

# 气候系统模式的多分辨率方法：球面重心 Voronoi 网格的应用<sup>1</sup>

Todd Ringler

洛斯阿拉莫斯国家实验室

Lili Ju

南卡罗来纳大学数学系

Max Gunzburger

美国国家大气研究中心

## 摘要

在未来的几十年中，气候系统的模拟面临着重大的挑战，要解决的问题和时空尺度，都将会大大超过现在的范围。气候模式中的每个部分都有一些尚未完全解决、但对全球气候系统有重要影响的物理过程，比如海洋模式中的涡流活动，冰川模式中的冰流，陆面系统模式中的地面水文过程，和大气模式中的云物理过程。这些需求会引发多分辨率网格的发展，使得小尺度物理过程至少能在区域范围内较好的模拟出来。一个可能的发展方向是球面重心 Voronoi 网格（Spherical Centroidal Voronoi Tessellations, SCVTs）。SCVTs 可以通过由用户定义的直观密度函数来生成高性能的 Voronoi 图和 Delaunay 三角网。本文使用了这个方法，给出了生成高性能网格的几个例子，并发现这些网格的质量会随着节点的增加而提升。我们做了格林兰冰川和北大西洋的两个真实个例，以及海洋-冰架相互作用和区域大气模式的两个理想模型。为了定义、发展和描述 SCVTs，我们还把这个网格的生成技术与已有的有限体积方法组合在一起，并用覆盖全球的非线性浅水方程来做数值模拟。这些个例说明了分辨率网格的潜在优势，也展示了可能存在的挑战。

## 关键词

Voronoi 图，Delaunay 三角，气候模式，多分辨率

## 1. 前言

在评价人为气候变化的各种工具中，气候系统模式（CSMs）的重要性日渐增长。这些模式与理论研究和观测结果一起组成了政府间气候变化委员会（IPCC）第一工作组报告（主要着眼于大气温室气体增加的可能影响）的基础。尽管气候系统模式在对观测的解释和对理论的证实上已有很好的成绩，并能给出气候敏感性的大概估计，但在未来的几十年里，要将气候系统模式扩展到现在使用的领域以外，我们还面临着很大的挑战。

气候系统模式的扩展至少有两方面的推动因素。其中之一是对时空尺度和物理过程大大深入的刻画。全球气候系统中还有很多有重要影响、但又没有分辨出的或者有误解的物

---

<sup>1</sup>原文：Ringler, T., L. Ju and M. Gunzburger, 2008, A multiresolution method for climate system modeling: application of spherical centroidal Voronoi tessellations, *Ocean Dynamics*, 58 (5-6), 475-498.

doi:10.1007/s10236-008-0157-2。

汤帅奇译，张明华校。

理过程。像海洋模式中的涡流活动(Hallberg and Gnanadesikan 2006)，冰川模式中的冰流(Joughin et al. 1999)，陆面系统模式中的地面水文过程(Newman et al. 2006)，和大气模式中的云物理过程(Tomita et al. 2007)。由于分辨率不够，IPCC 的气候系统模式都没有可信地包含这些物理过程。已有的（甚至不久的将来能发展到的）计算资源无法满足完全模拟这些过程的需求。

驱使气候系统模式发展的另一方面，是人们对大气温室气体增长所导致的区域气候变化模拟的需求在不断增长。当人为因素对气候变化的影响变得更为可信时，我们需要对区域性气候变化进行分析以支持减排策略。正如 IPCC 第一工作组第四次报告（IPCC WG1 AR4）最后一章指出，这方面的需求已经开始起步了。若要成功地提供区域气候变化所需的相关信息，气候系统模式需要至少在区域范围内大大提高分辨率并加入新的物理过程。

气候模式工作者在从粗网格全球气候系统模式到多分辨率模式转换中所面临的严重挑战，可用 IPCC AR4 第八章的结果来说明。AR4 所用到的每个模式（一共 23 个）都使用了规则的四边形网格的海洋模式，并使用了低阶（二阶）的有限差分或有限体积数值方法（AR4 表 8.2.1）。另外，这 23 个模式的大气部分都用了传统的经纬度格点，并在最近才从全球谱方法到变到有限体积方法，没有一个模式使用了无结构的网格或者多分辨率方法。因此，虽然科学界和公众对多分辨率气候系统模式的需要已经如此清楚，我们的途径却还并不清楚。

气候系统模式已经试用了各种准均匀格来描述球面，这些准均匀格点都是在传统的经纬度格点的基础上进行的改进，它们移除了南北极的奇点并需要使用相伴随的数值滤波器来解决极地的奇点问题。人们也设计了代替传统经纬度格点的网格方案，比如立方球方案，这个方案有与经纬度格点类似的拓扑结构但没有南北极奇点，它在很多方面有成功的应用（McGregor 1996, Adcroft et al. 2004, Nair et al. 2005）；又如 Voronoi 网格（或叫球面网格、二十面网格或六角网格），它能被用来较好地处理各向同性条件问题（Ringler et al. 2000）；最后还有跟 Voronoi 网格很接近的 Delaunay 三角网，它已经在理想试验中得到成功的应用，并正在植入整个气候模式系统中（Bonaventura and Ringler 2005, Comblen et al. 2008）。尽管这些方法都成功的去除了南北极奇点，但它们并不一定能解决上文提到的挑战。

从性质上看，准均匀格点在提高了水平分辨率的同时也增加了计算量。将格点间距缩小一半意味着计算量要翻八番：两个水平方向的格点数都要加倍并且时间步长也需要缩小一半。随着分辨率的提高，计算量的急剧增加严重的占据了可用的计算资源，比如目前要将可分辨涡旋的海洋模式放到世纪尺度气候耦合模式中还是不可行的，至少要一二十年以后才有可能。现在 NCAR 的气候系统耦合模式（Collins et al. 2006）中的海洋模式是 320×384 格点，时间步长 1 小时；而这个海洋模式要分辨率涡旋则需要 3600×2400 格点，时间步长需要小于 6 分钟（Maltrud and McClean 2004）。后者的计算负担是前者的近千倍。冰流模式、地面水文模式和大气模式中也面临类似的问题。

从上我们可以看出，仅用准均匀格点无法满足大家日渐增长的需求。要使气候系统模式在接下来的几十年还能满足科学研究的需要，多分辨率方法的使用似乎是必不可少的。在发展可用于多分辨率分析的模式上，海洋模式走在了前面（如 Stuhne and Peltier 2006, Giraldo and Warburton 2008）。但是就算在海洋模式里，目前已有的理想动力模拟与真实海洋的全物理过程还有很大的差距。很明显，要建立一个多分辨率的 IPCC 气候系统模式还有很多复杂的科学问题有待解决。

St-Cyr et al. (2007) 最近的工作指出，一个成功的多分辨率方案需要注意数值方法与网格的吻合。他们发展的多分辨率网格，使用了可调的分级网格方法，将区域的四边形格点二等分以增加分辨率。这个可调网格方法在与高阶谱方法组合使用时能产生很好的结果，但是当它与低阶的有限体积方法组合时，结果很难说是最好的：增加自由度并不能减小数值误差。这意味着多分辨率气候系统模式不仅需要注意不同分辨率的格点，还要注意我们在这些格点上所使用的数值方法。

替代分级网络的另一个办法是用平滑变化的网格。平滑变化的网格对空间截断误差有很好的控制作用。尽管它在与高阶方法组合时显得有点多余，但当它与在 IPCC 模式中普遍使用的低阶有限体积方法组合时就显得尤为重要了。本文的主要目的是引入这样一个多分辨率网格方法——Voronoi 球面向心网格（SCVTs），使其能满足现在和未来对气候系统模式需求。

SCVTs 具有以下有助于气候模式发展的特性：首先，SCVTs 是现在气候模式（如 Randall et al. 2002, Satoh et al. 2008）中所用的准均匀 Voronoi 网格的扩展，从而它是在现有方法的自然扩展。其次，在第二节中我们将提到，就算是非均匀的 SCVTs 也会随着自由度的增加而生成更平滑更均一的格点。这清楚的意味着，SCVTs 生成的多分辨率格点的性能，能保证在计算资源增加的情况下得到提高。在第三节我们也将看到，生成多分辨率的 SCVTs 技术在应用上很直观易懂。最后，每个 SCVT 都与 Delaunay 三角网相联系，SCVTs 的优点都能在相关的 Delaunay 三角形中体现出来。这些优点在气候模拟中体现出来还需要做大量的工作，我们这里主要讨论两个方面。第一，我们对不同的气候系统模式应用，提出了示范网格，以证明这个方法在不同系统中生成高质量多分辨率格点的能力。第二，我们将展示这些网格在浅水方程中减小误差（至少是区域尺度上）的能力。

本文有两个主要目的：1. 介绍 SCVT 的主要原理。2. 强调 SCVT 在气候系统模式中的广泛应用。本文第二节将介绍 SCVTs 的数学基础，第三节将在真实的冰流和海洋模式里引入 SCVTs，第四节把我们的 SCVT 多分辨率网格生成技术和低阶有限体积方法组合起来，产生可广泛应用于气候系统模式的多分辨率方案。第五节包括总结和一些展望。

## 2. 重心 Voronoi 网格

### 2.1 定义

令  $\Omega$  为一个开放区域或叫  $R^d$  ( $d$  维欧几里德空间) 上的分段平滑的超曲面,  $\|\cdot\|$  表示对应  $R^d$  上的欧几里德距离。对一个离散的点集  $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \Omega$ , 我们定义

$$V_i = \left\{ y \in \Omega \mid \|x_i - y\| < \|x_j - y\| \quad j=1, \dots, n \text{ 并且 } j \neq i \right\}。$$

对  $i = 1, \dots, n$ , 很明显,  $\{V_i\}_{i=1}^n$  组成了  $\Omega$  的一个网格。比如,  $\overline{V_i}$  的并集  $\overline{\Omega}$  可以写成

$\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} = \overline{\Omega}$ 。此  $\{V_i\}_{i=1}^n$  被称作  $\Omega$  上关于点集  $\{x_i\}_{i=1}^n$  的 Voronoi 网格或 Voronoi 图 (Okabe et al. 2000)。点  $x_i$  叫做一个生成算子, 区域  $V_i$  叫做生成算子  $x_i$  对应的 Voronoi 域。与  $\Omega$  上的 Voronoi 网格对偶 (图论中的) 的是众所周知与三角形/四面体相一致的 Delaunay 网格。Voronoi 图和 Delaunay 三角的算法已有比较成熟的成果 (Okabe et al. 2000, Renka 1999)。

给定  $\Omega$  上的密度函数  $\rho(x)$ , 对任意区域  $V \subset \Omega$ , 我们定义  $V$  上的约束质量中心

$$x^c : \quad x^c = \arg \min_{x \in V} \int_V \rho(y) \|y - x\|^2 dy \quad (1)$$

从目标函数的连续性和不可压缩性可以很容易得出方程(1)有解, 但是解并不唯一。我们注意到, 如果  $\Omega$  是一个开放区域或是平坦的超曲面,  $x^c$  相当于  $V$  上的标准质量中心  $x^*$ :

$$x^* = \frac{\int_V y \rho(y) dy}{\int_V \rho(y) dy}, \quad \text{这个更易于计算。}$$

当且仅当 Voronoi 网  $\{V_i\}_{i=1}^n$  的生成算子点集  $\{x_i\}_{i=1}^n$  也是这些区域的约束质量中心的时候, 即当且仅当

$$x_i = x_i^c, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

的时候, Voronoi 网格  $\Omega$  叫做约束重心 Voronoi 网 (CCVT) (Du et al. 2003a)。我们通常把方程 (2) 视为重心 Voronoi 网 (CVT) 的特性。相应的双重 Delaunay 格点叫做约束中心 Voronoi Delaunay 三角。我们注意到, 当  $\Omega$  是  $R^d$  上的开放区域时,  $\{x_i, V_i\}_{i=1}^n$  通常是一个 CVT (Du et al. 1999)。

气候系统模式中关于 CVT/CCVT 一个重要的应用是当  $\Omega$  表示球面  $R^3$  或是部分球面的时候, 我们将  $\{x_i, V_i\}_{i=1}^n$  叫做一个 SCVT (球面重心 Voronoi 网)。我们很容易可以得出

$$x^c = r \frac{x^*}{\|x^*\|} \quad (3)$$

其中  $r$  表示球面的半径。因此  $x^c$  可以很容易由  $x^*$  得出来。

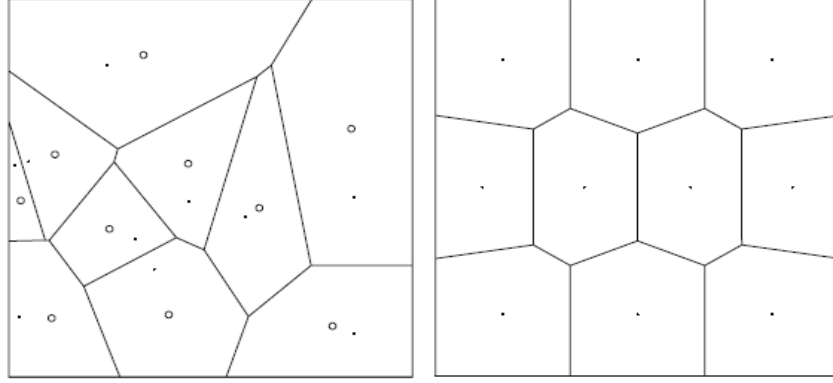


图 1: (左) 正方形区域  $\mathbb{R}^2$  上的 10 个随机位置的生成算子 (点) 对应的 Voronoi 网格 (圆圈表示 Voronoi 网的中心)。(右) 在均一密度场条件下的 10 点中心 Voronoi 网 (CVT)。

一般的 Voronoi 网并不满足 CVT 的性质, 参见图 1。例如, 一个正方形区域内有随机分布的 10 个点 (图 1 左中的黑点), 这十个点可以作为 Voronoi 网 (图 1 左中的块状区域) 的生成算子。对每个 Voronoi 区域, 我们标记出它的标准质量中心 (图 1 中的圆圈)。如 2.3 节所述, 简单的迭代运算能将图 1 左的初始 Voronoi 图规整成图 1 右的形状。这个例子中我们用了均一的密度函数来计算标准质量中心, 如果密度函数不是常数的话, 最终的算子点会偏向于高密度区。密度和算子位置的关系在格点生成算法中是一个很重要的内容。

## 2.2 特性

给定  $\Omega$  上的任意点集  $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^n$  和任意网格  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1}^n$ , 我们定义能量函数:

$$\mathfrak{R}(\{\tilde{x}_i, \tilde{V}_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{V}_i} \rho(y) \|y - \tilde{x}_i\|^2 dy$$

这里的能量表示实际应用中的一些物理量, 比如方差, 代价函数, 变形误差或均方差。在这里, 我们尚未假设  $\{\tilde{x}_i\}_{i=1}^n$  和  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1}^n$  有任何联系。但是, 我们能发现  $\mathfrak{R}(\cdot)$  仅在  $\{x_i, V_i\}_{i=1}^n$  是 CVT/CCVT 的时候达到最小值 (Du et al. 1999, 2003a)。因此, CVTs/CCVTs 是使算子分布最佳的 Voronoi 网。

如果  $\Omega$  是个开放区域, 令  $\tilde{d} = d$ ; 如果  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^d$  上的超曲面, 令  $\tilde{d} = d - 1$ 。一般对 SCVTs, 我们有  $\tilde{d} = 2$ 。因此,  $\mathbb{R}^d$  上的 CVT/CCVT 网格有一些很好的几何性质, 如下 (Du et al. 1999, 2003a; Du and Wang 2003) :

- 对常数密度场, 算子  $\{x_i\}_{i=1}^m$  在  $\Omega$  上是均匀分布的

- 大部分 Voronoi 区域都是全等的（Gersho and Gray 1992; Du et al. 1999）。特别是对主要是凸球面六边形的 SCVTs 而言。
  - 网格大小  $h$ （定义见方程 5）近似正比于  $n^{-1/d}$ 。
- 对密度场并非常数的情况，算子  $\{x_i\}_{i=1}^m$  依然是区域均匀分布的。我们还能推测（并计算确认）出渐近的：

$$\frac{h_{V_i}}{h_{V_j}} \approx \left( \frac{\rho(x_j)}{\rho(x_i)} \right)^{\frac{1}{d+2}} \quad (4)$$

- Voronoi 区域相对大小之间的关系完全由给定的密度函数所决定。
- CVT/CCVT 算子倾向于在高密度值的区域聚集。
- 因此，原则上我们可以通过建立密度函数  $\rho(x)$  与先验或经验误差估计的联系来控制算子分布，从而减小偏微分方程所产生的误差（包括局地误差和全局误差）。

需要注意的是，我们关于网格生成的所有分析和讨论，都是局限在各向同性条件下的，因为我们现在只关心生成高度均匀的多分辨率网格方法。对各向异性网格的扩展也已经有一些工作，在需要的时候也能用到气候模式中（Du and Wang 2005; Du et al. 2005）。

## 2.3 算法

建立 CVT/CCVT 一般用概率方法，如 MacQueen 的随机算法（MacQueen 1967）（在采样点与平均点之间的简单迭代），或确定性方法，如 Lloyd 迭代（Lloyd 1982）（Voronoi 图与质量中心之间的简单迭代）。由于 MacQueen 算法的收敛速度较慢，大家主要使用 Lloyd 算法，算法如下：

---

**算法 1**（Lloyd 算法）：给定一个区域  $\Omega$ ， $\Omega$  上的密度函数  $\rho(x)$ 、以及正整数  $n$

---

0. 选择  $\Omega$  上初始的  $n$  个点  $\{x_i\}_{i=1}^n$ ；
  1. 建立  $\Omega$  上关于  $\{x_i\}_{i=1}^n$  的 Voronoi 区域  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1}^n$ ；
  2. 找出 Voronoi 区域  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1}^n$  上的约束质量中心，由这些中心组成新的点集  $\{x_i\}_{i=1}^n$ ；
  3. 如果新的点集满足某个收敛条件，返回  $\{x_i, V_i\}_{i=1}^n$  值并退出循环；否则继续步骤 1。
- 

参考图 1，算法 1 的步骤如下：步骤 0：选择图 1 左的黑点为初始点集。步骤 1：作出即图 1 左的实线区域。步骤 2：找出 Voronoi 区域的中心，即图 1 左的空心圆圈；由它们组成新的点集继续计算新的 Voronoi 图。最后满足收敛条件的输出结果即图 1 右的结果。

需要注意的是这个网格生成步骤最多只用到了 Voronoi 图，因为不需要用到 Delaunay 三角形，(S)CVT 的平滑性和均匀性在 Delaunay 三角形中也自然成立。

## 2.4 Voronoi 网和 Delaunay 三角的质量控制

我们定义算子  $x_i$  对应的 Voronoi 网格  $V_i$  大小

$$h_{V_i} = 2 \max_{y \in V_i} \|x_i - y\| \quad (5)$$

因此，全球非均匀性可用给定 Voronoi 网格的  $h_{\max} / h_{\min}$  来表示，其中  $h_{\max} = \max_i h_{V_i}$ ， $h_{\min} = \min_i h_{V_i}$ 。为了知道 SCVT 的 Voronoi 格点的局地一致性或质量，我们使用以下的  $\sigma$  来测量（Du et al. 2003b）。对算子  $x_i$  对应的 Voronoi 网格  $V_i$ ，

$$\sigma(V_i) = \frac{\min_j \|x_i - x_j\|}{\max_j \|x_i - x_j\|}, \quad (6)$$

其中  $x_j$  表示与  $x_i$  相邻的点。很容易看到， $0 < \sigma \leq 1$  并且  $\sigma=1$  表示等边多边形。我们令

$\sigma_{\min} = \min_i \sigma(V_i)$  并且  $\sigma_{\text{avg}} = \frac{1}{n} \sum_i \sigma(V_i)$ ，其中  $n$  表示 Voronoi 格点的个数， $\sigma_{\min}$  代表了 Voronoi 格点的最差质量， $\sigma_{\text{avg}}$  代表 Voronoi 网格的平均质量。

在 Delaunay 三角中，三角形的大小  $T$  定义为其最长的边  $h_T$ 。我们使用常用的  $q$  方法（Field 2000）来评价对应的三角形网格（Delaunay 三角形）的质量：对任意三角形  $T$ ，定义  $q$  为最大内切圆半径  $R_T$  与最小外接圆半径  $r_T$  之比的两倍：

$$q(T) = 2 \frac{R_T}{r_T} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc}, \quad (7)$$

其中  $a, b, c$  是三角形  $T$  的三边。可见  $0 < q \leq 1$  并且  $q=1$  表示等边三角形。对给定  $m$  个三角

形组成的三角形网格  $\mathfrak{T}$ ，定义  $q_{\min} = \min_{T \in \mathfrak{T}} q(T)$  并且  $q_{\text{avg}} = \frac{1}{m} \sum_{T \in \mathfrak{T}} q(T)$ 。其中  $q_{\min}$  表示最差的三角形的质量， $q_{\text{avg}}$  表示三角网  $\mathfrak{T}$  的平均质量。

一个值得注意的地方是 Voronoi 网格  $\{x_i, V_i\}_{i=1}^n$  的能量  $\mathfrak{R}$  在尚未达到 CVT/CCVT 的时候随着 Lloyd 的迭代而单调递减。在特定的系统中或特定的方法下，我们可能需要节点位于所给区域  $\Omega$  的边界上。CVTs/CCVTs 以及上述的网格建立算法，也可以很容易推广到一些算子被限制在边界区域  $\partial\Omega$  上的情况（Du and Wang 2003; Ju et al. 2006）。

### 3. 网格个例

#### 3.1 陆地冰架：格林兰

##### 3.1.1 动机

格林兰与南极有着地球上空间和时间尺度最大的大陆冰川。空间上，冰川覆盖了方圆上千公里的范围。其中心区域也有超过 100km 的空间尺度。由于降水作用，这些中心区域存在质量的堆积。这些水以冰块或相对快速流动的冰流的形式返回海洋。与陆地上的水不同，这些冰流长而窄，一般有上百公里长，而宽度则小于 10 公里（Joughin et al. 1999）。另外，相对快速流动的冰流与相对不动的冰架之间的切变区一般小于 1 公里宽。这些冰流是格林兰和南极冰川流向大海的主要方式（Rignot et al. 2008）。因此，对海平面上升的预测需要对冰流动力学的精确模拟。事实上，冰流动力尚未包括在现在的冰川模式中，至少是最近的 IPCC 第一工作组第四次评估报告并未给出 21 世纪海平面快速升高（IPCC 2007）的部分原因。

除了对流体运动需要越发精细的分辨率外，由于明显的季节性消融，对冰川边缘的分辨率需求也不断跟进。特别是对于格林兰地区，每年的主要融化发生在 1200 米以下，由此造成的底部冰川融水流动对冰川底部的滑动过程有很强的影响（Bell 2008）。在冰川模式中，我们发现对流体运动和物理过程都有同时增加局地分辨率的需求。准确地表达这些过程需要用小于 1km 的空间分辨率。考虑整个冰川时，1km 的均匀网格再加上求解三维的 Stokes 方程在计算上还不能实现。所以，我们用多分辨率的 SCVTs 来对系统作离散化。

##### 3.1.2 SCVT 密度函数的代用数据

在这个例子里，我们将生成一个格林兰地区的网格，并且在冰流附近地区提高分辨率。我们的目标分辨率是冰缘地带  $h_{\min} = 2 \text{ km}$ ，中间地区  $h_{\max} = 100 \text{ km}$ 。令  $R = h_{\max} / h_{\min}$  表示这两个分辨率之比。我们估计所生成的网格，即使与全三维 Stokes 解法相组合，用在气候变化模拟中也是可行的。

图 2 给出了观测的冰面移动速度的估计，空间分辨率为 2.5 km（Bamber et al. 2000）。速度的大小  $\|V\|$  使用了  $\log_{10}$  坐标，范围从冰脊线附近大约 0.1 km/year 到冰流出口的超过 10km/year。我们在如下两个方面使用这套观测数据：第一，我们用它定义格林兰冰川边缘的位置，那是一些我们用来构造 SCVT 的分段线性环。第二，在每个环里，我们按以下的步骤定义 SCVT 密度函数：



$$x = \log_{10}(\|V\|), \quad x_{\min} = -0.5, \quad x_{\max} = 3.5 \quad (8)$$

$$x = \max(x, x_{\min}) \quad (9)$$

$$x = \min(x, x_{\max}) \quad (10)$$

$$\rho = \left( \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} * R \right)^4 + 1 \quad (11)$$

我们对 SCVT 密度函数的下界做了限制，使得所有参数小于  $x_{\min} = -0.5$ ，即表面速度小于 0.3 km/year 的地方都有同样的分辨率。最后，将密度函数归一化到 1 到  $R^4$  的范围，从而生成能变化 R 倍的格点，见方程 4。

图 3 使用了 25936 个节点生成的 Voronoi 图，最小分辨率约为 4km。图 4 给出了  $\log_{10}$  的 Voronoi 网格面积。我们发现大块的低分辨率区都在静止的冰脊位置，而大部分节点都在冰流周边区域。色标范围从最大的 150 平方公里到最小的 10 平方公里。90% 的格点与相邻格点的距离都小于 10km，而另外那 10% 的格距大于 10km 的网格占了大约 40% 的冰川面积。

我们在区域内逐渐增加节点个数，直到目标最小分辨率达到 2km 为止。图 5 给出了使用 101115 个节点时的 Voronoi 图的  $\log_{10}$  网格面积。这个图上面积色标范围从 75 平方公里到 5 平方公里。图 5 看上去与图 4 相同，唯一的区别是色标。

图 2: 格林兰冰川冰面速度的对数分布(Bamber et al. 2000)。速度色标范围 10km/year 到 0.1km/year

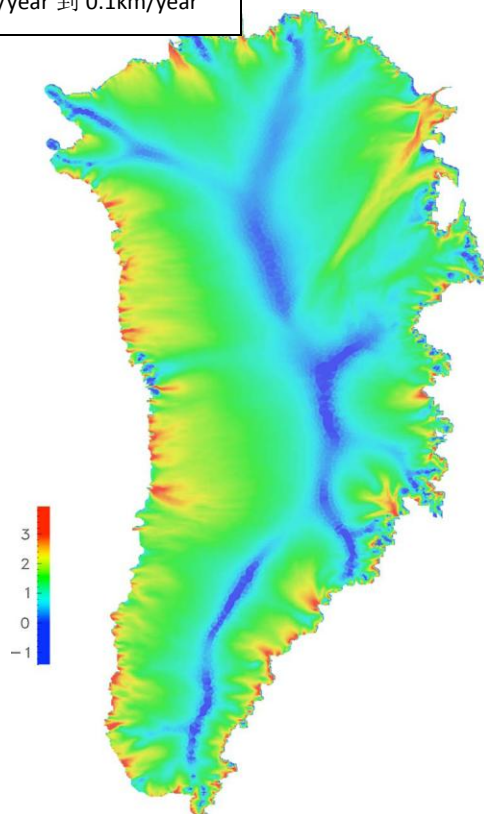


图 3: 用 25936 个格点和方程 11 的密度函数计算的格林兰冰川 SCVT。冰流区域的网格面积太小较难识别。

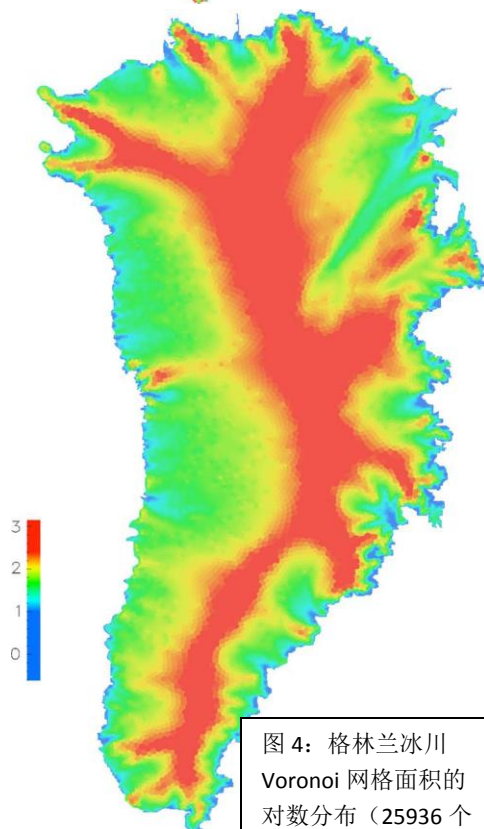
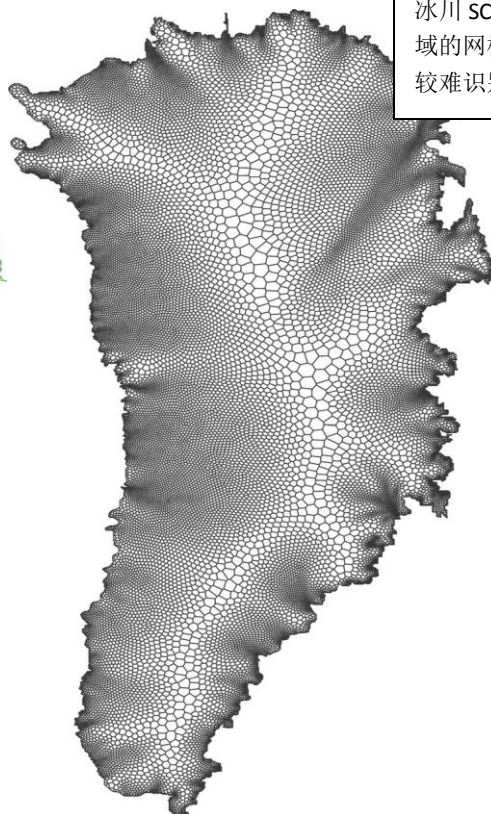


图 4: 格林兰冰川 Voronoi 网格面积的对数分布 (25936 个节点)。色标范围从 250 km<sup>2</sup> 到 10 km<sup>2</sup>。(译注: 原图单位有误)

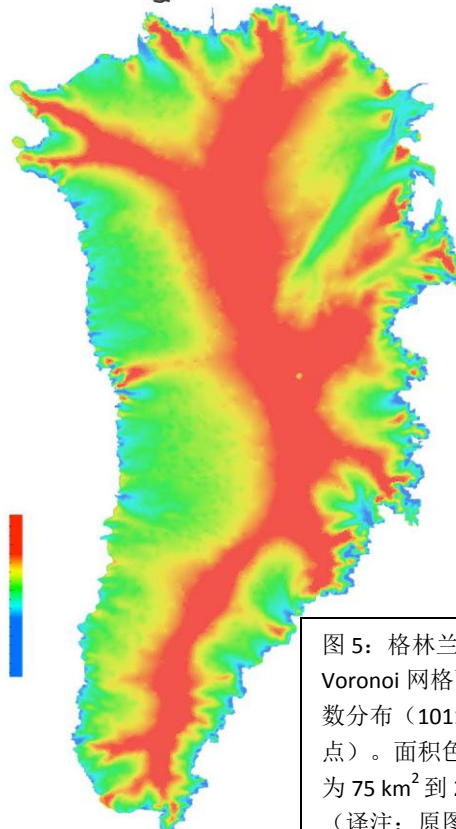


图 5: 格林兰冰川 Voronoi 网格面积的对数分布 (101115 个节点)。面积色标范围为 75 km<sup>2</sup> 到 2.5km<sup>2</sup>。(译注: 原图色标范围和单位有误)

表 1 给出了格林兰 SCVTs 的全局质量参数。图 6 给出了 SCVTs 的质量直方图。表 1 中的总体网格均匀性随着分辨率的增加有所改善。图 6 的直方图表示随着自由度的增加，网格的质量有系统性地增强。从这个直方图还发现与节点数的增加同等重要的现象：低质量端的网格比例也有明显下降。

表 1: 格林兰 SCVTs 网格信息

| 算子数    | $\sigma_{\min}$ | $\sigma_{\text{avg}}$ | $h_{\max} / h_{\min}$ | 三角形数   | $q_{\min}$ | $q_{\text{avg}}$ |
|--------|-----------------|-----------------------|-----------------------|--------|------------|------------------|
| 25936  | 0.094           | 0.706                 | 40.94                 | 49244  | 0.219      | 0.935            |
| 101115 | 0.091           | 0.751                 | 47.81                 | 197346 | 0.235      | 0.948            |

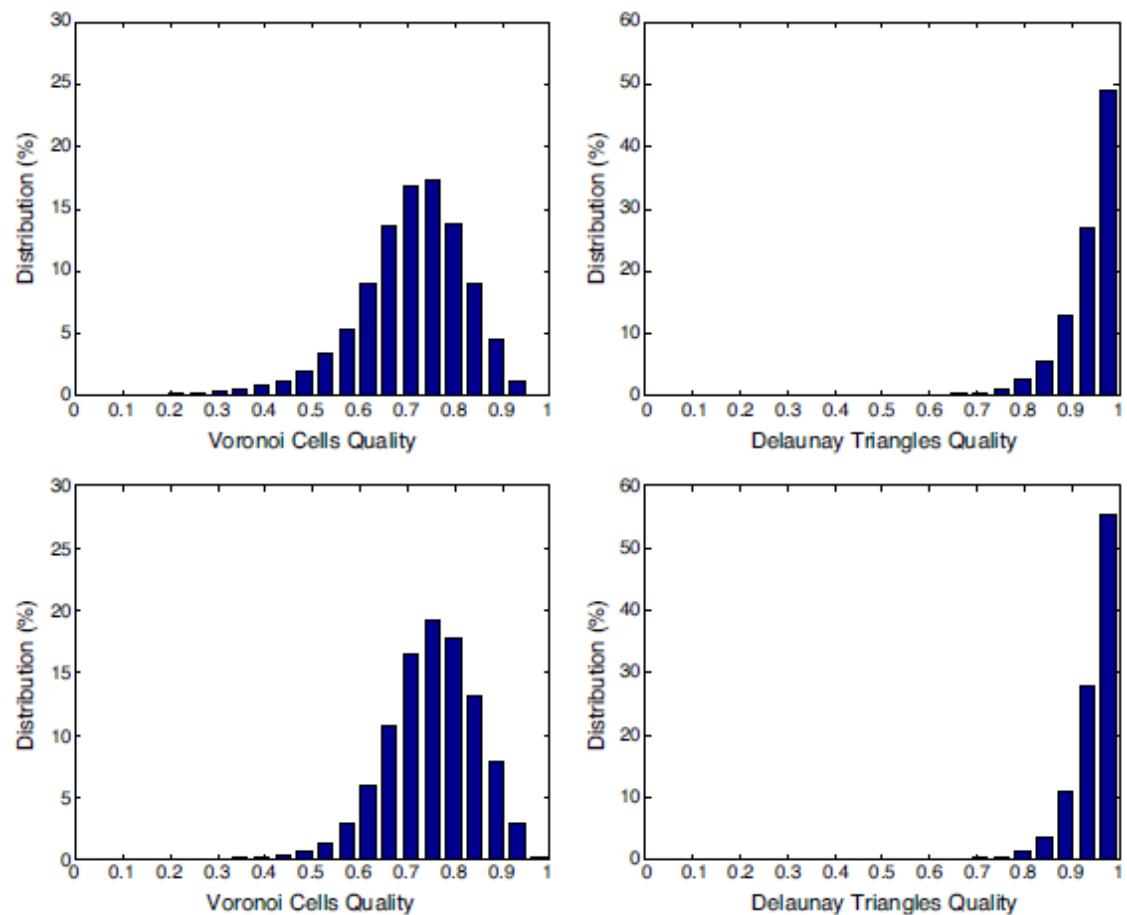


图 6: 格林兰 SCVTs 质量直方图。上图为 25936 个节点，下图为 101115 个节点。左: Voronoi 网格质量  $\sigma$  的分布; 右: Delaunay 三角质量  $q$  的分布。随着节点数目的增加，二者都向高质量偏移。

## 3.2 大洋：北大西洋

### 3.2.1 动机

在 IPCC 全球海洋模式中加入涡旋，依然是气候模拟的一个很大的挑战。涡旋模拟所需要的分辨率大概在 10km 左右，在全球模式中大概需要  $5 \times 10^6$  个自由度。这比现在典型的 IPCC 模式普遍所使用的  $5 \times 10^4$  个自由度多很多。这 100 倍的计算耗时，还需要再乘以 10 倍，因为高分辨率模式还需要更短的时间步长。现在的 IPCC 全球模式无法承受可分辨涡旋的全球模式这 1000 倍的计算量，就算一二十年以后的模式也很难做到。

一个可行的替代方法是使用多分辨率格点，比如 SCVTs，以使得我们关心的区域能达到涡旋所需要的分辨率。这些多分辨率格点，可以用在全球海洋模式的部分地区。在全球海洋模式中方便地生成多分辨率格点的能力，可以让我们设计最佳分布的计算资源。另外，在全球海洋模式中的部分区域模拟涡旋活动的的能力，也能促进其他很多物理过程的科学研究，比如涡旋活动在经向翻转环流中的作用（Gnanadesikan 1999），和它们在海洋对风压的响应中的作用（Hallberg and Gnanadesikan 2006）。

### 3.2.2 SCVT 密度函数的代用数据

在这个例子中，我们将生成北大西洋的多分辨率网格，使之足够分辨主要洋流系统中的涡旋结构。范围用的是 Smith et al（2000）讨论过的 1/10 度涡旋分辨模式用到的区域。我们用他们的模式结果计算了时间平均的海面洋流动能，见图 7。我们可以看到，强涡旋活动区域主要集中在一小块地区。我们可以以动能为基础定义密度函数

$$x = \text{KE}/\text{KE}_{\max}, \quad x_{\min} = 0.1, \quad x_{\max} = 1.0 \quad (12)$$

$$x = \max(x, x_{\min}) \quad (13)$$

$$\rho = x^4 \quad (14)$$

其中  $\text{KE}_{\max}$  表示区域内的最大动能。下界 0.1 使得静止地区也有最小分辨率。比值  $x_{\max}/x_{\min} = 10$  使得格点间距差别近似为 10。另外，我们增加了海陆交界处的密度函数，使得边界处有较好的分辨率。除了对涡旋活跃区需要高分辨率的网格以外，我们还需要将高分辨率区域扩展一些，使得涡旋移动不会被格点的分辨率所限。因此，我们在密度函数中使用了拉普拉斯平滑以扩展并平滑增强分辨率的区域。（注意海平面高度的 RMS 也反映了中尺度大洋变化，我们已基于 TOPEX 遥感的海平面高度发展了全球海洋 SCVTs。）

如在格林兰的例子中所用的，我们根据在 0.1 度数值模拟中使用的海陆分布产生了连续并分段线性的海陆边界。这个边界包括了所有的岛屿，并去掉了所有周长小于 10km 的岛屿。整个模拟区域最后包括 58 个岛屿。

图 8 的 Voronoi 图使用了 47305 个节点，最小分辨率约为 20km（见图 9）。我们继续增加节点直到最小分辨率达到 10km。最后的高分辨率网格用到了 183807 个节点。



图 7: 全球 0.1 度数值模拟的北大西洋时间平均动能 (Smith et al. 2000)

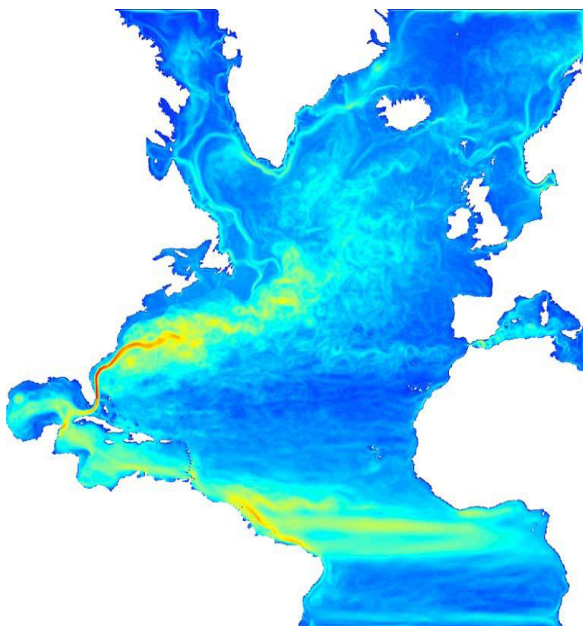


图 8: 北大西洋 SCVT 范围, 使用了 47305 个节点。不同颜色代表不同的计算单元, 表示网格在存储系统中的分布。

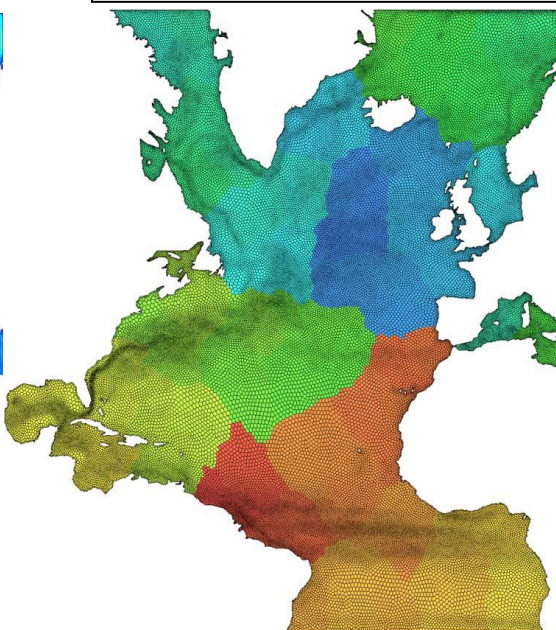


图 9 (左): 用 47305 个节点 (上) 和 183907 个节点 (下) 的湾流区域网格

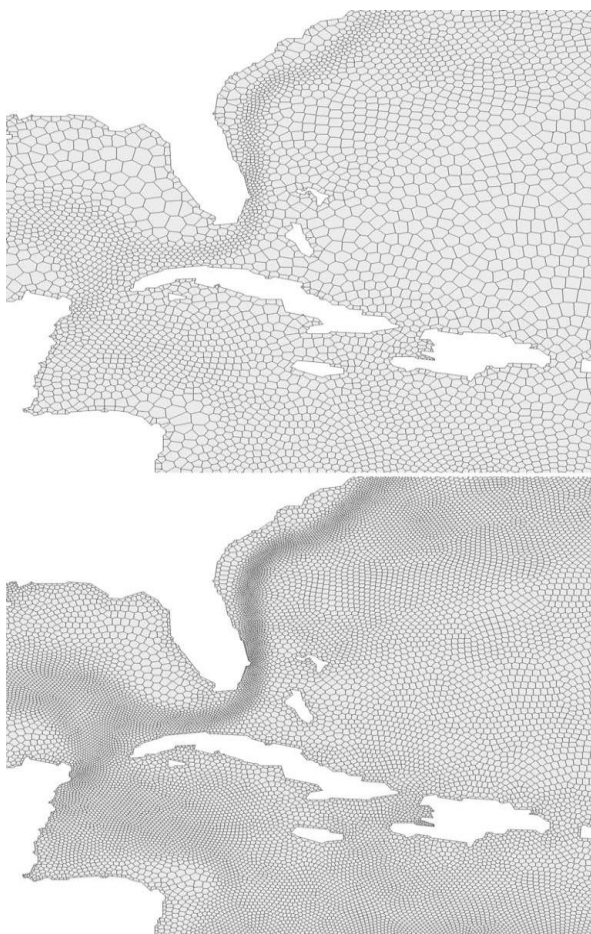


图 10 (下): 北大西洋 SCVTs 质量直方图。上: 47305 个节点; 下: 183907 个节点; 左: Voronoi 格点质量  $\sigma$  的分布; 右: Delaunay 三角质量  $q$  的分布

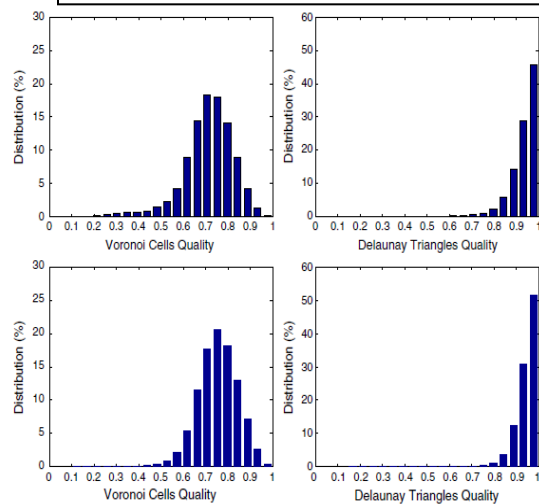


表 2：北大西洋 SCVTs 网格信息

| 算子数    | $\sigma_{\min}$ | $\sigma_{\text{avg}}$ | $h_{\max} / h_{\min}$ | 三角形数   | $q_{\min}$ | $q_{\text{avg}}$ |
|--------|-----------------|-----------------------|-----------------------|--------|------------|------------------|
| 47305  | 0.089           | 0.712                 | 16.60                 | 89272  | 0.104      | 0.933            |
| 183907 | 0.105           | 0.754                 | 15.05                 | 358577 | 0.127      | 0.947            |

表 2 给出了北大西洋 SCVTs 的参数，相对应的质量直方图见图 10。如同格林兰的个例一样，这个例子同样反映出增加自由度对系统的改善。

### 3.3 大洋 - 冰架相互作用

#### 3.3.1 动机

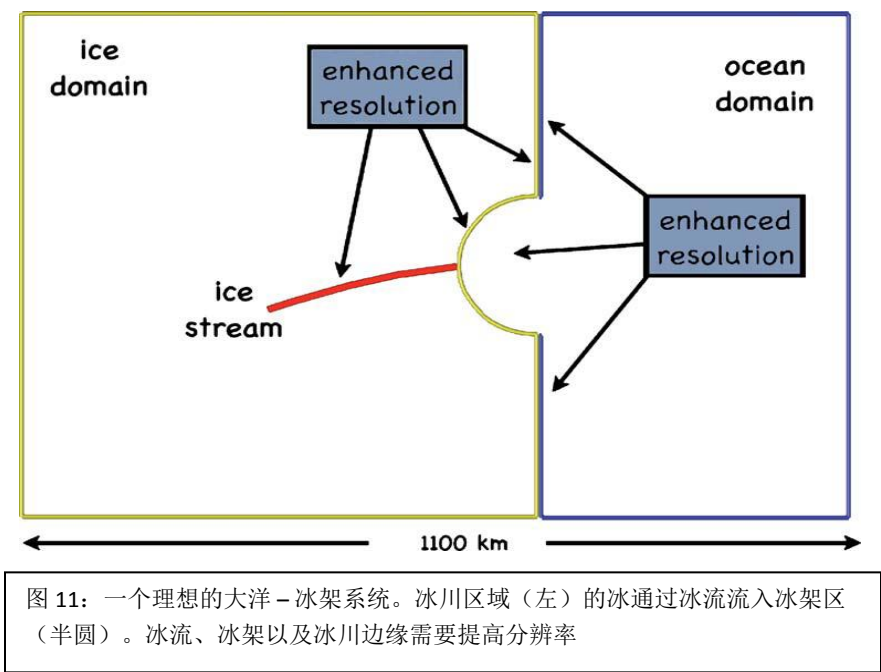
最后一个个例是针对耦合海洋和冰川的大洋 – 冰架相互作用的地区。冰架是离开陆地并漂浮在海水中的冰。冰架的接地线是从冰接触岩床的地区变到冰漂浮在海水中的地区的过渡带。当冰架被推进海洋中以后，它们或是在冰海交界处融化或是崩解成冰山。这些冰架对上游的接地冰流有很强的抑制作用力。像 Larsen B 冰架崩解一样，当冰架的作用力消除以后，上游的冰流速度将加快好几个百分点（Rignot et al. 2004）。为了定量分析海平面快速上升的危害，精确模拟大洋 – 冰架相互作用是相当必要的（IPCC 2007）。

南极冰盖的西侧是特别需要研究的大洋 – 冰架相互作用的地区，在这里不仅冰架是接地冰川流向海洋的主要方式，而且支撑冰的岩床离海平面的距离，也在冰盖内部变得更低（Schoof 2007）。由于大洋 – 冰架相互作用，西南侧极冰盖的快速侵蚀是 21 世纪很可能出现的情况。

连接西南侧极冰盖的冰架空间尺度，上至几千公里（如 Ross 冰架）下至低于 50 公里（如 Thwaites 冰架）。冰流入海的冰湾也有相近的空间尺度。虽然冰架不如支撑它的冰流那么活跃，海冰交界面的形状和结构是驱动交界面混合的主要因素（Holland et al. 2008）。大洋 – 冰架耦合系统的动力模拟常用小于 5km 的格点分辨率。另外，全球 1/10 度大洋模式在西南侧极冰盖模拟的分析指出，传输到这些冰湾中的热量主要是通过间歇性的涡旋驱动的（Maltrud, personal communication, 2007）。因此，一个很好的模式需要能分辨冰湾里和周边的大洋涡旋。

由于这个区域部分是冰（冰区），部分是海（洋区），还有部分即含有冰又含有海洋（冰架区），对整个区域做水平离散化是很有难度的。另外，一个固定的地区，也会随着时间尺度（几十年到上千年）的变化而在冰、海、冰架之间变动。由于这些复杂性以及前人对大洋 – 冰架耦合系统的工作很少，我们将在一个理想模型下设计对这种系统的差分方法。图 11 给出了我们的理想区域，空间范围  $1100 \times 550\text{km}$ ，左侧为接地冰川区，右侧

为海洋区，中间为冰架区。冰川区还包括供给冰架地区的冰流。正如图上所示，这个系统的较好模拟需要对冰架、冰流周边区域和冰川附近海域有较高的分辨率。



### 3.2.2 SCVT 密度代用数据

在这个理想模型中，我们的目的是生成最小 2km、最大 20km 的网格系统。与前几个例子不同的是，我们这里不能从系统的物理特征来建立密度函数。我们生成的密度函数在冰流周边地区，冰架地区以及整个海冰边界有极大值。图 12 是这个系统的 Voronoi 图，共用了 9359 个节点。低分辨率和高分辨率冰架区的放大图见图 13。

表 3 给出了理想大洋 – 冰川系统 SCVTs 的结果，相应的质量直方图见图 14。同样的，增加自由度也能改善网格的质量。

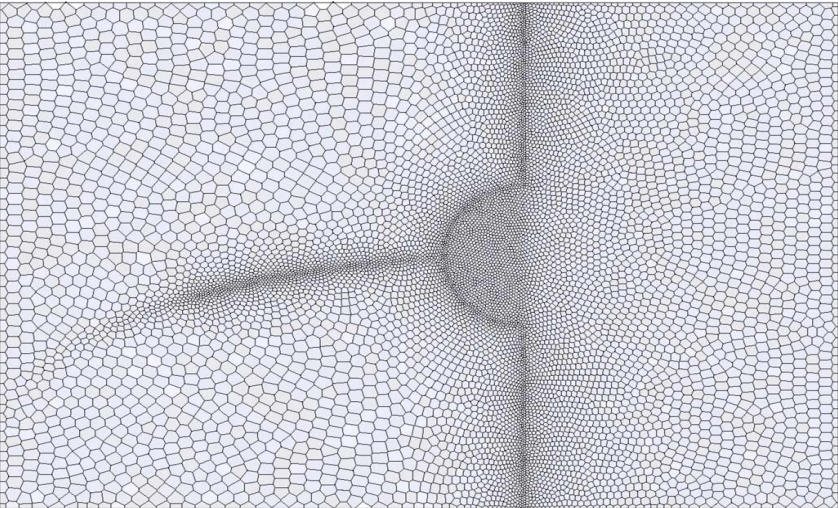


图 12: 大洋 – 冰架系统的 SCVT，共用了 9359 个节点。冰流、冰架及海冰交界面的分辨率较高



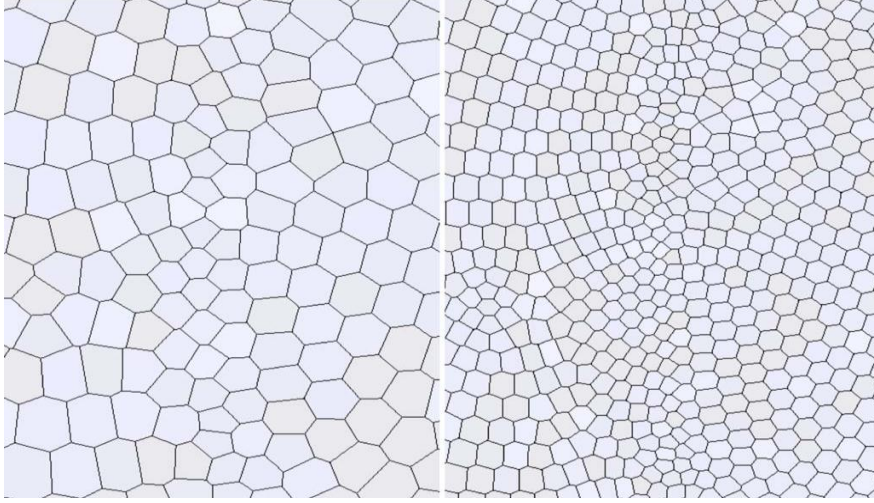


图 13: 冰流进入冰架的入口附近 SCVT 的放大图。左图为 9359 个节点的 SCVT，右图为 37157 个节点的 SCVT

表 3: 大洋 – 冰架系统 SCVTs 网格信息

| 算子数   | $\sigma_{\min}$ | $\sigma_{\text{avg}}$ | $h_{\max} / h_{\min}$ | 三角形数  | $q_{\min}$ | $q_{\text{avg}}$ |
|-------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-------|------------|------------------|
| 9359  | 0.275           | 0.735                 | 8.91                  | 18440 | 0.568      | 0.942            |
| 37157 | 0.313           | 0.769                 | 10.15                 | 73765 | 0.626      | 0.951            |

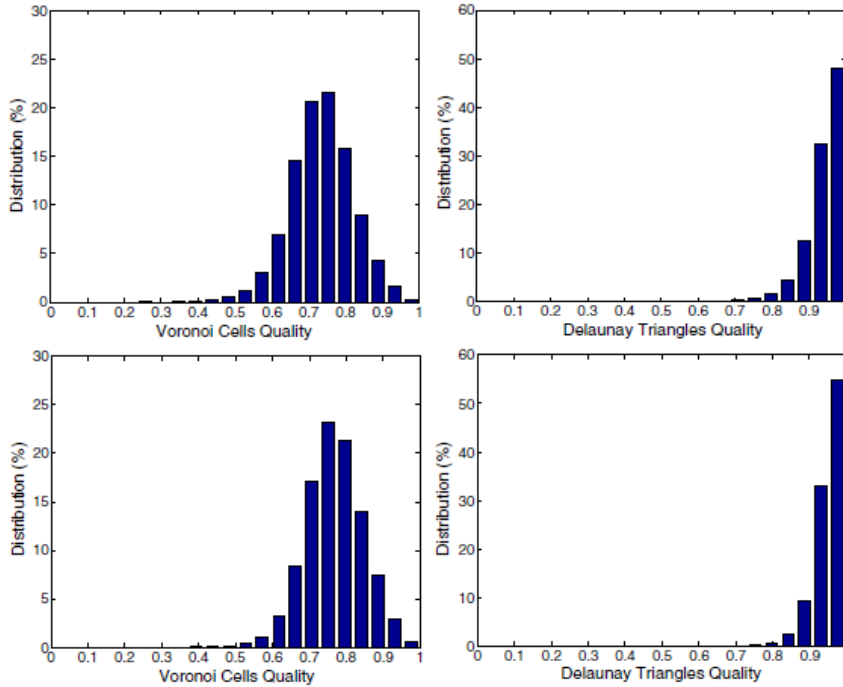


图 14: 理想大洋 – 冰架系统的 SCVTs 质量直方图。上图使用 9359 个节点，下图使用了 37157 个节点；左图为 Voronoi 格点质量  $\sigma$  的分布，右图为 Delaunay 三角质量  $q$  的分布

#### 4. 数值方法示例

IPCC 气候模式所用的主要数值方法都是基于均匀网格。将这些数值方法成功应用到非均匀网格，比如前面讨论的网格上，是一件很困难的工作（St-Cyr et al, 2007）。虽然在考



虑用多分辨率网格时，使用新兴的基于谱元、间断 Galerkin、有限元、或类似的数值方法，是更合适的选择，但是相对于低阶有限体积方法，这些方法在气候系统模式中尚属新生。本节的目的是提供一个可用于非均匀 SCVTs 的低阶有限体积方法，从而所生成的网格可立即应用于现在的气候系统模式中。以下的讨论是按照这个目的，但并不详尽的论述。在很多方面，发展能使用这些非均匀 SCVTs 的数值方法比生成格点本身更困难，更耗时。尽管对局地均匀的 SCVTs 的探索已经有了一些工作（如 Du and Ju 2005），但还远远不够。我们对适用于可变分辨率网格的有限体积方案的研究已经取得了重要的进展，这些结果将在以后详细报道。

#### 4.1 连续性方程

我们用覆盖整个球面的非线性浅水方程来做示范：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \underline{u}) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\omega + f) \underline{k} \times \underline{u} = -g \nabla (h + h_s) - \frac{1}{2} \nabla \|\underline{u}\|^2 \quad (16)$$

$$\omega = \underline{k} \cdot (\nabla \times \underline{u}) \quad (17)$$

其中  $h$  是流体厚度， $h_s$  是下边界高度， $\underline{u}$  是正交于局地法向矢量  $\underline{k}$  的速度矢量， $f$  是科氏参数。相对涡度垂直于球面的分量  $\omega$  由方程 17 定义。

#### 4.2 差分方程

我们使用 Bonaventura and Ringler (2005) 的差分方法。尽管这个方法是为多分辨率网格所设计的，但据我们所知，它的使用还是第一次。这个方法对厚度方程使用 Delaunay 三角作为有限体积元，涡度场由 Voronoi 图上定义，垂直于三角形三边的速度分量由预报方程计算。这个差分方法的示意图见图 15。带<sup>^</sup>的变量是导出场，其中  $\hat{T}$  表示计算科氏力所需要的切向速度， $\hat{\eta}$  表示绝对涡度（见 Bonaventura and Ringler 2005）。差分方程组如下：

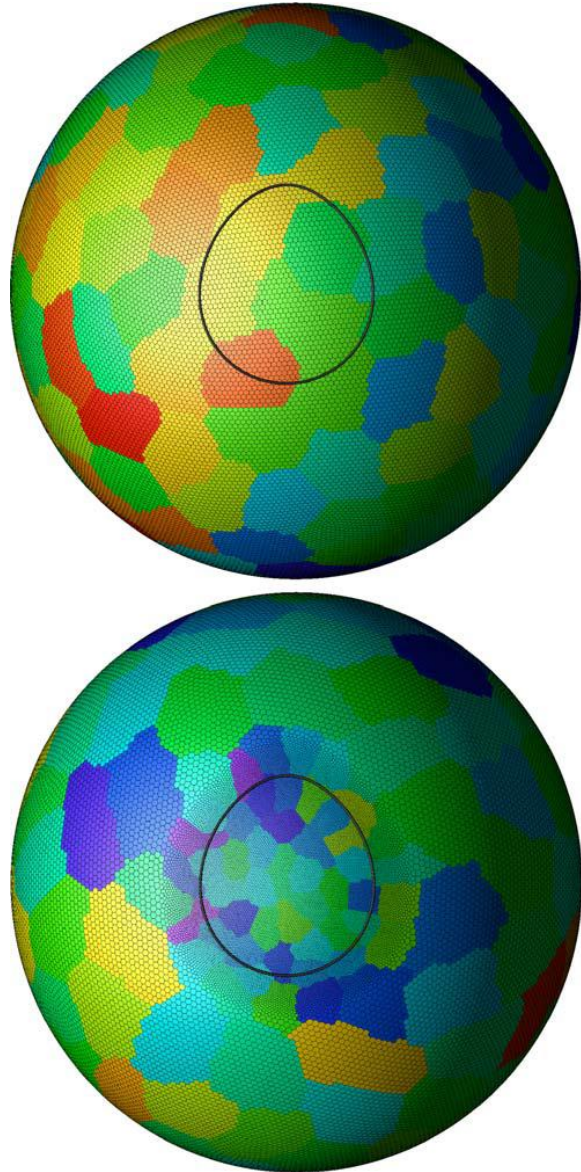
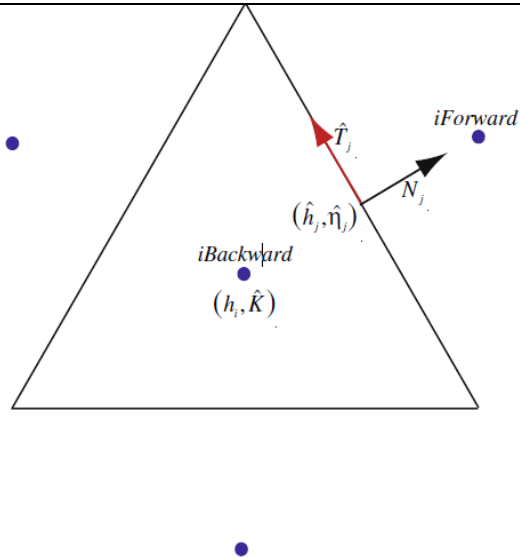
$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = \frac{-1}{A_i} \sum_{j=1}^{nedges} \hat{h}_j N_j dl_j \quad (18)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \hat{\eta}_j \hat{T}_j - \left\{ \left[ gh + gh_s + \hat{K} \right]_{iForward} - \left[ gh + gh_s + \hat{K} \right]_{iBackward} \right\} / dc_j \quad (19)$$

其中方程 18 的求和是对每个三角形的三边进行的。这个方案使用空间中央差的结果为二阶空间差，使用四阶 Runge-Kutta 时间差分（见 Bonaventura and Ringler 2005）的结果为四阶时间差。这个方法没有设限制、没有过滤、也没有显式的耗散。空间中央差与四阶 Runge-Kutta 方法是为了把隐含的数值耗散降到最小。

图 16（右）：上：用 40962 个节点和均匀质量函数生成的 SCVT。下：用 40962 个节点和非均匀质量函数生成的 SCVT，在地形山峰（黑实线范围）及附近的地区有较高的密度函数。可变分辨率网格的最小格距大约为准均匀网格的 1/3。背景的颜色表示在计算机多处理器中所分布的格点组。这里应用的数值方法在 SCVT 节点上定义涡度，在对等的 Delaunay 三角上定义质量（即厚度）。

图 15（下）：一个有限体积系统的示意图。厚度  $h$  和动能  $\hat{K}$  定义在三角形中心；法向速度  $N_j$  定义在三角形的边上；涡度  $\eta$  定义在三角形顶点。所有带  $\wedge$  的物理量为导出场。见 Bonaventura and Ringler (2005)。



我们对图 16 的两个 SCVTs 应用了上述方法，每个网格包括 40962 个节点。黑实线表示中心地形山峰的边界。第一个网格（上图）由均匀密度函数生成，平均格点大小 120km。第二个网格（下图）由非均匀密度函数（山峰及附近的值更大）生成。密度函数的选择使得山峰附近区域平均格点大小比准均匀网格小三倍（40km）。不同的颜色表示我们分配计算机系统资源的策略：每个颜色表示每个不同的处理器。

### 4.3 模拟

我们将这个数值方法应用到 Williamson et al. (1992) 发展的标准浅水方程里作为个例 5。在这个例子中， $t=0$  的初始条件为地转流与大尺度地形，初始强迫场将激发出大振

幅重力波和 Rossby 波。这里只考虑地形强迫作用。由于无法得出解析解，高分辨率全球谱模式的结果被用来当这个模拟的参考解（参见 Lipscomb and Ringler 2005）。

在 15 天的积分中，上述两个模拟都是稳定的，其动能场见图 17。二者的大尺度环流结构都是一样的：在地形区域主要被反气旋控制，紧跟的下游地区有一个稳定的强低压系统。在急流区两个模拟得到的流体速度都超过了 40m/s。

图 18 给出了随着模拟的进行，每个模拟的标准误差的时间变化情况。误差由厚度场与高分辨率谱模式结果的偏差计算得出。上图表示按 Tomita et al. (2001) 中方程 17 的步骤算出的标准化  $L_2$  误差。标准化  $L_2$  误差是在两个区域中计算的：一是全球区域，二是增强分辨率

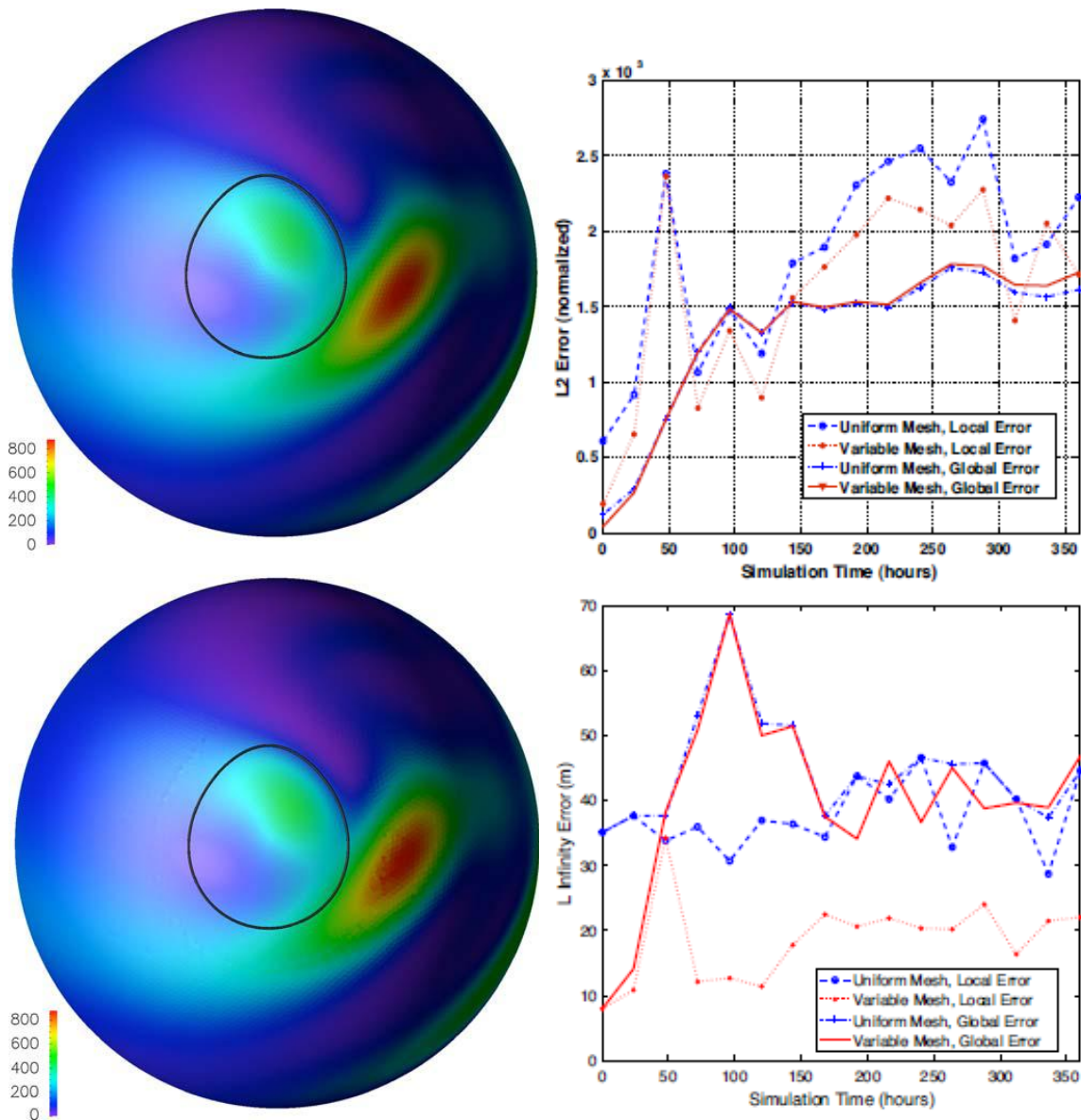


图 17：模式第 10 日动能场。上图：准均匀网格模拟结果；下图：变分辨率网格模拟结果

图 18：上：全球区域以及地形周边区域的标准  
化  $L_2$  误差。下：这两个区域的标准  
化  $L_\infty$  误差。两个图都包含均匀网格与  
非均匀网格误差的比较

( $h_s > 0$ ) 的局地区域。下图是同样区域的标准化  $L_\infty$  误差。由于  $L_2$  误差是相对于参考值的标准化，我们只在相同的平均区域内做比较。通过对不同模式的全球  $L_2$  误差进行比较，我们发现可变分辨率网格只在时间小于 24 小时的时候有微小的改进。在模拟刚开始的时候，可变分辨率网格的优势主要在于对初始条件更好的再现。在剩下的积分时段中，两个模拟有着几乎一样的全球  $L_2$  误差值。当我们比较局地  $L_2$  误差时，我们发现结果略有不同：整个模拟过程平均下来，可变分辨率网格能减小 20% 的误差。 $L_\infty$  误差值（下图）也是类似的情况。可变分辨率网格对全球误差减小贡献甚微，但对地形附近的误差有明显的减小。在这个例子里，可变分辨率网格的局地  $L_\infty$  误差减小到均匀网格结果的一半。在下一节里我们将讨论这些结果对多分辨率全球气候模式的意义。

## 5. 讨论和结论

我们认为传统的基于准均匀网格的 IPCC 气候模式，在今后数十年将受到两方面的限制：第一，现在的每个气候系统模式的子模式，都有一两个不能分辨而又在全球气候系统中非常重要的物理过程。这些过程有的被忽略了，如冰川模式中的冰流；有的被高度参数化，如海洋中对涡旋活动的次网格尺度模式。现在和可预见将来的计算资源，还无法同时解决所有地方的物理过程。第二，为了提供适应和改变环境的战略需要，IPCC 气候模式面临对区域气候变化模拟的压力。区域气候变化的模拟对分辨率和计算资源的需求使得气候模拟人员需要寻找一个新的途径，以弥补准均匀全球气候系统模式的局限。

解决这个问题一个办法是使用 SCVTs。这种网格在气候系统模式中有很好的性质：首先，由于这个网格是使用“二十面-六角格点”组成的超集，我们可以认为 SCVTs 是现在所使用的网格的延伸。其次，SCVTs 节点的空间分布直观形象。SCVTs 是通过用户定义的密度函数所生成的，节点都集中在高密度区，而低密度区比较稀疏。由于每个 SCVT 都与一个 Delaunay 三角形相关，这个方法可以适用于任何适合 Voronoi 图或者 Delaunay 三角形的数值方法。SCVT 的平滑性和均匀性都是由 Delaunay 三角形表达出来的。如果我们能充分理解如何分布自由度（以及分布计算资源），SCVTs 是一个很好的细分方法。最后，并且是最重要的，SCVTs 可以经受各种细致的检验，从中我们可以知道一个给定网格的规律性和我们增加区域内节点数的时候其规律如何改变。

通过对地球气候系统模式中几个不同子模式网格的设计：即格林兰冰川、北大西洋和南极大洋-冰架相互作用，我们证明了这个方法的潜在价值。另外，我们的数值方法还能生成局地分辨率加强的区域气候模式的多分辨率网格。在每个个例中，我们都发现了使用我们的 SCVT 密度函数，能准确地控制指定地区的分辨率。在其中两个个例中（格林兰和北大西洋），SCVT 密度函数都是直接从系统的物理性质中得出来的。在格林兰个例中的密度函数是观测的冰移动速度，它使得冰流附近分辨率提高。在北大西洋个例中我们的密度函数使得网格能分辨湾流和北大西洋洋流相关的涡旋活动。在这些个例中，我们计算了评价网格质量的参数。所有的个例都与 SCVT 理论基础相一致：增加自由度能增加网格质量。这个一致性不仅存在于 Voronoi 图还存在于 Delaunay 三角形中。

尽管本文的主要目的是证明 SCVTs 可以为气候系统应用产生高质量的多分辨率网格，我们觉得开发一个能利用可变分辨率网格优点的传统有限体积算法也是很重要的。虽然我们关于这方面的结果还远远不够好，但至少我们用全球浅水方程中提供了一个可喜的个例。这个简单的个例，对我们是否应该寄希望于本文所提到的多分辨率技术，提供了一个指导。比如，对一个许多复杂的地球系统子模式，我们很难在一个较宽的条件范围内减小形式解的误差，这些误差一般都被低分辨率区域的一些现象所主控。尽管这个问题与使用的数值方法无关，但在当今气候系统模式中常用的低阶有限体积方法中，这个问题常会很突出。与减小形式解误差相反的是，我们主要强调能模拟较宽范围内的现象的稳定、长期的数值方法，并且不用专门的滤波或耗散。发展多分辨率气候系统的主要目的，应该是对更高分辨率的新现象的模拟，而不是形式上减小解的误差。

尽管本文证明了在很多问题中生成高质量网格的能力，但发展出能有效生成高质量多分辨率网格的数值技术，还有很大的工作要做。

**致谢：**本文的研究是由美国能源部科学办公室的生物和环境研究处通过DE-FG02-07ER64431, DE-FG02-07ER64432,和 DOE 07SCPF152资助的。Sebastien Legrand博士和两位匿名审稿者给本文提出了建设性的意见，作者谨此向他们表示感谢。

**参考文献：**（见原文）