TELECOM BUSINESS & FINANCE

Portfolio Optimization

Atelier Trading 3


Noé Vernier
Ethan Barriol
Télécom Business & Finance

14 Décembre 2023

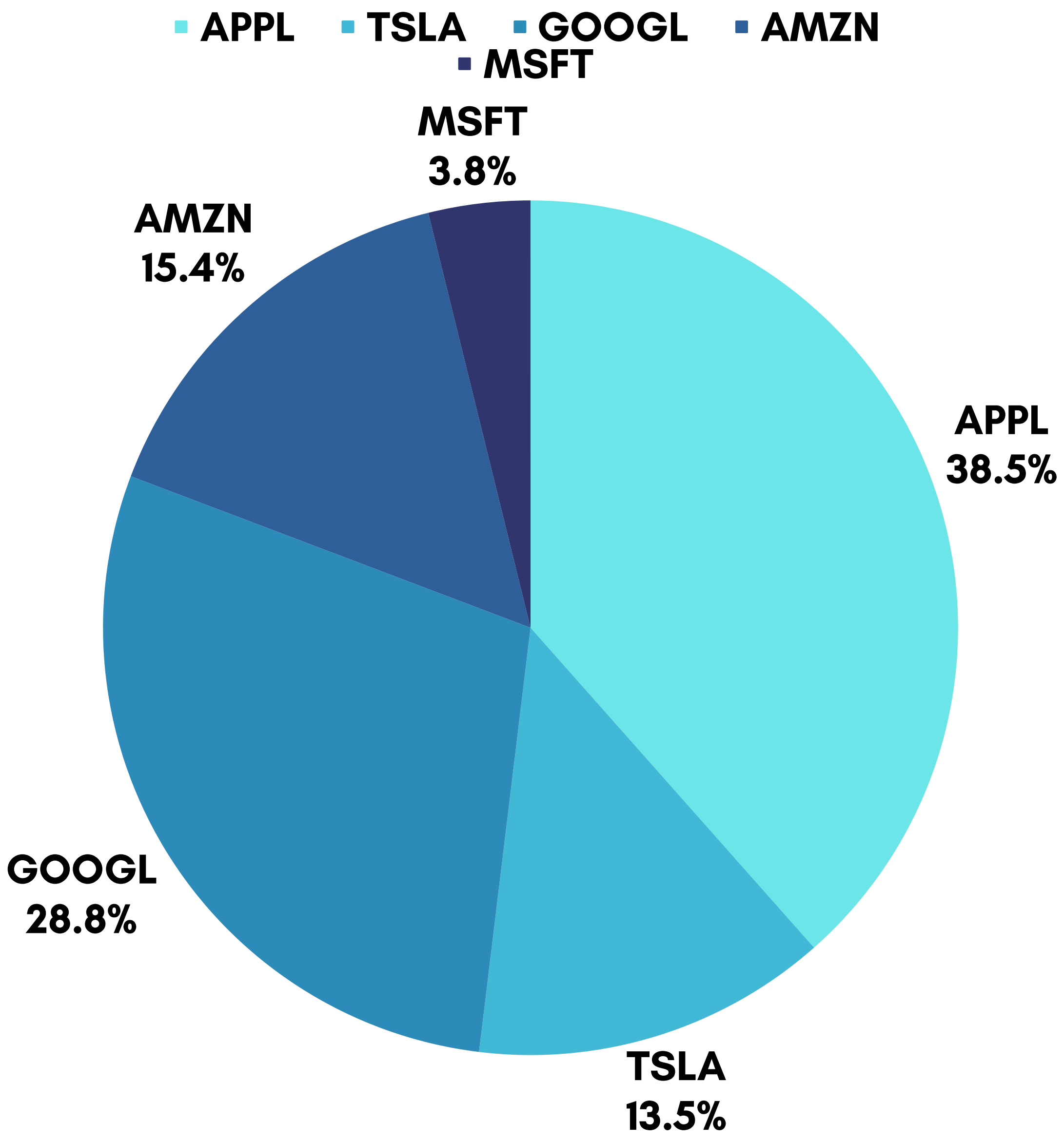
Définitions

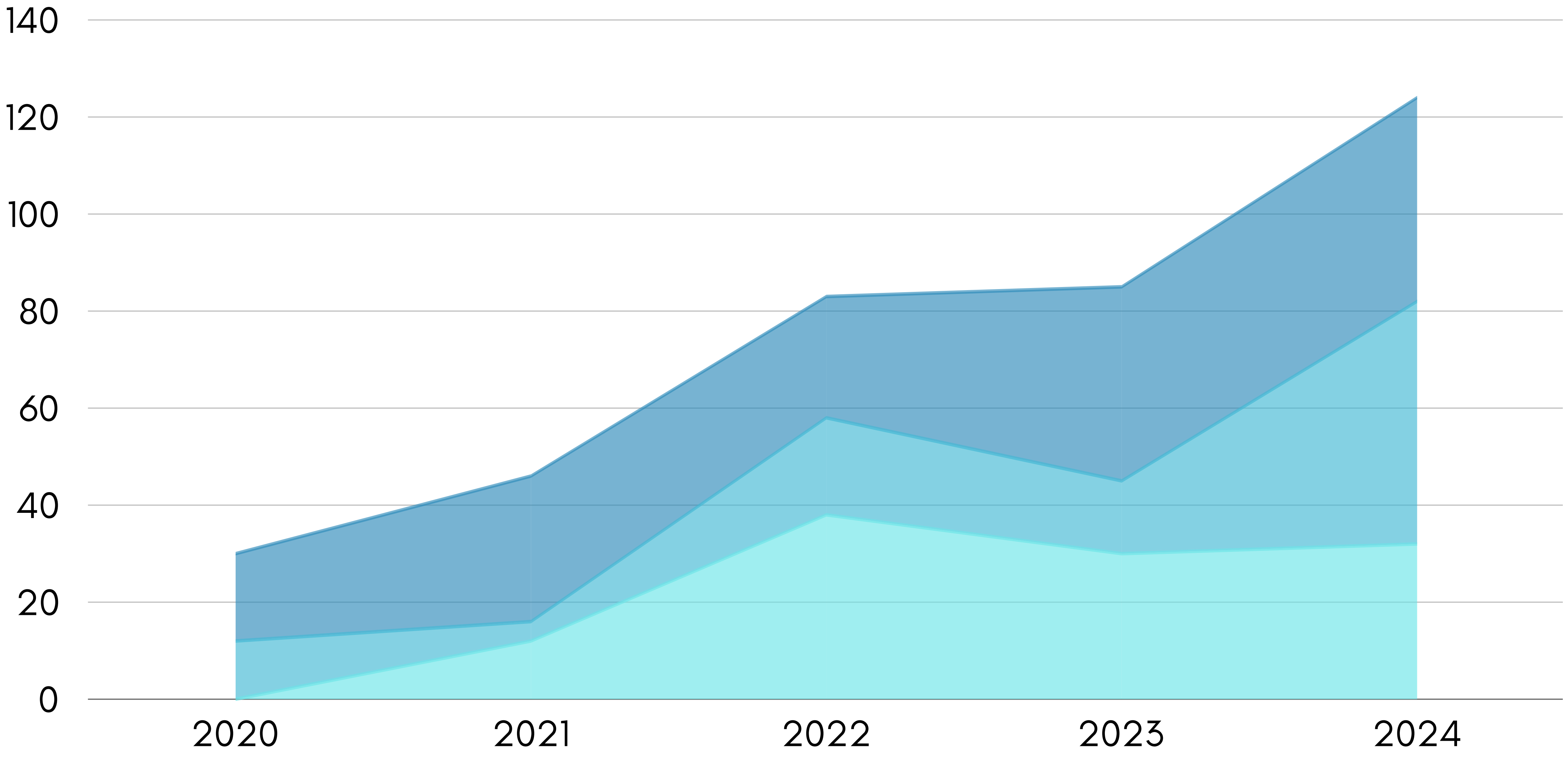
Portefeuille

Un portefeuille est une **collection** ou un **ensemble** d'actions que détient un investisseur. Ces actions peuvent appartenir à **plusieurs** entreprises différentes, réparties sur divers secteurs, dans le but de diversifier l'investissement et de **minimiser** le risque.

Définitions

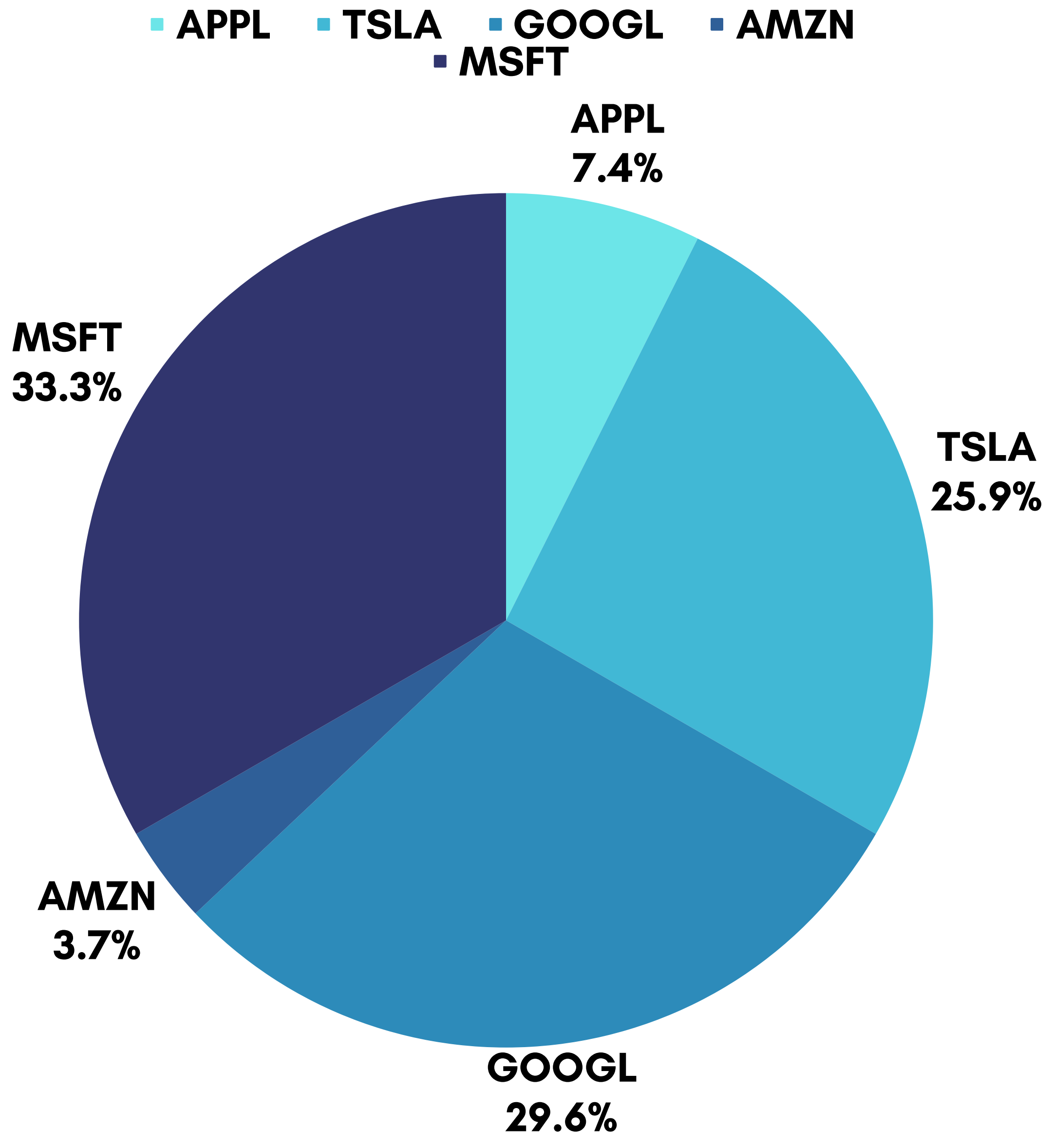
Portefeuille

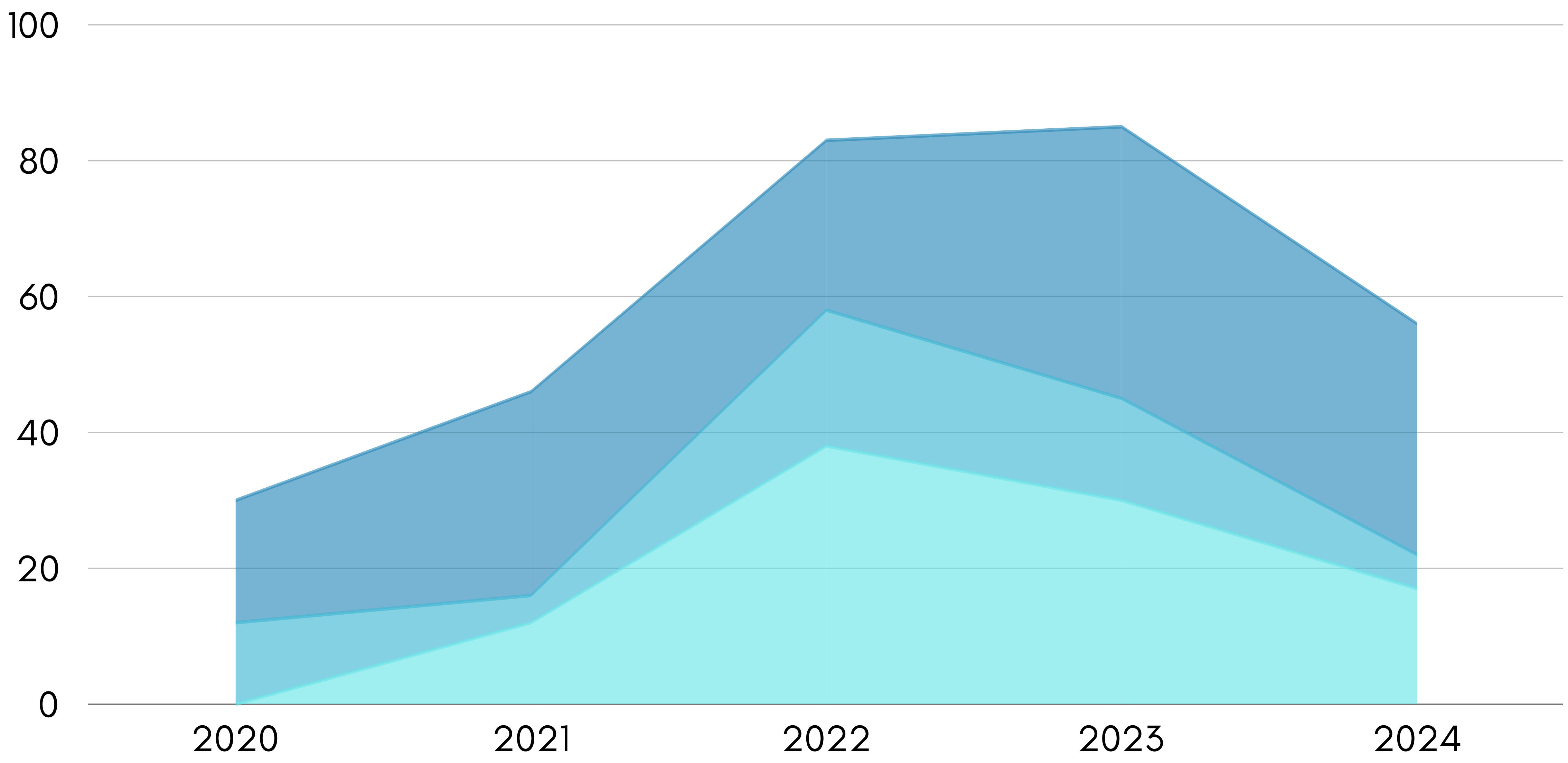




Définitions

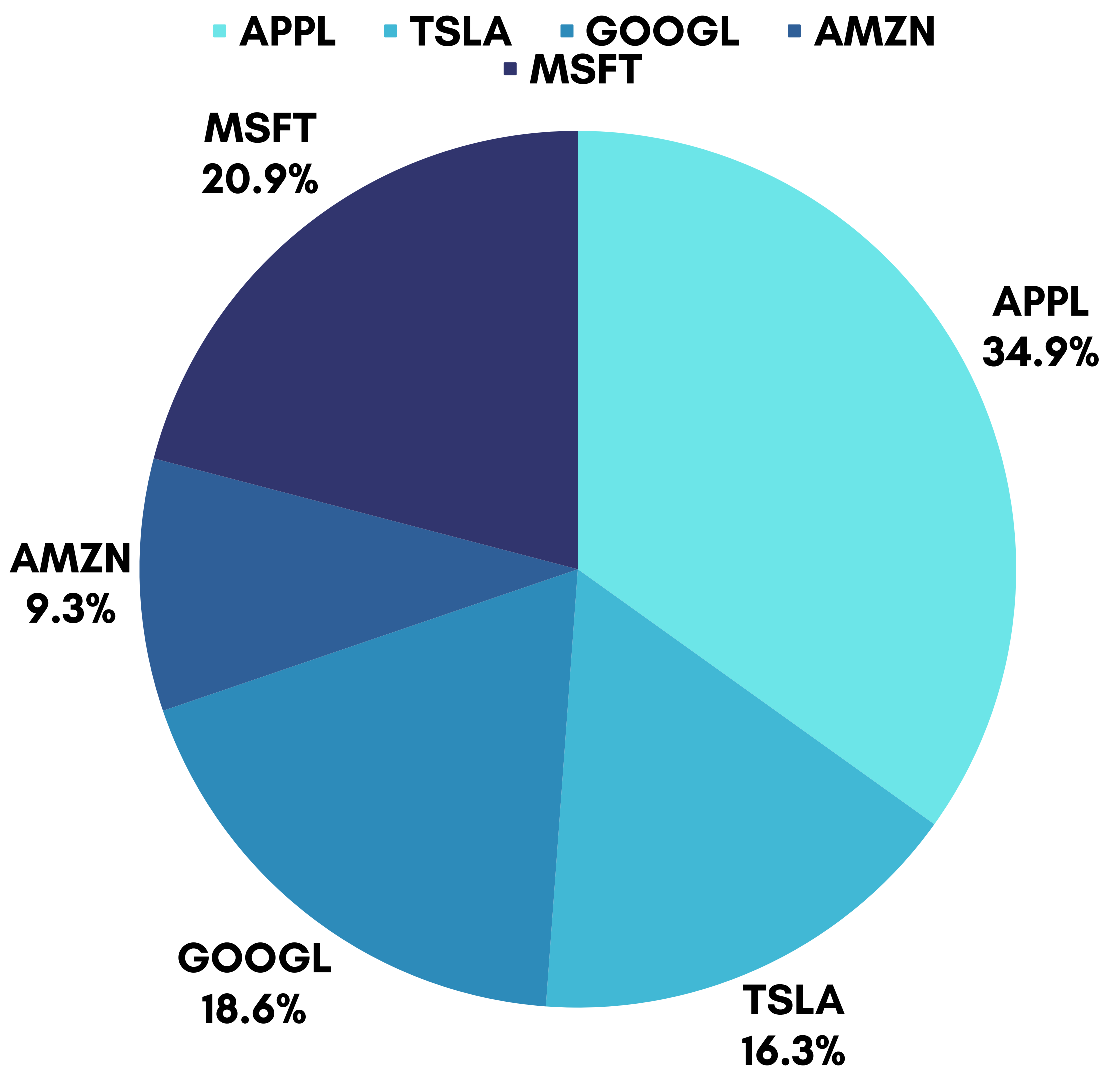
Portefeuille

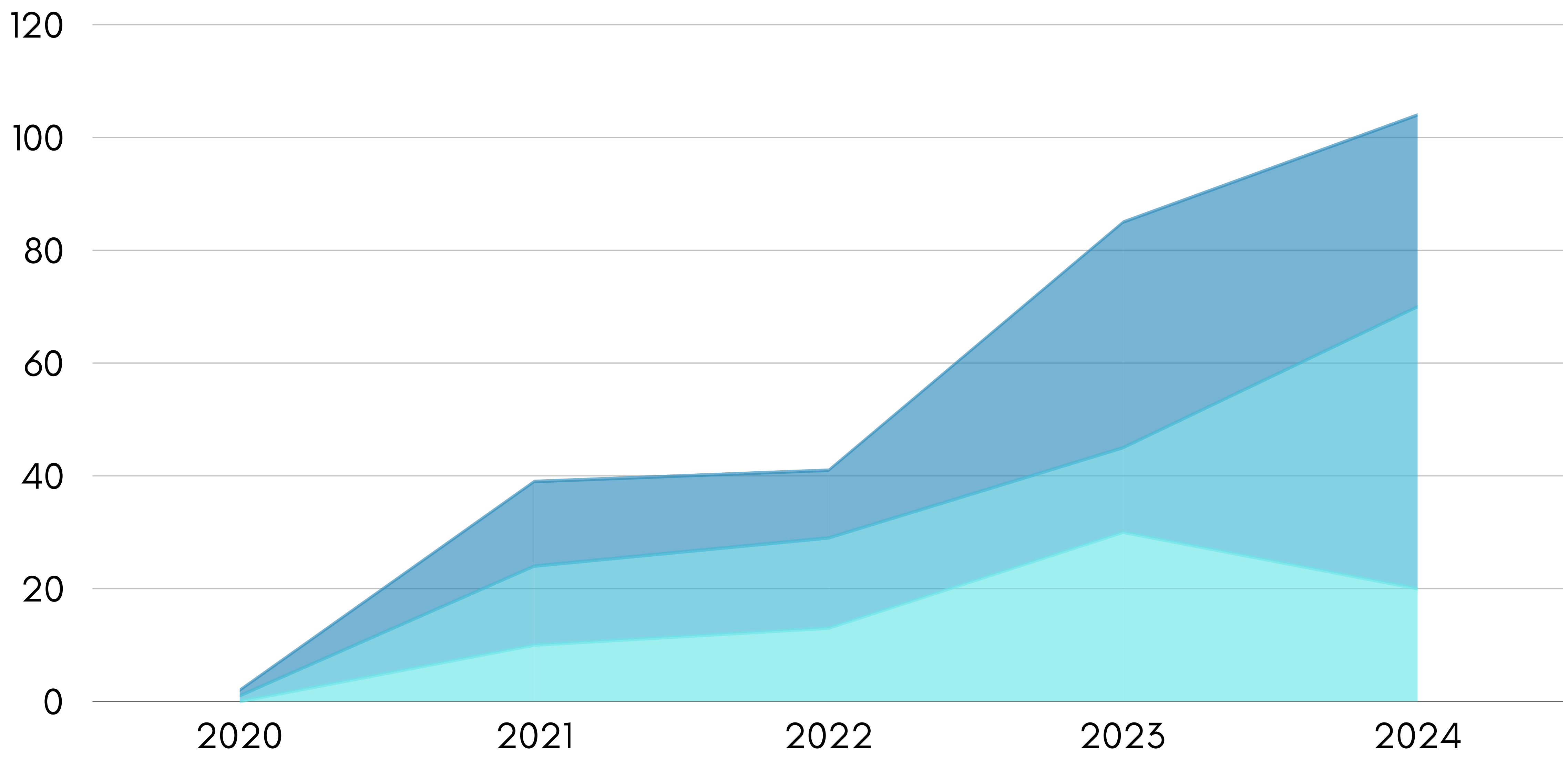




Définitions

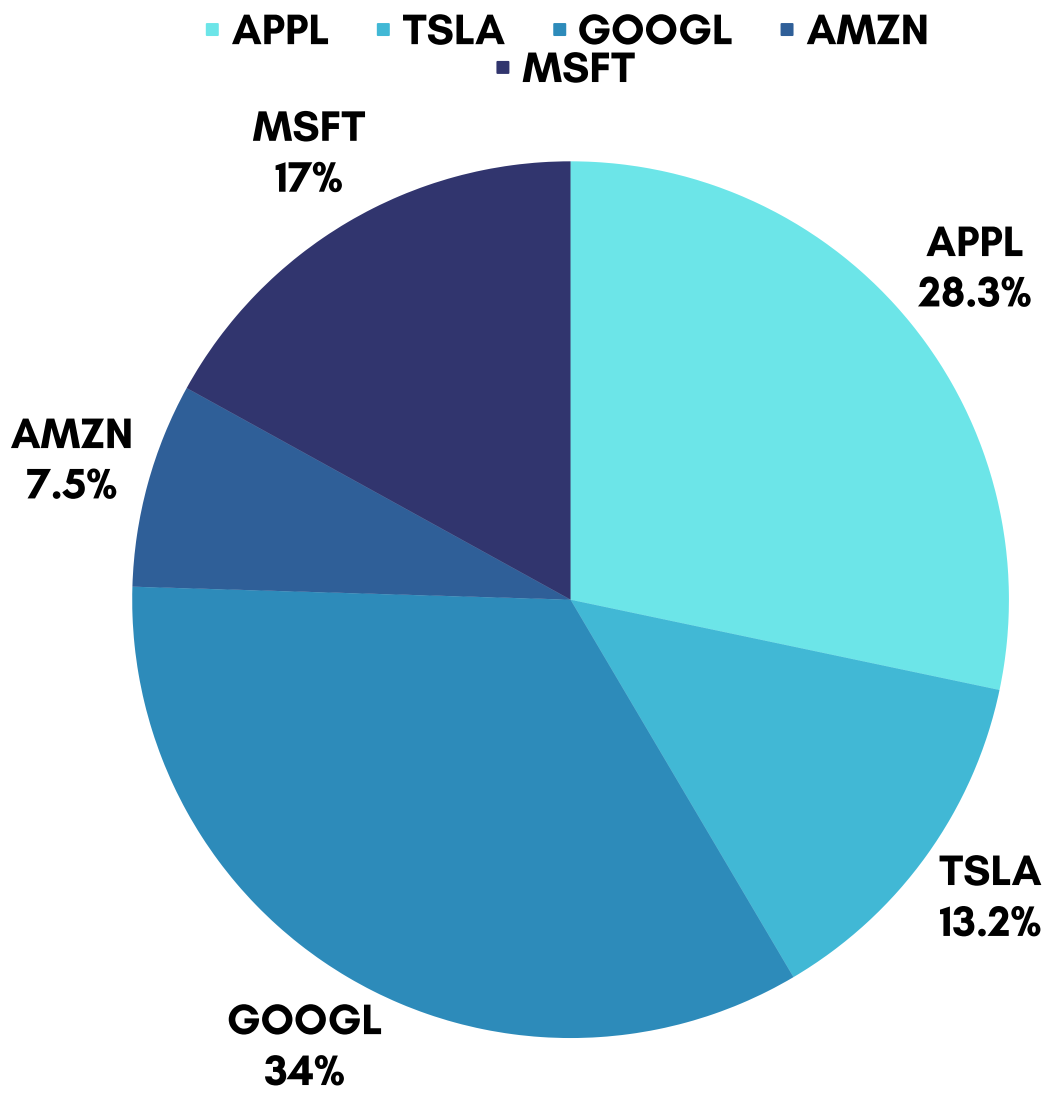
Portefeuille

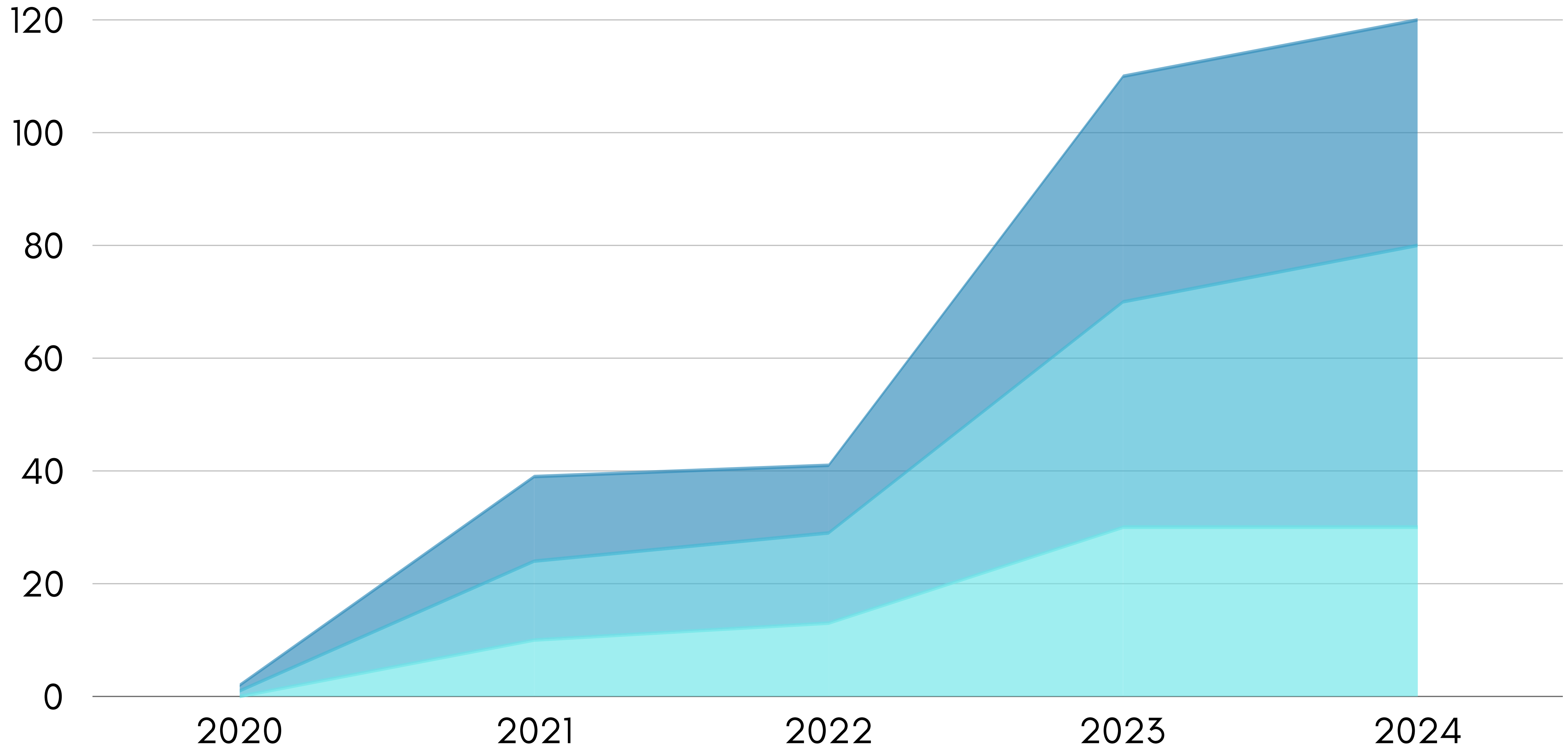




Définitions

Portefeuille





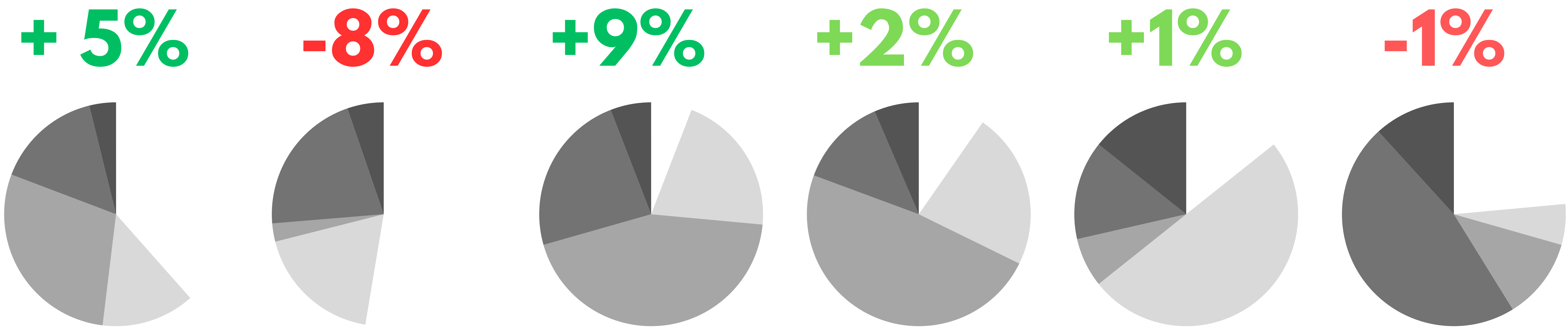
TELECOM BUSINESS & FINANCE

Objectifs

Objectif 1

L'objectif pour un investisseur est donc de trouver **QUELLES actions** acheter et en **QUELLE proportion** afin de **maximiser ses gains**

ICI, on s'intéressera seulement à optimiser les proportions pour une liste d'actions données



Objectifs

Objectif 1

L'objectif pour un investisseur est donc de trouver **QUELLES actions** acheter et en **QUELLE proportion** afin de **maximiser ses gains**

ICI, on s'intéressera seulement à optimiser les proportions pour une liste d'actions données

Objectif 2

Pour optimiser son portefeuille, un investisseur doit chercher à **maximiser ses gains** tout en **minimisant le risque**. Cette balance entre risque et rendement est au cœur de toute stratégie d'investissement réussie.

Objectifs

GAIN | **RISQUE**

Objectifs

GAIN	**RISQUE**
$\mathbb{E}[R_p]$	$\mathbb{V}[R_p]$

Définitions

Définition

On note $P_t^{(i)}$ la **variable aléatoire** répresentant le prix de l'action à l'instant t
On notera aussi $\mathbf{w}_t = (w_t^{(1)}, \ldots, w_t^{(N)})$ le vecteur représentant les proportions de chaques actions dans notre porfolio (Avec N le nombres d'assets)

Définitions

Définition

On note $P_t^{(i)}$ la **variable aléatoire** répresentant le prix de l'action à l'instant t

On notera aussi $\mathbf{w}_t = (w_t^{(1)}, \ldots, w_t^{(N)})$ le vecteur représentant les proportions de chaques actions dans notre porfolio (Avec N le nombres d'assets)

Ainsi la valeur P_t de notre portefeuille à l'instant t est définie ainsi :

$$P_t = \sum_{k=1}^{N} w_t^{(k)} P_t^{(k)} = \begin{bmatrix} w_t^{(1)} & \ldots & w_t^{(N)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_t^{(1)} \\ \vdots \\ P_t^{(N)} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_t \cdot \mathbf{P}_t$$

Définitions

Définition

Nous ne nous intéressons pas ici aux **prix** de notre portefeuille, mais plutôt à son **rendement**. On définit ainsi le rendement R_t entre l'instant t et $t-1$

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

On divise par P_{t-1} pour exprimer le changement de prix en pourcentage de la valeur initiale

Problème

Problème d'optimisation

Comme énoncé précédemment le but d'un investisseur et de **maximiser** son gain tout en **minisant** son risque

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}} \quad & \mathbb{E}[R_t] \\ \text{sous contrainte} \quad & \mathbb{V}[R_t] < \sigma_{max}^2 \end{aligned}$$

Ici, σ_{max} est le risque maximal que l'investisseur est prêt à prendre

On suppose ici $\forall t : \mathbf{w} = \mathbf{w}_t$

Comment calculer $\mathbb{E}\left[R_t\right]$ et $\mathbb{V}\left[R_t\right]$?

Calculs

Calcul

On rappel que $R_t = \mathbf{w} \cdot \mathbf{R}_t$ ainsi :

$$\mathbb{E}[R_t] = \mathbf{w} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{R}_t] = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbb{E}[R_t^{(i)}]$$

$$\mathbb{V}[R_t] = \mathbf{w}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{w}$$

Avec Σ la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\mathbf{R}_t$

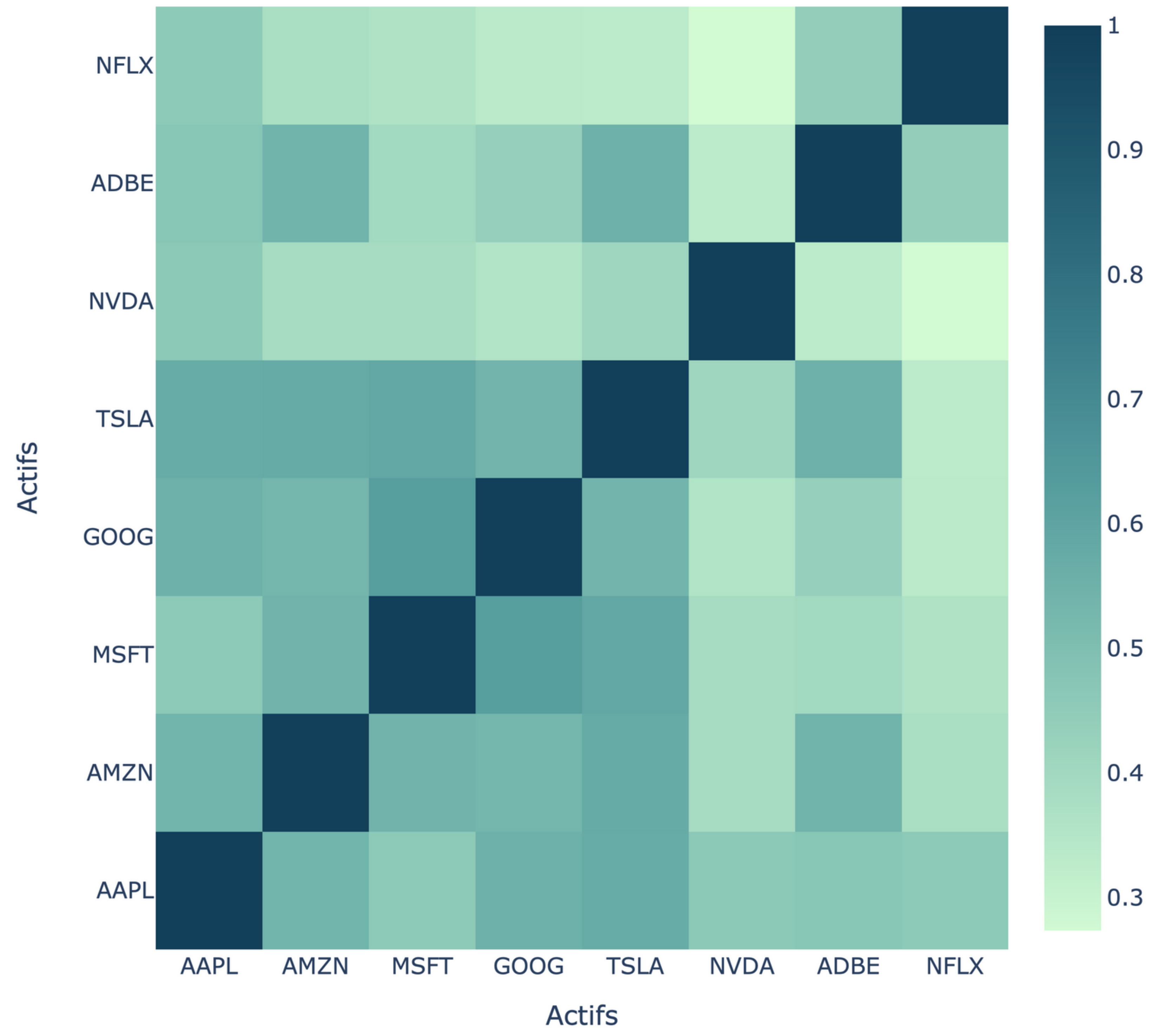
Calculs

Calcul

Avec Σ la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\mathbf{R}_t$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbb{V}[R_t^{(1)}] & Cov[R_t^{(1)}, R_t^{(2)}] & \cdots & Cov[R_t^{(1)}, R_t^{(n)}] \\ Cov[R_t^{(2)}, R_t^{(1)}] & \mathbb{V}[R_t^{(2)}] & \cdots & Cov[R_t^{(2)}, R_t^{(n)}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[R_t^{(n)}, R_t^{(1)}] & Cov[R_t^{(n)}, R_t^{(2)}] & \cdots & \mathbb{V}[R_t^{(n)}] \end{bmatrix}$$

Matrice de corrélation



En notant $\mathbf{C}$ la matrice de corrélation on a :

$$\mathbf{C}_{i,j} = \frac{\mathbf{\Sigma}_{i,j}}{\sqrt{\mathbf{\Sigma}_{i,i}\mathbf{\Sigma}_{j,j}}}$$

Calculs

Calcul

En somme nous devons calculer (pour résoudre le problème) :

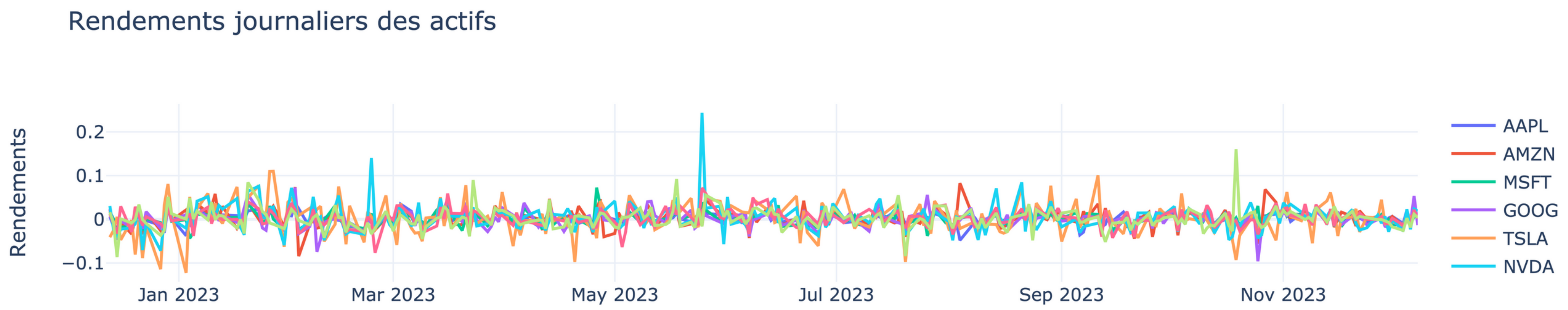
$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!] : \mathbb{E}\left[R_t^{(i)}\right] \text{ et } \mathbb{V}\left[R_t^{(i)}\right] \text{ et } Cov\left[R_t^{(i)}, R_t^{(j)}\right]$$

En pratique, comment fait-on ?

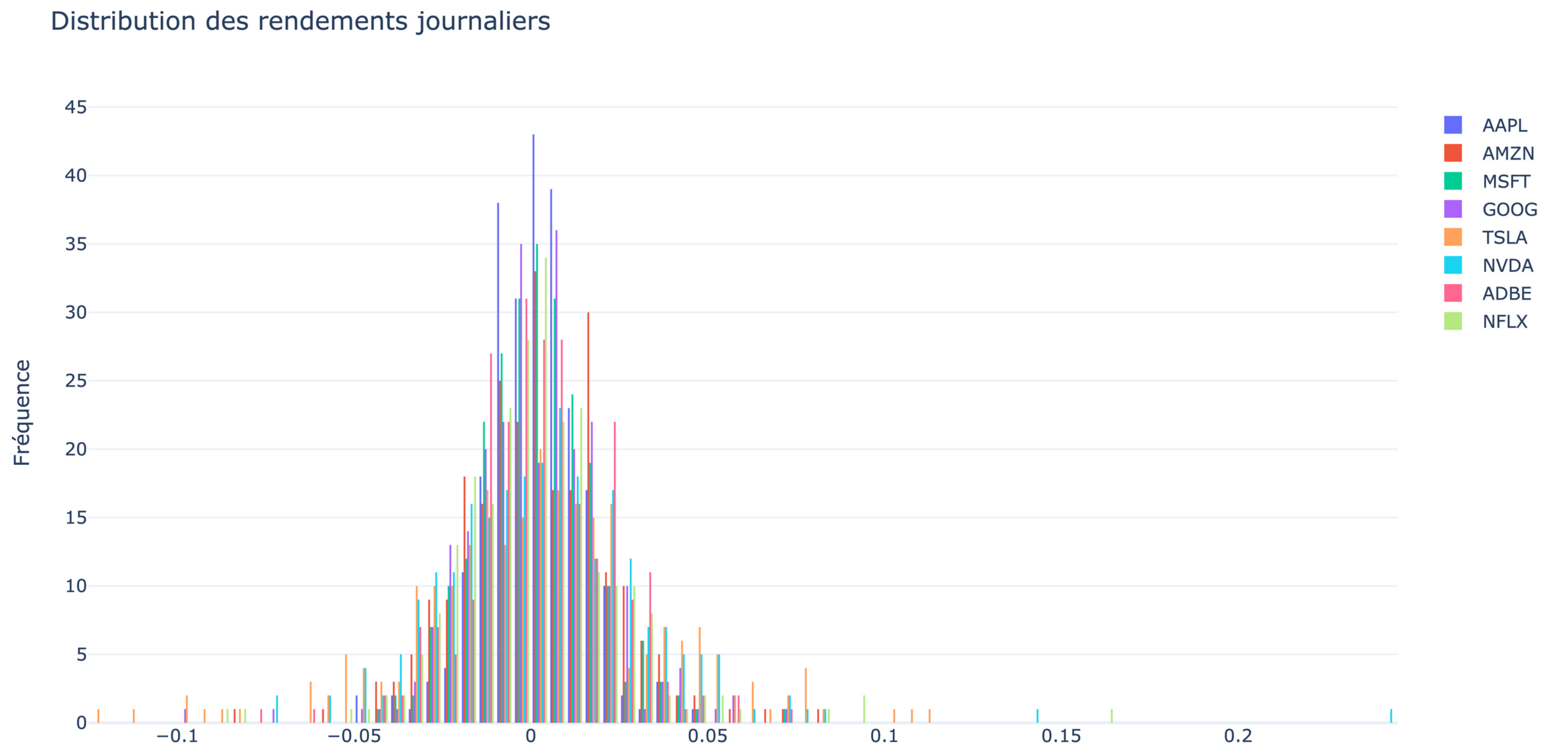
Calculs Empiriques

Remarque

En réalité, si nous avions un accès direct aux valeurs exactes de $\mathbf{R}_t$, nous serions tous extrêmement riches à l'heure actuelle. Il nous faut donc estimer ces valeurs :



Calculs Empiriques



Calculs Empiriques

Calcul Empirique

En examinant les **données passées** sur une période de temps T

$$\mathbb{E}\left[R_t^{(i)}\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=t-T+1}^{t} r_k^{(i)}$$

Calculs Empiriques

Calcul Empirique

En examinant les **données passées** sur une période de temps T

$$\mathbb{V}\left[R_t^{(i)}\right] = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1-T+1}^{t} \left(r_k^{(i)} - \widehat{r^{(i)}}\right)^2$$

Calculs Empiriques

Calcul Empirique

En examinant les **données passées** sur une période de temps T

$$Cov\left[R_t^{(i)}, R_t^{(j)}\right] = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1-T+1}^{t} \sum_{p=1-T+1}^{t} (r_k^{(i)} - \widehat{r^{(i)}})(r_p^{(j)} - \widehat{r^{(j)}})$$

Comment résoudre le problème ?

Résolution du problème

Résolution

Pour rappel le problème qu'on veut résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}} \quad & \mathbb{E}[R_t] \\ \text{sous contrainte} \quad & \mathbb{V}[R_t] < \sigma_{max}^2 \end{aligned}$$

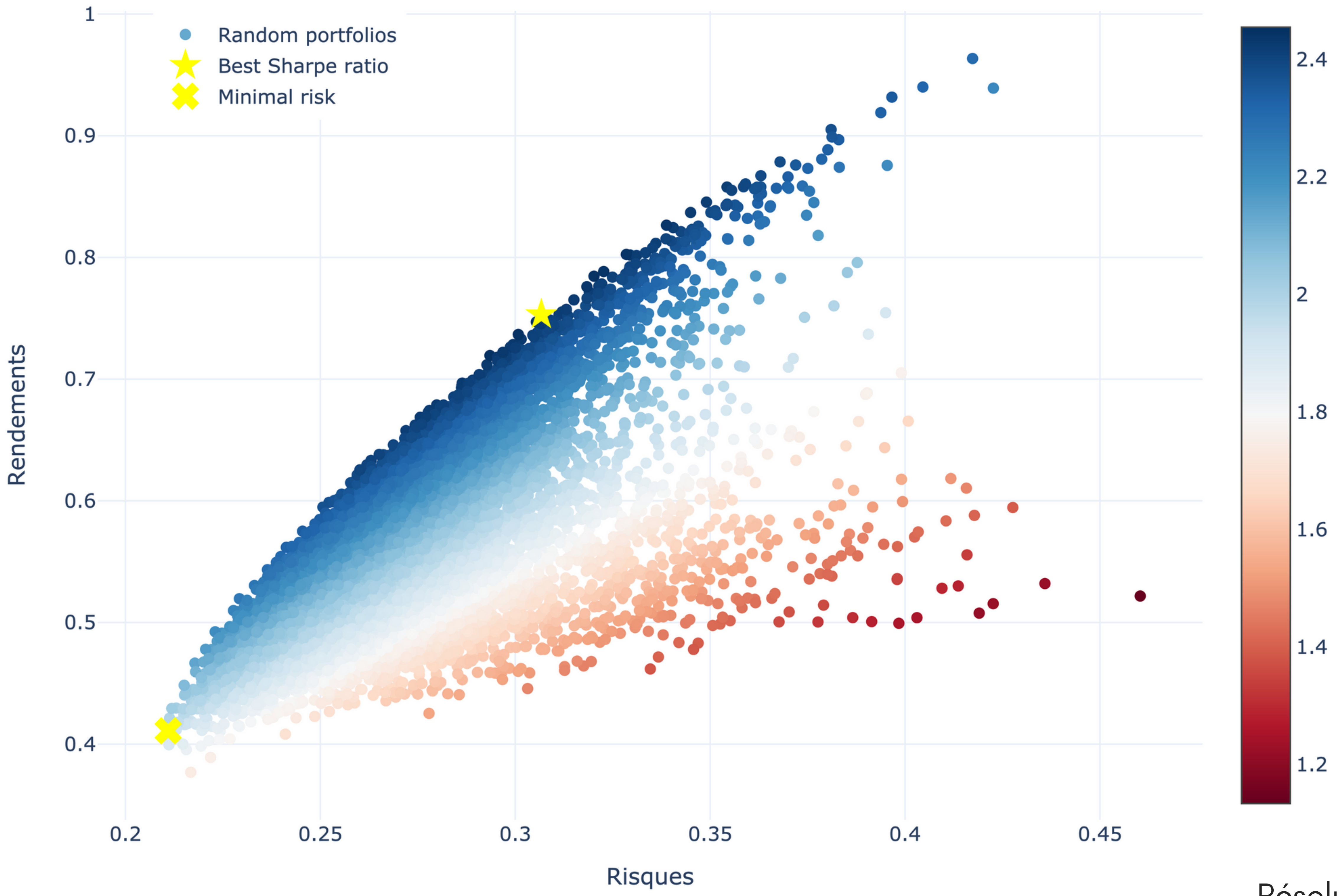
Résolution du problème

Définition Méthode de Monte-Carlo

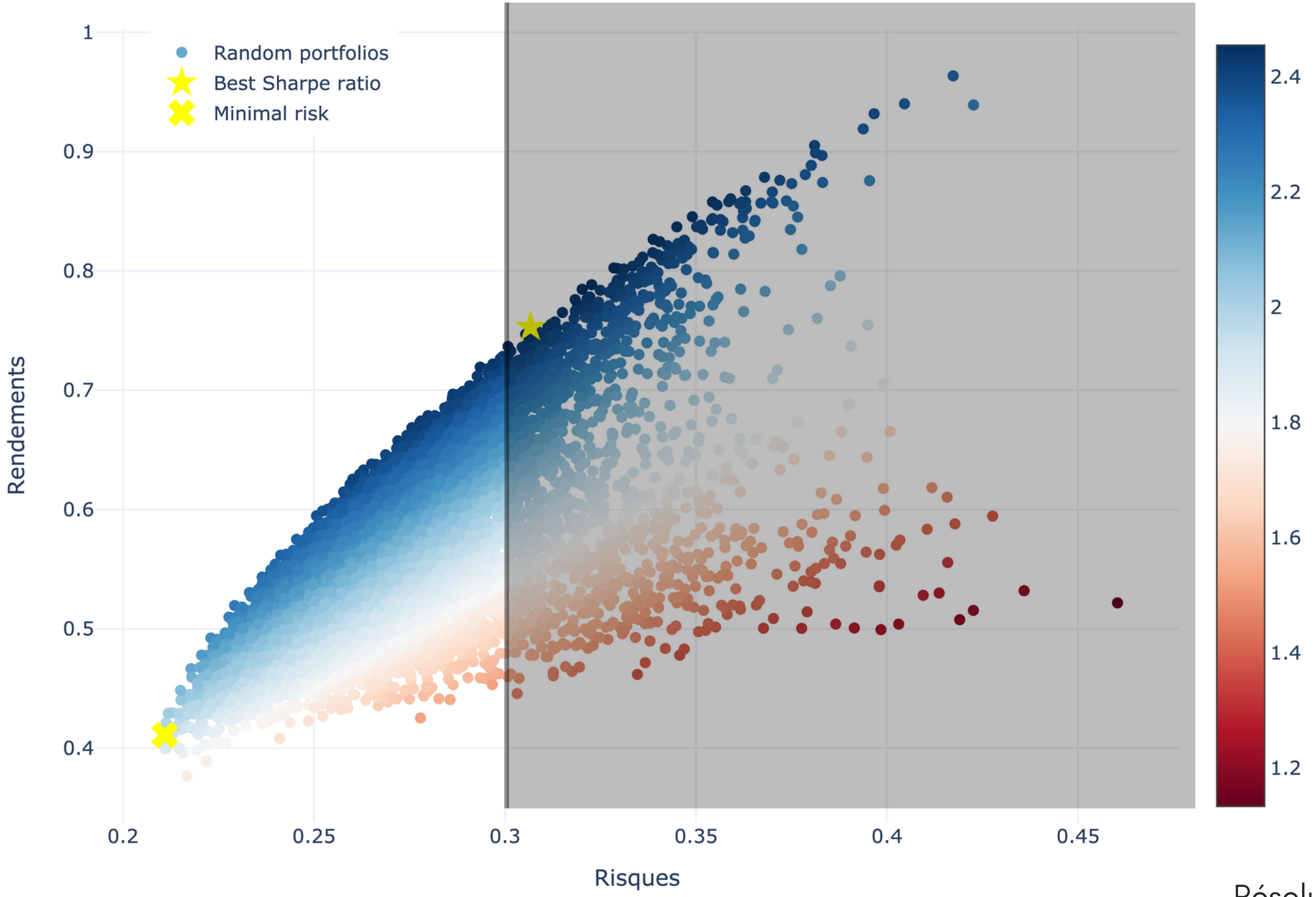
Une méthode de **Monte-Carlo**, ou méthode Monte-Carlo, est une méthode **algorithmique** visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des **procédés aléatoires**, c'est-à-dire des techniques probabilistes.

Source : Wikipedia

Résolution du problème

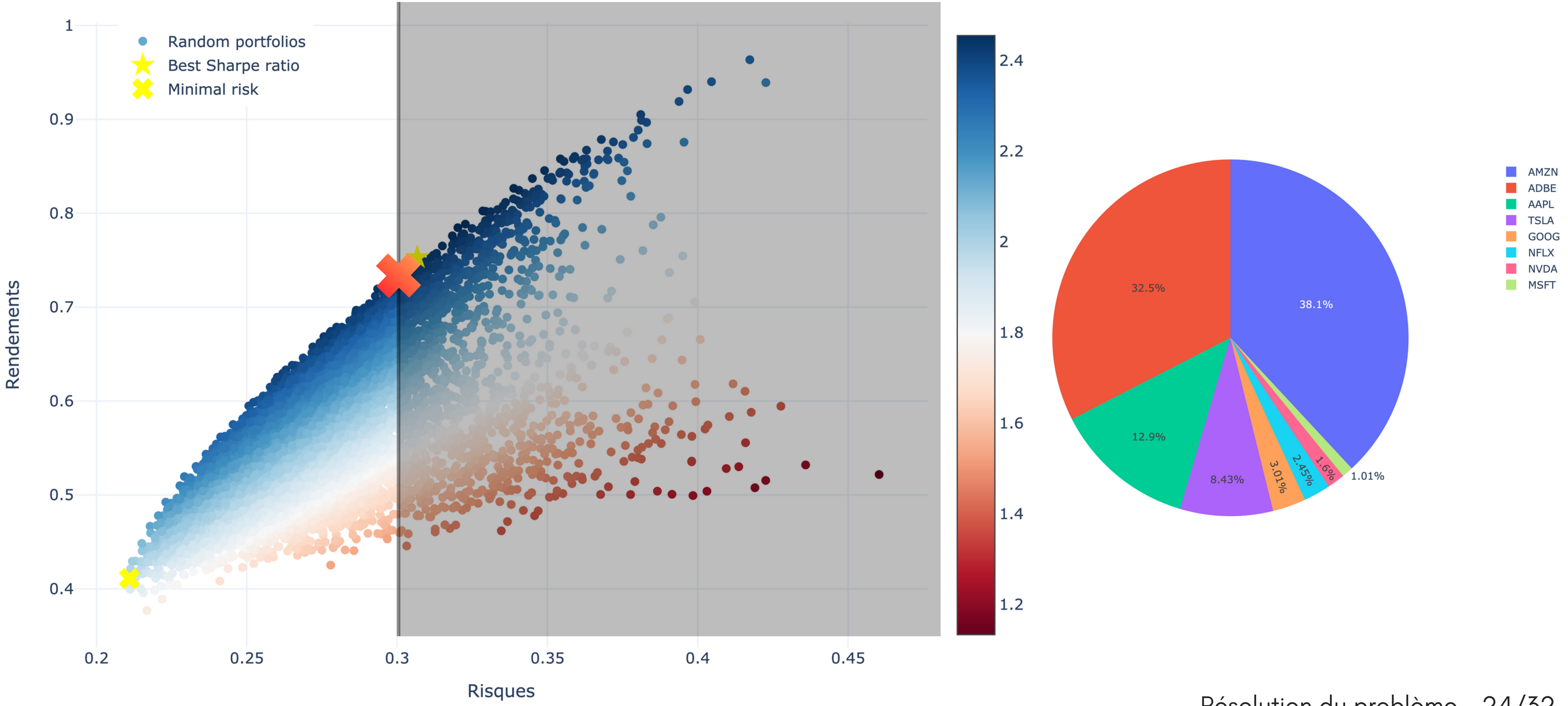


Résolution du problème



BUSINESS & FINANCE

Résolution du problème



Backtest d’une stratégie

Backtest d’une stratégie

Définition Backtest

Le **backtest** en trading est une évaluation des **performances** d'une stratégie en appliquant ses règles à des **données historiques** pour estimer comment elle aurait fonctionné par le **passé**.

Backtest d’une stratégie

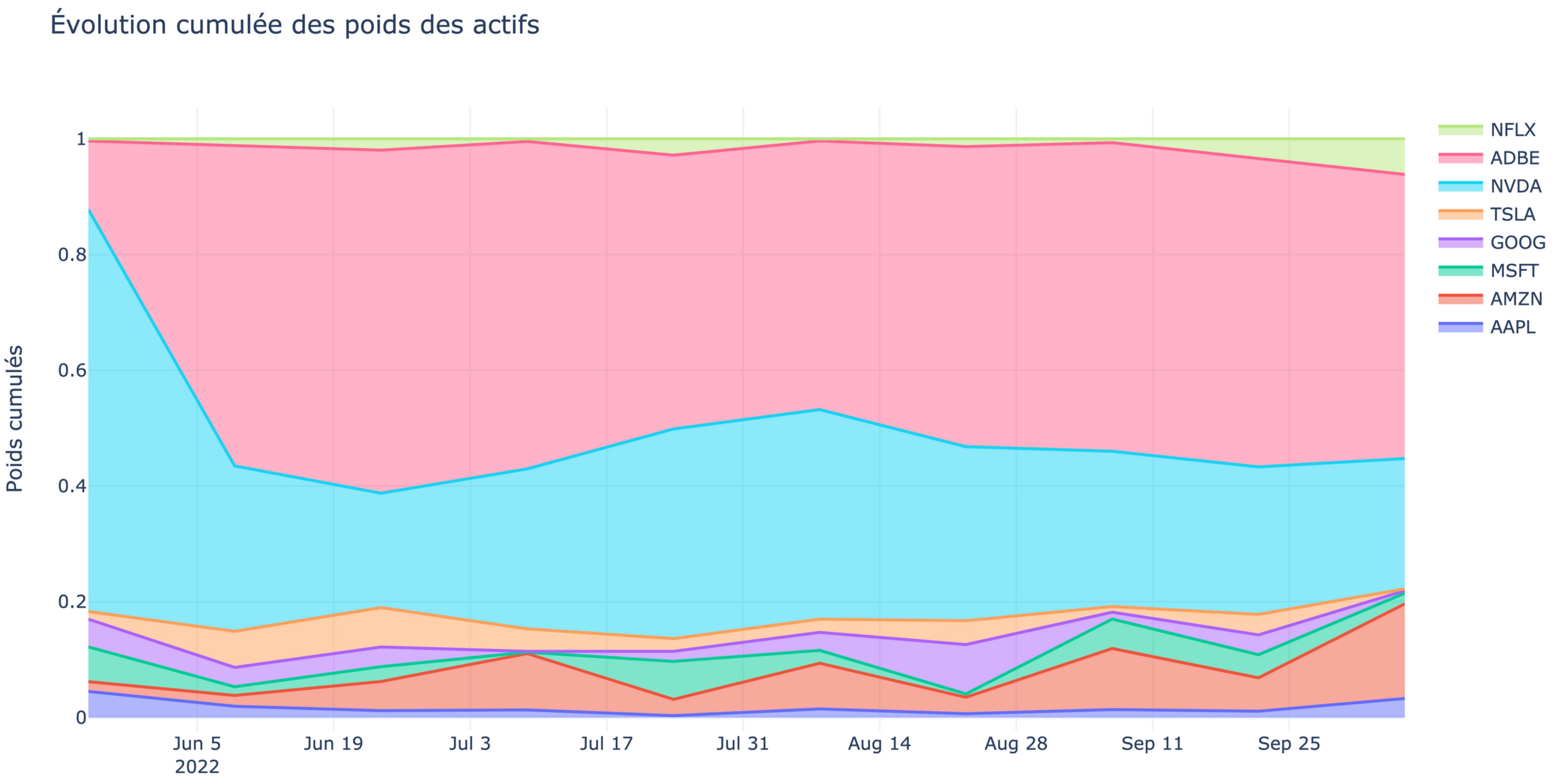
La Stratégie

Définissons une stratégie d'investissement simple :

- Tout les **N** jours, nous allons rééquilibrer notre portefeuille en choisissant les proportions **w** qui maximisent le rendement du portefeuille pour un niveau de risque donné. En regardant les données du passé.
- Nous allons investir initialement **S** dans notre portefeuille.

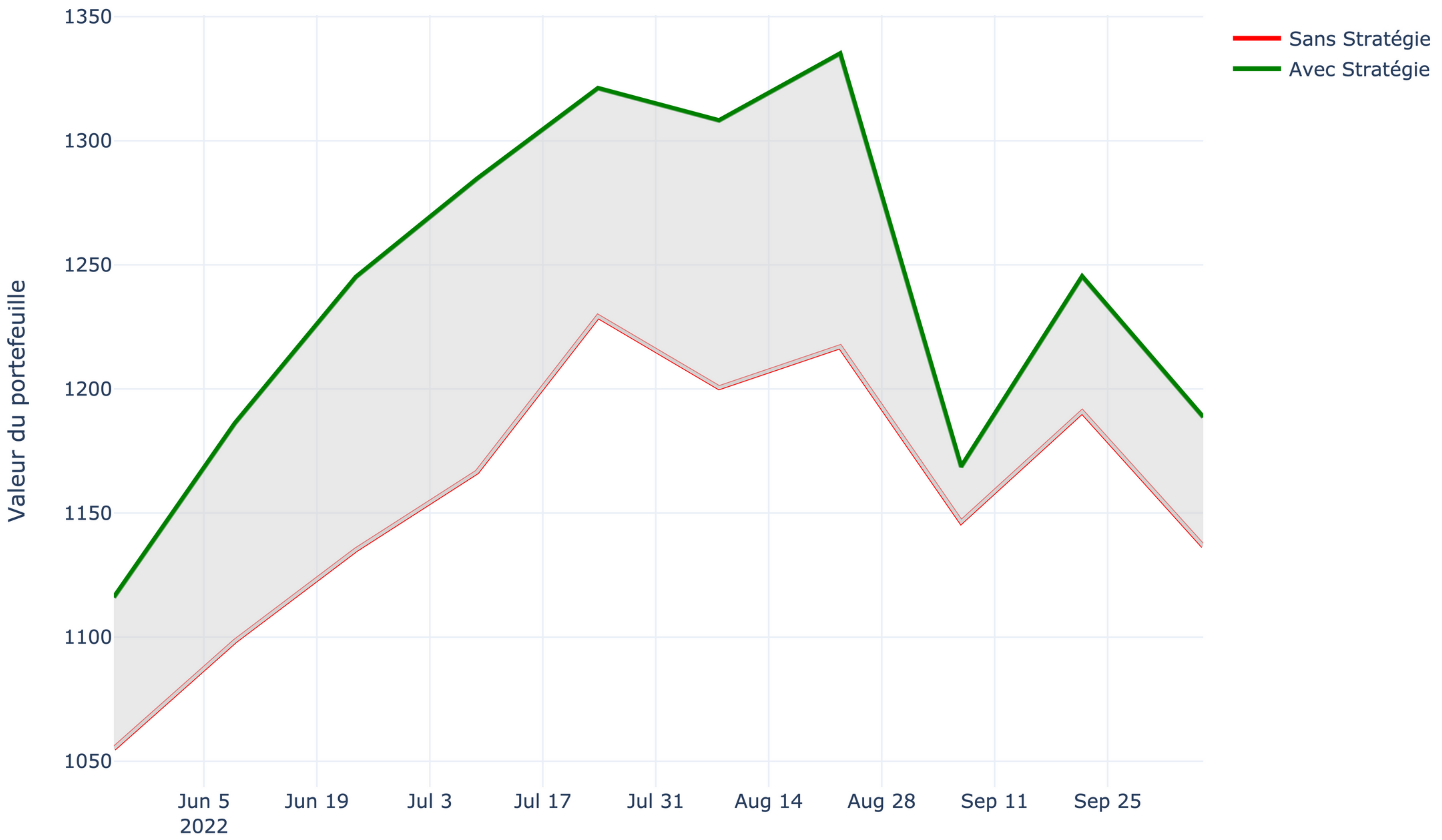
Nous allons maintenant tester notre stratégie d'investissement sur une période de 5 ans.

Backtest d'une stratégie



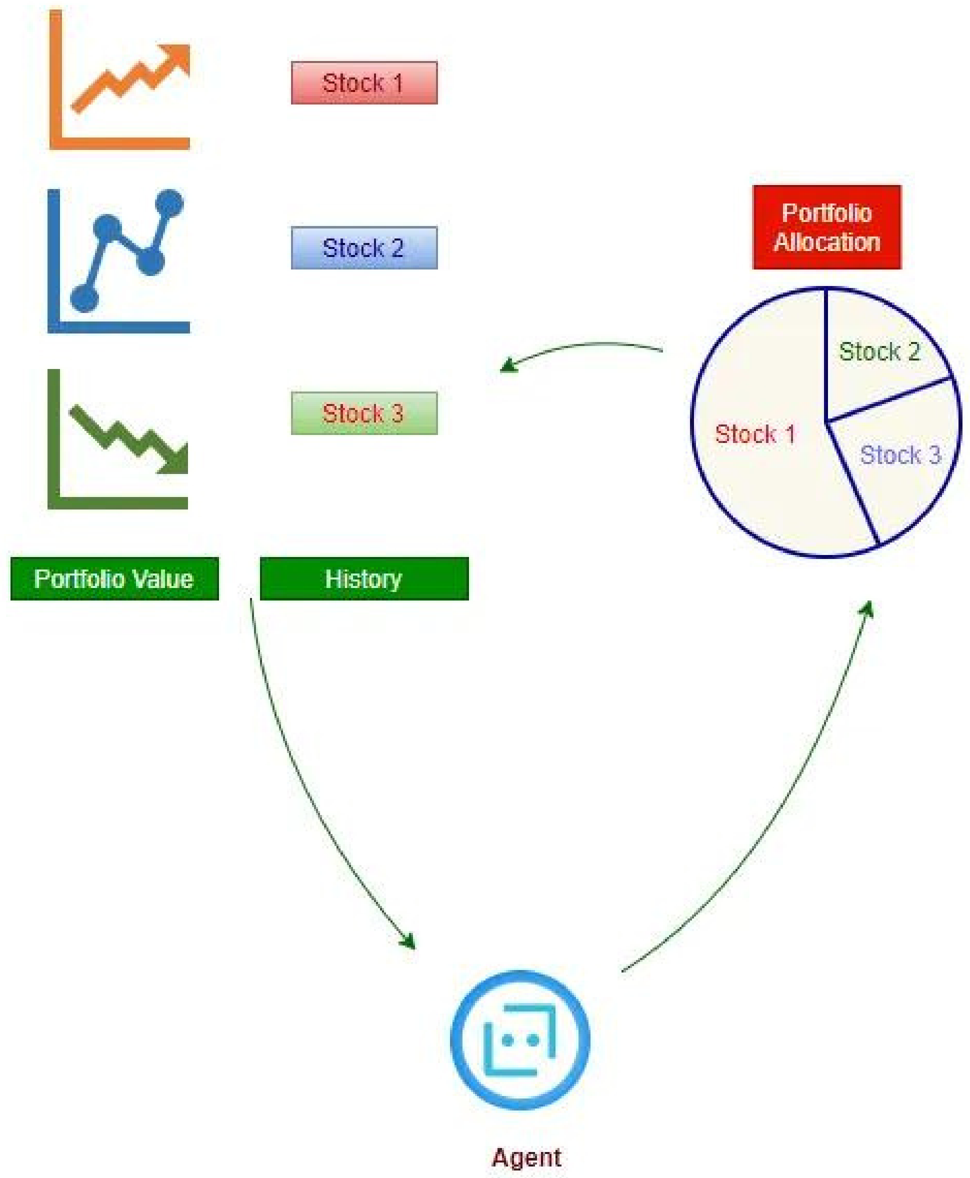
TELECOM BUSINESS & FINANCE

Backtest d'une stratégie



Pour aller plus loin...

Reinforcement Learning



Noé Vernier

Ethan Barriol

Télécom Business & Finance

Merci pour votre attention !