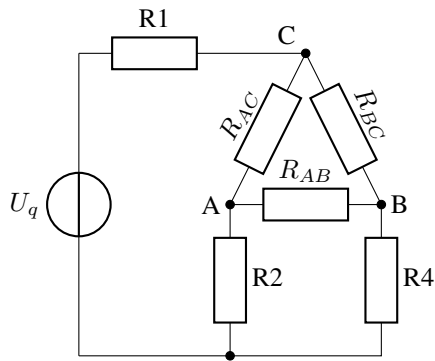


Abbildung 10: Messbrücke

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B}{R_C} + R_A + R_B$$

$$R_{AC} = \frac{R_A R_C}{R_B} + R_A + R_C$$

$$R_{BC} = \frac{R_B R_C}{R_A} + R_B + R_C$$

### Messbrücke

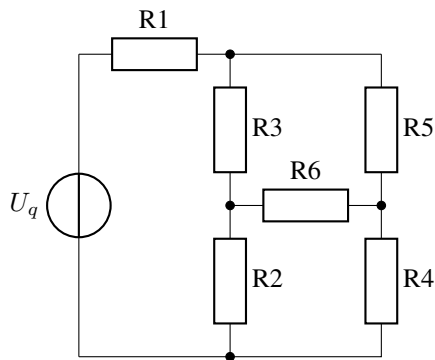


Abbildung 11: Messbrücke

$$R_1 = 220\Omega$$

$$R_2 = 470\Omega$$

$$R_3 = 330\Omega$$

$$R_4 = 330\Omega$$

$$R_5 = 560\Omega$$

$$R_6 = 390\Omega$$

$$U_q = 5\text{ V}$$

$$R_4 = R_{\text{Mess}} \text{ gesucht: Strom und Spannung an } R_6, R_4 \text{ und } R_5 \quad \begin{array}{lll} I_4 = 4,2\text{ mA}, & I_5 = 3,3\text{ mA}, & I_6 = 890\text{ }\mu\text{A} \\ U_4 = 1,4\text{ V}, & U_5 = 3,6\text{ V}, & U_6 = 0,35\text{ V} \end{array}$$

## 4. Pflicht-Themen, die noch offen sind

### Pflicht-Themen, die noch offen sind

Folgende Themen sind gemäß Prüfungserlass für die Prüfung 2026 Pflicht, aber noch nicht ausgearbeitet.

- Knoten- und Maschengleichungen
- Kreisstromverfahren
- Knotenspannungsverfahren

Die Themen folgen demnächst hier.

## 5. Literatur und Quellen

### Literatur und Quellen

**Wikibooks** <https://de.wikibooks.org/wiki/Elektrostatik>

**Marinescu, Marlene** Elektrische und magnetische Felder, Eine praxisorientierte Einführung; A 3 (2012); Springer

Simulationsprogramm für Schaltungen :Ngspice, GUI: KiCad <https://www.kicad.org/>

## Abbildungsverzeichnis

1.	Berechnung des Erstatwiderstands . . . . .	3
2.	Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1 . . . . .	3
3.	Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2 . . . . .	4
4.	Zwei Quellen aktiv . . . . .	4
5.	Nur Quelle 1 aktiv . . . . .	5
6.	Nur Quelle zwei aktiv . . . . .	6
7.	Messbrücke . . . . .	7
8.	Messbrücke . . . . .	8
9.	Messbrücke . . . . .	8
10.	Messbrücke . . . . .	9
11.	Messbrücke . . . . .	9