

# 对浅水方程中多分辨率模拟方法的探索<sup>1</sup>

Todd Ringler

洛斯阿拉莫斯国家实验室

Doug Jacobsen, Max Gunzburger

佛罗里达州立大学

Lili Ju

南卡罗来纳大学数学系

Michael Duda, Willian Skamarock

美国国家大气研究中心

## 摘要

本文用标准浅水方程模式的测试个例，评价了使用可变分辨率网格求解全球浅水方程的能力。尽管本文的长远目标是建立一个可在不同区域用不同的分辨率，解决不同时空尺度问题的全球气候模型框架，我们先从分析浅水系统出发理解可变分辨率的优劣。我们的多分辨率网格是用一个简单的，由用户定义的密度函数决定的粗、细网格区域分布的球面重心 Voronoi 网。我们使用了一组网格形式，从准均匀网格（格点间距基本上是全球均匀的），到高度可变分辨率网格（细网格与粗网格的格点间距相差 16 倍），来探索这个浅水系统。我们发现位涡在计算机的机器精度内是守恒的，总有效能量在时间截断误差内也是守恒的。这个结果对从准均匀到高度可变分辨率网格的所有网格都成立。从浅水方程的测试个例 2 和 5 可以看到，本文的主要结论是，最终的误差主要由模式区域内分辨率最粗略的区域所控制。这个结论与其他人的结果相一致。当这些可变分辨率网格用来模拟不稳定的纬向急流时，中心区域的不稳定性随着网格分辨率差异的变大而基本不变。主要的区别出现在精细网格以外的区域，它是由于增加格距伴随的额外截断误差引起的。总的来说，这些结果表明，这个方法可在多分辨率气候系统模式中使用。

## 1. 前言

全球大气和海洋环流的一个重要特征是其广泛的时空尺度。大气的气候特征包括全球环流，约  $O(10^4)$  km 尺度，和以边界层过程为例的特征尺度  $O(10^{-1})$  km (Klein and

---

<sup>1</sup> 原文: Ringler, T., D.W. Jacobsen, M. Gunzburger, L. Ju, M. Duda and W. Skamarock, 2011: Exploring a Multi-Resolution Modeling Approach within the Shallow-Water Equations, Monthly Weather Review, DOI: 10.1175/MWR-D-10-05049.1。

汤帅奇译，张明华校。

Hartmann 1993)。与此相类似，海洋的气候特征也是被约  $O(10^4)$  km 尺度的洋盆尺度环流，和  $O(10^1)$  km 尺度的中小尺度过程所控制的 (Boccaletti et al. 2007)。作为一个典型的非线性系统，大气和海洋中广泛的空间尺度是相互作用的，全球  $O(10^4)$  km 尺度与局地  $O(10^1)$  km 尺度互相影响。为了模拟大气和海洋气候系统，这种跨尺度的强相互作用意味着对大尺度的准确模拟需要对小尺度系统进行精确描述。

多尺度的相互作用，对气候系统的数值模拟提出了很多挑战。我们现在并没有足够的计算资源来求解全球大气和海洋中所有尺度的基本物理过程，如云和大洋涡旋 (Randall and bony 2007)。不幸的是这个情况在将来的几十年内仍将一直存在。可以推测，全球气候系统的数值模拟无论在现在还是将将来都面临着分辨率不够的问题。

小尺度过程，如云和大洋涡旋，在气候系统中十分重要，数值模式需要通过对它们进行直接模拟或参数化来描述这些过程如何作用和反作用于大尺度过程。由于现今的计算资源存在的种种限制，气候模式几乎只能使用各种参数化方案，然而，对一个过程进行参数化比进行直接模拟难度更大。当进行模拟时，不同尺度之间的相互作用是自动产生的；而当进行参数化时，我们需要事先知道大尺度（可分辨的）过程如何影响小尺度（未分辨的）参数化过程，以及相反的，参数化过程如何聚合起来影响大尺度过程。从效果上看，一个精确的参数化方案，需要对物理机制有远比直接模拟更好的理解。

参数化的困难导致了全球气候模拟的如下基本追求：增加模式分辨率，减少参数化的使用，从而使得对气候系统的模拟更加精确。面对着全球气候模拟的巨大困难，模式工作者们已经用至少三个方法开始着手研究解决问题的途径。第一个方法是全球超高分辨率气候系统模式 (McClean et al. 2011)。这个方法中，高分辨率气候系统模式与世界上最高性能的计算机系统相组合使得气候模拟有着前所未有的高分辨率。这个方法的前提是，随着模式分辨越来越多的过程，系统中尚未解决的部分越来越少，从而需要进行参数化的部分越来越少。这个方法相当于一个极高分辨率的传统气候模式方案，从而能继承过去几十年的研究中所得到的丰富经验。其主要的缺点是尚未分辨的这些部分改进起来速度非常慢，水平格距减小一半意味着计算耗时要增加  $2^3$  倍，因为经度、纬度、时间都要增加 2 倍。因此，如果将现在 IPCC 高分辨率大气模式中所用到的全球 50-km 网格精确到可分辨对流尺度系统的全球 4-km 网格的话，现今的计算能力需要提高  $2^{12}$  倍，也就是大约 4000 倍。这还忽略了垂直方向上需要增加的分辨率。

为了绕开全球高分辨率气候模式的困难，第二个方法是从局部区域的气候模式着手，这个方法已经有了二十来年的探索 (Giorgi and Mearns 1991; McGregor 1997; Wang et al. 2004)。这个方法只在大家关心的区域使用高分辨率网格。由于我们关心的区域一般只占全球的一小部分面积（如美国大陆），它们对计算能力的需求远远比全球高分辨率模式要低。因为这个方法更易于实现计算，我们能更方便地探索与区域动力和区域气候变化相关的物理过程（如 Diffenbaugh et al. 2005）。这个局部区域方法的缺点在于它强制要求单向的侧边界条件，并且没有与侧边界的相互作用。侧边界条件一般是从再分析资料或粗网格

全球气候模拟中获得的，而强制的侧边界条件可能会与局部区域模式在物理和动力上不一致（Wang et al. 2004）。物理上的不一致来自于全球和区域模式中不同的物理参数化过程（如 McGregor 1997 图 4）；动力上的不一致来自于侧边界条件的不协调（Oliger and Sundstrom 1978; Staniforth 1997）以及全球和区域模式在嵌套区域的解不一致（Davies 1976; Marbaix et al 2003; Harris and Durran 2010）。这些不一致可能会导致区域模拟和全球模拟出现不同的气候状态（Jones et al. 1995）。在全球和区域模式中使用一样的物理参数化过程能改善物理上的不一致（McGregor 1997; Lorenz and Jacob 2005）；在每步积分中将区域模式的数值解替换到全球模式上能解决动力上的不一致（Lorenz and Jacob 2005; Inatsu and Kimoto 2009）。

第三个方法是用多尺度模式。这个方法目前主要只在大气模式研究中出现（Grabowski 2011），在海洋模式中的应用探索正在初步开展（Campin et al. 2011）。如其名所示，这个方法将不同尺度的模式耦合在一起形成整个数值模拟。至今为止的工作主要集中在全球粗网格模式的大气动力框架下嵌入云和辐射过程。从而，多尺度方法通过直接截断大涡模拟，大大减少了物理参数化的需要（Khairoutdinov and Randall 2011）。多尺度方法的前提是在模拟的物理系统中有尺度的分离。其基本的假设是，在时空特征上，小尺度过程离粗网格过程足够远，从而大小尺度的耦合，不需要用到二者之间的尺度。这个假设对大气和海洋系统是否成立还并不清楚。

在这篇文章里，我们试着寻求第四个方法来解决模拟气候系统的计算挑战。这个被称为多分辨率方法的途径是传统的全球气候模式方法与区域方法的结合。我们后面将提到，在我们的多分辨率方法中，我们仍然使用全球模式的框架，这样我们能在一个模式里模拟整个球面范围的大气或海洋系统，同时可以在任意选定的区域内增加局地分辨率。

因为这个方法生成一个全球协调的网格，它与近二十年来发展的拉伸网格或映射方案（Fox-Rabinovitz et al. 1997; Déqué et al. 2005; Fox-Rabinovitz et al. 2006）相类似。由于拉伸网格方案需要网格进行连续变换（如：尽管分辨率变了但网格在拓扑上不变），一个区域的分辨率增加必须使得另一个区域分辨率减小。拉伸网格方案在增加多个区域分辨率的能力上也有限制。下面发展的多分辨率方案并非基于连续变化的网格，不要求一个区域内增加的分辨率以在别的区域减小分辨率为代价，也不局限于只能在一个区域增加分辨率。拉伸网格方案脱出强调了所有方法的一个主要问题，即包括很大跨度的空间尺度时，这些方法无法实行尺度依赖的物理参数化。我们对这个问题以及多分辨率方案需要面对的其他挑战在最后一节里进行了讨论。

如图 1 所示，多分辨率方案允许一个或多个区域的格点分辨率比其他格点分辨率高。这可以通过两步实现。首先，使用可变的密度函数对固定数量的格点数进行再分配，形成与拉伸网格方案一样的效果。其次，使用这组格点，将任意的精密节点加入格点中，使得精密格点仅仅加在我们感兴趣的区域而不干扰其他区域的结果。因此我们可以直接在高分辨率的区域模拟云和大洋涡旋这样的过程，而在低分辨率的区域使用参数化。这个多分辨率方案的建立有两个关键部分：一个规则的、可变分辨率的网格及其网格质量特征，以及一个即使在非常不均匀的格点中也能维持所有守恒性质的有限体积方法。

本文建立多分辨率方案的第一个重要部分是球面重心 Voronoi 网 (SCVTs)。或许是因为 Voronoi 式的多边形在自然界中很常见 (Barlow 1974)，Voronoi 网在科学上的应用已经有很长的历史了。由于 Voronoi 网格在球面上的一致性和均匀性，Sadourny et al. (1968) 和 Williamson (1968) 将其引入进气候模式中。Sadourny 和 Williamson 都没有将他们的网格叫做 Voronoi 网，但实际上都是将其作为他们的基本网格，尽管在最近的十年里这些网格的术语描述还不统一 (见 Ju et al. 2011)。最近，很多人发现球面 Voronoi 网格在全球大气模式中的应用很成功 (Heikes and Randall 1995; Thuburn 1997; Ringler et al. 2000; Ringler and Randall 2002; Randall et al. 2002; Tomita et al. 2005; Weller and Weller 2008)。上述几个例子中，Voronoi 网的使用体现了其产生高质量均匀分辨率网格，它同时具备消除其他网格形式所存在的奇点问题的能力。此外，最近的一些工作发现 Voronoi 图在生成可变分辨率网格的方面也一样优秀。正如在第 2 节中将讨论到的，通过增加 Voronoi 网格的重心限制，我们能在球面上产生非常规则、高质量、可变分辨率的网格。重心 Voronoi 网格与一般 Voronoi 网的区别在于重心 Voronoi 网的产生质点 (格点) 是对应的 Voronoi 网格的重心 (质量中心)。这个很小的要求 (格点是 Voronoi 网格的质量中心) 使得生成的网格在分辨率可变的情况下仍然有很高的性能 (Gersho 1979; Du et al. 1999)。

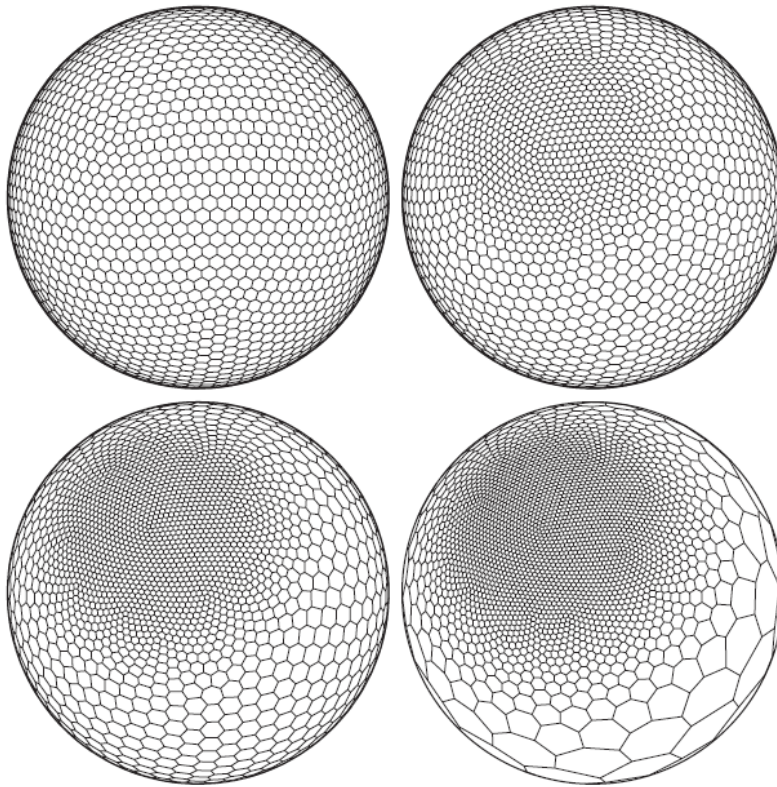


图 1: 由方程(4)生成的四组网格。每组网格使用了 2562 个格点，区别仅仅在参数  $\gamma$  不同。最细网格与最粗网格的分辨率之比分别为 1 (左上)，2 (左下)，4 (右上)，16 (右下)

这个方案的第二个重要部分是可以与可变分辨率 SCVTs 相组合，产生对旋转流的较好模拟的有限体积方法。在全球大气和海洋模式中，优秀的有限体积技术的特征是它对非线性

性项，如位涡拟能<sup>2</sup>和总能量（Arakawa 1966），假增长的控制能力。近十年来人们对非线性项守恒重要性有了更深刻的认识（Thuburn 2008），一些有趣的证据表明，设计能遵守在连续系统中隐含约束的数值模式，具有其它潜在的价值。而这个工作在网格不均匀时很有挑战（见 Perot 2000; Bonaventura and Ringler 2005; Stuhne and Peltier 2006; Ham et al. 2007; Kleptsova et al. 2009）。Thuburn et al. (2009, 后面简化为 T09) 和 Ringler et al. (2010, 后面简化为 R10) 最近的工作详细介绍了一个在高变率网格的情况下也能使非线性项守恒的有限体积方法。本工作的一个目的是完整地描述这个方法在可变分辨率网格的表现。

本文的主要目的是研究多分辨率网格对浅水系统的模拟能力，我们认为这是对大气和海洋系统进行可变分辨率模拟的前提条件。由于它已证明对简单代用的 3D 原始方程可用，我们选择从浅水系统的分析开始研究。第二节给出 SCVTs，它们的特性，以及如何生成网格。第三节主要总结了我们的多分辨率方法中隐含的数值方法，特别注意了当网格不均匀时这些方法的特性。第四节是对一些标准浅水方程个例的分析，主要关注地转平衡、守恒量以及误差对网格大小和分辨率的关系。在第五节我们比较了这些结果与其它已经发表的研究结果。我们这里设计的多分辨率方案也有其独有的挑战。第六节强调了将这个方法应用到全球和区域气候模式中时面临的挑战。

## 2. SCVTs 的性质和生成

对全球气候系统中的 SCVTs 及其潜在优势的全面综述参见 Ju et al. (2001) 和 Ringler et al. (2008)。本文中的讨论只关注 SCVTs 最突出的方面以及在网格中的实际应用。这里不分析产生实际结果的方法，但给出了一些相关参考文献，以供希望对这个网格生成技术的数学基础有更好了解的学者参考。

Voronoi 图可以这么描述：给定一个区域  $\Omega \in R^d$  及一个离散点集  $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \Omega$ （这里假设  $\Omega$  为整个球面），把每个点  $x_i, i=1, \dots, n$  对应的 Voronoi 区  $V_i, i=1, \dots, n$  定义为

$$V_i = \{y \in \Omega \mid \|x - x_i\| < \|x - x_j\| \quad j=1, \dots, n \text{ 并且 } j \neq i\} \quad (1)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示两点间的球面距离。很明显的，对  $i \neq j$ ，有  $V_i \cap V_j = \emptyset$ ；并且  $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} = \overline{\Omega}$ 。

因此  $\{V_i\}_{i=1}^n$  是  $\Omega$  上的一个网格，或者说， $\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i}$  是  $\overline{\Omega}$  的不重叠网格。我们将  $\{V_i\}_{i=1}^n$  叫做  $\Omega$  上关于点集  $\{x_i\}_{i=1}^n$  的 Voronoi 网格或 Voronoi 表。在 Voronoi 表的命名法中，点  $x_i$  叫做一个算子，区域  $V_i$  叫做 Voronoi 区或 Voronoi 单元。每个算子与一个 Voronoi 区一一对应。本文中的格点即上述的算子，网格单元即上述的 Voronoi 区。如果区域  $\Omega \in R^d$  覆盖整个或部分球面，我们将这个网格叫做球面 Voronoi 网格。

---

<sup>2</sup> 位涡拟能是位势涡度的平方在全球的积分（校者注）。

当算子同时也是对应的 Voronoi 区的**质量中心**的时候，球面 Voronoi 网格变成球面**重心** Voronoi 网格。给定  $\Omega$  上的密度函数  $\rho(x) \geq 0$ ，对任意区域  $V \subset \Omega$ ， $V$  的标准质量中心

$$x^* \text{ 为 } x^* = \frac{\int_V x \rho(x) dx}{\int_V \rho(x) dx}. \quad (2)$$

这个质量中心的计算能保证  $x^*$  在球面里。为了限制算子点分布在单元球面上， $x^*$  被放射状地投射在单元球表面上。一般来说，每个网格单元的  $x^*$  与这个单元的格点  $x_i$  并不一致，只有当球面 Voronoi 网格也是球面重心 Voronoi 网格的时候才有  $x^* \equiv x_i$ 。

实际上，使用 Lloyd 算法，给定任意的 SVT 求 SCVT 是一个相对直观的迭代过程（Du et al. 1999）。给定一系列的  $x_i$ ，我们首先找出对应的  $V_i$  并计算其  $x_i^*$ 。一般来说  $x_i^* \neq x_i$ ，于是我们只要将算子换成其重心（ $x_i = x_i^*$ ）重复这个过程。这个迭代过程可以一直持续到  $x_i$  与  $x_i^*$  相当接近，比如按照  $L_2$  或  $L_{\text{inf}}$  范数。更多关于此迭代过程、密度  $\rho$  的限制、收敛性的保证及生成网格的最优性等细节讨论，参见 Du et al. (1999), Du et al. (2003), Ringler et al. (2008)。尽管本文只讨论 CVT 的延伸 SCVT，CVT 方法还可用于其他各种流形或平面，见 Du et al. (2003)。

基于 SCVTs 的方法优势在于确定  $\rho(x)$  时的自由度，即用很高的精确度控制局地格点分辨率和变化率。如果我们选择两个 Voronoi 区，下标分别为  $i$  和  $j$ ，那么其猜想是：

$$\frac{dx_i}{dx_j} \approx \left[ \frac{\rho(x_j)}{\rho(x_i)} \right]^{1/(d'+2)}, \quad (3)$$

其中  $d'$  是网格所在的流形的维度， $\rho(x_i)$  是  $x_i$  的密度函数， $dx_i$  是  $x_i$  附近局地网格的尺寸， $\rho(x_j)$  与  $dx_j$  同上。方程(3)在  $d' \geq 2$  时仍是一个没有证明的猜想，但其有效性经过了许多数值研究的证实。在本文后面的格点生成个例中，我们证明了方程(3)的精度，并证明了我们的结论：即我们能通过选择密度  $\rho$  而精确控制  $\Omega$  上不同地方的相对网格大小。方程(3)在与 Gersho 猜想共用时更有效。Gersho 猜想（Gersho 1979）是，对一个固定的密度函数，随着算子数目的增加，其网格将变得越来越规则，在局地上向多胞形的复制元收敛。也就是说，只要算子数目  $n$  足够大并且每个算子对应的区域足够小，Gersho 猜想认为重心 Voronoi 网格是包括很多全等多胞形的均匀网格。二维等密度情况下的正六边形是对这个猜想的一个证实（Newman 1982）。

Gersho 猜想并不能在球面网格生成上严格成立，因为我们知道无法在球面上用单一的多胞形覆盖（Saff and Kuijlaars 1997）。但是 Gersho 猜想的思想是可以在球面上应用

的。对给定的密度函数，随着算子数的增加，生成的网格会由越来越趋近于正六边形的六边形组成。Ju et al. (2011) 和 Ringler et al. (2008) 从不同方面证明了这一点。

总的来说，SCVTs 的应用在于它能通过规定方程(3)的密度函数而精确控制格点分辨率的能力以及能保证网格随着格点数目的增加而变得更加规则。

### 3. SCVTs 个例

这里讨论的个例用到了三参数密度函数产生的网格，密度函数表达式为<sup>3</sup>：

$$\rho(x_i) = \frac{(1-\gamma)}{2} \left[ \tanh \left( \frac{\beta - \|x_c - x_i\|}{\alpha} \right) + 1 \right] + \gamma, \quad (4)$$

其中  $x_i$  限制在单位球表面上。这个函数使得与点  $x_c$  的距离为  $\beta$  以内的区域有较大的  $\rho$  值， $\beta$  单位为弧度， $x_c$  也限制在球面上。经过一段弧度  $\alpha$  后函数转变成较小的  $\rho$  值。点  $x_c$  和  $x_i$  的距离  $\|x_c - x_i\| = \cos^{-1}(x_c \cdot x_i)$ ，范围从 0 到  $\pi$ 。

上述的密度函数有最大值 1，最小值  $\gamma$  ( $\gamma > 0$ )。由方程(3)可知最高分辨率区域的网格间距  $dx_f$  和最低分辨率区域的网格间距  $dx_c$  有相关关系

$$\frac{dx_f}{dx_c} \approx \gamma^{1/4}. \quad (5)$$

在本文中，我们设定  $\beta = \pi/6$  以及  $\alpha = \pi/20$ 。为了让后文更清楚，我们指定  $x_c$  的位置与 Williamson et al. 的浅水模型例 5 (Williamson et al. 1992，简称为 W92) 的地形特征中心相一致。我们将主要关注  $\gamma$  的影响，即细网格和粗网格地区的相对分辨率的影响。图 1 给出由 2562 个格点产生的网格， $\gamma$  值分别为  $(1)^4$ ， $(1/2)^4$ ， $(1/4)^4$ ， $(1/16)^4$ 。因为它们的细网格和粗网格分辨率之比分别为 1，2，4，16，我们将这四个网格分别叫 X1，X2，X4，X16。后文的模拟和讨论也将用到图中未给出的 X8 网格。这些网格分别用 2562，10242，40962，163842 和 655362 个格点生成。在这样的格点选择下，X1 网格与其他从正二十面体<sup>4</sup>的递归二分推导出的类 Voronoi 网格非常相似。这样选择的目的是为了比较下面计算出来的误差范数与其他文献中的误差范数。表 1 总结了本文中所用到的所有网格的分辨率。

---

表 1: X1 到 X16 最细 ( $dx_f$ ) 与最粗 ( $dx_c$ ) 网格区域的大致格距 (km) 与格点数的关系

---

<sup>3</sup>此式第一项的系数在原文中有误，已改正。（校者注）

<sup>4</sup>正二十面体是由 20 个平面等边三角形所组成的正多面体。当它内接到一个球面中时，它的每个顶点多在球面上，在本文中，可以理解成南北半球高纬度地区各由相连接的五个等边三角形内接，热带地区由十个等边三角形内接。（校者注）



格点数	X1 ( $dx_f, dx_c$ )	X2 ( $dx_f, dx_c$ )	X4 ( $dx_f, dx_c$ )	X8 ( $dx_f, dx_c$ )	X16 ( $dx_f, dx_c$ )
2562	(480, 480)	(282, 537)	(196, 737)	(169, 1293)	(163, 2419)
10242	(240, 240)	(141, 169)	(98, 368)	(85, 648)	(81, 1222)
40962	(120, 120)	(70, 134)	(49, 184)	(42, 324)	(40, 611)
163842	(60, 60)	(35, 67)	(25, 92)	(21, 162)	(20, 305)
655362	(30, 30)	(16, 32)	(12, 48)	(10, 78)	(9, 148)

图 2 给出了每个网格单元附近的网格分辨率和它与  $x_c$  的球面距离的关系。我们定义每个单元的局地分辨率  $dx_i$  为

$$dx_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \|x_j - x_i\|, \quad (6)$$

其中  $x_j$  表示网格单元  $i$  的相邻网格（见图 3）， $dx_i$  表示格点  $x_i$  与相邻格点的平均距离。

图 2 同时也给出了由方程(3)得出的 X1 到 X16 网格分辨率的理论估计值。

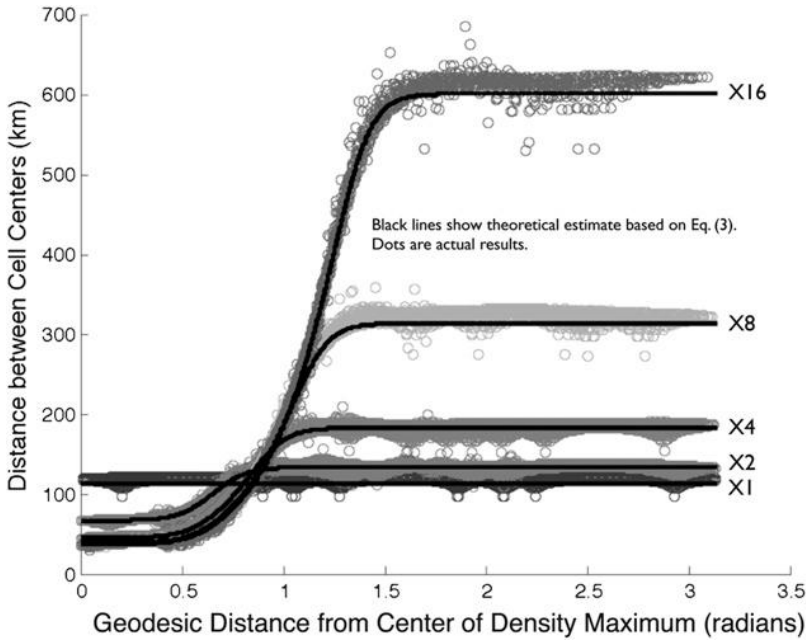


图 2：局地网格分辨率与它到最细网格中心的球面距离的关系。X 轴：每个格点  $x_i$  到最细网格（最大密度）中心  $x_c$  的球面距离。Y 轴：由方程(6)算出来的  $x_i$  周围的网格距离。每个空心圆圈表示网格中的一个单元。粗实线为由前面给出的参数与方程(4)得出的每个网格与其到  $x_c$  距离关系的理论估计值。

从图 2 可看出，对局地格点分辨率的理论估计值是相当准确的，由网格计算出的网格间距基本上都落在理论估计值上方。



#### 4. 数值方法总结

本文主要对下述非线性浅水方程组进行分析：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \eta \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -g \nabla (h+b) - \nabla K, \quad (8)$$

其中  $h$  表示流体厚度， $\mathbf{u}$  表示球面上的流体速度，绝对涡度  $\eta$  定义为  $\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) + f$ ，动能  $K$  定义为  $|\mathbf{u}|^2 / 2$ 。在球面上所有点上，向量  $\mathbf{k}$  都指向局地的垂直方向并且对所有点，有  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$ 。其他三个参数为重力加速度  $g$ ，科氏参数  $f$ ，底面地形  $b$ 。

在我们的应用中，上述方程可以改写成：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + q \mathbf{F}^\perp = -g \nabla (h+b) - \nabla K, \quad (10)$$

其中  $\mathbf{F} = h\mathbf{u}$ ， $\mathbf{F}^\perp = \mathbf{k} \times h\mathbf{u}$ ， $\eta = hq$ ， $q$  表示总位势涡度。

T09 和 R10 中讨论了一个模拟浅水系统的数值方法。T09 中对方程(7)和(8)的线性情况进行分析，为其线性方程组设计了一个可以重建在连续系统中静止地转模态，并在图 1 所示的可变分辨率网格中也能使用的数值方法。R10 将 T09 的分析延伸到非线性浅水方程(9)和(10)，从中推出能保证总能量和位涡守恒，并允许在物理上能有一定量位涡拟能耗散的方法。尽管 T09 和 R10 中的分析都是针对所有 Voronoi 网格的，但这两篇文献中的数值模拟及其评估都只是在准均匀网格上做的。

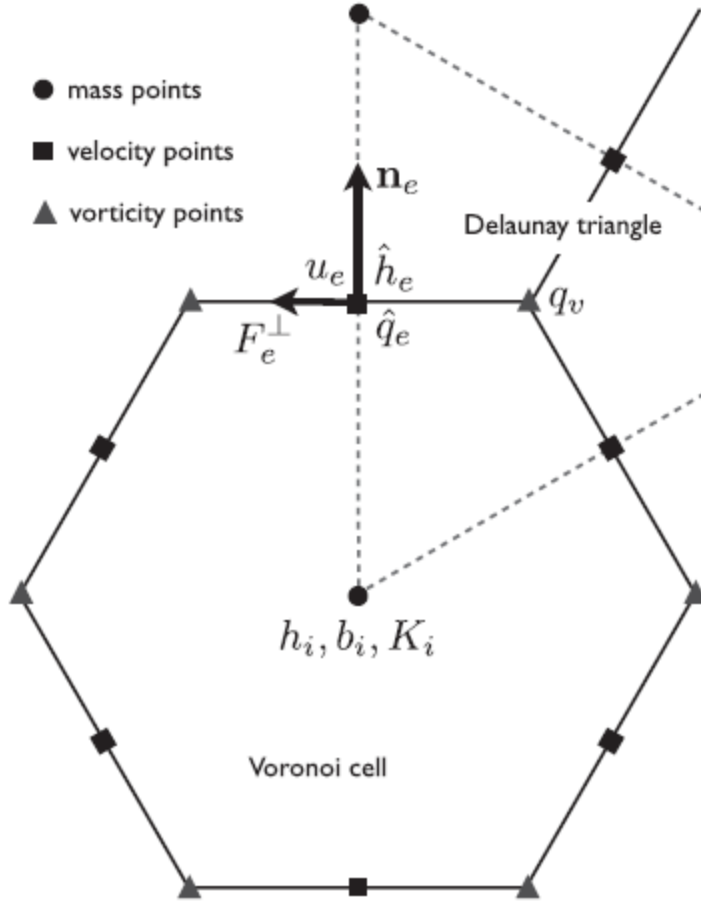


图 3: 有限体积方案中的变量交错情况。质量、表面地形、动能定义在 Voronoi 网格单元中心。速度场  $u_e$  的法向定义为每个线段的中点与单元中心的连线方向。所有涡度相关场, 如绝对涡度、相对涡度、位势涡度等, 都定义在 Voronoi 单元的角上。为了速度场的时间前差, 推导出的  $\hat{h}_e$ ,  $\hat{q}_e$ ,  $F_e^\perp$  场必须在速度场的位置得到。

本文用到的数值方法是有 C 交错网格的标准有限体积方法, 见图 3。厚度场在 Voronoi 单元中定义, 而所有的涡度相关场, 如相对涡度、绝对涡度和位势涡度都在 Delaunay 三角形中定义。厚度差分方程可以由简单的对散度算子进行差分近似得到 (见 R10 图 3)。像所有 C 网格方法一样, 只有在与有限体积单元厚度相垂直方向的速度分量才被预报计算。为了推导此垂直方向速度方程, 方程(10)与  $\mathbf{n}_e$  (见图 3) 在每条边上都做了点乘。得到的差分系统的方程为:

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = -[\nabla \cdot F_e]_i \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + F_e^\perp \hat{q}_e = -\left\{ \nabla [g(h_i + b_i) + K_i] \right\}_e, \quad (12)$$

其中  $F_e = h_e u_e$  表示过 Voronoi 单元一条边的质量通量,  $F_e^\perp$  表示通过每个 Delaunay 单元一条边的质量通量。散度和梯度算子的差分近似见 R10 和图 3。方程(11)和(12)中  $K_i$ ,  $h_e$ ,  $\hat{q}_e$ ,  $F_e^\perp$  尚未定义, 它们都按照 R10 给出定义。同样与 R10 一样, 我们使用预期位涡的方法 (Sadourny and Basdevant 1985) 来耗散位涡拟能。

T09 和 R10 中推导的重点是在时间截断误差范围内对总能量守恒，在机器舍入误差内对总位涡守恒，以及对位涡拟能进行耗散，耗散率只依赖于一个参数的数值方法。这个推导是对一个一般的 Voronoi 网络进行的，第 5 节的结果将确证这些分析。

## 5. 结果

我们通过三个浅水个例证明 T09 和 R10 中关于系统能量，地转平衡和位势涡度动力场的推导。W92 中的浅水个例 5 (SWTC5) 和浅水个例 2 (SWTC2) 分别是用来确定数值模拟守恒性质和维持地转平衡的能力。最后一个个例，正压不稳定个例，是用来说明这个方法在大气和海洋的典型结构进出（通过）网格转换区的能力的（Galewsky et al. 2004, 后面简写为 G04）。

为了更好地了解结果的误差如何随着网格的改变而变化，我们计算了厚度场  $h_i$  的  $L_2$  误差范数， $L_2$  范数是这么计算的：

$$L_2 = \frac{\left\{ S \left[ (h_i - h_i^r)^2 \right] \right\}^{1/2}}{\left\{ S \left[ (h_i^r)^2 \right] \right\}^{1/2}}. \quad (13)$$

其中场  $h_i^r$  是计算或插值至  $x_i$  位置的参考解。参考解表示其或是解析解，或是在得不到解析解情况下的高分辨率模式解。函数  $S[f]$  是计算整个球面上区域加权平均的  $f$ 。

每个个例做了二十五个模拟，即完成表 1 的二十五个可能性。每个个例的每个模拟都是用了完全一样的参数设置。上面讨论过的的空间差分与四阶 Runge-Kutta 时间步长方法相配使用，时间步长  $dt = 25s$ 。每个模拟都用了预期位涡方法，上游偏差参数  $\theta$  设为  $dt/2$ （见 Sadourny and Basdevant 1985, 方程 8）。所有模拟都使用 64 位浮点精度计算。

### a. SWTC5

本文前言中曾提到过，我们的长远目标是创造关于全球大气和海洋系统完整物理过程的多分辨率模式。而在浅水系统中评价这个方法，是要在理想状态下认识其可能的优势和劣势。我们从 SWTC5 开始分析是因为它与我们希望能在真实状态下完成的情况类似。SWTC5 包括一个简单地形，系统的瞬时演化完全是由这个地形引起的。虽然这个地形尺度较大，但它是局地的，所以它适用于局地的网格精细化。比如图 1 和表 1 给出的网格或多或少都增加了地形周边的分辨率。

SWTC5 给出了一个大尺度地转流的解析解集作为初始条件，在没有地形存在的情况下该初始条件代表一个稳定的地转环流。地形中心位置在  $x_c$ ，南北范围各  $\pi/9$  弧度。第 3 节中提到的可变分辨率网格中心也在  $x_c$  并且细网格区域范围为  $\pi/9$  弧度，因此其细网格区域包含了整个地形区域。

初始条件的分析解按 W92 的方程(95)映射到差分模式中，使用 SWTC5 中合适的常数，在 Voronoi 格点（如  $x_i$  位置）获得初始的厚度场。初始  $u_e$  场是在 Delaunay 格点（如  $x_v$  位置）由 W92 的方程(92)先获得流函数，然后用  $\mathbf{k} \times \nabla \psi$  计算  $u_e$ 。尽管在  $t=0$  时  $u_e$  还存在误差，但这个方法可保证散度差分在  $t=0$  时刻的初始条件为 0。

由于地形的影响， $t=0$  时的地转平衡的纬向流碰上了山脉，使得重力波和 Rossby 波辐射开来，流体在地形影响下发生了变化。纬向流与地形之间的相互作用有很强的非线性，这也是为什么选用这个个例来分析数值方法的守恒性质的原因。

我们从 SWTC5 的定性评估开始，在图 4 中给出了使用 40962 个网格单元的流体高度场  $h_i + b_i$  在 X1, X2, X4 和 X16 网格上第 15 天的分布。大体上看，图 4<sup>5</sup>描绘的这些模拟结果都相似。这里使用 40962 的全套网格，都能很好的分辨流体的大尺度 Rossby 波特征，因此我们可以认为这些模拟的质量相近。从图 4 可以清楚地看到远离地形区域的粗网格分辨率，注意到 40962/X16 网格模拟的分辨率从地形附近的 40km 到其他区域的 611km，质量场即便在网格过渡区域也没有任何噪声。

每个模拟中都有两个量在舍入误差内守恒：区域加权的全球厚度与体积加权的位势涡度。特别是我们发现

$$\frac{\partial}{\partial t} V = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{N_i} h_i A_i = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{v=1}^{N_v} q_v h_v A_v \quad (15)$$

在所有模拟中的误差都在舍入误差范围之内，其中  $v$  代表流体总体积。

为了评估系统能量，总能量按 R10 的方程(70)计算：

$$E = \sum_e A_e \left[ \frac{\hat{h}_e u_e^2}{2} \right] + \sum_i A_i \left[ g h_i \left( \frac{1}{2} h_i + b_i \right) \right] - E_r. \quad (16)$$

<sup>5</sup> 原文图 4 中图注的一部分与图 5 中图注的一部分有混淆，已改正。（校者注）

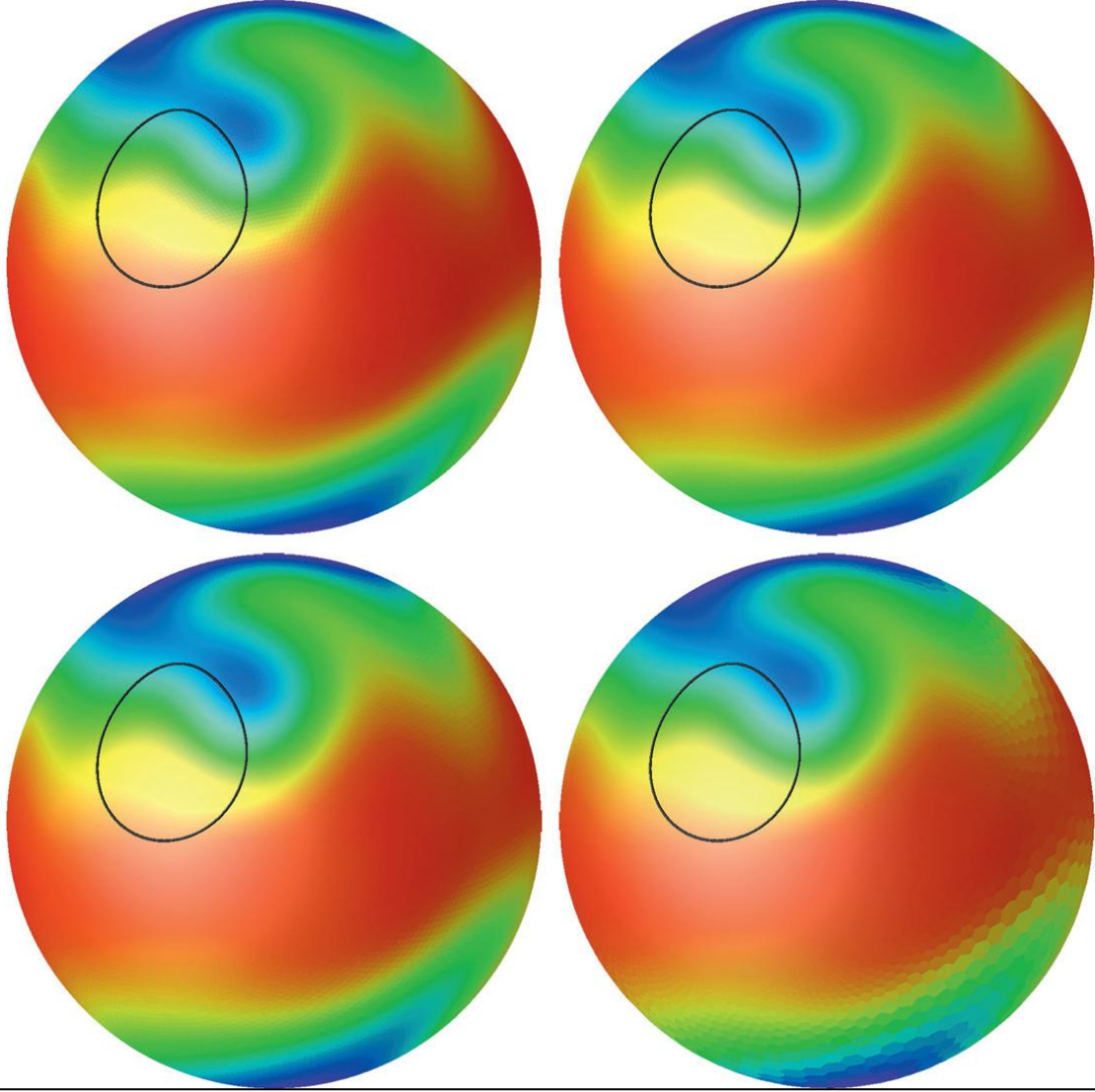


图 4: SWTC5 第 15 天的流体高度  $h_i + b_i$ 。从左上图按顺时针方向依次是 X1, X2, X16 和 X4 网格，都是 40962 个网格单元。黑实线表示地形的位置。图中每个 Voronoi 网格为一个单独的颜色（没有插值），因此 X4 和 X16 网格可以看见部分地区的网格大小。这些线条都有同样的色标最大值 5975m 最小值 5025m。

在总能量的计算中，无效位能  $E_r$  的表达式为

$$E_r = \sum_i g \bar{H}_i A_i \left[ \frac{\bar{H}_i}{2} + b_i \right] \quad (17) \quad , \text{ 其中}$$

$$\bar{H}_i = \frac{\sum_i A_i [h_i + b_i]}{\sum_i A_i} - b_i \quad (18)$$

本文接下来的“总能量”都代表总有效能量， $E_r$ 表示流体静止时的位能。图 5 证明了总能量守恒的程度。图中给出了有 40962 个格点的 X1, X2, X4, X8, X16 网格 15 天累积的  $\log_{10} \left[ \frac{E(t) - E(0)}{E(0)} \right]$ 。它给出了有效能量和动能之和守恒程度的测量。在第 15 天，所有解的总能量与  $t = 0$  时刻的总能量相差都在  $1.0 \times 10^{-8}$  内。这个差别的数量级比考虑实际大气和海洋中的耗散机制的需要好上不少（Thuburn 2008）。

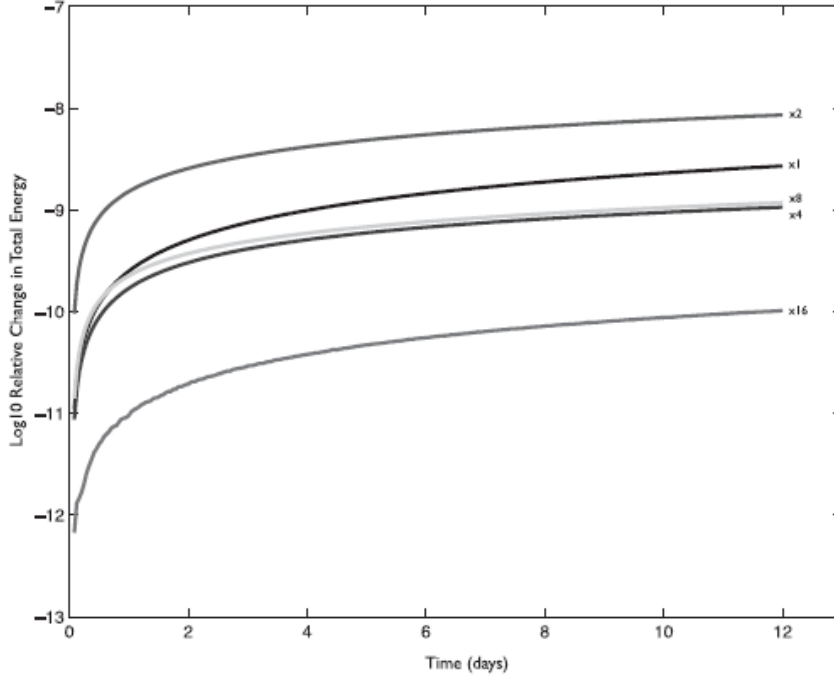


图 5: SWTC5 中  $\log_{10}$  的总有效能量相对变化与时间的关系。不同的线为 40962 个格点的 X1, X2, X4, X8, X16 网格。

总能量在正确的物理过程情况下是守恒的；非线性的科氏力既不产生也不消耗动能，能量在动能和位能之间的转换也是大小相等方向相反的。我们通过计算系统中非线性科氏力将动能加倍的时间来评价其能量守恒性的程度。在 40962 个格点的情况下，所有格点的非线性科氏力将动能加倍的时间大约都在  $10^4$  年的尺度。这与 R10 的图 4 相吻合。

总能量收支的另一个重要部分是能量在位能和动能之间的守恒交换。位能和动能方程都包括一个源项，这两个源应该大小相等方向相反（见 R10 的方程 15 与 16）。我们按 R10 的方程 65 与 67 分别评价动能和位能的源项。因为这些右边的源项在差分系统中是代数相等的，我们相信这两个源在很大程度上抵消掉了。所有的 25 个模拟都发现由于动能和位能源项不完全抵消所导致的系统动能加倍的时间尺度大约在  $10^{10}$  年，基本上属于机器舍入误差。

关于守恒的最后一个量是位涡拟能。图 6 给出了  $\log_{10} \left[ \frac{R(t) - R(0)}{R(0)} \right]$ ，其中  $R$  表示全球积分的位涡，定义为：

$$R = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^{N_v} q_v^2 h_v A_v - R_r. \quad (19)$$

就像能量有无效部分一样，位涡拟能也有一个无效部分，与流体处于静止状态时的位涡拟能相等。为了获得更有代表性的位涡拟能守恒评估，这部分无效位涡拟能在计算时被扣除了。

图 6 给出了 40962 个节点的 X1 - X16 网格的全球平均位涡拟能的相对变化。在第 15 天时，全球平均位涡拟能的相对变化在 X1 的  $10^{-4}$  到 X16 的  $10^{-2.5}$  之间。在这些模拟中，X1 和 X2 的全球平均位涡拟能为单调递减的，X8 和 X16 的全球平均位涡拟能为单调递增，而 X4 则在初始的全球平均值附近上下波动。显然由预期位涡拟能方法计算的耗散量需要随网格分辨率的变化而变，在第 7 节将有更多相关讨论。

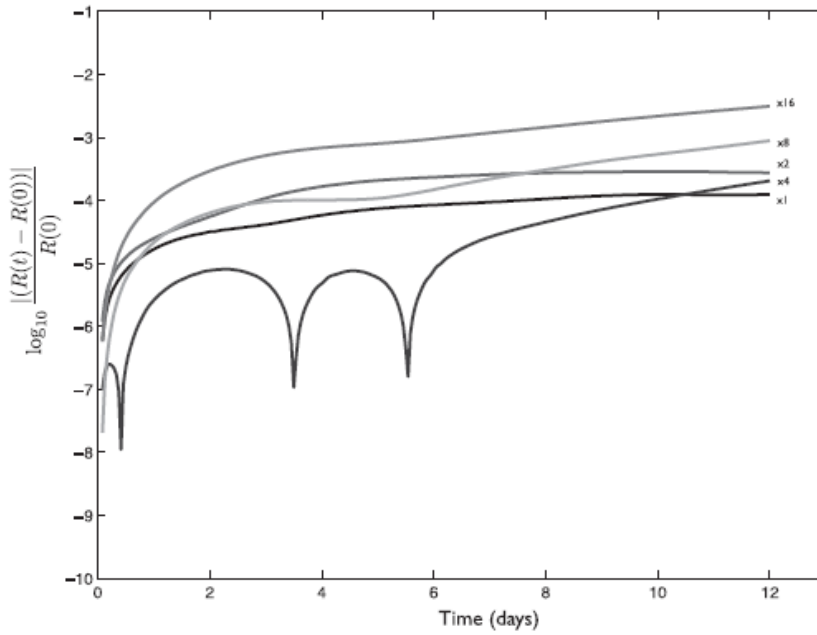


图 6: SWTC5 中  $\log_{10}$  的有效位涡拟能相对变化与时间的关系。不同的线为 40962 个格点的 X1, X2, X4, X8, X16 网格。X1 和 X2 中全球平均位涡拟能随时间减小，而 X8 和 X16 中全球平均位涡拟能随时间增加，X4 中全球平均位涡拟能在初始值上下波动。

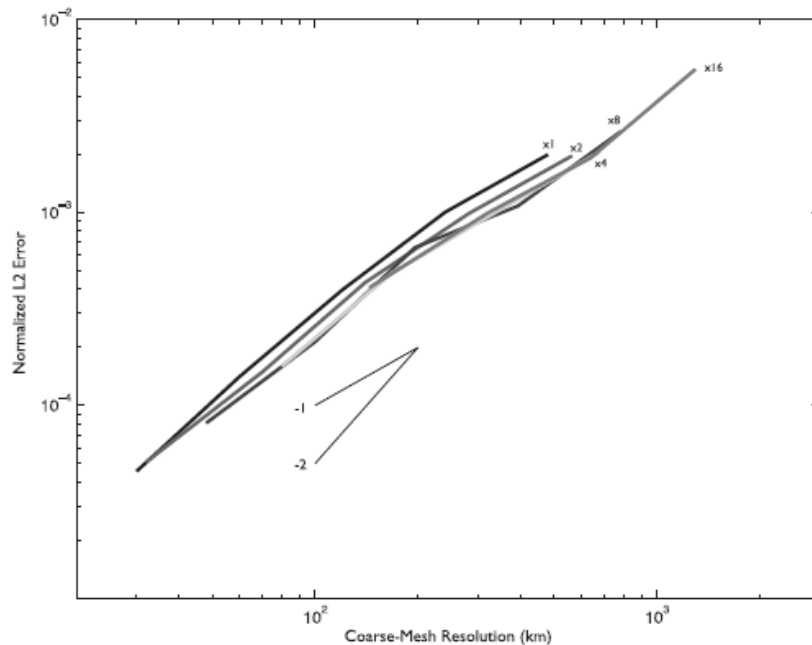


图 7: SWTC5 X1, X2, X4, X8, X16 网格第 15 天的厚度场的  $L_2$  误差与最粗网格区域格点分辨率的关系。两条细实线表示第一和第二阶收敛率。



关于  $L_2$  全球误差范数，以前使用局地浅水系统细化网格的研究都发现结果误差在增加特定区域分辨率的情况下基本保持不变（如 Weller et al. 2009, 简称为 W09; St-Cyr et al. 2008, 简称为 S08; Chen et al. 2011, 简称为 C11。见下一节详细讨论）。换一个说法就是，以前的工作发现，当使用静态网格细化的时候，结果误差主要由网格最粗区域所控制。为了测试我们的模拟中是不是也一样，我们画出了 25 个模拟的全球  $L_2$  误差范数与最粗网格区域中的分辨率的关系（见图 7）。由于 SWTC5 没有一致的解析解，误差范数是相对于 T511 全球谱模式（Swarztrauber 1996）算出来的。对 T511 中的 TC5，全球谱模式用了有尺度选择性的  $8.0 \times 10^{12} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1} \nabla^4$  耗散，以防止能量和位涡拟能在格点尺度上的堆积。

由图 7 可见结果误差是由最粗区域的网格分辨率所控制的，所有模拟的收敛速率都差不多为 1.5。注意我们的这些误差范数都是在对数坐标下绘制的，以强调  $L_2$  误差受粗网格分辨率的控制。如果更细致的对结果进行分析，我们能发现可变分辨率网格对结果误差有虽小却可测的改善，即增加地形附近的自由度并维持粗网格区域分辨率不变可以稍微减小结果的误差范数。

#### b. SWTC2

确定了数值模式在用 SWTC5 模拟瞬变流的能力之后，我们开始使用 SWTC2 评测这个方法在维持大尺度地转平衡上的能力。SWTC2 给出了作为初始条件的一系列满足方程(9)和(10)的精确稳定解析解。我们使用 W92 的方程(95)把这些初始条件投影到差分模式的 Voronoi 格点（如  $x_i$  位置）上得到初始厚度场。像 SWTC5 一样，初始的  $u_e$  场也是在 Delaunay 格点（如  $x_v$  位置）由 W92 的方程(92)计算流函数，然后用  $\mathbf{k} \times \nabla \psi$  计算  $u_e$  获得。所有数值解与初始条件的偏差都被认为是数值误差。

SWTC5 可用来说明使用网格细化的理由，但 SWTC2 并不是为了说明这个目的。用 SWTC2 评价我们的多分辨率方法的动机，并不是证明这个方法的效果，而是衡量网格细化的成本。保持大尺度的平衡是任何大气和海洋数值模式的重要性质，SWTC2 提供了一个很好的机会通过  $L_2$  误差范数来精确测量网格细化对维持地转平衡的影响。

从我们在 SWTC5 中的发现出发，也就是全球误差主要由粗网格分辨率所控制，图 8 给出了 25 个模拟的全球  $L_2$  误差与最粗区网格分辨率的关系。正如 SWTC5 中发现的一样，基本上所有  $L_2$  误差的变化都由粗分辨率区的格点间距控制。对一个给定的粗网格分辨率，结果误差从 X2 到 X16 网格大约增加了一倍，而不管粗网格分辨率多大，X1 网格的结果误差都差不多小了 10 倍。

X1 网格中的每个格点可以通过内接二十面体的递归二分投影（Heikes and Randall 1995）生成网络，并与生成的节点一一对应。这个方法使得格点分布特别均匀，导致结果误差相对较小。这个特殊的节点分布均匀特征在生成可变分辨率网格的时候消失了。因此，我们在全球误差方面选择放弃准均匀网格是有很大大代价的，而在扩展网格可变分辨率方面的代价则较小。

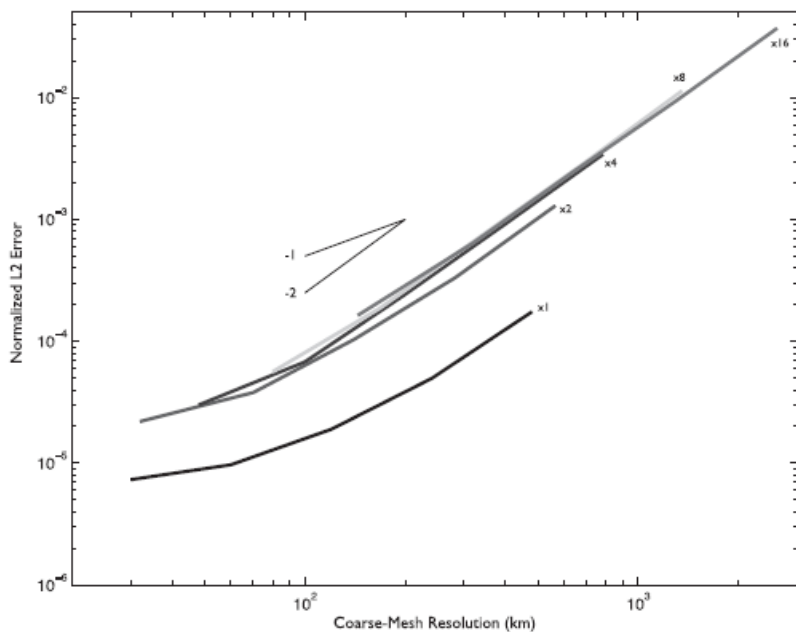


图 8: X1, X2, X4, X8, X16 网格 SWTC2 厚度场第 12 天的  $L_2$  误差与粗网格区域格点分辨率的关系。细实线表示第一和第二阶收敛率

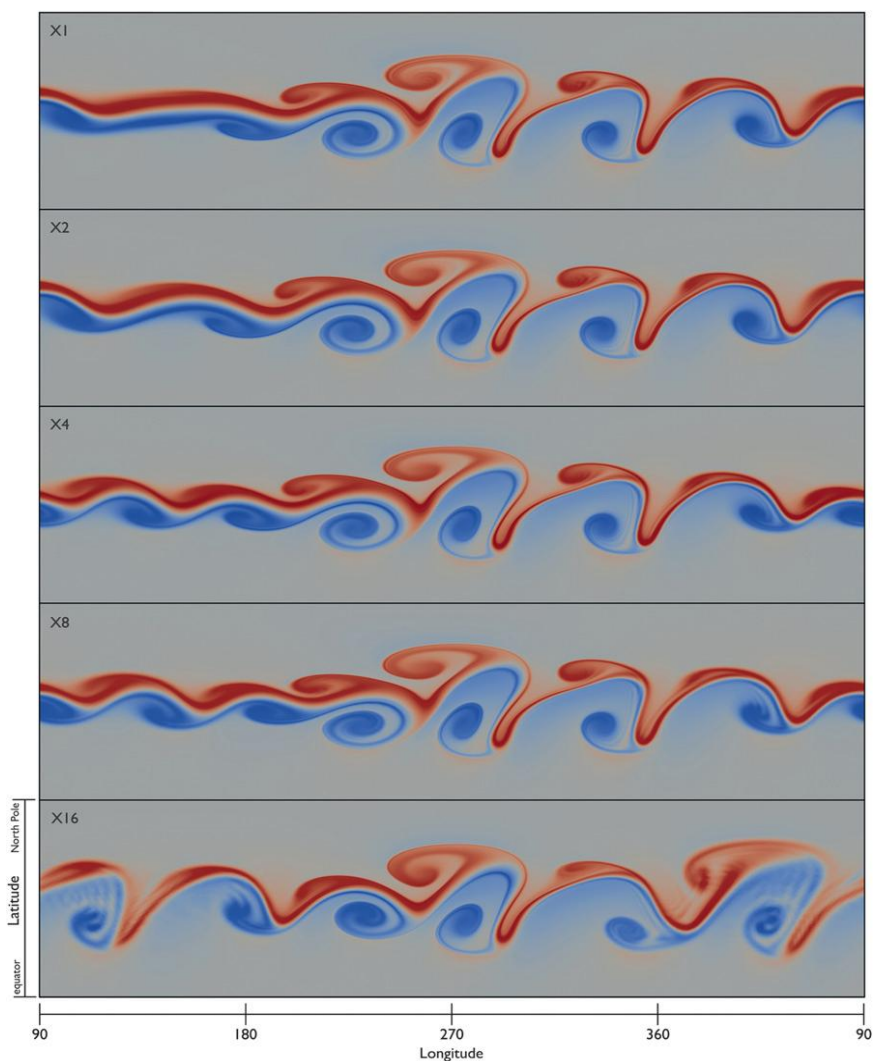


图 9: 使用 655362 个格点对正压不稳定急流的各数值模拟第 6 天的相对涡度场。每个图垂直方向覆盖北半球，水平方向覆盖所有经度，最左端为  $-90^\circ$  因此精细网格区域大概在每个图的中心位置。每个图的色标都一致并且色标范围为  $\pm 1.0 \times 10^{-4}$

SWTC2 的收敛速率并不均匀，最小分辨率区格距大于 100km 的网格，关于粗网格分辨率的收敛率大约为 1.9；，随着最小分辨率区格距越来越小，收敛率也变得越来越小。收敛率减小的可能原因如下：格点结构的缺陷、我们计算误差范数方法上的缺点、以及数值模式中的不足。我们还不能完全排除其中的任何一种可能性，我们将继续探索其真正的原因。我们完全希望二阶收敛率能随着分辨率增加仍能保持下去。

### c. 正压不稳定纬向流

我们的最后一个个例是关于对称纬向流的正压不稳定增长（G04）。我们从 G04 的方程(2)推导出流函数来产生本例的初始条件。我们用了此流函数在网格单元顶点位置的值，初始的  $u_e$  场与 SWTC2 和 SWTC5 类似。初始的厚度场由 G04 方程(3)算出，并包含了 G04 方程(4)的高度扰动。

图 9 给出了 655362 个格点的 X1, X2, X4, X8, X16 网格第 6 天的相对涡度场。精细网格区域位于每个模拟区域的中心位置。增长后的正压不稳定波包大概与第 6 天的精细网格区域相吻合，部分波动随着时间进入和传出这个细网格区域。

对我们的模式网格系统，基于在纬向对称基态下的不稳定性的测试是很难的，特别是这个测试个例的不稳定性是由小振幅扰动激发的。因为本研究中的网格并非纬向对称，因此截断误差会造成非零的纬向波数。此截断误差也是一个不稳定性的激发源，因此可能导致波的增长太快或增长位置不对。随着分辨率的增加，由于截断误差造成的强迫幅度减小，不稳定性主要由初始条件中的扰动控制。

另外，不稳定性的增长，强烈依赖于隐含在数值表达式之内或是在数值模式中显含的次网格尺度方案闭合的类型和强度。比如，图 8 的 X1 线与 li and Xiao (2010)图 17 (D)非常一致，但是与 G04 图 9(D)有很大不同。这是因为我们的模拟与 li and Xiao (2010)都没使用任何显含的闭合参数化，而 G04 在动量方程的右边使用了超扩散项。

我们的 X1 模拟与 li and Xiao (2010)图 17(D) 的高度一致，说明了在最小或无衰减的系统中，X1 模拟对不稳定性有广泛的代表性。我们的主要目的是理解可变分辨率网格是否改变正压不稳定性的增长。

首先，如果我们关注每个图中心右边较深的斜槽，沿着脊-槽-脊系统向西上溯，我们发现这些主要特征在所有的模拟中都有相同的振幅和相位。X2 模拟与 X1 模拟在所有方面都是定性等价的。另外，X8 模拟与 X4 模拟也在所有方面定性等价。X4 模拟仅仅在对应粗网格区域的图边缘地区与 X2 模拟有所不同。这两组模拟的主要不同在于 X4 - X8 模拟在上游位置多出了一个脊。但是，X16 模拟与其他模拟除了细网格区域以外基本上都是不同的。X16 模拟在粗网格区产生了其他模拟并没有的较强的槽脊系统。我们还注意到 X8 和 X16 模拟的细网格分辨率都差不多在 10km 左右，但是它们的粗网格分辨率差了两倍（见表 1）。X16/655362 模拟与 X1/40962 模拟的相似度比它与 655362 格点的其他模拟相似度更高。由于 X16/655362 模拟的粗网格分辨率与 X1/40962 模拟分辨率相近，这个发现与图 7 和图 8 相一致，证明了模拟的精度主要由粗网格区域的分辨率所控制。

## 6. 与前人结果的比较

本文的前言中介绍了前人对区域气候模拟已经探索出几种方法。由于现有的方法各有千秋，本文的方法又较为新颖，所以研究前几节的结果与其他发表结果的比较，是显然需要的。

但是，使用标准浅水方程作为区域模式方法评估的相关文献非常稀少。例如，近二十年来已有使用局地区域模式方法对全物理、三维、区域气候模拟的分析，但我们找不到任何在标准浅水系统中使用局地区域方法的结果。而对拉伸网格和保形投影网格方法，我们也不能找到在浅水模式系统中的方法评估。我们同时注意到，对浅水系统使用全球准均匀网格的相关方法评估的情况，则恰好相反，有很多相关文献。不过这些工作与准均匀网格的数值方法比较已经在 R10 中出现过了，另外，已有的文献主要集中在动态调整，而我们主要关注静态调整。接下来，我们将我们的多分辨率模拟与已发表的三篇文献：W09，S08 和 C11 进行比较。

我们的结果最直接有用的比较是与 W09 相比。W09 关注是静态网格细化，它使用了 AtmosFOAM (Weller and Weller 2008) 的有限体积方法，在基于 Voronoi 网格、Delaunay 三角和四边形的可变分辨率网格上进行。另外，W09 所使用的网格细化的空间位置也与本文一样，都是在 SWTC5 的地形附近进行网格细化（见 W09 图 4）。W09 和我们工作的一个不同是网格细化的程度，我们的网格分辨率变化有 16 倍，而 W09 的网格分辨率只变化了 2 倍。我们的网格大约有  $5 \times 10^5$  个单元而 W09 的网格分辨率要低得多，只有  $1 \times 10^4$  个单元。在精确度上，我们图 7 和图 8 的结果所显示的误差范数分别比 W09 的 SWTC5 和 SWTC2 精确高大约 5 倍。尽管图 7 显示的误差几乎全部由粗网格分辨率所控制，而在细网格区域增加更多的自由度只导致了很小的改进，W09 发现当地形附近增加分辨率之后所有网格的误差都有较小的增长。

S08 通过动态调整网格细化评估了两个数值方法，一个用的是高阶谱元方法，另一个用的是有限体积方法。S08 对 SWTC2 实验使用静态网格细化，格点分辨率变化范围为 4 倍，最粗网格间距大约为 250km。网格细化区域的范围大约为 30°纬度和 45°经度，这个区域大概覆盖全球 3% 的表面。网格细化区分别设在两个纬度上（30°和 45°N），模拟的误差范数与没有网格细化的全球模拟误差做了比较。用两个有网格细化的数值方法做的 SWTC2 表现出明显的不同。网格细化的谱元方法无论细化区域在哪儿都减小了 30% 的全球误差，而网格细化的有限体积方法随着细化区域位置的不同而增加了 60% 到 300% 的全球误差。S08 并没有讨论 SWTC2 中 3% 球面的网格细化是如何导致 30% 的全球误差减小的。我们对 SWTC2 的多分辨率模拟的结果介于 S08 的结果之间。在绝对精确度上，我们对 SWTC2 的全球误差范数比 S08 有限体积方法的误差略低一点，但相比其谱元方法的误差大 10 倍左右。如果流场是无限可导的，像 SWTC2，其它方法在全球误差上是很难匹配谱元方法的。但谱元方法在无限平滑的流体上的这个优点，当有强迫场存在或流体不连续的情况下时，将会大大减弱，如 SWTC5。由于 S08 对 SWTC5 只评价了静态准均匀网格和动态调整网格，因此很难与我们的结果做较好的比较。我们只注意到在比较准均匀网格的全球误差时，我们的结果与 S08 的结果很一致。在分辨率大约 240km 的均匀网格下，我们得到的相对全球

误差大约为  $1.0 \times 10^{-3}$ ，而 S08 使用谱元方法和有限体积方法的相对误差分别约为  $7.5 \times 10^{-4}$  和  $2.0 \times 10^{-3}$ 。

C11 最近的研究所关注的也是动态调整。像 S08 一样，C11 评价了静态网格细化的 SWTC2 和动态网格细化的 SWTC5。C11 用到的数值方法是使用网格单元平均方法（类似于有限体积方法）和大量的点值（类似于谱元方法）的多动量方法。对 SWTC2，C11 在纬度  $15^\circ$  和经度  $22.5^\circ$  范围的地区进行了静态细化，粗网格和细网格区域分辨率大约分别为 120km 和 15km。与 S08 一样，C11 也是在任意区域进行的网格细化。C11 发现使用细化网格相对于非细化网格会增加 5% 到 35% 的误差范数。定性地看，这个结果与我们发现的全局误差由粗网格分辨率所控制是一致的。C11 对使用静态准均匀网格和使用动态调整网格的 SWTC5 做了评价，这使得我们很难对其结果进行比较。我们也注意到只比较均匀网格误差时，我们的结果与 C11 结果相一致：对分辨率约为 240km 的网格，我们得到的相对全局误差约为  $1.0 \times 10^{-3}$ ，而 C11 的相对全局误差为  $5.0 \times 10^{-3}$ 。

上述关于 W09，S08 和 C11 的比较关注了每个方法在浅水实验案例中减小全局误差的能力。在这里，我们获得的结果分别与前人发表的结果进行了比较，同时，我们认为全局误差只说明一部分问题。类似于气候模拟这样的长时期并且有意义的解，对数值模式守恒量的敏感性远远高于对绝对精度的敏感性。对流体和示踪物的质量，W09，S08 和 C11 里的有限体积方法都是保持守恒的。S08 的谱元方法中的质量和示踪物并不守恒。对位涡、位涡拟能和总能量，W09，S08 和 C11 所有方法都不能正式保证其守恒或有界。另外，在 W09，S08 和 C11 中没有任何证据，能与我们的图 5 和图 6 相比而更好地说明这些方法关于守恒的特征。从这个方面来说，在 T09 和 R10 中的结果，以及本文评估的数值方法是有独到优势的。

## 7. 讨论

通过一组浅水系统个例，本文评价了 T09 和 R10 中的数值方法应用到可变分辨率网格的结果。我们生成了一组网格格距从准均匀（X1）到高度变化（X16）的可变分辨率网格（见图 1 和表 1），网格单元数目从 2562 个到 655362 个。

T09 中的分析意味着这里评估的数值方法，即使在可变分辨率网格下也能支持地转平衡。由于 SWTC2 有一系列关于精确非线性地转平衡的初始条件，它给 T09 分析的评价提供了一个很好的方法。我们发现不管网格如何变化，地转平衡在数值模拟中一直是可维持的。

R10 中的分析指出，一个数值方法应该在可变分辨率网格上维持所有的守恒性质。我们使用 SWTC5 及其在  $t=0$  时刻很大的瞬间强迫来测量质量、能量、位涡和位涡拟能的守恒。我们发现质量和位涡都在机器精度内守恒，归一化后的总有效能量在 15 天积分后的变动不到  $1.0 \times 10^{-8}$ 。通过测量全球平均动能假源加倍所需要的时间，我们评价了从非线性科氏力产生的能量假源和动能、位能之间的转换。与使用准均匀网格的 R10 结果相一致的，我们发现不管网格分辨率如何变化，动能加倍的时间都在  $10^4$  年时间尺度。

我们的数值方法使用了由 Sadourny and Basdevant (1985)开发、在 R10 扩展了的预期位涡方法。这个数值技术允许在动能不耗散的情况下有适量的位涡拟能耗散。SWTC5 模拟的全球平均位涡拟能变化对 X1 和 X16 网格分别为  $10^{-4}$  和  $10^{-2.5}$ 。在一部分模拟中 (X1 和 X2)，全球平均位涡拟能随时间减小，而在其他一些模拟中 (X8 和 X16)，全球平均位涡拟能随时间增加。我们对所有模拟都用了相同的参数  $\theta=dt/2$  (见 Sadourny and Basdevant (1985) 方程 8)。这个参数是随意选的，现在想起来并没有多少理由这样做。我们已经确信，选择不同的  $\theta$  会使这里任意一个模拟的全球平均位涡拟能值单调递减。我们并没打算对  $\theta$  进行特别的调试，我们计划在将来的工作中，用 Q. Chen et al. (2011) 开发的有尺度依赖性的预期位涡方法。

SWTC5 的收敛率相对于粗网格分辨率大约为 1.5 (见图 7)。无论最大最小分辨率的比值是多少，这个收敛率对本文中的所有网格都是一致的，它还与 T10 使用准均匀网格所发现的收敛率相合。SWTC2 的收敛率并不是均匀的。最小分辨率区格距大于 100km 的网格收敛率相对于粗网格分辨率约为 1.9 (见图 8)，最小分辨率区格距小于 100km 的网格收敛率随着最小分辨率的减小而减小。我们试图分析网格质量，以及误差范数计算方法，和算法本身，来确认这个缺点的原因。我们对这个收敛率减小的现象仍不清楚，并将继续探索其原因。

我们还仔细对比了本文的结果与 W09, S08, C11 的结果，并发现本文所证明的守恒性质并未出现在别的结果中。这样看来，第 5 节给出的结果很值得关注。通过计算 SWTC2 和 SWTC5 的全球归一化  $L_2$  误差范数，我们发现这些误差范数比其他工作所发现的结果范围内，因此我们觉得我们的结果是意义的。

我们发现粗网格区域的网格分辨率是控制结果误差的主要因素。如图 7 和图 8 分别对 SWTC5 和 SWTC2 的显示，几乎所有的全球  $L_2$  误差范数变化都能由粗网格分辨率来解释。这并不是一件奇怪的事，因为为了减小结果误差，格点细化只有在当区域内一个地方的解有较大偏差结构而另一个地方的解需要相对较小偏差结构的时候才是最有利的。在这种情况下，最好的办法是通过恰当的重新排列固定数目网格单元来减小结果误差。这个情况在 SWTC2 中并不存在，而至少其数值方法在 SWTC5 中也并不够明显。因此，结果误差在粗网格区域随着网格变粗而增加的程度超过了其随着细网格区域网格细化的减少。粗网格区域增加的误差通过平流和波动向包括细网格区域的其它区域传播。

幸运的是，我们探索网格细化的动机并不是为了减小结果误差，而是使用多分辨率网格使得云和大洋涡旋之类的现象能在我们感兴趣的特定区域分辨出来。从这方面来说，图 7 和图 8 是很有前景的。这两幅图显示，我们能通过确定可接受的精确度水平，来决定粗网格区域的分辨率，有了这个保证，我们就可以增加感兴趣区域的分辨率以模拟新的现象，同时也不增加结果误差。在实际工作中，我们希望选择粗网格区域分辨率为典型的 IPCC 模式分辨率，而根据需要模拟的现象和可用的计算资源来选择细网格区域分辨率。尽管本文通过理想模式讨论而得到的这些结论并不能说是确凿的，但并没有任何理由认为，这些关于多分辨率技术的结论不能在更真实系统中应用。

我们还使用了标准正压不稳定个例来评价本文的方法。与 SWTC2 类似，这个个例给出了一个处于非线性完全地转平衡的对称纬向急流；而与之不同的是，这个急流是正压不稳定的。这个个例在  $t=0$  时刻的初始高度场给了一个小扰动来激发不稳定性。本文中的网格都不是纬向对称的。其结果是，截断误差投影可在非零纬向波数上成为了正压不稳定性的另一个激发源。如图 9 所示，截断误差在不稳定增长和位置上的影响随着网格变化而增加。对 655362 个节点的网格，我们发现 X1, X2, X4 和 X8 模拟都比较相似，而 X16 模拟相比起来更像 40962 个节点的 X1 模拟。

在方程(4)的三参数密度函数中，我们只研究了一个参数。改变  $\gamma$  所产生的一系列网格见图 1， $\gamma$  参数主要控制粗网格和细网格区域的相对网格间距。另一个需要小心分析的重要参数是  $\alpha$ ，主要是控制粗网格和细网格区域之间过渡区域的宽度。随着  $\alpha$  变小，过渡区域宽度减小，网格的变化变得更突然，局地网格的扭曲增加。这同时也增加了截断误差，降低了模拟的精确度。我们希望将来的研究能找出一个合适的网格变化率，以平衡减小  $\alpha$  与维持局地精确性之间的矛盾。

本文的目的虽然是基于全球气候模式中所遇到的问题，这个方法的应用也能扩展到气候模拟以外的领域。比如，数值天气预报所遇到的挑战，大部分都与全球气候模式相同，特别是两者都不能直接模拟系统中所有重要的时空尺度。随着大气气候模式与数值天气模式之间的距离越来越小，我们能预见到本文的多分辨率方案在这两个领域都能应用起来。

根据前面证明过的内容，我们可以初步认为，将多分辨率方案应用到气候系统模式之前需要解决的一些重要挑战，有被克服的可能。我们认为，创建一个成功的多分辨率气候系统模式需要做到两方面：在分辨率可变的网格上精确地模拟可分辨尺度的运动、以及实行有尺度依赖性的参数化。

尽管我们已经证明了我们的可变分辨率网格模拟在模式稳定性和精确性上的能力，但在一些方面还存在很多问题。例如，我们并没有研究网格过渡区域的输送和波动传播。关于示踪物质输送，我们希望最近的高阶输送方案（Skamarock and Menchaca 2010; Skamarock and Gassmann 2011; li and Xiao 2010）与最新的通量限制分析（Mittal and Skamarock 2010）能足以维持在高度可变的网格过渡区域的示踪物分布结构与幅度。

关于波动传播的内容则更难处理。本文的一个主要目的就是允许包括波动动力学在内的内容，能在部分区域更好地分辨出来。从结构上看，一部分在细网格区域可分辨的波数谱无法在粗网格分辨出来，当这部分较大波数的波传播出细网格区域时，我们需要特别注意这些波在粗网格区域是否能合理地存在。我们将这个问题视为是否能够精确模拟可分辨尺度流体的主要问题，因此将把未来的工作重点放在这个问题上。

发展大气和海洋尺度相关的参数化方案是一件更困难的工作。尽管大气中关于云（Arakawa and Schubert 1974）和海洋中关于涡旋（Gent and McWilliams 1990）的传统方法在过去的几十年内非常成功，但它们都没有跨越时间和/或空间尺度的设置（Randall et al. 2003; Gent 2011）。



局部区域范围和拉伸网格模拟都需要解决有尺度依赖性的参数化办法，即在不需要特地调试的情况下就能横跨多个时间和空间尺度的参数化方案。在拉伸网格上进行全物理的模拟能更明显的发现这个问题，因为这些缺点将都在一个单独的全球模式中体现出来。研究拉伸网格人们的一个补救措施是选用中间分辨率的准均匀网格，计算所有网格的物理参数化（Fox-Rabinovitz et al. 2006）。尽管这个补救措施的确能减少由于缺乏尺度有关的参数化偏差，它与我们的动机是矛盾的。我们关于多分辨率方案的目的，是原则上找到一个科学的方法直接解决（无参数化）特定区域的特定过程。因此，上述补救措施只是更凸显了我们将遇到的挑战。

在短期（未来 3-5 年）内，我们希望通过适当选择网格过渡区域位置、以及过渡区域有尺度依赖性的参数化闭合，使本文发展的方法产生有科学价值的结果。另外，我们也希望这个模拟方法，成为评价有尺度依赖性的参数化方案的试验平台。长远来看，这个模拟方法的成功依赖于一整套有尺度依赖性的参数化方案的发展。

本模拟方法能帮助全球气候模式和天气预报模式中的所有物理分量，包括大气、海洋、陆冰、海冰以及陆面过程。由于其潜在的广泛应用，我们把这个技术称为“跨尺度预报模式”（the Model for Prediction Across Scales, MPAS）项目。MPAS 项目的目的是开发一系列关于多尺度基本概念和算法基础的模式。这个项目已经基于原始方程开发出了本文的浅水模式和全球大气和海洋模式的雏形。因为本文评估的数值方法是大气和海洋模式原始方程的核心，我们此文的工作，可作为用多分辨率方法研究分析全球原始方程模式、和了解其优势和挑战的演习。

**致谢：** 本文的研究是由美国能源部科学办公室的生物和环境研究处通过DE-FG02-07ER64431, DE-FG02-07ER64432,和 DOE 07SCPF152资助的，美国国家大气研究中心是由美国国家基金会资助的。

**参考文献：**（见原文）