

Teil I

Themenfeld 12.1 - Gleichstromnetzanalyse

Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz
(Pflicht)

Dreieck \leftrightarrow Stern-Umwandlung (Pflicht)

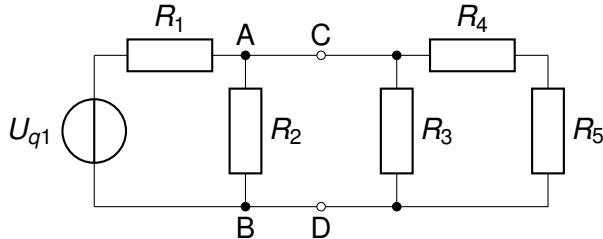
Knoten- und Maschengleichungen
(Pflicht)

Knoten und Maschen

Kreisstromverfahren

Zweipole

In der Schaltung unten sollen die Widerstände R_3 bis R_5 als ein virtuelles Bauteil dargestellt werden.



Werte für Berechnung

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$

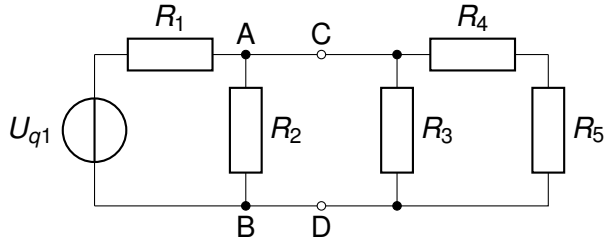
$$R_3 = 30\Omega$$

$$R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5V,$$

$$U_{q2} = 12V$$



Berechnung des Ersatzwiderstands

$$R_{45} = R_4 + R_5 \quad (1)$$

$$R_{45} = 40\Omega + 50\Omega \quad (2)$$

$$R_{45} = 90\Omega \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{R_{3||45}} = \frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{90\Omega} \quad (5)$$

$$R_{3||45} = 22,5\Omega \quad (6)$$

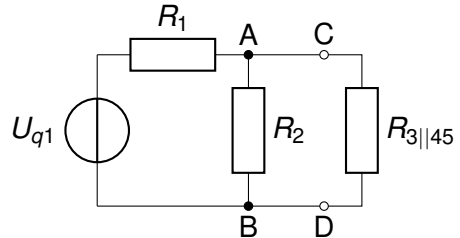


Abbildung: Berechnung des Ersatzwiderstands

Übungen zu Zweipole I

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a $R_1 = R_2 = 220\Omega$ $R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 470\Omega$

b $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 560\Omega$

c $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$ $R_3 = 120\Omega$

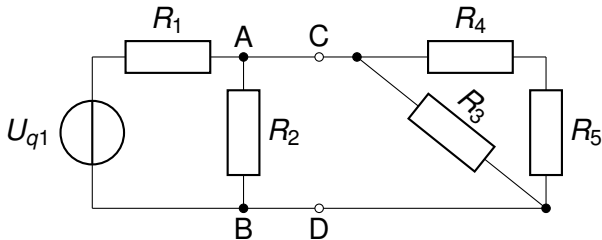


Abbildung: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 1

Übungen zu Zweipole II

Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand zwischen den Klemmen C und D zur Schaltung unten.

a $R_1 = R_2 = 220\Omega$ $R_3 = R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 470\Omega$

b $R_1 = R_2 = R_3 = 150\Omega$ $R_5 = 230\Omega$ $R_4 = 560\Omega$

c $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 150\Omega$ $R_3 = 120\Omega$

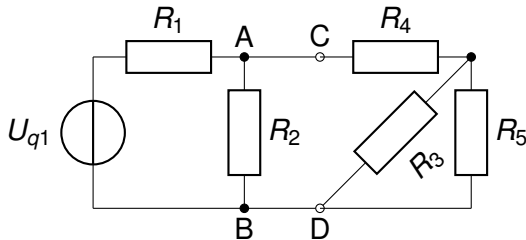
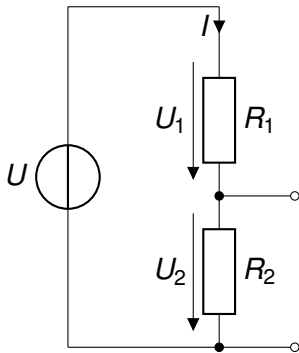


Abbildung: Schaltung zu Übung Ersatzzweipol - Teil 2

Spannungsteiler



$$U = U_1 + U_2 \quad (7)$$

$$I = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (8)$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \quad (9)$$

$$U_2 = I * R_2 \quad (10)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_{ges}} * R_2 \quad (11)$$

$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} * R_2 \quad (12)$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (13)$$

Übungsaufgaben zu Spannungsteiler

U [V]	R ₁ [Ω]	R ₂ [Ω]	I _{R1}	I _{R2}
5	220	330		
12	220	470		
12	220		12 mA	
12	470			10,4 mA
	560	120	22 mA	
	470	1,5k	3,3 mA	

Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

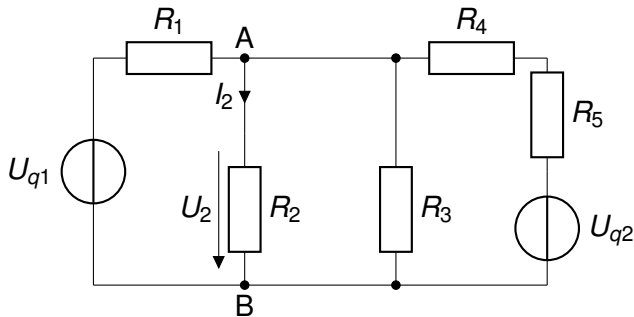
Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)
Aufgaben zu Überlagerung

Dreieck \leftrightarrow Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Knoten und Maschen

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

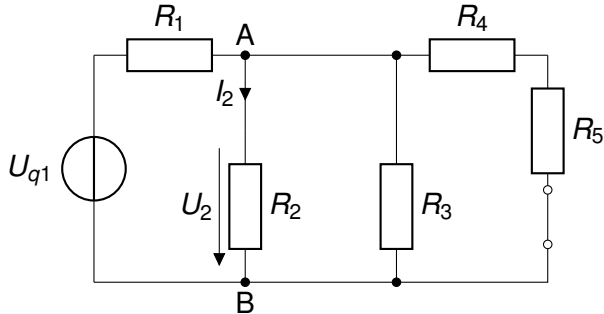
$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 1, Zwei Quellen aktiv

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Nur Quelle eins aktiv

Berechnung Ersatzwiderstand I

$$U_{2'} = I_2 * R_2 || R_3 || R_4 + R_5 \quad (14)$$

$$U_{2'} = I_2 * \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}} \quad (15)$$

I_2 ist nicht bekannt.

Berechnung Ersatzwiderstand II

$$U_{q1} = U_1 + U_2 \quad (16)$$

$$U_2 = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (17)$$

Einsetzen I

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}} \quad (18)$$

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}} \quad (19)$$

$$(20)$$

Einsetzen II

$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{R_2 || R_3 || R_{45}}{R_1 + R_2 || R_3 || R_{45}}$$

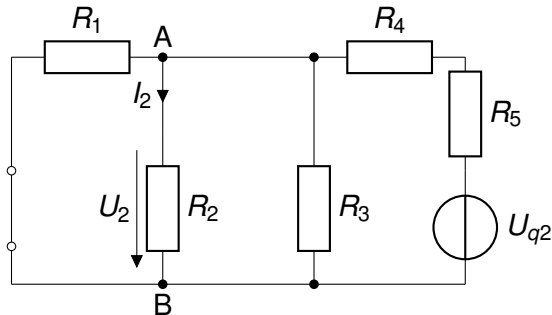
$$U_{2'} = U_{q1} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}}}$$

$$U_{2'} = 5 \text{ V} * \frac{10,59 \Omega}{10 \Omega + 10,59 \Omega} \quad (21)$$

$$U_{2'} = 5 \text{ V} * 0,514 \quad (22)$$

$$U_{2'} = 2,57 \text{ V} \quad (23)$$

Zwei Spannungsquellen U_1 und U_2



$$R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega, R_4 = 40\Omega$$

$$R_5 = 50\Omega$$

$$U_{q1} = 5\text{ V}, U_{q2} = 12\text{ V}$$

Abbildung: Nur Quelle zwei aktiv

Quelle 2, Einsetzen I

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (24)$$

(25)

Quelle 2, Einsetzen II

$$U_{2''} = U_{q2} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}{R_4 + R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}} \quad (26)$$

$$U_{2''} = 12 \text{ V} * \frac{\frac{1}{\frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{30 \Omega}}}{40 \Omega + 50 \Omega + \frac{1}{\frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{30 \Omega}}} \quad (27)$$

$$U_{2''} = 12 \text{ V} * 0,057 \quad (28)$$

$$U_{2''} = 0,685 \text{ V} \quad (29)$$

Addition

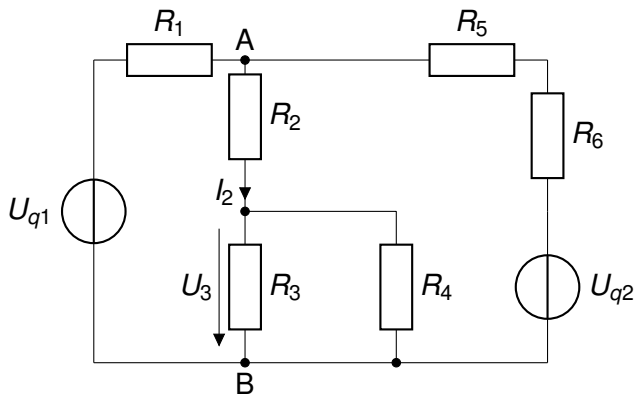
Zum Abschluss werden die beiden Teilspannungen addiert.

$$U_2 = U_{2'} + U_{2''} \quad (30)$$

$$U_2 = 2,57 \text{ V} + 0,685 \text{ V} \quad (31)$$

$$U_2 = 3,26 \text{ V} \quad (32)$$

Schaltung 2



$$R_1 = 100\Omega, R_2 = 220\Omega$$

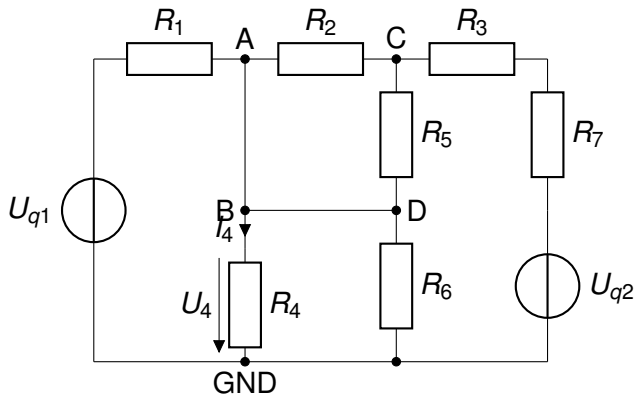
$$R_3 = 270\Omega, R_4 = 470\Omega$$

$$R_5 = 560\Omega, R_6 = 180\Omega$$

$$U_{q1} = 12\text{ V}, U_{q2} = 15\text{ V}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 2

Schaltung 3



$$\begin{aligned} R_1 &= 100 \, \Omega, & R_2 &= 220 \, \Omega \\ R_3 &= 270 \, \Omega, & R_4 &= 470 \, \Omega \\ R_5 &= 470 \, \Omega, & R_6 &= 560 \, \Omega \\ R_7 &= 120 \, \Omega \\ U_{q1} &= 12 \, \text{V}, & U_{q2} &= 15 \, \text{V} \end{aligned}$$

Abbildung: Überlagerung, Schaltung 3

Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Dreieck \leftrightarrow Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Knoten und Maschen

Kreisstromverfahren

Messbrücke

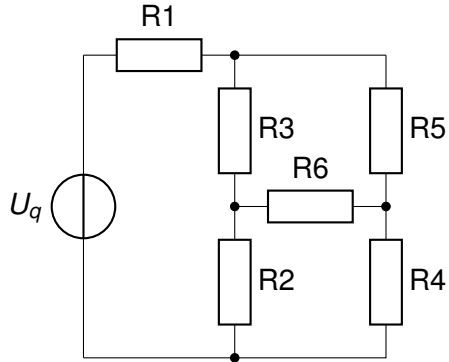


Abbildung: Messbrücke

Messbrücke

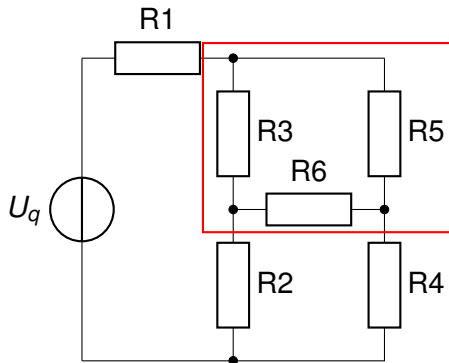
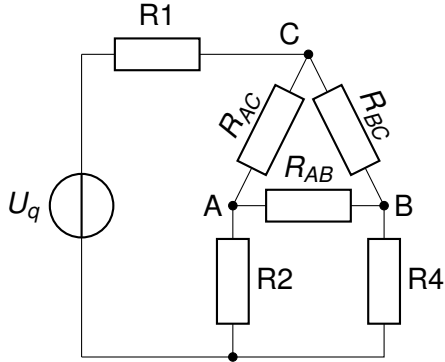


Abbildung: Messbrücke

Messbrücke - Stern-Dreieck



$$R_{AC} = R_3$$

$$R_{AB} = R_6$$

$$R_{BC} = R_5$$

Abbildung: Messbrücke

Umwandlung Dreieck -> Stern

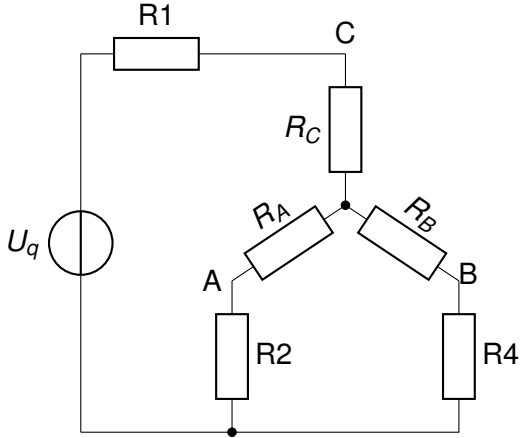


Abbildung: Messbrücke

Umwandlung Dreieck -> Stern

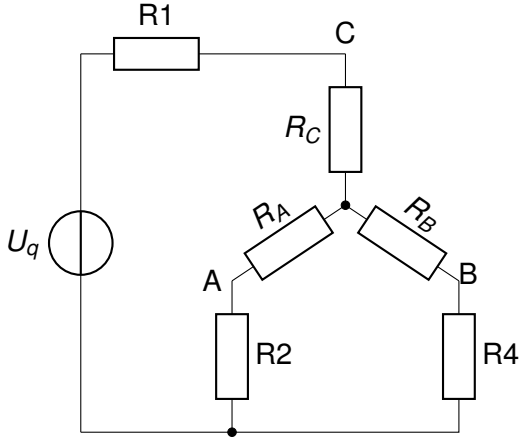


Abbildung: Messbrücke

$$R_A = \frac{R_{AC} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}}$$

Umwandlung - Stern- > Dreieck

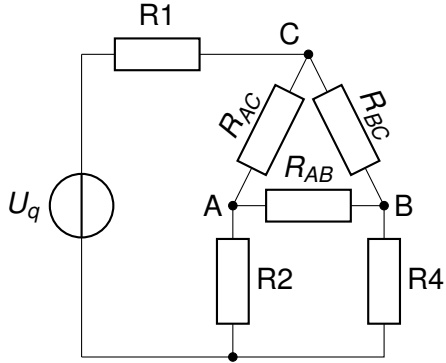


Abbildung: Messbrücke

Umwandlung - Stern- > Dreieck

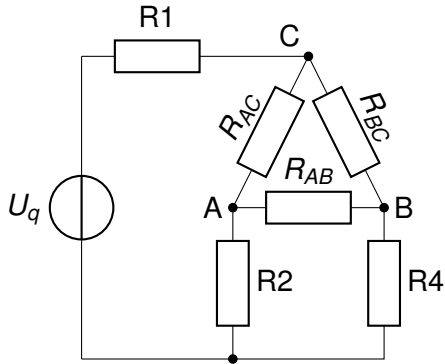


Abbildung: Messbrücke

$$R_{AB} = \frac{R_A \cdot R_B}{R_C} + R_A + R_B$$

$$R_{AC} = \frac{R_A \cdot R_C}{R_B} + R_A + R_C$$

$$R_{BC} = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A} + R_B + R_C$$

Aufgabe: Messbrücke

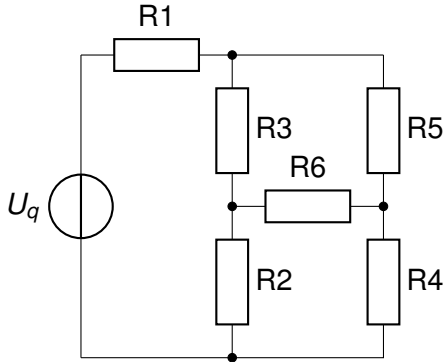


Abbildung: Messbrücke

$$R_1 = 220 \, \Omega$$

$$R_2 = 470 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

$$R_4 = 330 \, \Omega$$

$$R_5 = 560 \, \Omega$$

$$R_6 = 390 \, \Omega$$

$$U_q = 5 \, \text{V}$$

$$R_4 = R_{\text{Mess}}$$

gesucht: Strom und Spannung an R_6 , R_4 und R_5

Lösung zu Messbrücke

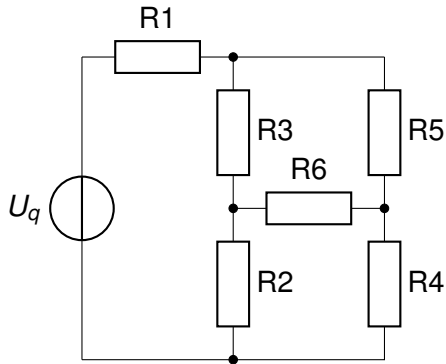


Abbildung: Messbrücke

$$R_1 = 220 \, \Omega$$

$$R_2 = 470 \, \Omega$$

$$R_3 = 330 \, \Omega$$

$$R_4 = 330 \, \Omega$$

$$R_5 = 560 \, \Omega$$

$$R_6 = 390 \, \Omega$$

$$U_q = 5 \, V$$

$$I_4 = 4,2 \, mA, \quad I_5 = 3,3 \, mA, \quad I_6 = 890 \, \mu A$$

$$U_4 = 1,4 \, V, \quad U_5 = 3,6 \, V, \quad U_6 = 0,35 \, V$$

Inhalt

Zweipoltheorie (Pflicht)

Spannungsteiler

Überlagerungsverfahren nach Helmholtz (Pflicht)

Dreieck \leftrightarrow Stern-Umwandlung (Pflicht)

Knoten- und Maschengleichungen (Pflicht)

Knoten und Maschen

Kreisstromverfahren

Schaltung - Maschen

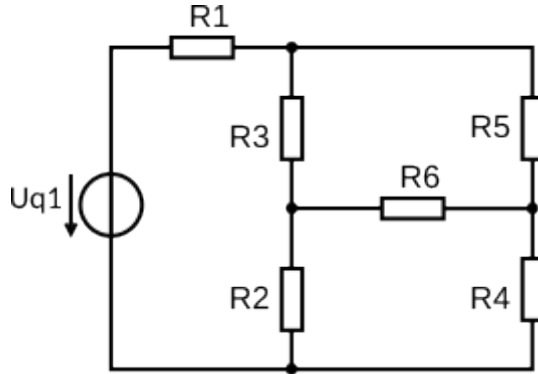


Abbildung: Messbrücke

Schaltung - Maschen

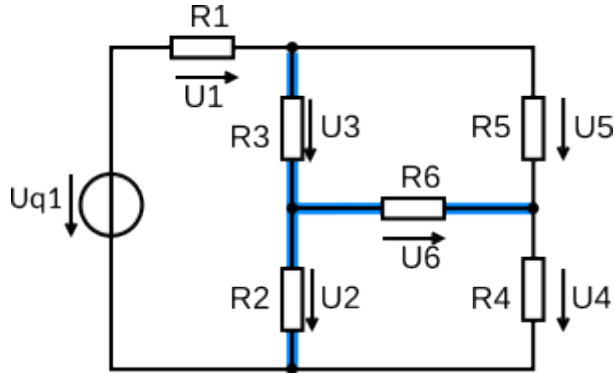


Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum

Schaltung - Maschen

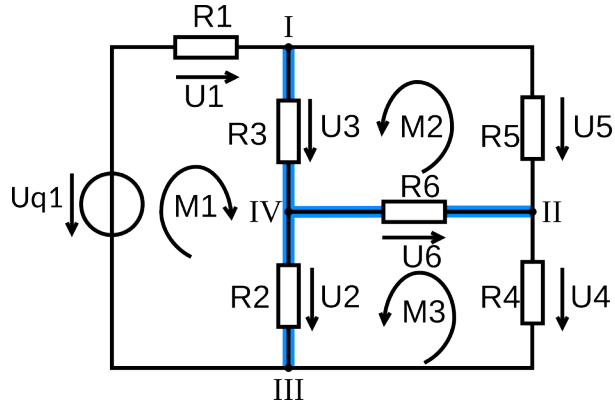


Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Gleichungen für Maschen und Knoten

$$M_1 : -U_{q1} + U_1 + U_3 + U_2 = 0 \quad (33)$$

$$M_2 : U_3 + U_6 - U_5 = 0 \quad (34)$$

$$M_3 : U_2 - U_4 - U_6 = 0 \quad (35)$$

$$(36)$$

Knotengleichungen:

$$\text{I: } I_1 - I_3 - I_5 = 0 \quad (37)$$

$$\text{II: } I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad (38)$$

$$\text{III: } I_2 + I_4 - I_1 = 0 \quad (39)$$

$$\text{IV: } I_3 - I_2 - I_6 = 0 \quad (40)$$

Berechnung der Ströme

$$-U_{q1} + I_1 * R_1 + I_3 * R_3 + I_2 * R_2 = 0 \quad (41)$$

$$I_3 * R_3 + I_6 * R_6 - I_5 * R_5 = 0 \quad (42)$$

$$I_2 * R_2 - I_6 * R_6 - I_4 * R_4 = 0 \quad (43)$$

LGS aufstellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = 220\Omega, R_2 = 470\Omega, R_3 = 330\Omega, R_4 = 330\Omega, R_5 = 560\Omega, R_6 = 390\Omega$$

$$U_q = 5\text{ V}$$

Gekürzte Darstellung der Matrix

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & Uq1 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 & 0 \end{array} \right)$$

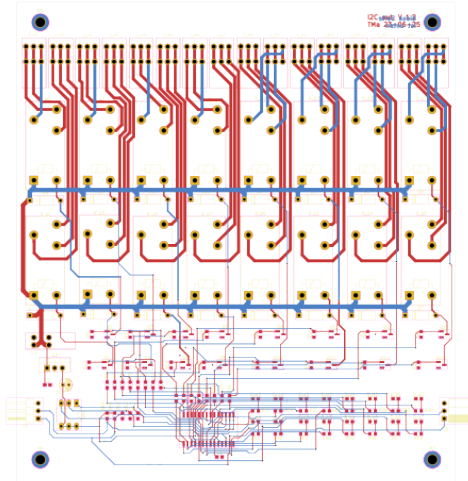
Gekürzte Darstellung mit Werten der Widerstände

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 220\Omega & 470\Omega & 330\Omega & 0 & 0 & 0 & U_{q1} \\ 0 & 470\Omega & 0 & 330\Omega & 0 & 390\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 330\Omega & 0 & 560\Omega & 390\Omega & 0 \end{array} \right)$$

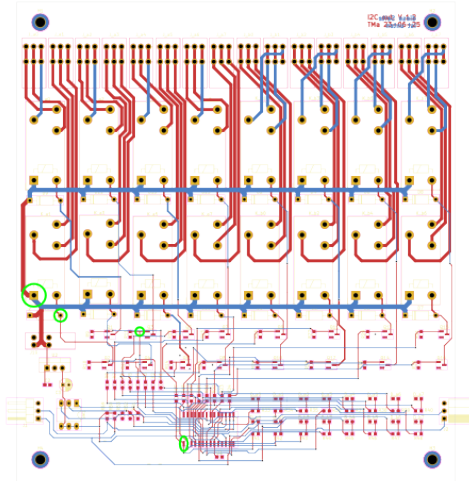
Stufenform - Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Knoten und Maschen



Knoten und Maschen



Knoten und Maschen

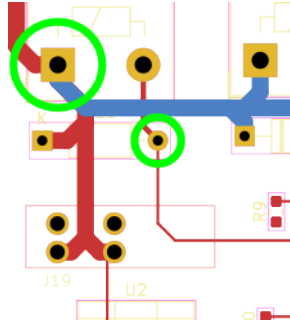


Abbildung: Platine Ausgang

Knoten und Maschen

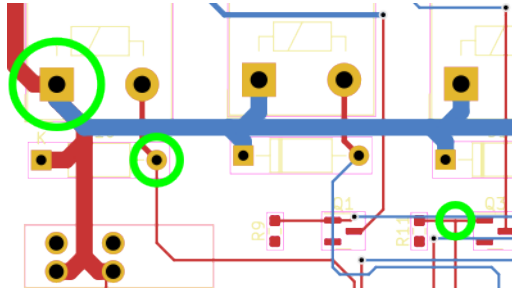
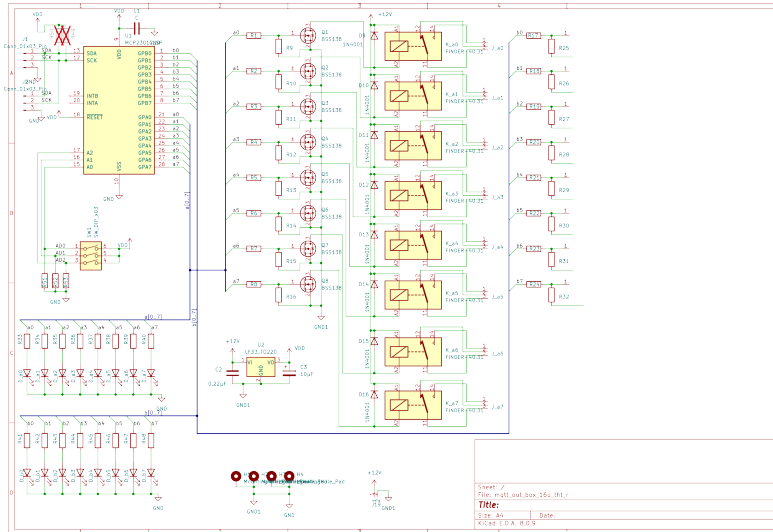


Abbildung: Platine Ausgang

Knoten und Maschen



Knoten und Maschen

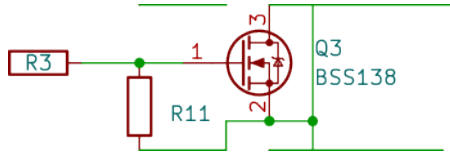
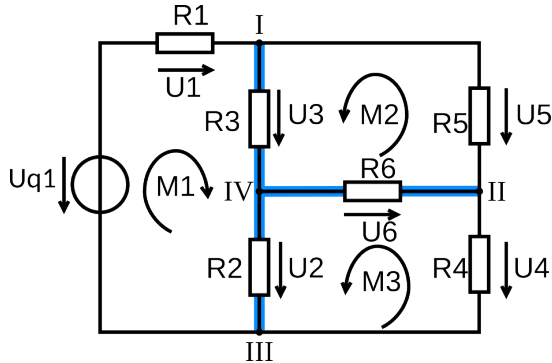


Abbildung: Schaltplan Ausgang

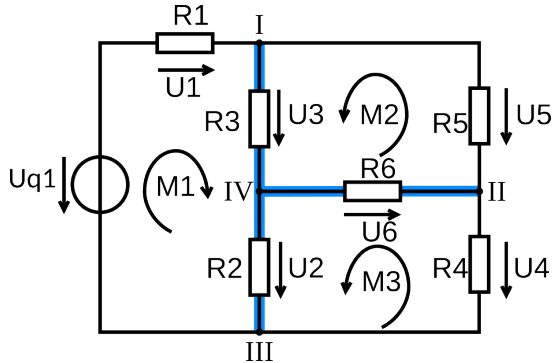
Kreisstromverfahren - Baum I



1. Baum festlegen (alle Knoten berühren, kein Umlauf).
2. Maschen einzeichnen (Umlaufsinn ist willkürlich)
3. Gleichungen aufstellen.

Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Kreisstromverfahren - Baum II

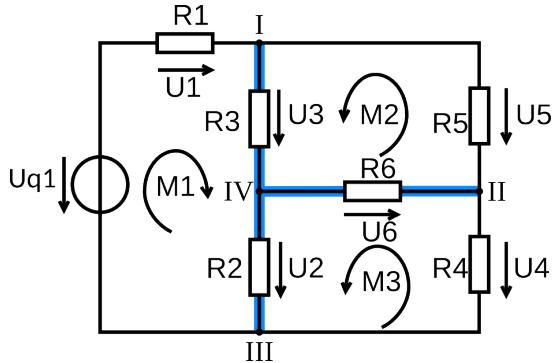


Gleichungssystem

1. Hauptdiagonale: R_s in der Masche
2. Nebendiagonalen: Verbindungs- R_s
3. Quelle in Quellen-Vektor

Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Kreisstromverfahren - Gleichungssystem



Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R1 + R2 + R3 & R3 & R3 \\ R3 & R3 + R5 + R6 & -R6 \\ R2 & -R6 & R2 + R4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung: Messbrücke mit vollständigem Baum und Maschen

Kreisstromverfahren - Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R1 + R2 + R3 & R3 & R2 \\ R3 & R3 + R5 + R6 & -R6 \\ R2 & -R6 & R2 + R4 + R6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen:

- per Hand - z.B. gaußsches Eliminationsverfahren
Matrix und Spannungs-Vektor in Dreiecksform bringen.
- im Taschenrechner - LGS Solver
Matrix und Spannungsvektor eintippen.
Ergebnis ist Strom Vektor (von oben nach unten).
- mit dem PC z.B. octave (open source) - Eingabe vergleichbar mit Taschenrechner