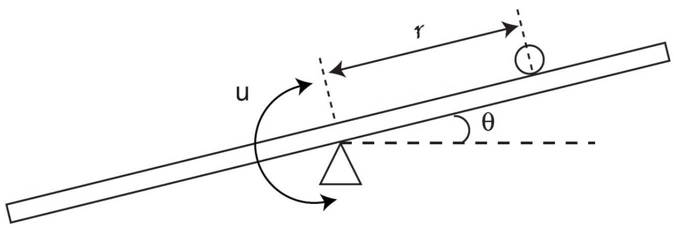
Travaux Pratiques Matlab 3

SPEIT

http://moodle.speit.sjtu.edu.cn/

*19 avril 2018*

# La balle sur une barre




Il s'agit d'un système à deux degrés de liberté : l'angle $\theta$ que fait la barre par rapport à l'horizontale et la position $r$ de la balle qui roule sans glisser sur cette barre. Ce système est équipé d'un seul moteur. Fixé sur l'axe de rotation de la barre ce moteur délivre un couple $u$. On note $J$ le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe de rotation, $m$ la masse de la balle de rayon $R$, $J_b$ le moment d'inertie par rapport à son centre, $g$ l'accélération de la pesanteur. On souhaite concevoir un algorithme de contrôle qui, à partir des capteurs de positions $r$ et $\theta$, puisse jouer avec des balles de masses $m$, d'inerties $J_b$ et de tailles $R$ très diverses. Noter que $J_b = \sigma m R^2$ avec $\sigma$ entre 0 et 1 dépendant de la densité en fonction du rayon.

1. **Modélisation**
   (a) Montrer que l'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{J}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{J_b}{2}\left(\frac{\dot{r}}{R}\right)^2$$

   (on négligera dans l'énergie cinétique de la bille en rotation sur elle même, l'effet de la rotation de la barre $\dot{\theta}$).

   (b) Calculer l'énergie potentielle $U$ en fonction de $r$ et $\theta$. On supposera que l'axe de rotation est au niveau du centre de gravité de la barre.

   (c) Déduire de ce qui précède les équations de Lagrange suivantes :

$$(1+\sigma)\frac{d}{dt}(\dot{r}) = r\dot{\theta}^2 - g\sin\theta, \quad \frac{d}{dt}\left(\left(J + mr^2\right)\dot{\theta}\right) = -mgr\cos\theta + u$$

   (d) Avec $x = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$, montrer que le système sous-forme d'état $\frac{d}{dt}x = f(x,u)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = \dfrac{1}{1+\sigma}x_1(x_4)^2 - \dfrac{g}{1+\sigma}\sin x_3 \\ \dfrac{d}{dt}x_3 = x_4 \\ \dfrac{d}{dt}x_4 = \dfrac{1}{J+m(x_1)^2}u - \dfrac{mg}{J+m(x_1)^2}x_1\cos x_3 - \dfrac{2m}{J+m(x_1)^2}x_1x_2x_4 \end{cases} \tag{1}$$

2. **Simulation boucle ouverte.**
   (a) On utilise d'abord $u = 0$. Faire une simulation avec Simulink des équations (1). On utilisera les valeurs $m = 600$g, $R = 60$mm, $\sigma = 0.8$, $J = 0.02$ kg.m$^2$. Montrer que, sauf si le système part exactement de l'équilibre, les trajectoires divergent.
   (b) On veut démarrer à $x_1 = 1$. Quelle est la commande d'équilibre correspondante ? Appliquer cette commande dans la simulation et constater la divergence du système s'il est imparfaitement initialisé.
3. **Placement de pôles.**
   (a) Donner le point d'équilibre de (1) associé à $u = 0$. Ecrire les équations du système linéarisé. Calculer les pôles en boucle ouverte (on posera $\omega = \sqrt[4]{\frac{mg^2}{(1+\sigma)J}}$) et discuter la stabilité. Vérifier numériquement la valeur des valeurs propres avec Matlab.
   (b) Montrer que le linéaire tangent est commandable. Quelle est sa sortie de Brunovsky. Vérifier le conditionnement de la matrice de commandabilité avec Matlab.
   (c) Calculer le bouclage d'état $u = Kx$ qui place les pôles en $(-\omega, -\omega, \omega e^{\frac{3\imath\pi}{4}}, \omega e^{\frac{-3\imath\pi}{4}})$. Vérifier les valeurs propres en boucle fermée avec Matlab.
4. **Simulation boucle fermée.**
   (a) Rajouter au modèle Simulink les équations du contrôleur.
   (b) Vérifier que le point d'équilibre 0 est bien asymptotiquement stable.
   (c) Utiliser des conditions initiales loin de l'équilibre. Que constate-on sur le comportement du système ?
   (d) Tester la robustesse en simulant une incertitude des paramètres.
   (e) Rajouter du bruit sur les capteurs. Que constate-on ?
5. **Contrôle hiérarchisé.** On pose $u = \frac{J\omega}{\epsilon}(v - x_4)$ où $\epsilon$ est un petit paramètre $> 0$ (typiquement $\epsilon = 1/10$) et où $v$, le nouveau contrôle, est une consigne lentement variable de la vitesse de rotation de la barre ($|\dot{v}| \ll \omega|v|$).
   (a) Justifier l'approximation lente suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = \frac{1}{1+\sigma}x_1 v^2 - \frac{g}{1+\sigma}\sin x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 = v \end{cases} \tag{2}$$

   (b) Quel est le linéaire tangent autour de l'équilibre $v = 0$ et $x_1 = 0$. Calculer les pôles en boucle ouverte de (2).
   (c) Donner le bouclage d'état lent : $v = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ qui place les pôles en

$$(-\omega, \omega e^{\frac{3\imath\pi}{4}}, \omega e^{\frac{-3\imath\pi}{4}})$$

6. **Simulation boucle fermée hierarchisée.** Modifier le contrôleur de la précédente simulation et estimer les performances de cette commande hiérarchisée.
7. **Discussion.** Avec les questions 3c et 5c, on dispose de deux algorithmes pour stabiliser la balle autour de l'origine. Quel est l'algorithme a priori le plus à même de répondre à la question de départ (la robustesse par rapport aux types de balle) ? Quels sont aussi ses inconvénients cependant ?