ПОКА НИЧЕГО

Лектор: Бурский Владимир Петрович.

ФРКТ МФТИ

Весна 2022

Содержание

1 Основные обозначения

- Множество натуральных чисел не включает в себя ноль: $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}^+ \equiv \mathbb{Z}_+ := \{0,\ 1,\ 3,\ \ldots\}$ — множество положительных чисел.
- Назовём *мультииндексом* вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$. Для мультииндексов, как и для прочих векторов, вводится сумма, а также абсолютное значение (это не евклидова норма!): $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
- Компактная запись оператора дифференцирования с использованием мультииндекса:

$$\partial_u^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n},\ \ u = u\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right).$$

- Если не оговорено, символы $\Omega, G \in \mathbb{R}^n$ обычно обозначают области, $x \in \Omega$ — переменные, $u = u(x)$ — функцию нескольких переменных (решения уравнения).
- $C^0(\Omega),\ C^1(\Omega),\ C^k(\Omega)$ — множества функций, непрерывных, гладких, k раз гладких на области Ω соответственно. $A(\Omega)$ — множество аналитичных на Ω функций, то есть представимых степенным рядом:

$$A(\Omega) := \left\{ f : \forall x \in \Omega\ \to\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(x - x_0\right)^k,\ x_0 \in \Omega \right\}$$

- L — линейный дифференциальный оператор. Например,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} B_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x) u$$

  — общий вид линейного дифференциального оператора второго порядка.

2 Линейные уравнения второго порядка

2.1 Классификация уравнения в двумерном случае

Рассмотрим уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned}
&a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x,y,u,\nabla u\right), \qquad (1)\\
&a,\ b,\ c \in C^2(\Omega),\ \ \Omega \subset \mathbb{R}^2,\\
&u(x,y) \in C^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Попытаемся найти замену $\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y)$, которая привела бы уравнения (по крайней мере, старшие производные) к более простому виду. Замена должна быть обратимой, поэтому по теореме о системе обратных функций потребуем в области Ω равенства

$$J \equiv \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Кроме того, потребуем $\xi\,\eta \in C^2(\Omega)$. Посмотрим, как преобразуются коэффициенты при старших производных при такой замене. Первые производные:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y.
\end{aligned}$$

Вторые производные:

$$u_{xx} = \partial_x u_x = \partial_x\left(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x\right) = u_\xi \xi_{xx} + \xi_x \frac{\partial u_\xi}{\partial x} + u_\eta \eta_{xx} + \eta_x \frac{\partial u_\eta}{\partial x}.$$

Опустим слагаемые $u_\xi \xi_{xx}$ и $u_\eta \eta_{xx}$, так как мы рассматриваем преобразования коэффициентов только при старших производных:

$$\begin{aligned}
&\xi_x\left(\xi_x \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\right) + \eta_x\left(\eta_x \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi}\right) + \cdots =\\
&= \xi_x^2 u_{\xi\xi} - \eta_x^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x u_{\xi\eta} + \cdots
\end{aligned}$$

Аналогично нетрудно получить остальные выражения:

$$\begin{aligned}
u_{yy} &= \xi_y^2 u_{\xi\xi} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y u_{\xi\eta} + \cdots,\\
u_{xy} &= \xi_x \xi_y u_{\xi\xi} + \left(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x\right) u_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Таким образом, после подстановки ξ и η в (1) получаем следующее уравнение:

$$\tilde{a}(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2\tilde{b}(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + \tilde{c}(\xi,\eta)u_{\eta\eta} = \tilde{F}\left(\xi,\eta,u,\nabla u\right).$$

Преобразованные коэффициенты равны:

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= a\cdot\xi_x^2 + 2b\cdot\xi_x\xi_y + c\cdot\xi_y^2,\\
\tilde{b} &= a\cdot\xi_x\eta_x + b\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + c\cdot\xi_y\eta_y,\\
\tilde{c} &= a\cdot\eta_x^2 + 2b\cdot\eta_x\eta_y + c\cdot\eta_y^2.
\end{aligned}$$

В случае, если коэффициенты a, b, c уравнения (1) постоянны, мы можем выбрать функции ξ и η так, чтобы приравнять коэффициенты $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$ к нулю. То же можно сделать, рассматривая уравнение в конкретной точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ и положив $a = a(x_0, y_0),\ b = \ldots$