

Arbeitsunterlagen zu FOS Elektrotechnik, Technische Informatik, Mechatronik

Themenfeld 12.1

Gleichstromnetzanalyse

Thomas Maul

V 0.2.1 - im Aufbau

Stand: 20. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

I. Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse	2
1. Zweipole	2
2. Spannungsteiler	4
2.1. Übungen	5
3. Überlagerung	5
3.1. Aufgaben zu Überlagerung	8
4. Dreieck <-> Stern	9
5. Gleichungen	12
5.1. Spannungsteiler	12
6. Knoten und Maschen	15
7. Kreisstromverfahren	15
8. Ersatzquellen	17
A. Lösungen	19
A.1. Ersatzwiderstand	19
A.1.1. Übungen zu Zweipole I	19
A.1.2. Übungen zu Zweipole II	19
A.2. Spannungsteiler	19
A.3. Lösungsvorschlag zu Schaltung 2	19
A.3.1. Schaltung 2 - nur Quelle 1 aktiv	20
A.3.2. Schaltung 2 - nur Quelle 2 aktiv	22
A.4. Lösungsvorschlag zu Schaltung 3	24
A.4.1. Schaltung 3 - nur Quelle 1 aktiv	24
B. Literatur und Quellen	26

Teil I.

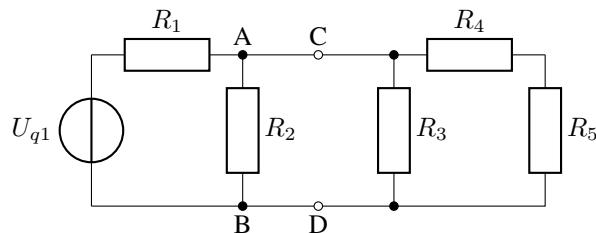
Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse

1. Zweipoltheorie (Pflicht)

In der Elektrotechnik werden Bauteile, die zwei Abschlüsse haben als Zweipole bezeichnet. Dies können jeweils einzelne Widerstände, Spulen und Kondensatoren sein. Manchmal ist es praktisch eine (Teil-)Schaltung als einen Zweipol darzustellen und in Berechnungen als ein virtuelles Bauteil zu verwenden.

Zweipole

In der Schaltung unten sollen die Widerstände R_3 bis R_5 als ein virtuelles Bauteil dargestellt werden. Es soll

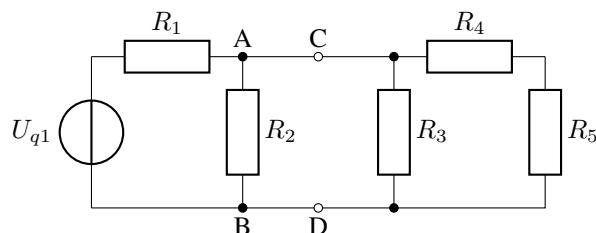


so aussehen, als ob nur ein Widerstand rechts von den Punkten C und D wäre. Durch Reihenschaltung von R_4 und R_5 zu R_{45} und anschließender Parallelschaltung mit R_3 kann ich dies erreichen (siehe Bild 1). Der Widerstand $R_{3||45}$ verhält sich für die Schaltung wie die Widerstände R_3 , R_4 und R_5 .

Ich lege für die Widerstände folgende Werte fest:

Werte für Berechnung

$$R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 20\Omega \quad R_3 = 30\Omega \quad R_4 = 40\Omega \quad R_5 = 50\Omega \quad U_{q1} = 5V, \quad U_{q2} = 12V$$



Berechnung des Ersatzwiderstands

$$R_{45} = R_4 + R_5 \quad (1)$$

$$R_{45} = 40\Omega + 50\Omega \quad (2)$$

$$R_{45} = 90\Omega \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{90\Omega} \quad (5)$$

$$R_{3||45} = 22,5\Omega \quad (6)$$

Jetzt kann ich den Gesamtwiderstand $R_{3||45}$ berechnen. Ich kann jedoch nicht mehr einzelne Spannungen oder

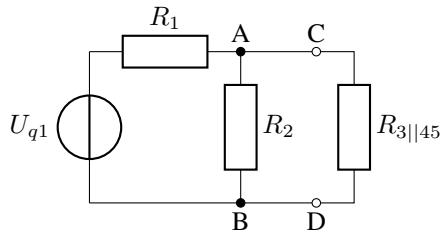


Abbildung 1: Berechnung des Ersatzwiderstands

Ströme messen oder darstellen.

Der virtuelle Widerstand $R_{3||45}$ ersetzt die Schaltung der drei Widerstände. Das Gleiche ist mit allen passiven Bauteilen möglich. Auch aktive Bauteile (Quellen, Transistor, FET, ...) kann man durch einen Zweipol ersetzen.

Übungen zu Zweipole I

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a $R_1 = R_2 = 220\Omega$ $R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 470\Omega$

b $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 560\Omega$

c $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$ $R_3 = 120\Omega$

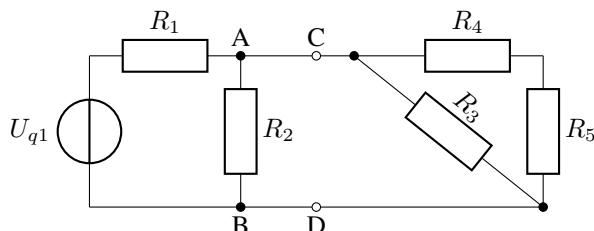


Abbildung 2: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1

Die Lösungen sind auf Seite 19

Übungen zu Zweipole II

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a $R_1 = R_2 = 220\Omega$ $R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 470\Omega$

b $R_1 = R_2 = R_3 = 150\Omega$ $R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 560\Omega$

c $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$ $R_3 = 120\Omega$



Abbildung 3: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2

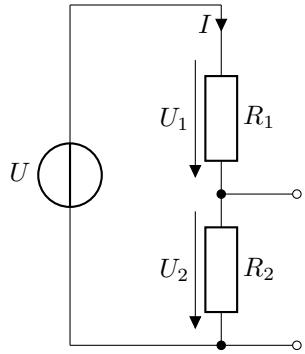
2. Spannungsteiler

Bei einem Spannungsteiler wird eine anliegende Spannung in mehrere Teilspannungen aufgeteilt.

Dies kann zum Beispiel mit Widerständen passieren. Der Strom I muss in Bild 8 durch alle Widerstände fließen. Es gibt keine Knoten, an denen er sich aufteilt. Die Spannung U der Quelle fällt an allen Widerständen ab. An jedem Widerstand fällt ein Teil der Spannung ab. Die Spannung an den Widerständen ist nur von der Größe des Widerstands abhängig, da der Strom in allen Widerstände identisch ist.

Die Summe aller Spannungen in einem Stromkreis, man spricht auch von einem Umlauf, muss null sein. Die Richtung der Spannung an der Spannungsquelle wird hier in umgekehrter Richtung zu den Spannungen an den Widerständen gezählt (Formel 7).

Spannungsteiler



$$U = U_1 + U_2 \quad (7)$$

$$I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (8)$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \quad (9)$$

$$U_2 = I * R_2 \quad (10)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_{ges}} * R_2 \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} * R_2 \quad (12)$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (13)$$

Formel 8 ist hier für die beiden Teilwiderstände der Schaltung aufgestellt. Bei einem Spannungsteiler mit mehreren Widerständen wären hier alle Widerstände genannt.

Formel 9 stellt den Zusammenhang zwischen dem gemeinsamen Strom und den Widerständen und Spannungen dar. Wenn man nur den zweiten und dritten Teil der Gleichung betrachtet, ergibt sich ein Verhältnis. Das Verhältnis aus U_1 zu R_1 entspricht dem Verhältnis aus U_2 zu I_2 . Mit dem Formeln 10 kann ich das Verhältnis aus der Gesamtspannung U und der Teilspannung - hier U_2 bestimmen. Dabei gilt: Die Teilspannung steht im Verhältnis zur Gesamtspannung, wie der Teilwiderstand zum Gesamtwiderstand.

Der Spannungsteiler in diesem Beispiel ist unbelastet, das bedeutet, dass außer den beiden Widerständen, die die Spannung U aufteilen keine weiteren Widerstände vorhanden sind. Wenn parallel zu R_2 ein weiterer Widerstand geschaltet wäre, wäre zu prüfen, wie groß der Widerstand ist, der parallel geschaltet ist. Falls der parallele Widerstand viel größer ist (Faktor 100 und mehr) kann er vernachlässigt werden, da der Strom, der durch den Parallelwiderstand fließt, sehr klein ist im Verhältnis zu R_2 . Wenn die Widerstände annähernd die gleiche Größe hätten, würde man von einem belasteten Spannungsteiler sprechen. In diesem Fall müsste die Parallelschaltung unbedingt für die Berechnung berücksichtigt werden.

2.1. Übungen

Gegen sei der Spannungsteiler aus Bild 8. Berechnen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle unten.

Übungsaufgaben zu Spannungsteiler

U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	I_{R1}	I_{R2}
5	220	330		
12	220	470		
12	220		12 mA	
12	470			10,4 mA
	560	120	22 mA	
	470	1,5k	3,3 mA	

Die Lösungen sind auf 19

3. Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Wenn in einer Schaltung, man spricht auch von elektrischen Netzwerken, mehr als eine Quelle vorhanden ist, speisen alle Quellen gemeinsam die Schaltung mit Energie. Um in der Schaltung unten (Abbildung 4) zu berechnen, wie viel Strom durch den Widerstand R_2 fließt, muss ich wissen, wie viel Strom die Quelle U_1 und wie viel die Quelle U_2 an den Widerstand abgibt.

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2

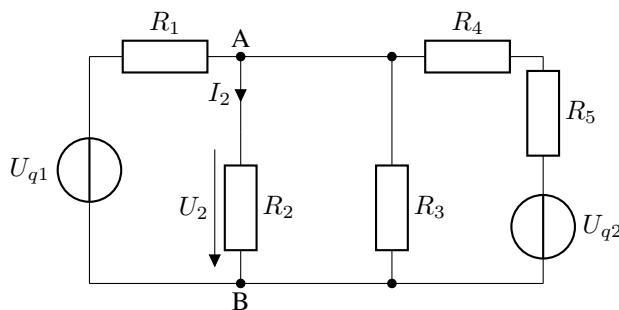


Abbildung 4: Überlagerung, Schaltung 1, Zwei Quellen aktiv

$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega, R_5 = 50\Omega, U_{q1} = 5V, U_{q2} = 12V$$

Mit einem Messgerät kann ich die Spannung an R_2 messen, den Strom, der durch R_2 fließt ebenfalls. Rechnerisch muss ich die Schaltung so verändern, dass jeweils nur die eine Quelle aktiv ist. Die anderen Spannungsquellen werden kurzgeschlossen. Wenn Stromquellen in der Schaltung sind, werden diese aufgetrennt. Innenwiderstände der Quellen (hier R_1 zu U_{q1} und R_5 zu U_{q2}) bleiben dabei in der Schaltung. Die Teilspannung an R_2 , die ich jetzt errechnen kann, nenne ich $U_{2'}$.

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2

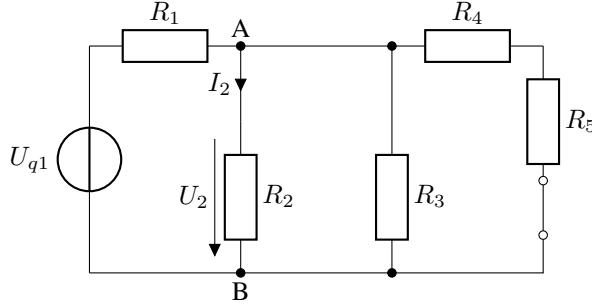


Abbildung 5: Nur Quelle eins aktiv

$R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ $R_3 = 30\Omega$, $R_4 = 40\Omega$ $R_5 = 50\Omega$ $U_{q1} = 5V$, $U_{q2} = 12V$
 R_2 wird jetzt mit dem Ersatzwiderstand $R_{3||45}$ parallel geschaltet.

Berechnung Ersatzwiderstand I

$$U_{2'} = I_2 * R_2 || R_3 || R_4 + R_5 \quad (14)$$

$$U_{2'} = I_2 * \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} \quad (15)$$

I_2 ist nicht bekannt. Zur Berechnung müssten jedoch entweder I_2 oder U_2 bekannt sein. Somit hilft diese Formel noch nicht endgültig. Bekannt sind die Widerstandswerte und die Spannung U_{q1} . Mit der Formel eines Spannungsteilers kann ich die Spannung an der Parallelschaltung ausrechnen, ohne I_2 zu kennen.

Berechnung Ersatzwiderstand II

$$U_{q1} = U_1 + U_2 \quad (16)$$

$$U_2 = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (17)$$

In der Festlegung 4 (Seite 2) habe ich die Werte für die Widerstände und die Spannungen der Quellen festgelegt. In Formel (6, Seite 3) habe ich den Ersatzwiderstand für $R_{3||45}$ berechnet. Hier setze ich die Werte in die Formeln ein:

Einsetzen I

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (18)$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}} \quad (19)$$

$$(20)$$

Einsetzen II

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}}$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}$$

$$U_{2'} = 5 V * \frac{10,59 \Omega}{10 \Omega + 10,59 \Omega} \quad (21)$$

$$U_{2'} = 5 V * 0,514 \quad (22)$$

$$U_{2'} = 2,57 V \quad (23)$$

Nur Quelle U2 aktiv

Jetzt schließe ich die Quelle 1 kurz und nur Quelle U_{Q2} ist aktiv. Damit kann ich den Teilstrom berechnen, der fließen würde, wenn in der Original-Schaltung nur diese Quelle vorhanden wäre.

Zwei Spannungsquellen U1 und U2

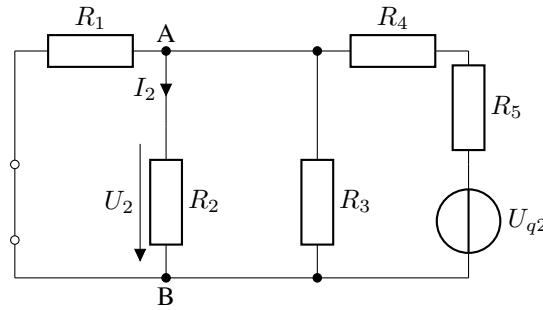


Abbildung 6: Nur Quelle zwei aktiv

$R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ $R_3 = 30\Omega$, $R_4 = 40\Omega$ $R_5 = 50\Omega$ $U_{q1} = 5 V$, $U_{q2} = 12 V$
In diesem Fall ist R_2 parallelgeschaltet mit R_1 und R_3 .

Quelle 2, Einsetzen I

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (24)$$

$$(25)$$

Quelle 2, Einsetzen II

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}} \quad (26)$$

$$U_{2''} = 12 V * \frac{\frac{1}{10 \Omega + 20 \Omega + 30 \Omega}}{40 \Omega + 50 \Omega + \frac{1}{10 \Omega + 20 \Omega + 30 \Omega}} \quad (27)$$

$$U_{2''} = 12 V * 0,057 \quad (28)$$

$$U_{2''} = 0,685 V \quad (29)$$

Addition

Zum Abschluss werden die beiden Teilspannungen addiert.

$$U_2 = U_{2'} + U_{2''} \quad (30)$$

$$U_2 = 2,57 V + 0,685 V \quad (31)$$

$$U_2 = 3,26 V \quad (32)$$

$U_{2'}$ ist die Teilspannung, die von der Quelle U_{Q1} kommt, $U_{2''}$ ist von U_{Q2} . U_2 ist die gesamte Spannung, die an Widerstand R_2 abfällt. Man spricht hier auch von der resultierenden Spannung. Die Spannung U_2 ist in der Schaltung messbar. Die Teilspannungen $U_{2'}$ und $U_{2''}$ sind nicht direkt messbar. Oft sind Quellen in Schaltungen keine echten Spannungsquellen, sondern Bauteile, die eine Spannung liefern (Transistor, Operationsverstärker, Ausgang eines Logik-ICs, ...)

3.1. Aufgaben zu Überlagerung

Berechnen Sie die Ströme und Spannungen an den Widerständen R_1 , R_3 , R_4 und R_5 . für die Schaltung in Abbildung 4.

Schaltung 2

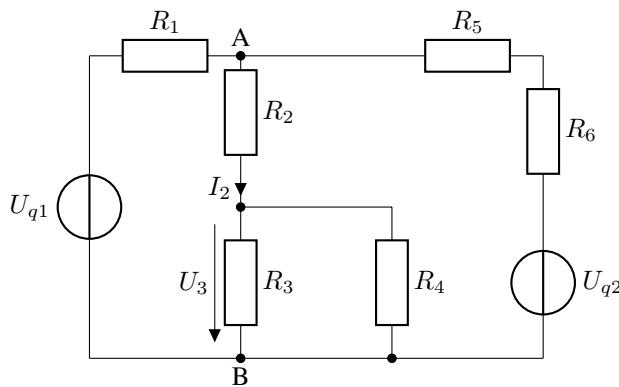


Abbildung 7: Überlagerung, Schaltung 2

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 220 \Omega, R_3 = 270 \Omega, R_4 = 470 \Omega, R_5 = 560 \Omega, R_6 = 180 \Omega, U_{q1} = 12 V, U_{q2} = 15 V$$

Schaltung 3

$$R_1 = 100 \Omega, R_2 = 220 \Omega, R_3 = 270 \Omega, R_4 = 470 \Omega, R_5 = 470 \Omega, R_6 = 560 \Omega, R_7 = 120 \Omega, U_{q1} = 12 V, U_{q2} = 15 V$$

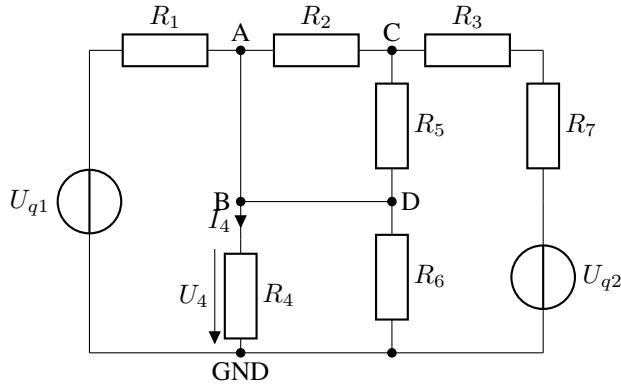


Abbildung 8: Überlagerung, Schaltung 3

4. Dreieck <-> Stern-Umwandlung (Pflicht)

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Problematik, dass einige Schaltungen nicht alleine durch Reihenschaltung oder Parallelschaltung berechnet werden können. Im Bild 9 ist eine Messbrücke gezeichnet. Diese Brückenschaltung wird verwendet, um Spannungsänderungen an einem Sensor (z. B. Temperatursensor PT1000, DMS, ...) sehr klein zu machen. R_4 wäre zum Beispiel der Messwiderstand. R_6 wäre der Innenwiderstand des Messgeräts oder ein Widerstand, an dem der Spannungsabfall gemessen wird, um ihn durch Digitalisierung in einem Computer/Controller¹ zu verarbeiten. Durch eine Umwandlung zwischen einer Anordnung der Bauteile (hier Widerstände) im Dreieck und einer Anordnung in einem Stern können äquivalente Werte berechnet werden. Dadurch ist es möglich die entstandene Schaltung mithilfe von Reihenschaltung und Parallelschaltung zu berechnen. Nach der Umrechnung ist es nicht direkt möglich die Ströme und Spannungen der ursprünglichen Teilschaltung (hier R_3, R_5, R_6) zu berechnen. Es ist lediglich möglich die Ströme und Spannungen an R_1, R_2 und R_4 zu bestimmen.

Messbrücke

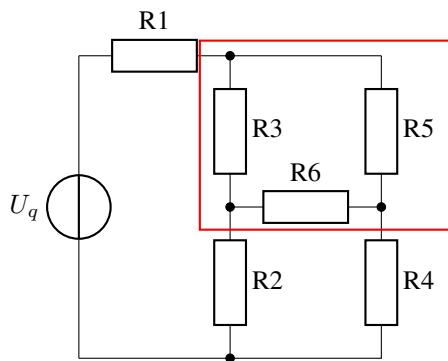


Abbildung 9: Messbrücke

Bild 10 stellt dieselbe Schaltung dar, wie Bild 9.

Messbrücke - Stern-Dreieck

$$\begin{aligned} R_{AC} &= R_3 \\ R_{AB} &= R_6 \\ R_{BC} &= R_5 \end{aligned}$$

¹Auf einer Arduino R3-Platine ist ein AT_Mega32-IC. Dieser hat einen Eingang, der analoge Spannungen digitalisieren kann.

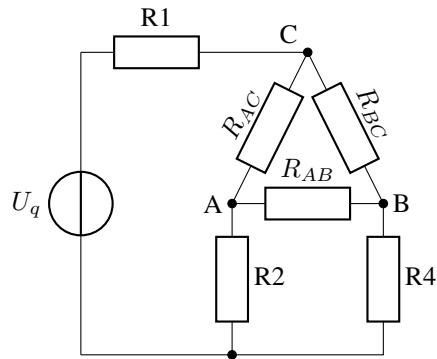


Abbildung 10: Messbrücke

In Bild 11 wurden die Widerstände des Dreiecks in Widerstände in einer sternförmigen-Anordnung umgerechnet. Die Ströme und Spannungen an den Punkten A, B, und C sind bei beiden Anordnungen identisch.

Umwandlung Dreieck → Stern

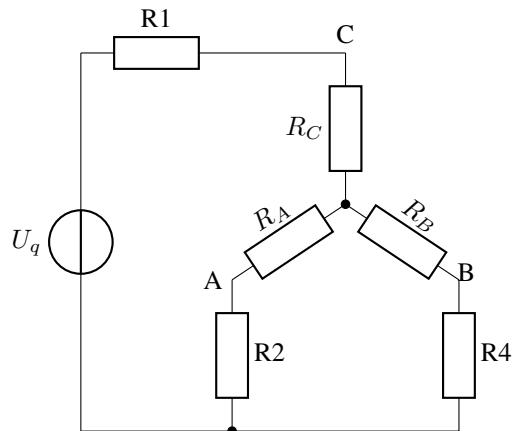


Abbildung 11: Messbrücke

$$R_A = \frac{R_{AC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

In den folgenden Bildern ist der umgekehrte Weg von einem Stern zu einem Dreieck dargestellt. Die Herleitung der Formeln habe ich nicht geschrieben, sie ist auf der Seite <https://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Dreieck-Transformation> zu finden.

Umwandlung - Stern → Dreieck

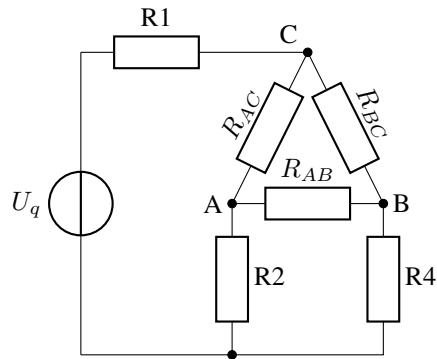


Abbildung 12: Messbrücke

$$R_{AB} = \frac{R_A \cdot R_B}{R_C} + R_A + R_B$$

$$R_{AC} = \frac{R_A \cdot R_C}{R_B} + R_A + R_C$$

$$R_{BC} = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A} + R_B + R_C$$

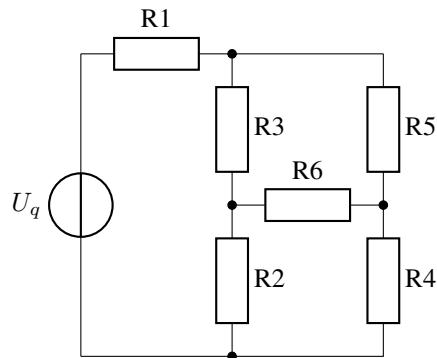


Abbildung 14: Messbrücke

$$R_1 = 220 \Omega$$

$$R_2 = 470 \Omega$$

$$R_3 = 330 \Omega$$

$$R_4 = 330 \Omega$$

$$R_5 = 560 \Omega$$

$$R_6 = 390 \Omega$$

$$U_q = 5 V$$

$$R_4 = R_{\text{Mess}}$$

gesucht: Strom und Spannung an R_6 , R_4 und R_5

5. Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Einige elektrische Schaltungen können mithilfe der Überlagerung gelöst werden. Bei komplexen Schaltungen ist dies entweder nicht möglich oder sehr aufwändig. Hier ist es unter Umständen günstiger Gleichungen für die Knoten der Schaltung aufzustellen oder für sogenannte Maschen.

Eine Masche Masche oder ein Umlauf in der Elektrotechnik bedeutet, dass alle Spannungen in einem festgelegten Kreis addiert werden. Nach den Kirchhoffschen Regeln ergibt die Summe aller Spannungen in einem Umlauf 0. $\sum_{k=1}^n U_k = 0$

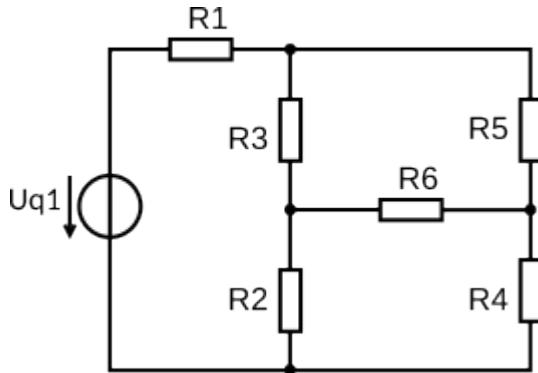


Abbildung 18: Messbrücke

Im ersten Schritt muss ein sogenannter Baum festgelegt werden. Der Baum muss alle Knoten verbinden, darf aber keinen geschlossenen Umlauf bilden.

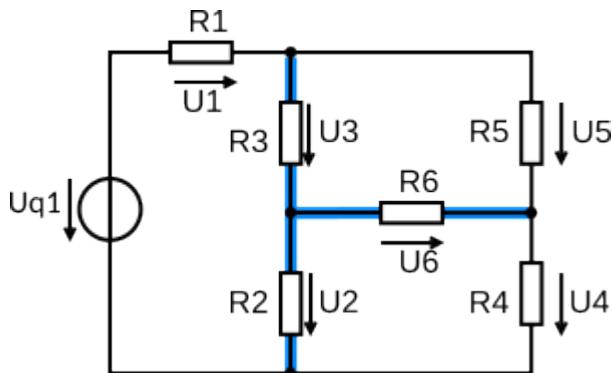


Abbildung 19: Messbrücke mit vollständigem Baum

Die Maschen M1, M2 und M3 bestehen immer aus einer Sehne (ein Zweig, der nicht zum vollständigen Baum gehört) und Ästen, die zum Baum gehören.

Für das Gleichungssystem ist die Umlaufrichtung der Maschen relevant. M1 dreht im Uhrzeigersinn, da hier die Quelle Uq1 in der Masche ist. Der Spannungspfeil der Quelle sollte möglichst gegen die Umlaufrichtung der Masche gerichtet sein.

Im nächsten Schritt stelle ich für alle Maschen und alle Knoten Gleichungen auf.

5.1. Spannungsteiler

Zu Aufgabe aus Abschnitt 2.1

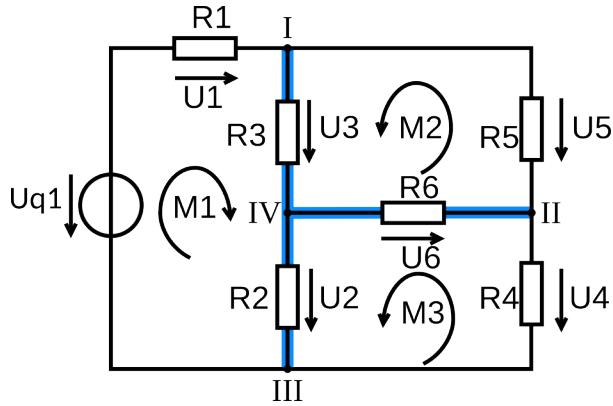


Abbildung 20: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

$$M_1 : -U_{q1} + U_1 + U_3 + U_2 = 0 \quad (33)$$

$$M_2 : U_3 + U_6 - U_5 = 0 \quad (34)$$

$$M_3 : U_2 - U_6 - U_4 = 0 \quad (35)$$

$$(36)$$

Für die Knoten gilt, dass die Summe aller Ströme, die hineinfließen und die Summe aller Ströme, die hinausfließen null sein muss. $\sum_{k=1}^n I_k = 0$

Knotengleichungen:

$$I: I_1 - I_3 - I_5 = 0 \quad (45)$$

$$II: I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad (46)$$

$$III: I_2 + I_4 - I_1 = 0 \quad (47)$$

Die Ströme seien gleich der Spannungspfeile an den Widerständen. Ich zähle Ströme, die in den Knoten hineinfließen positiv, Ströme, die aus dem Knoten herausfließen negativ.

Zur Berechnung der Ströme und Spannungen kann ich die Gleichungen der Maschen und der Knoten zu einem linearen Gleichungssystem (LGS) zusammenfassen. Wichtig dabei ist, dass das Gleichungssystem nicht überbestimmt ist. Es dürfen nur die Gleichungen in das System übernommen werden, die linear unabhängig sind. Z. B. alle Maschengleichungen oder alle Knotengleichungen. Eine Kombination aus Maschengleichungen und Knotengleichungen ist auch möglich, solange alle Gleichungen des LGS linear unabhängig sind.

Mit Hilfe der Maschengleichungen und Widerstände in den Zweigen kann ich die Ströme in den Zweigen bestimmen:

Berechnung der Ströme

$$-U_{q1} + I_1 * R_1 + I_3 * R_3 + I_2 * R_2 = 0 \quad (48)$$

$$I_3 * R_3 + I_6 * R_6 - I_5 * R_5 = 0 \quad (49)$$

$$I_2 * R_2 - I_6 * R_6 - I_4 * R_4 = 0 \quad (50)$$

Das LGS ist dabei in eine Stufenform zu überführen. Zur leichten Berechnung verwende ich die Matrix-Schreibweise:

LGS aufstellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = 220\Omega, R_2 = 470\Omega, R_3 = 330\Omega, R_4 = 330\Omega, R_5 = 560\Omega, R_6 = 390\Omega, U_q = 5V$$

Für die Berechnung werden die Elemente der Matrix links (Widerstände) mit den Elementen des Spalten-Vektors (Ströme) einzeln multipliziert und anschließend addiert.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & = 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & = 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & = 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & = 0 \\ R_1 * I_1 & +R_2 * I_2 & +R_3 * I_3 & +0 * I_4 & +0 * I_5 & +0 * I_6 & = U_{q1} \\ 0 * I_1 & +0 * I_2 & +R_3 * I_3 & +0 * I_4 & +R_5 * I_5 & +R_6 * I_6 & = 0 \\ 0 * I_1 & +R_2 * I_2 & +0 * I_3 & +R_4 * I_4 & +0 * I_5 & +R_6 * I_6 & = 0 \end{array}$$

Überführung in die Stufenform.

Im ersten Schritt vertausche ich Zeile fünf und sechs der Widerstands-Matrix und des Ergebnis-Vektors. Der Vektor mit den Strömen bleibt gleich.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oft schreibt man die verkürzte Darstellung. Der Vektor mit Strömen wird in diesem Fall nicht dargestellt, der Vektor mit den Spannungen wird durch eine senkrechte Linie vom Array der Widerstände bzw. Vorfaktoren der Ströme abgetrennt.

Gekürzte Darstellung der Matrix

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & U_{q1} \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 & 0 \end{array} \right)$$

Gekürzte Darstellung mit Werten der Widerstände

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 220\Omega & 470\Omega & 330\Omega & 0 & 0 & 0 & U_{q1} \\ 0 & 470\Omega & 0 & 330\Omega & 0 & 390\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 330\Omega & 0 & 560\Omega & 390\Omega & 0 \end{array} \right)$$

Mit dem gaußschen Eliminationsverfahren kann ich die Matrix (links der senkrechten Linie) in eine Dreiecksform bringen. Dazu kann ich jeweils zwei Zeilen vertauschen oder durch Multiplikation von Faktoren zwei Zeilen addieren, sodass in einzelnen Spalten 0-Werte gebildet werden. Ziel der Umrechnung ist, dass die Matrix etwa die Form

Stufenform - Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

erreicht. Das gaußsche Eliminationsverfahren stelle ich an dieser Stelle nicht vertieft dar. Bei Wikipedia ist ein ausführlicher Artikel zum Algorithmus des Verfahrens zu finden.

Wenn ich die Matrix in die Dreiecks-Form überführt habe, kann ich von unten nach oben die Werte einsetzen und die Ströme berechnen. Da dieses Vorgehen aufwändig und fehleranfällig ist, kann man alternativ die Verfahren der Maschenanalyse (Kreisstromverfahren) oder die Knotenanalyse (Knotenspannungsverfahren oder Knotenpotentialverfahren) verwenden.

6. Knoten und Maschen

Die Bilder sind in der Präsentation. Der Abschnitt ist im Artikel leer. Die Bilder sollen den Zusammenhang zwischen einer Platine und dem Schaltplan erklären.

7. Kreisstromverfahren

Bei diesem Verfahren werden virtuelle Ströme berechnet. In Teilen der Schaltung, in denen nur ein Kreisstrom fließt, ist der Strom des Zweigs identisch zum Kreisstrom der Masche. Wenn mehrere virtuelle Kreisströme durch denselben Zweig fließen, müssen sie entsprechend der Zählrichtung addiert werden. Wenn die Zählrichtung beider Ströme identisch ist, werden sie addiert, sonst subtrahiert. Wenn ein Strom negativ ist, bedeutet dies, dass die Zählrichtung der Masche entgegen der tatsächlichen Stromrichtung ist.

Kreisstromverfahren - Baum I

1. Baum festlegen (alle Knoten berühren, kein Umlauf).
2. Maschen einzeichnen (Umlaufsinn ist willkürlich)
3. Gleichungen aufstellen.

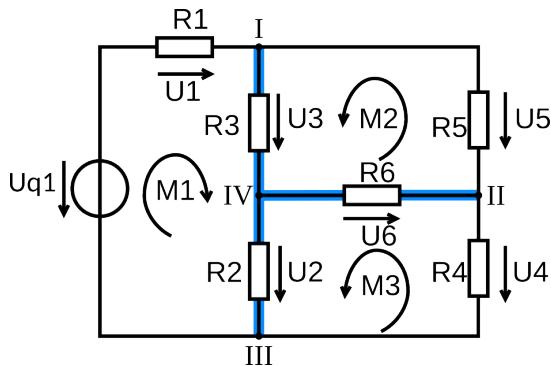


Abbildung 21: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Im Bild 21 ist die Brückenschaltung gezeichnet. In Blau ist der sogenannte Baum eingezeichnet. Der Baum in der Schaltung ist eine Markierung, die alle Knoten berührt. Gleichzeitig darf sie keinen geschlossenen Umlauf bilden. Die Markierungen der Knoten (römische Zahlen) sind für die Maschenstrom- oder Kreisstromanalyse nicht relevant.

Bei der Festlegung des Baums sollte man berücksichtigen, dass Spannungsquellen immer außerhalb des Baums sein sollen. Es wäre hier auch möglich, statt des Ast mit R3 den Ast über R5 zu wählen. Ebenso wäre statt R2 ein

Teil des Baums über R4 möglich. Im vorliegenden Baum wäre es auch möglich statt des Ast R6 entweder R5 oder R4 zu wählen.

Nach der Festlegung des Baums werden die Maschen festgelegt. Eine Masche besteht immer aus einer Sehne, einem Teil der Schaltung, der nicht zum Baum gehört und den Ästen des Baums um den Umlauf zu schließen. Masche M1 besteht aus der Sehne mit der Quelle U_{q1} und R1. Zusätzlich sind die Äste mit R3 und R2 Teil der Masche.

Der Umlaufsinn der Masche ist frei wählbar. Bei Maschen, die eine Quelle beinhalten sollte man den Umlaufsinn entgegen dem Zählpfeil der Quelle (Zählpfeil hier nach unten, daher sollte der Umlauf an der Stelle nach oben verlaufen). Bei den Maschen 2 und 3 ist der Umlaufsinn frei wählbar.

Kreisstromverfahren - Baum II

Gleichungssystem

1. Hauptdiagonale: R_s in der Masche
2. Nebendiagonalen: Verbindungs- R_s
3. Quelle in Quellen-Vektor

Nach der Festlegung der Maschen werden die Widerstände in einer Matrix notiert. Auf der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten) werden die Widerstände der Maschen eingetragen. An Position 1-1 (links oben stehen die Widerstände der Masche 1, in der Mitte (Position 2-2) die Widerstände der Masche 2 und in der Position 3-3 die Widerstände der Masche 3).

An den anderen Positionen werden die Koppelwiderstände notiert. Masche 1 und Masche 2 haben den Koppelwiderstand R3, da in beiden Maschen nur R3 gemeinsam ist. Das Vorzeichen für R3 ist von den Umlaufrichtungen der beteiligten Maschen abhängig. Wenn die Umlaufrichtung (am betreffenden Widerstand / Ast) gleich ist, wird der Widerstand mit positiven Vorzeichen eingetragen. Wenn die Umlaufrichtungen gegenläufig sind, wird der Widerstand mit negativem Vorzeichen eingetragen. In Zeile 1, Spalte 2 wird der Widerstand (oder die Widerstände) eingetragen, mit denen die Maschen 1 und 2 verbunden sind². Zeile 1, Spalte 3 ist die Kopplung von Masche 1 und Masche 3. Allgemein kann man sagen die Zeile bestimmt die eine Masche, die einen gemeinsamen Baum-Zweig haben³. Die Spalte bestimmt die zweite Masche der Kopplung.

Die „untere Hälfte“ der Matrix (unten links von der Hauptdiagonalen) wird über die Hauptdiagonale gespiegelt. (Spalte 1, Zeile 3 wird von Zeile 1, Spalte 3 kopiert, etc.)

Anschließend werden der Vektor für die Maschenströme (hier I_{M1} bis I_{M3}) erstellt und - rechts vom Gleichheitszeichen - der Vektor mit den Spannungsquellen. Wenn in einer Masche keine Quelle vorhanden ist, wird dort 0 eingetragen. (siehe Gleichungssystem, unten)

Kreisstromverfahren - Gleichungssystem

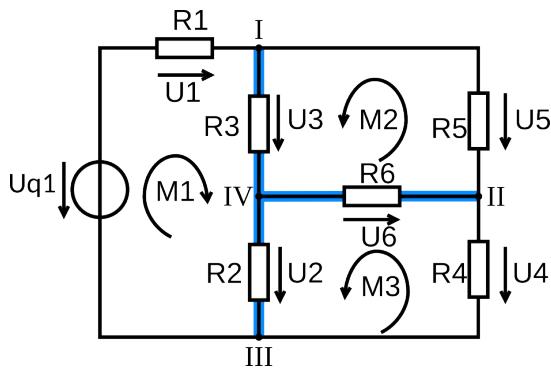


Abbildung 22: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

²Die Widerstände im Baum-Zweig / den Baum-Zweigen, die die beiden Maschen gemeinsam haben.

³es können auch mehrere Zweige im Baum sein.

$$\text{Gleichungssystem} > \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & R_3 & R_2 \\ R_3 & R_3 + R_5 + R_6 & -R_6 \\ R_2 & -R_6 & R_2 + R_4 + R_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem kann per Hand gelöst werden. Alternativ ist eine Lösung mit einem geeigneten Taschenrechner oder z.B. octave auf dem Computer möglich. Octave ist open source.

Kreisstromverfahren - Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ccc|c} M1 & R_1 + R_2 + R_3 & R_3 & R_2 \\ M2 & R_3 & R_3 + R_5 + R_6 & -R_6 \\ M3 & R_2 & -R_6 & R_2 + R_4 + R_6 \end{array} \right| * \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen:

- per Hand - z.B. gaußsches Eliminationsverfahren Matrix und Spannungs-Vektor in Dreiecksform bringen.
- im Taschenrechner - LGS Solver Matrix und Spannungsvektor eintippen. Ergebnis ist Strom Vektor (von oben nach unten).
- mit dem PC z.B. octave (open source) - Eingabe vergleichbar mit Taschenrechner

Die Eintragungen M1, M2 und M3 sind zusätzlich, als Hinweis eingetragen. Sie gehören nicht zum Gleichungssystem / der Matrix. An den Kreuzungen stehen zwei unterschiedliche Informationen:

- Hauptdiagonale (M1/M1, M2/M2, M3/M3): hier sind die Widerstände der jeweiligen Masche eingetragen.
- Nebendiagonalen (z. B. M1/M2) hier sind die Widerstände eingetragen, die sich zwei Maschen teilen. Bei gleicher Stromrichtung an dem Widerstand wird der Widerstand mit positivem Vorzeichen eingetragen (z. B. M1/M2: R3), bei unterschiedlichen Stromrichtungen wird der Widerstand mit negativen Vorzeichen eingetragen (z. B. M2/M3: -R6).

Die Eintragungen der Nebendiagonalen sind an der Hauptdiagonalen gespiegelt. (M1/M2 ist identisch zu M2/M1).

8. Ersatzquellen

Umwandlung Stromquelle → Spannungsquelle I

Ideale Stromquelle

- liefert definierten, konstanten Strom
- Spannung ist unerheblich
- Innenwiderstand (R_i) ist parallel geschaltet.

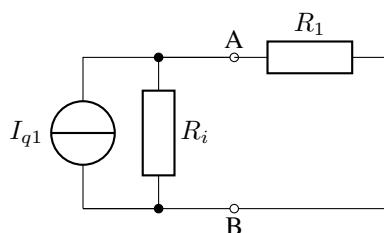


Abbildung 23: Stromquelle

Umwandlung Stromquelle → Spannungsquelle II

Stromquelle in Spannungsquelle

- Wert von R_i bleibt,
- R_i geht in Reihe zu U_q
- Spannung: $U_l = I_k \cdot R_i$

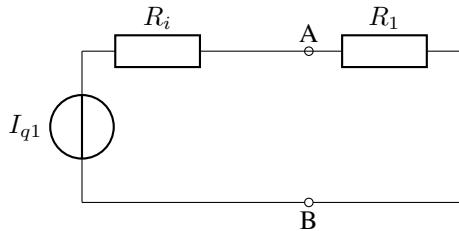


Abbildung 24: Spannungsquelle

Umwandlung Spannungsquelle → Stromquelle

Spannungsquelle in Stromquelle

- Wert von R_i bleibt
- R_i ist jetzt parallel zu I_q
- Strom: $I_k = \frac{U_l}{R_i}$

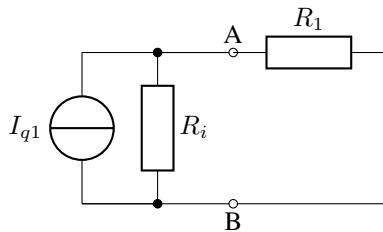


Abbildung 25: Stromquelle

Stromquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Stromquelle

- R_i ist parallel zu I_q
- R2 ist irrelevant

Spannungsquelle mit „zusätzlichem“ Widerstand

Ideale Spannungsquelle

- R_i ist in Reihe zu U_q
- R3 ist irrelevant

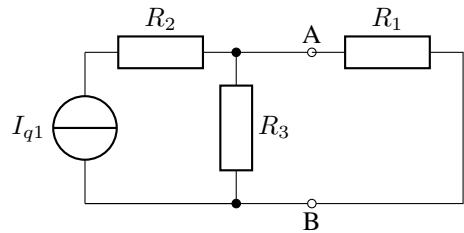


Abbildung 26: Stromquelle

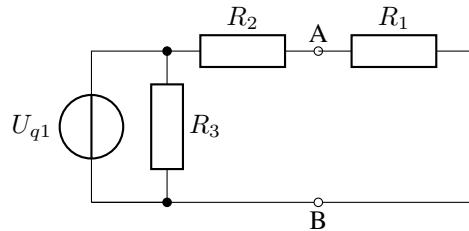


Abbildung 27: Spannungsquelle

A. Lösungen

A.1. Ersatzwiderstand

A.1.1. Übungen zu Zweipole I

a $R_1 = R_2 = 220\Omega$ $R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 470\Omega$ $R_{3||45} = 173,12\Omega$

b $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 560\Omega$ $R_{3||45} = 178,14\Omega$

c $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$ $R_3 = 120\Omega$ $R_{3||45} = 85,71\Omega$

A.1.2. Übungen zu Zweipole II

a $R_1 = R_2 = 220\Omega$ $R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 470\Omega$ $R_{3||5+4} = 585,01\Omega$

b $R_1 = R_2 = R_3 = 150\Omega$ $R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 560\Omega$ $R_{3||5+4} = 650,79\Omega$

c $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$ $R_3 = 120\Omega$ $R_{3||5+4} = 216,67\Omega$

A.2. Spannungsteiler

Zu Aufgabe aus Abschnitt 2.1

U [V]	$R_1 [\Omega]$	$R_2 [\Omega]$	I_{R_1}	I_{R_2}
5	220	330	9,09 mA	9,09 mA
12	220	470	17,39 mA	17,39 mA
12	220	780	12 mA	12 mA
12	470	683	10,4 mA	10,4 mA
14,96	560	120	22 mA	22 mA
6,5	470	1,5k	3,3 mA	3,3 mA

A.3. Lösungsvorschlag zu Schaltung 2

Gegeben seien die Werte: $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 220\Omega$ $R_3 = 270\Omega$, $R_4 = 470\Omega$ $R_5 = 560\Omega$, $R_6 = 180\Omega$ $U_{q1} = 12 V$, $U_{q2} = 15 V$

Da ich die Spannung an R_3 berechnen soll, kann ich die Schaltung nur bis Bild 32 / 37 zusammenfassen.

A.3.1. Schaltung 2 - nur Quelle 1 aktiv

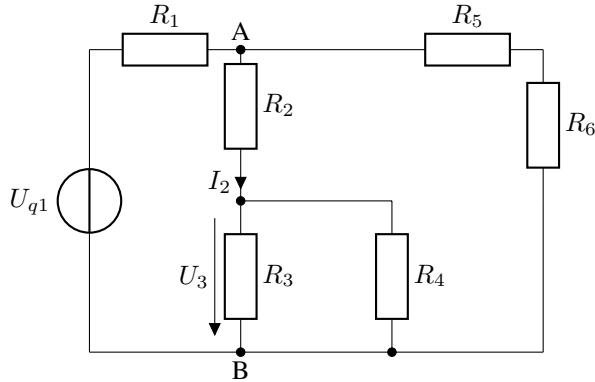


Abbildung 29: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.1)

In Schritt 1 (Bild 29) ist die Quelle 2 entfernt worden. Nur Quelle 1 ist jetzt aktiv. Dies ergibt die Teilspannung U'_3 . Später berechne ich die Teilspannung U''_3 und addiere die beiden Teilspannungen. Wenn drei oder mehr Quellen in der Schaltung sind, muss ich das verfahren für jede Quelle anwenden. Dabei ist immer nur eine Quelle zur selben Zeit aktiv. Ich muss jeweils die Schaltung zusammenfassen, um die gesuchte (Teil-)Spannung (hier U_3 an R_3) berechnen zu können.

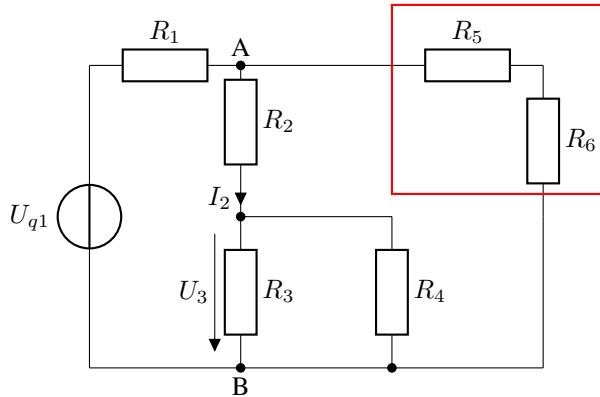


Abbildung 30: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.2)

In Schritt 1.2 (Bild 30) werden die Widerstände R_5 und R_6 zu einem Widerstand zusammengefasst.

In Schritt 1.3 (Bild 31) werden die Widerstände R_3 und R_4 zusammengefasst, da in der Parallelschaltung dieselbe Spannung anliegt. R_2 kann nicht mit dem neuen Widerstand $R_{3||4}$ zusammengefasst werden, da die Spannung an R_3 gesucht wird. Bei einer Zusammenfassung von R_2 und $R_{3||4}$ kann die Teilspannung nicht mehr direkt bestimmt werden. Ich müsste dann mithilfe der Spannungsteiler-Regel die Teilspannung bestimmen.

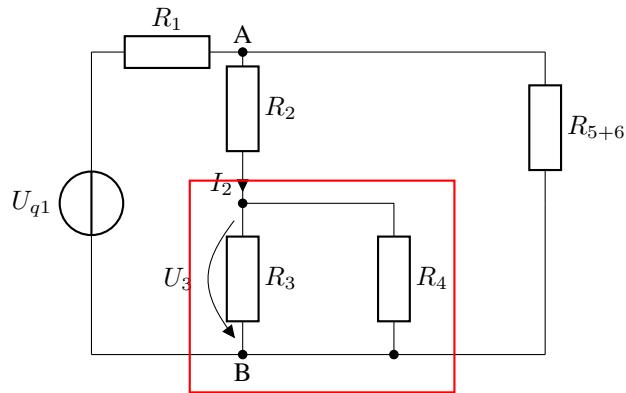


Abbildung 31: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.3)

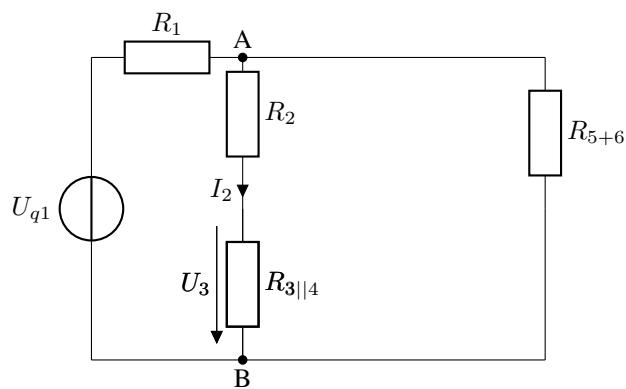


Abbildung 32: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.4)

A.3.2. Schaltung 2 - nur Quelle 2 aktiv

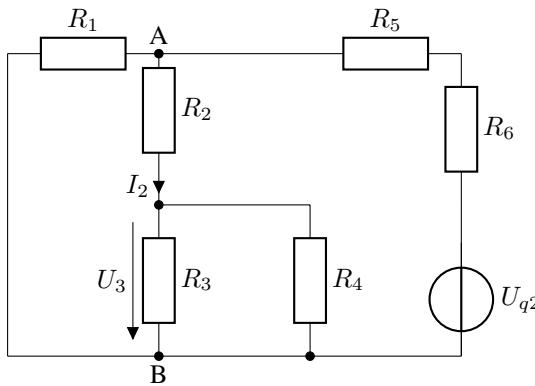


Abbildung 34: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.1)

$R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 220\Omega$ $R_3 = 270\Omega$, $R_4 = 470\Omega$ $R_5 = 560\Omega$, $R_6 = 180\Omega$ $U_{q1} = 12 V$, $U_{q2} = 15 V$

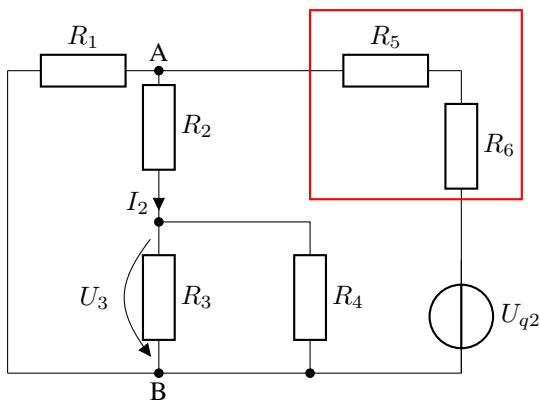


Abbildung 35: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.2)

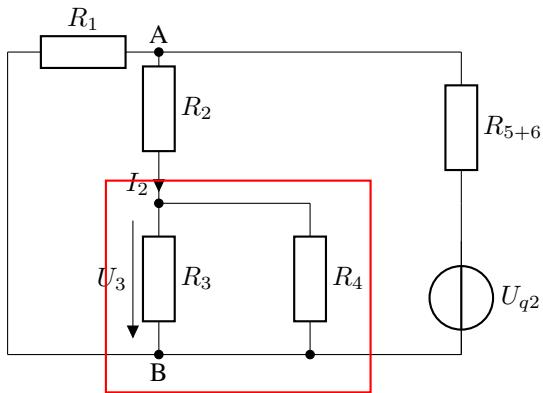


Abbildung 36: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.3)

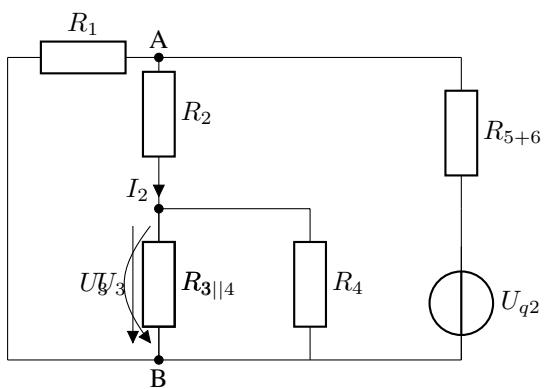


Abbildung 37: Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.4)

A.4. Lösungsvorschlag zu Schaltung 3

A.4.1. Schaltung 3 - nur Quelle 1 aktiv

$R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 220\Omega$ $R_3 = 270\Omega$, $R_4 = 470\Omega$ $R_5 = 470\Omega$, $R_6 = 560\Omega$ $R_7 = 120\Omega$ $U_{q1} = 12V$, $U_{q2} = 15V$

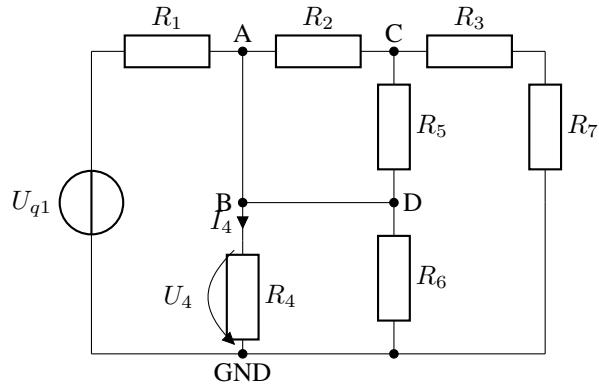


Abbildung 39: Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.1) Quelle Q2 entfernt

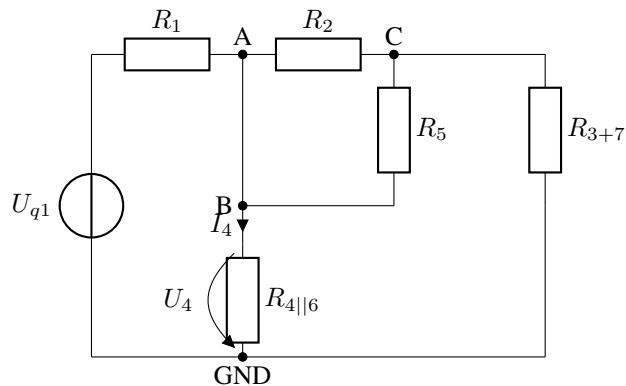


Abbildung 40: Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.2)

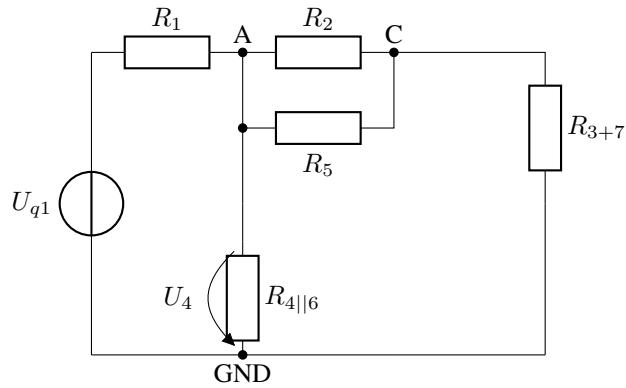


Abbildung 41: Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.4)

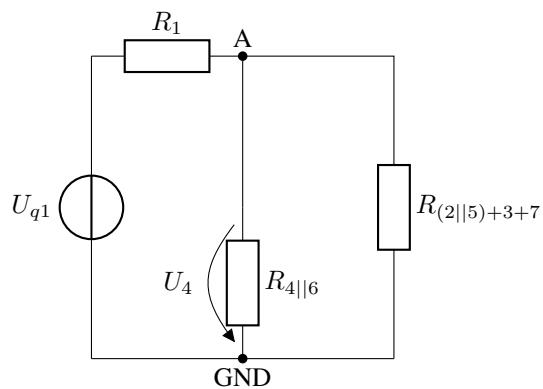


Abbildung 42: Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.5)

B. Literatur und Quellen

Literatur und Quellen

Wikibooks <https://de.wikibooks.org/wiki/Elektrostatik>

Marinescu, Marlene Elektrische und magnetische Felder, Eine praxisorientierte Einführung; A 3 (2012); Springer

Marika Höwing Einführung in die Elektrotechnik; A2 (2021); Rheinwerk

Tutorial zu Simulation (Spice) <https://ngspice.sourceforge.io/ngspice-eeschema.html> (abgerufen: 03.11.25) und <https://www.kicad.org/>

Abbildungsverzeichnis

1.	Berechnung des Ersatzwiderstands	3
2.	Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1	3
3.	Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2	4
4.	Überlagerung, Schaltung 1, Zwei Quellen aktiv	5
5.	Nur Quelle eins aktiv	6
6.	Nur Quelle zwei aktiv	7
7.	Überlagerung, Schaltung 2	8
8.	Überlagerung, Schaltung 3	9
9.	Messbrücke	9
10.	Messbrücke	10
11.	Messbrücke	10
12.	Messbrücke	11
14.	Messbrücke	11
18.	Messbrücke	12
19.	Messbrücke mit vollständigem Baum	12
20.	Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen	13
21.	Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen	15
22.	Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen	16
23.	Stromquelle	17
24.	Spannungsquelle	18
25.	Stromquelle	18
26.	Stromquelle	19
27.	Spannungsquelle	19
29.	Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.1)	20
30.	Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.2)	20
31.	Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.3)	21
32.	Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 1.4)	21
34.	Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.1)	22
35.	Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.2)	22
36.	Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.3)	23
37.	Überlagerung, Schaltung 2 (Schritt 2.4)	23
39.	Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.1) Quelle Q2 entfernt	24
40.	Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.2)	24
41.	Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.4)	25
42.	Überlagerung, Schaltung 3, (Schritt1.5)	25