

Université du Québec à Trois-Rivières  
Électricité et magnétisme  
(PHQ-1036)

Notes de cours  
de  
Louis Marchildon

Électricité et magnétisme (PHQ-1036)  
Notes de cours

Copyright © 2001 Louis Marchildon  
marchild@uqtr.quebec.ca  
<http://www.uqtr.quebec.ca/~marchild/>

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Analyse vectorielle</b>	<b>3</b>
2.1 Vecteurs . . . . .	3
2.2 Champs vectoriels . . . . .	4
2.3 Gradient, divergence et rotationnel . . . . .	4
2.4 Intégrales de ligne et de surface . . . . .	7
2.5 Théorèmes intégraux . . . . .	9
2.6 Exercices . . . . .	10
<b>3 Forces électrostatiques et magnétostatiques</b>	<b>13</b>
3.1 Introduction . . . . .	13
3.2 Quantification de la charge électrique . . . . .	13
3.3 La loi de Coulomb . . . . .	14
3.4 Champ électrique . . . . .	14
3.5 Distribution de charge . . . . .	15
3.6 Applications . . . . .	16
3.7 Champ produit par un courant constant . . . . .	18
3.8 La force de Lorentz . . . . .	19
3.9 Applications . . . . .	21
3.10 Exercices . . . . .	22
<b>4 Divergence des vecteurs de champ</b>	<b>27</b>
4.1 Loi de Gauss . . . . .	27
4.2 Applications . . . . .	29
4.3 Divergence du champ électrique . . . . .	32
4.4 Conducteurs . . . . .	33
4.5 Divergence de l'induction magnétique . . . . .	34
4.6 Champs microscopiques et champs macroscopiques . . . . .	35

4.7	Exercices . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Potentiel</b>	<b>37</b>
5.1	Potentiel électrique . . . . .	37
5.2	Applications . . . . .	38
5.3	Équations de Poisson et de Laplace . . . . .	42
5.4	Potentiel magnétique . . . . .	45
5.5	Dipôle magnétique . . . . .	47
5.6	La loi d'Ampère . . . . .	49
5.7	Conclusion . . . . .	50
5.8	Exercices . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Énergie électrostatique</b>	<b>53</b>
6.1	Énergie d'une distribution de charge . . . . .	53
6.2	Énergie de conducteurs chargés . . . . .	55
6.3	Capacité . . . . .	55
6.4	Association de condensateurs . . . . .	59
6.5	Dipôle électrique dans un champ . . . . .	60
6.6	Exercices . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Inductance</b>	<b>63</b>
7.1	Loi de Faraday . . . . .	63
7.2	Inductance . . . . .	66
7.3	Énergie magnétique . . . . .	68
7.4	Loi d'Ohm et effet Joule . . . . .	70
7.5	Dipôle magnétique dans un champ . . . . .	72
7.6	Exercices . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Milieux diélectriques et magnétiques</b>	<b>75</b>
8.1	Polarisation électrique . . . . .	75
8.2	Déplacement électrique . . . . .	77
8.3	Susceptibilité et permittivité . . . . .	78
8.4	Électrostatique macroscopique en milieu diélectrique . . . . .	79
8.5	Transition entre deux milieux diélectriques . . . . .	80
8.6	Milieux magnétiques . . . . .	81
8.7	Exercices . . . . .	82
<b>9</b>	<b>Les équations de Maxwell</b>	<b>85</b>
9.1	Courant de déplacement . . . . .	85
9.2	Les équations de Maxwell . . . . .	86
9.3	Conservation de la charge électrique . . . . .	86

## TABLE DES MATIÈRES

v

9.4	Énergie et impulsion du champ . . . . .	87
9.5	Ondes électromagnétiques . . . . .	88
9.6	Énergie de l'onde électromagnétique . . . . .	90
9.7	Exercices . . . . .	91
<b>Bibliographie</b>		<b>93</b>



# Avant-propos

Le cours PHQ-1036 Électricité et magnétisme est une introduction générale aux phénomènes électriques et magnétiques, équations de Maxwell incluses. Il s'adresse aux étudiants de première année du baccalauréat en physique, aux étudiants du baccalauréat en biophysique et aux étudiants du baccalauréat en enseignement secondaire, option physique.

Ces notes se veulent assez succinctes, et présentent davantage la théorie générale que ses applications concrètes. Pour de nombreux exemples supplémentaires, le lecteur pourra consulter l'ouvrage de Boridy (1990). Plusieurs logiciels utiles à la visualisation des phénomènes électromagnétiques sont proposés et décrits dans Ehrlich *et al.* (1995).

Je remercie Aline Simoneau et Marylène Brodeur pour leur aide dans la préparation du manuscrit.





# Chapitre 1

## Introduction

*L'électromagnétisme* est l'étude des phénomènes qui font intervenir des charges et des courants électriques. Les courants eux-mêmes sont, en fait, des charges en mouvement. Dans le cas où les charges et les courants peuvent se déplacer de manière quelconque, leurs interactions sont très complexes. Aussi est-il utile de commencer par des cas plus simples.

*L'électrostatique* est l'étude des interactions entre charges électriques immobiles. La *magnétostatique* est l'étude des effets produits par des courants continus et immobiles. Une bonne partie de ces notes va être consacrée à ces deux sous-domaines de l'électromagnétisme.

Certains problèmes d'électromagnétisme font partie du champ de la mécanique classique. Celle-ci peut être définie comme l'étude des trajectoires de particules (ou d'agrégats de particules) soumises à des forces. Les forces sont données *a priori*, et on suppose généralement, en mécanique classique, qu'elle se transmettent instantanément d'une particule à une autre. Considérons une particule chargée soumise à l'action de charges et de courants. Dans la mesure où la force exercée sur la particule peut être calculée à tout instant et à toute position, la détermination de sa trajectoire est un problème de mécanique classique.

En général, toutefois, l'électromagnétisme déborde du cadre de la mécanique classique. Ceci tient à deux raisons surtout, qui ne sont d'ailleurs pas indépendantes. D'une part, les forces que les charges et les courants électriques exercent les uns sur les autres ne se transmettent pas instantanément. Elles se propagent à des vitesses qui ne dépassent jamais celle de la lumière. En conséquence, la connaissance précise, à un instant donné, de la configuration des charges et des courants électriques n'est pas suffisante pour connaître la force exercée à cet instant sur chaque particule. C'est ce qu'on appelle les *effets de retard*, la détermination des forces requérant la configuration antérieure des charges et des courants. D'autre part, l'électromagnétisme utilise de façon essentielle la notion de *champ*, que l'on doit à M. Faraday. Le concept de champ est irréductible à celui de particule. Malgré leur caractère un peu abstrait,

les champs sont bien réels puisque, comme nous le verrons, ils possèdent de l'énergie et de l'impulsion.

On peut présenter l'électromagnétisme de plusieurs façons. La méthode fondamentale consiste à poser les lois générales (en l'occurrence, les équations de Maxwell) de manière axiomatique, et d'en déduire toutes sortes de conséquences. L'accord de celles-ci avec l'expérience constitue alors une corroboration des axiomes. La méthode inductive, par contre, consiste à partir de lois plus restreintes et plus proches des phénomènes, et à obtenir les lois générales au moyen d'hypothèses généralisatrices. Le choix s'est porté, ici, sur la méthode inductive qui, dans un premier cours, peut présenter un avantage pédagogique. Les équations de Maxwell sont énoncées au dernier chapitre seulement.

J'ai choisi, par ailleurs, de présenter l'électromagnétisme d'un point de vue microscopique plutôt que d'un point de vue macroscopique, c'est-à-dire du point de vue de Lorentz plutôt que du point de vue de Maxwell. Le lecteur saisira progressivement cette nuance au fil des chapitres. De cette manière, seuls les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ont un caractère fondamental, et ils se rapportent à des charges et à des courants dans le vide. Les champs appropriés aux milieux matériels,  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$  par exemple, sont liés aux champs fondamentaux à travers des moyennes macroscopiques.

De ce point de vue, les équations de Maxwell ont une valeur essentiellement universelle. Elles s'appliquent quelle que soit la vitesse des particules considérées, et dans tous les référentiels inertiels. Elles sont également valables en théorie de la relativité générale, dans les repères en chute libre. Elles doivent cependant être modifiées dans les situations où la quantification du champ est importante. Leur forme reste alors la même, mais les symboles acquièrent une signification différente.

L'électromagnétisme classique a été développé dans toute sa généralité au XIX<sup>e</sup> siècle, c'est-à-dire il y a plus de cent ans. Hormis les phénomènes quantiques, aucun résultat empirique bien établi n'a jamais contredit cette théorie. La recherche en ce domaine se poursuit toujours de façon très active. Mentionnons simplement les revues *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* et *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, qui consacrent chacune douze numéros par année exclusivement aux phénomènes électromagnétiques.

# Chapitre 2

## Analyse vectorielle

### 2.1 Vecteurs

Un *vecteur* est un objet mathématique qui possède une grandeur et une direction. On désignera un vecteur au moyen d'un symbole surmonté d'une flèche ( $\vec{A}$ ) et sa grandeur par le symbole sans la flèche.<sup>1</sup>

La *composante* d'un vecteur sur un axe donné est la longueur de la projection du vecteur sur l'axe. Soit trois axes orthogonaux  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Un vecteur (tridimensionnel) est complètement déterminé par ses composantes  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  sur les trois axes. On écrit  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ . Cela dit, il est important de remarquer que le vecteur est indépendant des axes choisis (c'est-à-dire du référentiel), tandis que les composantes changent si l'on effectue une rotation des axes, par exemple.

Un vecteur *unitaire* est un vecteur dont la grandeur est égale à 1. On le désigne par un accent circonflexe. Pour tout vecteur  $\vec{A}$  non nul,  $\hat{A} \equiv A^{-1}\vec{A}$  est un vecteur unitaire parallèle à  $\vec{A}$ . On note  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  et  $\hat{z}$  (ou  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  et  $\hat{k}$ ) trois vecteurs unitaires parallèles aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , respectivement. Manifestement,

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}. \quad (2.1)$$

Le *produit scalaire* de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est un nombre, noté  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  et défini comme

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (2.2)$$

On peut montrer que  $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ . Le produit  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  est un scalaire, en ce sens que sa valeur ne change pas si l'on effectue une rotation des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On a

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2. \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>On trouvera un exposé plus détaillé des notions introduites ici dans Arfken et Weber (1995, chapitres 1 et 2) et dans Kreyszig (1993, chapitres 8 et 9).

Le *produit vectoriel* de  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est un vecteur, noté  $\vec{A} \times \vec{B}$  et défini comme

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

On peut montrer que  $\vec{A} \times \vec{B}$  est un vecteur perpendiculaire à  $\vec{A}$  et à  $\vec{B}$ , dont la grandeur est égale à  $AB|\sin \theta|$  et dont le sens est donné par la règle de la main droite.

Il n'est pas difficile de montrer que

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \quad (2.5)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \quad (2.6)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (2.7)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}. \quad (2.8)$$

## 2.2 Champs vectoriels

Un vecteur peut être une fonction d'un paramètre. En mécanique classique, par exemple, la position, la vitesse et l'accélération d'une particule dépendent du temps. La dérivée d'un vecteur par rapport à une variable s'effectue composante par composante. La dérivée d'un produit scalaire ou d'un produit vectoriel suit les lois de la dérivée d'un produit ordinaire.

Un objet mathématique qui dépend des coordonnées spatiales  $x$ ,  $y$ , et  $z$  est appelé un *champ*. Un champ peut aussi dépendre du temps. Un *champ vectoriel* est un vecteur qui dépend de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (et, peut-être aussi, de  $t$ ). On écrit  $\vec{A}(\vec{r})$  ou  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , avec par exemple

$$\vec{A}(\vec{r}) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)). \quad (2.9)$$

Par extension, un vecteur qui ne dépend pas de  $\vec{r}$  est un champ dit *uniforme*. Un champ indépendant du temps est dit *constant*.

EXEMPLES. Le champ électrique, le champ magnétique et la vitesse d'un fluide sont des champs vectoriel, tandis que la température, la pression, et la densité de l'atmosphère sont des champs scalaires. ♣

## 2.3 Gradient, divergence et rotationnel

Soit  $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$  un champ scalaire. On peut, en général, calculer les dérivées partielles de  $f$  par rapport aux variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  (de même que les dérivées secondes, etc.)

Soit  $\vec{r} = (x, y, z)$  et  $\vec{r} + d\vec{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$  deux points infinitésimalement distants. La différence entre  $f(\vec{r} + d\vec{r})$  et  $f(\vec{r})$  est, au premier ordre, donnée par les premiers termes de la série de Taylor comme

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (2.10)$$

Définissons un champ vectoriel  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ , noté  $\vec{\nabla} f$ . Alors on peut écrire

$$\Delta f \equiv f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r}. \quad (2.11)$$

Le champ  $\vec{\nabla} f$  est appelé le *gradient* de  $f$ . Le symbole  $\vec{\nabla}$ , appelé *del* ou *nabla*, représente l'opérateur  $\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ , de sorte que

$$\vec{\nabla} f = \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.12)$$

Pour un  $d\vec{r}$  de grandeur donnée, il est clair que  $f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$  sera maximum si  $d\vec{r}$  est parallèle à  $\vec{\nabla} f$ . Ainsi, le gradient donne la direction de variation maximum d'une fonction. Par ailleurs, une fonction ne varie pas dans une direction orthogonale au gradient.

EXEMPLES.

i) Soit  $f(\vec{r}) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}, \dots \Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}.$$

ii) Soit  $f(\vec{r}) = f(r)$ . Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r}, \dots \Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{df}{dr} \hat{r}. \clubsuit$$

Soit  $\vec{A}(\vec{r})$  un champ vectoriel. La *divergence* de  $\vec{A}$  est le champ scalaire noté  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  et défini comme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2.13)$$

La signification physique de la divergence sera examinée plus tard.

EXEMPLES.

a) Soit  $\vec{A} = \vec{r}$ . Alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

b) Soit  $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ . Alors

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = f(r) + \frac{df}{dr} \frac{x}{r}, \dots \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3f(r) + r \frac{df}{dr}.$$

c) Soit  $\vec{A} = \vec{c} \times \vec{r}$ , où  $\vec{c}$  est un vecteur uniforme. Alors  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . ♣

Soit  $\vec{A}(\vec{r})$  un champ vectoriel. Le *rotationnel* de  $\vec{A}$  est le champ vectoriel noté  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  et défini comme

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

La signification physique du rotationnel sera examinée plus tard.

#### EXEMPLES

i)  $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$ .

ii)  $\vec{\nabla} \times \{f(r)\vec{r}\} = \hat{x} \left\{ \frac{\partial(fz)}{\partial y} - \frac{\partial(fy)}{\partial z} \right\} + \dots = 0$ .

iii)  $\vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{r}) = 2\vec{c}$ , où  $\vec{c}$  est un vecteur uniforme. ♣

Il est aisé de montrer que, pour tout champ scalaire  $f(\vec{r})$ ,  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ , c'est-à-dire que le rotationnel d'un gradient s'annule toujours. Inversement, on peut montrer que si  $\vec{A}$  est un champ vectoriel tel que  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ , alors il existe un champ scalaire  $f$  tel que  $\vec{A} = \vec{\nabla} f$ .

Il est aisé de montrer que, pour tout champ vectoriel  $\vec{A}(\vec{r})$ ,  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , c'est-à-dire que la divergence d'un rotationnel s'annule toujours. Inversement, on peut montrer que si  $\vec{B}$  est un champ vectoriel tel que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , alors il existe un champ vectoriel  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Soit  $f$  un champ scalaire. Alors

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 f. \quad (2.15)$$

L'opérateur  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  est appelé *laplacien*.

On montre également (ex. 2.14 et 2.16) que

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A}, \quad (2.16)$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{A}. \quad (2.17)$$

## 2.4 Intégrales de ligne et de surface

L'intégrale d'une fonction  $f(x)$  entre deux bornes  $a$  et  $b$  est égale à l'aire sous la courbe associée. Pour obtenir une valeur approximative de l'aire, on peut faire la construction illustrée à la figure 2.1. On divise l'intervalle  $(a, b)$  en  $N$  sous-intervalles égaux de longueur  $\Delta x$ , et on évalue l'aire de chacun des rectangles indiqués.

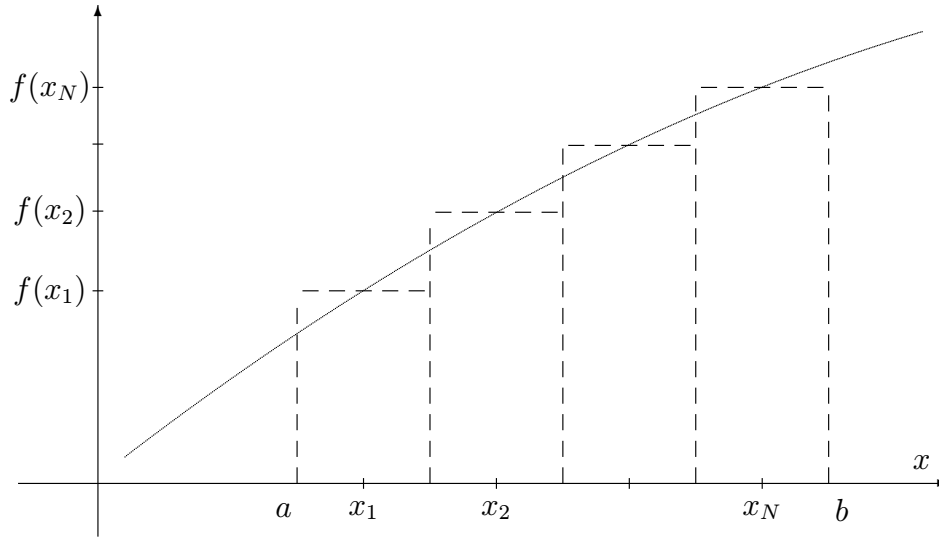


FIG. 2.1: Approximation de l'aire sous une courbe.

On a ainsi

$$\text{Aire sous la courbe} \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x, \quad (2.18)$$

et donc

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x. \quad (2.19)$$

Une fonction d'une variable peut être intégrée sur un intervalle. De même, une fonction de deux variables peut être intégrée sur une surface, et une fonction de trois variables peut être intégrée sur un volume. On a, par exemple,

$$\int_V f(\vec{r}) dV = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(\vec{r}_i) \Delta V. \quad (2.20)$$

Ici, le volume  $V$  est divisé en  $N$  sous-volumes égaux  $\Delta V$  et  $\vec{r}_i$  est un point dans le  $i^{\text{e}}$  sous-volume.

Soit  $\vec{A}(\vec{r})$  un champ vectoriel. Nous allons définir l'intégrale de ligne (ou circulation) de  $\vec{A}$  sur une courbe. Supposons que la courbe  $C$  aille de  $\vec{a}$  à  $\vec{b}$ , et approximations-la par  $N$  segments  $\Delta\vec{r}_i$ , comme à la figure 2.2.

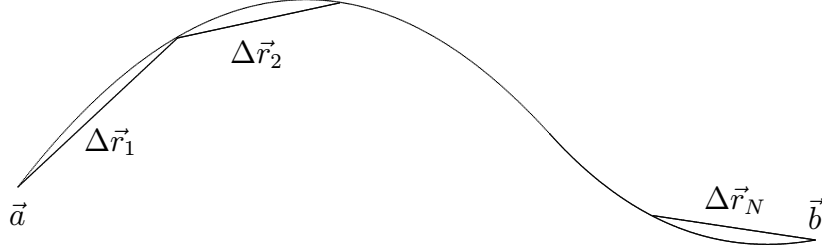


FIG. 2.2: Approximation d'une courbe par des segments vectoriels.

Soit  $\vec{r}_i$  le point milieu de  $\Delta\vec{r}_i$ . L'intégrale de ligne est alors définie comme

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i. \quad (2.21)$$

Dans le cas particulier où  $\vec{A}(\vec{r})$  est le gradient d'une fonction scalaire  $f(\vec{r})$ , on a

$$\begin{aligned} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_C (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{\nabla} f(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\Delta f)_i = f(\vec{b}) - f(\vec{a}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Soit maintenant  $S$  une surface dans l'espace. Divisons  $S$  en  $N$  petites surfaces  $\Delta S_i$ , et définissons  $\Delta\vec{S}_i$  comme un vecteur de grandeur égale à  $\Delta S_i$  et perpendiculaire à cette petite surface. L'intégrale de surface de  $\vec{A}$  sur  $S$  (ou flux de  $\vec{A}$  à travers  $S$ ) est alors définie comme ( $\vec{r}_i$  est sur  $\Delta S_i$ )

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{S}_i. \quad (2.23)$$

EXEMPLE. Soit  $\vec{A} = f(r)\vec{r}$  et soit  $S$  la surface d'une sphère de rayon  $R$ , où l'élément de surface est orienté vers l'extérieur. Alors  $\Delta\vec{S}_i = \Delta S_i \hat{r}_i$ , et

$$\begin{aligned} \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(r_i) \vec{r}_i \cdot \Delta S_i \hat{r}_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(r_i) r_i \Delta S_i \\ &= R f(R) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta S_i = 4\pi R^2 f(R). \clubsuit \end{aligned}$$



## 2.5 Théorèmes intégraux

Soit  $S$  une surface fermée et soit  $V$  le volume à l'intérieur de  $S$ . Le *théorème de la divergence* énonce que, si l'élément de surface est orienté vers l'extérieur, alors

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}. \quad (2.24)$$

EXEMPLE. Nous avons calculé le côté droit de l'équation précédente dans le cas où  $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ . Évaluons maintenant le côté gauche. La divergence de  $f(r)\vec{r}$  a été calculée à l'exemple (b) de la p. 6. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV &= \int_V \left\{ 3f(r) + r \frac{df}{dr} \right\} dV = \int_V \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^3 f(r)) dV \\ &= \int_0^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^3 f(r)) 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^R \frac{d}{dr} (r^3 f(r)) dr \\ &= 4\pi (r^3 f(r)) \Big|_0^R = 4\pi R^3 f(R). \clubsuit \end{aligned}$$

Soit  $S$  une surface ouverte et soit  $C$  la courbe fermée qui la borne. Choisissons le sens de  $C$  et l'orientation des éléments de surface selon la règle de la main droite. Le *théorème de Stokes* énonce alors que

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (2.25)$$

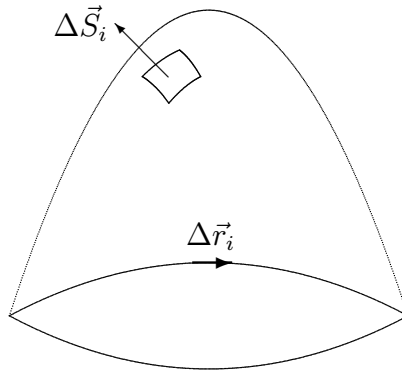


FIG. 2.3: Théorème de Stokes.

EXEMPLE. Si  $\vec{A} = \vec{\nabla} f$ , alors  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ . Mais le côté droit de l'éq. (2.25) s'annule aussi eu égard à l'éq. (2.22), puisque le parcours est fermé. ♣

Le théorème de la divergence permet de se représenter un vecteur de divergence non nulle: il y a un flux net du champ hors du volume  $V$  (si la divergence est positive). Autrement dit, les lignes de champ partent d'un point de divergence positive.

De même, le théorème de Stokes nous montre qu'un vecteur de rotationnel non nul en un point  $a$ , près de ce point, des lignes de champ qui tendent à tourner autour du point.

## 2.6 Exercices

**2.1** Soit  $\vec{A} = (2, 4, -3)$  et  $\vec{B} = (1, -5, 2)$ . Calculer  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  et  $\vec{A} \times \vec{B}$ .

**2.2** Soit  $\vec{A} = (4, 2, -1)$  et  $\vec{B} = (B_x, 0, B_z)$ . Trouver les valeurs de  $B_x$  et  $B_z$  qui font que  $\vec{A} \times \vec{B} = (1, -2, 0)$ .

**2.3** Quelle est la longueur du vecteur  $\vec{A}$  de l'ex. (2.2)? Trouver un vecteur unitaire parallèle à  $\vec{A}$ .

**2.4** Vérifier l'identité

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

en calculant les deux membres de l'égalité pour  $\vec{A} = (3, 0, 0)$ ,  $\vec{B} = (-1, 0, 2)$  et  $\vec{C} = (0, 2, 1)$ .

**2.5** Vérifier l'identité

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

en calculant les deux membres de l'égalité pour  $\vec{A} = (0, 0, 2)$ ,  $\vec{B} = (1, -2, 0)$  et  $\vec{C} = (1, 0, 1)$ .

**2.6** Soit  $f(x, y, z) = (xy) \exp(y^2 + z^2)$ . Évaluer  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ .

**2.7** Soit  $f(x, y, z) = (\sqrt{z})^{-1} \sin(xy^2)$ . Évaluer  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ .

**2.8** Soit  $f(x, y, z) = x^2y + 3xz - 2xyz$ . Calculer la valeur de  $f(1.1, 1.2, 1.1) - f(1, 1, 1)$  exactement, et ensuite approximativement au moyen de la formule  $\Delta f \approx (\vec{\nabla} f) \cdot \Delta \vec{r}$ .

**2.9** Soit  $f(x, y, z) = 3x + \sin(yz)$ . Calculer la valeur de  $f(1.1, 0.55, \pi + 0.1) - f(1, 0.5, \pi)$  avec une précision d'au moins six décimales. Évaluer ensuite la différence au moyen de la formule  $\Delta f \approx (\vec{\nabla} f) \cdot \Delta \vec{r}$ .

**2.10** Soit  $\vec{A} = (y^2 - 4x, 2xy - 2z^2, -4yz)$ . Calculer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ .  $\vec{A}$  est-il le gradient d'une fonction scalaire?  $\vec{A}$  est-il le rotationnel d'une fonction vectorielle?

**2.11** Soit  $\vec{A} = (x^2 + yz, xz - y^2, xy)$ . Calculer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ .  $\vec{A}$  est-il le gradient d'une fonction scalaire?  $\vec{A}$  est-il le rotationnel d'une fonction vectorielle?

**2.12** Soit  $\vec{A} = (\vec{c} \cdot \vec{r}) \vec{r}$ , où  $\vec{c}$  est un vecteur uniforme. Calculer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

**2.13** Soit  $\phi = r^2(\vec{c} \cdot \vec{r})$ . Évaluer  $\vec{\nabla} \phi$  et vérifier que  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$ .

**2.14** Soit  $f$  et  $\vec{A}$  un champ scalaire et un champ vectoriel quelconques, respectivement. Montrer que

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{A}.$$

**2.15** Soit  $f$  une fonction de  $r$  et soit  $\vec{c}$  un vecteur uniforme. Utiliser la formule de l'ex. (2.14) pour calculer  $\vec{\nabla} \cdot \{f(r)\vec{c} \times \vec{r}\}$ . Les résultats démontrés plus haut peuvent être utilisés directement.

**2.16** Soit  $f$  et  $\vec{A}$  un champ scalaire et un champ vectoriel quelconques, respectivement. Montrer que

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{\nabla}f) \times \vec{A}.$$

**2.17** Soit  $f$  une fonction de  $r$  et soit  $\vec{c}$  un vecteur uniforme. Utiliser la formule de l'ex. (2.16) pour calculer  $\vec{\nabla} \times \{f(r)\vec{c} \times \vec{r}\}$ . Les résultats démontrés plus haut peuvent être utilisés directement.

**2.18** Vérifier le théorème de Stokes dans le cas où  $\vec{A} = -y\hat{x} + x\hat{y}$  et  $S$  est le carré de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  et  $(0,1)$ , dans le plan  $z = 0$ .

**2.19** Vérifier le théorème de Stokes si  $\vec{A} = -y\hat{x} + x\hat{y}$  et  $S$  est un disque de rayon 1, centré à l'origine et situé dans le plan  $xy$ . [Il peut être utile de représenter les vecteurs  $\vec{A}$  et  $d\vec{r}$  sur quelques points du contour  $C$ .]

**2.20** Démontrer l'identité vectorielle suivante:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{F}.$$



# Chapitre 3

## Forces électrostatiques et magnétostatiques

### 3.1 Introduction

L'électrostatique, nous l'avons signalé, est l'étude des interactions entre charges électriques immobiles. La magnétostatique est l'étude des effets produits par des courants continus et immobiles.

Pour évaluer les interactions entre charges et courants électriques, il est très commode d'introduire le concept de champ. Spécifiquement, les charges et les courants produisent un champ électrique et une induction magnétique qui, à leur tour, exercent des forces sur les charges et les courants. Dans ce chapitre, nous allons introduire (dans le contexte de l'électrostatique et de la magnétostatique) le champ électrique et l'induction magnétique, et préciser la force qu'ils exercent sur des charges en mouvement.

### 3.2 Quantification de la charge électrique

C'est un fait expérimental que toutes les charges électriques isolables sont des multiples entiers d'une charge fondamentale, égale à la charge du proton. Il semble que tous les protons ont rigoureusement la même charge électrique, notée  $q_p$ . Tous les électrons ont une charge égale à  $-q_p$ .

L'existence de charges positives et négatives correspond au fait que la force entre deux charges immobiles (que nous allons bientôt investiguer) peut être attractive ou répulsive. La force gravitationnelle, par contre, est toujours attractive, d'où le fait que toutes les masses sont positives.

Les quarks ont des charges qui ne sont pas des multiples entiers de  $q_p$ , spécifiquement  $\pm q_p/3$  et  $\pm 2q_p/3$ . Il semble, cependant, que les quarks ne soient pas isolables.

Quoi qu'il en soit, les lois de l'électromagnétisme que nous allons développer sont indépendantes de la quantification de la charge.

Dans ce cours, nous allons utiliser le système international d'unités, basé sur le kilogramme, le mètre et la seconde pour les unités mécaniques. L'unité de charge électrique est le coulomb, et  $q_p = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ .<sup>1</sup>

### 3.3 La loi de Coulomb

Soit deux charges ponctuelles immobiles  $q_1$  et  $q_2$ . La force entre les deux charges est attractive si les charges ont des signes opposés, et répulsive si elles sont de même signe. La force est proportionnelle au produit des charges, et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Explicitement, si  $\vec{F}_{12}$  désigne la force de  $q_2$  sur  $q_1$  et  $\vec{F}_{21}$  la force de  $q_1$  sur  $q_2$ ,

$$\vec{F}_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{21}}{r_{21}^2} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.1)$$

La constante  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$  est appelée *permittivité du vide*. On peut se rappeler qu'en unités internationales,  $(4\pi\epsilon_0)^{-1} \sim 9 \times 10^9$ .

Soit  $q$  une charge électrique située au point  $\vec{r}$  et soit  $q_1, q_2, \dots, q_N$  des charges situées aux points  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ , respectivement. On suppose, bien sûr, que les charges sont ponctuelles et immobiles. C'est un fait expérimental que la force totale exercée par les  $N$  charges sur  $q$  est la résultante vectorielle des forces coulombiennes exercées par chacune des  $N$  charges. Ceci s'appelle le *principe de superposition*. Explicitement, si  $\vec{F}$  désigne la force électrostatique totale sur  $q$ ,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \frac{q q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (3.2)$$

### 3.4 Champ électrique

L'éq. (3.2) montre que la force électrostatique totale sur  $q$  est proportionnelle à  $q$ . Il est très commode de définir un champ vectoriel  $\vec{E}(\vec{r})$  comme le rapport de  $\vec{F}$  à  $q$ , c'est-à-dire

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>On peut trouver les valeurs précises des constantes physiques sur la page web du National Institute of Standards and Technology (<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>).

$\vec{E}(\vec{r})$  s'appelle le *champ électrique*. Le champ électrique produit par un ensemble de charges immobiles  $q_1, \dots, q_N$  est tel que, si l'on introduit une charge additionnelle  $q$  au point  $\vec{r}$ , la force électrostatique exercée sur  $q$  est donnée par

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (3.4)$$

Physiquement, les forces sont des quantités mesurables. À première vue, il peut sembler que le champ électrique n'a qu'une signification mathématique, en l'occurrence, un vecteur qui permet de calculer aisément les forces.

Mais le champ électrique a deux autres caractéristiques importantes. D'une part, il sert à éliminer le concept d'action à distance. En effet, il peut être désagréable de penser que deux charges puissent s'influencer sans qu'il y ait rien entre elles. Dans ce contexte, le champ électrique est l'entité qui, de proche en proche, transmet l'interaction d'une charge à l'autre. La présence d'une charge modifie les propriétés de l'espace environnant, et l'espace ainsi modifié produit la force sur l'autre charge.

Le champ électrique a, d'autre part, véritablement une signification physique. Ceci est relié, entre autres, au fait qu'il possède de l'énergie et de l'impulsion, comme nous le verrons éventuellement.

### 3.5 Distribution de charge

D'un point de vue microscopique, la charge électrique est portée par des particules élémentaires extrêmement petites. D'un point de vue macroscopique, cependant, on peut souvent considérer que la charge électrique est distribuée de façon continue. Ceci suppose qu'on se situe à des échelles beaucoup plus grandes que les dimensions des particules.

Soit  $\Delta V$  un élément de volume autour d'un point  $\vec{r}$ . Supposons que  $\Delta V$  soit petit par rapport aux distances macroscopiques, mais grand par rapport aux dimensions des particules. Soit  $\Delta q$  la charge électrique totale contenue dans  $\Delta V$ . La densité volumique de charge au point  $\vec{r}$ , notée  $\rho(\vec{r})$ , est définie comme

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta V}. \quad (3.5)$$

Nous allons considérer que  $\rho$  est une fonction continue de  $\vec{r}$ , et nous allons évaluer le champ électrique produit par cette distribution de charge.

Pour ce faire, divisons l'espace en un grand nombre d'éléments de volume  $\Delta V_i$ . Soit  $\Delta q_i$  la charge totale contenue dans  $\Delta V_i$ , et soit  $\vec{r}_i$  le centre de  $\Delta V_i$ . Suivant le principe de superposition, le champ électrique total au point  $\vec{r}$  est donné par

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \Delta q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (3.6)$$

Nous avons supposé, ici, que les  $\Delta V_i$  sont suffisamment petits pour pouvoir être considérés ponctuels. Avec quelques manipulations, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{\Delta V_i} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta V_i \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \rho(\vec{r}_i) \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta V_i \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Pour obtenir la dernière égalité, on a fait tendre  $\Delta V_i$  vers 0, étant entendu que zéro a un sens macroscopique. Notons que  $\vec{r}$  désigne le point où le champ est calculé, tandis que  $\vec{r}'$  est une variable d'intégration. Notons également qu'une intégrale vectorielle s'évalue composante par composante.

### 3.6 Applications

Nous allons évaluer le champ électrique produit par un fil rectiligne infini uniformément chargé et par un plan infini uniformément chargé.

#### i) Fil rectiligne infini

Choisissons les axes de sorte que le fil coïncide avec l'axe  $z$ , et que le point d'observation soit situé à une distance  $\eta$  sur l'axe  $y$ .

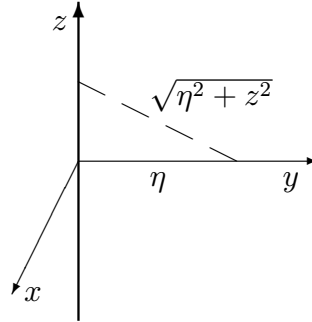


FIG. 3.1: Fil rectiligne infini uniformément chargé.

On voit que  $\vec{r} = \eta\hat{y}$  et  $\vec{r}'$  varie sur l'axe  $z$  seulement (appelons-le  $z'$ ). On peut écrire  $\rho(\vec{r}') dV' = \lambda dz'$  (où  $\lambda$  est la densité linéique de charge), et ainsi

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{\eta\hat{y} - z'\hat{z}}{|\eta\hat{y} - z'\hat{z}|^3} dz' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \frac{\eta\hat{y} - z'\hat{z}}{\{\eta^2 + (z')^2\}^{3/2}} dz'. \quad (3.8)$$



L'intégrale du terme en  $z'$  s'annule par symétrie (on s'attend d'ailleurs qu'il n'y ait pas de composante  $E_z$ ). On trouve

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\lambda\eta}{2\pi\epsilon_0}\hat{y}\int_0^\infty \frac{dz'}{\{\eta^2 + (z')^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda\eta}{2\pi\epsilon_0}\hat{y}\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\sec^2\alpha d\alpha}{\{\eta^2 + \eta^2\tan^2\alpha\}^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\eta}\hat{y}\int_0^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\eta}\hat{y}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Il est clair que, pour tout  $\vec{r}$ ,  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\eta}\hat{\eta}$ , où  $\hat{\eta}$  est un vecteur unitaire qui va du fil au point d'observation, suivant la normale ( $\vec{\eta} = x\hat{x} + y\hat{y}$ ).

## ii) Plan infini

Choisissons les axes de sorte que le plan coïncide avec le plan  $xz$ , et que le point d'observation soit situé à une distance  $\eta$  sur l'axe  $y$ .

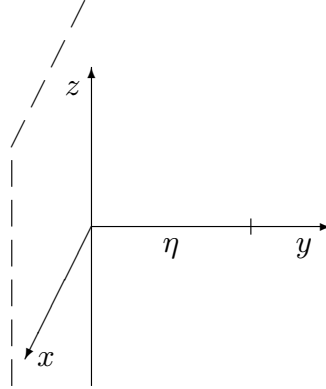


FIG. 3.2: Plan infini uniformément chargé.

On voit que  $\vec{r} = \eta\hat{y}$  et  $\vec{r}'$  varie sur le plan  $xz$  (ici  $x'z'$ ). On peut écrire  $\rho(\vec{r}') dV' = \sigma dx' dz'$  (où  $\sigma$  est la densité de surface de charge), et ainsi

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \sigma \frac{\eta\hat{y} - x'\hat{x} - z'\hat{z}}{|\eta\hat{y} - x'\hat{x} - z'\hat{z}|^3} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\eta\hat{y} - x'\hat{x} - z'\hat{z}}{\{\eta^2 + (x')^2 + (z')^2\}^{3/2}}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

L'intégrale des termes en  $x'$  et  $z'$  s'annule par symétrie. Le terme qui reste est uniforme sur un anneau de rayon  $\rho = \sqrt{(x')^2 + (z')^2}$ . Tout le plan peut être couvert

par de tels anneaux, d'épaisseur  $d\rho$  et d'aire  $2\pi\rho d\rho$ . On a donc

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\eta\hat{y}\int_0^\infty \frac{1}{(\eta^2+\rho^2)^{3/2}}2\pi\rho d\rho \\ &= \frac{\sigma\eta\hat{y}}{2\epsilon_0}\int_0^\infty (-1)\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{1}{(\eta^2+\rho^2)^{1/2}}\right\}d\rho \\ &= \frac{\sigma\eta\hat{y}}{2\epsilon_0}(-1)\frac{1}{(\eta^2+\rho^2)^{1/2}}\Big|_0^\infty = \frac{\sigma\hat{y}}{2\epsilon_0}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Cette expression est, en fait, valable pour tout  $\vec{r}$  tel que  $y > 0$ . Le signe s'inverse si  $y < 0$ .

Il est intéressant de remarquer que le champ électrique d'une charge ponctuelle varie comme l'inverse du carré de la distance, que le champ d'un fil infini varie comme l'inverse de la distance et que le champ d'un plan infini est uniforme.

Les calculs que nous avons faits s'adaptent aux cas d'un fil de longueur finie et d'un disque, pourvu que le point d'observation soit situé symétriquement (c'est-à-dire que la perpendiculaire à partir du point d'observation tombe au centre du fil ou du disque).

### 3.7 Champ produit par un courant constant

Nous avons vu que les charges électriques immobiles exercent les unes sur les autres des forces d'attraction et de répulsion. Ces forces se calculent au moyen du champ électrique.

Des charges en mouvement exercent les unes sur les autres des forces additionnelles, en général très compliquées. Mais ce problème se simplifie si le déplacement des charges constitue des courants constants.

Définissons d'abord le concept de densité de courant. Supposons que, dans une région de l'espace, il y ait un déplacement net de charges.<sup>2</sup> Alors la *densité de courant* est le champ vectoriel dont la direction, en un point donné, est parallèle au déplacement des charges, et dont la grandeur est égale à la quantité nette de charges passant par unité de surface et de temps à travers une surface perpendiculaire à la direction du déplacement des charges. La densité de courant est notée  $\vec{j}$ , et ses unités sont des ampères par mètre carré ( $\text{A m}^{-2}$ ), un ampère étant égal à un coulomb par seconde.

Le *courant électrique* passant à travers une surface, noté  $I$ , est égal à l'intégrale de surface de la densité de courant. L'unité de courant électrique est l'ampère.

---

<sup>2</sup>La densité totale de charge peut s'annuler. Par exemple, les charges négatives peuvent se déplacer et les charges positives rester immobiles.

Soit  $\vec{j}(\vec{r})$  une densité de courant indépendante du temps. On définit l'*induction magnétique* produite par  $\vec{j}$  comme le champ vectoriel, noté  $\vec{B}$  et défini comme

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (3.12)$$

Ici,  $\mu_0$  est une constante égale à  $4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m C}^{-2}$ . Les unités de l'induction magnétique sont donc des  $\text{kg C}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , qu'on appelle des teslas (T). L'induction magnétique est aussi appelée *densité de flux magnétique*.

L'intégrale définissant l'induction magnétique s'apparente à celle qui définit le champ électrique. Elle est prise sur tout l'espace, et fait intervenir la différence entre le point d'observation et le point de source.

Fréquemment, la densité de courant électrique est confinée à des conducteurs filiformes. Soit  $C$  le contour tracé par l'un de ces conducteurs. Alors  $\vec{j}$  est en général parallèle à l'élément de longueur  $d\vec{l}'$  de sorte que, si  $dS'$  désigne l'aire de la section du conducteur,

$$\vec{j}(\vec{r}') dV' = \vec{j}(\vec{r}') dS' dl' = j(\vec{r}') dS' d\vec{l}'. \quad (3.13)$$

L'induction magnétique produite par le conducteur est donc égale à

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} j(\vec{r}') dS' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (3.14)$$

où  $I = \int j(\vec{r}') dS'$  est uniforme sur le contour. La section du conducteur est suffisamment petite pour que les autres quantités puissent être considérées uniformes dans l'intégrale sur  $dS'$ . L'équation précédente représente la *loi de Biot-Savart*.

### 3.8 La force de Lorentz

De même que le champ électrique sert à calculer la force sur des charges immobiles, l'induction magnétique sert à calculer la force sur des charges mobiles. Spécifiquement, la force exercée par une induction magnétique  $\vec{B}$  sur une charge  $q$  qui se déplace à une vitesse  $\vec{v}$  est donnée par

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.15)$$

La force magnétique est donc perpendiculaire à la vitesse de la particule et à la direction de l'induction magnétique.

EXEMPLE. Montrer qu'une particule chargée plongée dans une induction magnétique uniforme peut effectuer un mouvement circulaire dans un plan.

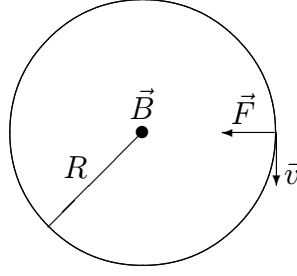


FIG. 3.3: Force magnétique sur une charge en mouvement circulaire.

En mécanique classique, on montre qu'une particule qui effectue un mouvement circulaire de rayon  $R$  à une vitesse de grandeur  $v$  a une accélération vers le centre de grandeur égale à  $v^2/R$ .

La force magnétique doit donc produire cette accélération. Soit  $\hat{z}$  la direction de  $\vec{B}$  (qui sort du plan de la figure 3.3) et soit  $\vec{v}$  orientée dans le sens horaire. L'éq. (3.15) implique alors que la force est dirigée vers le centre du cercle, et que sa grandeur est égale à  $qvB$ . On aura donc un mouvement circulaire stable si

$$F = qvB = \frac{mv^2}{R}, \quad (3.16)$$

où  $m$  est la masse de la particule chargée. La vitesse angulaire de la particule est donnée par

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}. \clubsuit \quad (3.17)$$

Nous allons maintenant calculer la force magnétique totale exercée sur un fil conducteur dans lequel circule un courant. Soit  $\vec{B}(\vec{r})$  l'induction magnétique. Considérons un élément de volume  $dV$  du conducteur. Si  $\rho_m$  est la densité des charges mobiles et  $\vec{v}$  leur vitesse ( $\rho_m$  et  $\vec{v}$  dépendent de  $\vec{r}$ ), alors la force exercée sur  $dV$  est donnée par

$$q\vec{v} \times \vec{B} = \rho_m dV \vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dV, \quad (3.18)$$

où  $\vec{j}$  est la densité de courant. Comme dans l'éq. (3.13),  $\vec{j}dV = j dS d\vec{l}$ , de sorte que la force magnétique totale exercée sur le fil est égale à

$$\vec{F} = \int \vec{j} \times \vec{B} dV = \int j dS d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_C d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (3.19)$$

où  $I$  est le courant dans le fil et où nous avons supposé que  $\vec{B}$  varie peu sur la section du fil.

Il n'est pas difficile, avec la loi de Biot-Savart, d'écrire l'expression de la force exercée par un conducteur sur un autre. Spécifiquement, la force exercée par  $C_1$  sur  $C_2$  est donnée par

$$\vec{F}_{21} = I_2 \int_{C_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} d\vec{l}_2 \times \left( \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right). \quad (3.20)$$

On peut montrer (Boridy, 1990, pp. 423–424) que  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .<sup>3</sup>

Une charge immobile subit une force électrique seulement. Une charge en mouvement subit une force magnétique. Une charge en mouvement subit également la force électrique. En fait, soit  $\vec{v}$  la vitesse d'une charge  $q$  et soit  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  le champ électrique et l'induction magnétique. Alors la force électromagnétique totale exercée sur la charge est donnée par

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.21)$$

C'est ce qu'on appelle la *force de Lorentz*. Elle est valable en toute généralité, même dans le cas où  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dépendent du temps.<sup>4</sup>

## 3.9 Applications

Nous allons évaluer l'induction magnétique produite par un courant rectiligne infini, et la force mutuelle de deux courants parallèles rectilignes infinis.

### i) Courant rectiligne infini

Choisissons les axes de sorte que le fil conducteur coïncide avec l'axe  $z$ ; l'observateur est situé sur l'axe  $y$ , à une distance  $\eta$ . La situation est représentée comme à la figure 3.1 (p. 16), sauf que le fil chargé est remplacé par un fil porteur de courant.

On a  $\vec{r} = \eta\hat{y}$ ,  $\vec{r}' = z'\hat{z}$  et  $d\vec{l}' = dz'\hat{z}$ . Ainsi,  $d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = -\eta\hat{x} dz'$ , de sorte que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\eta\hat{x})}{\{\eta^2 + (z')^2\}^{3/2}} dz' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-\eta\hat{x}) \frac{2}{\eta^2} = -\frac{\mu_0 I \hat{x}}{2\pi\eta}. \quad (3.22)$$

Il est clair que, pour tout  $\vec{r}$ ,  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\eta} \hat{e}$ , où  $\eta$  est la distance entre  $\vec{r}$  et le fil ( $\vec{\eta} = x\hat{x} + y\hat{y}$ ) et  $\hat{e}$  est un vecteur unitaire tangent au cercle de rayon  $\eta$  et orienté selon la règle de la main droite.

<sup>3</sup>Boridy désigne par  $\vec{F}_{21}$  ce que nous appelons ici  $\vec{F}_{12}$ .

<sup>4</sup>Si l'accélération de la charge est importante, on doit ajouter à son équation de mouvement la force produite par son propre champ. Nous ne considérerons pas ce cas ici, mais on peut consulter là-dessus Rohrlich (2000).

**ii) Force entre courants parallèles**

Supposons qu'un courant  $I_1$  circule dans le fil de l'exemple précédent, et qu'un courant  $I_2$  circule dans un second fil parallèle au premier et passant par le point  $\eta\hat{y}$ .

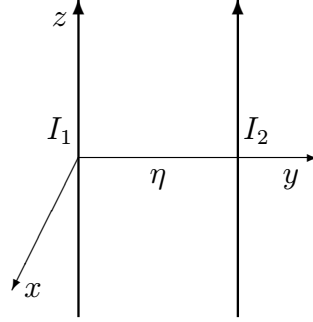


FIG. 3.4: Deux courants rectilignes parallèles.

La force exercée par le premier fil sur le second est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= I_2 \int_{-\infty}^{\infty} (dz \hat{z}) \times \vec{B}(0, \eta, z) = I_2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z} \times \left( -\frac{\mu_0 I_1 \hat{x}}{2\pi\eta} \right) dz \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left( -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\eta} \right) (\hat{z} \times \hat{x}) \int_{-L}^L dz = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\eta} \hat{y} \lim_{L \rightarrow \infty} 2L.\end{aligned}\quad (3.23)$$

La force est infinie, ce qui vient du fait que la longueur des fils est infinie. Il est commode de définir la force par unité de longueur, en divisant le résultat précédent par  $2L$ . On trouve

$$\vec{F}_{21}(\text{par unité de longueur}) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\eta} \hat{y}. \quad (3.24)$$

La force est attractive si les courants vont dans le même sens, et répulsive autrement.

Si  $I_1 = I_2 = 1$  A et si  $\eta = 1$  m, alors  $F_{21} = 2 \times 10^{-7}$  N m<sup>-1</sup>. Ceci, en fait, constitue la définition de l'ampère: c'est le courant qui, circulant dans deux fils infinis à un mètre de distance, produit une force de  $2 \times 10^{-7}$  newton par mètre. Le coulomb est une unité dérivée: c'est la quantité de charge qui, circulant en 1 seconde, produit un courant d'un ampère.

Terminons en donnant un tableau des principales quantités introduites jusqu'à maintenant, avec les unités dans lesquelles elles sont exprimées.

**3.10 Exercices**

**3.1** Une charge ponctuelle  $Q$  est placée à la surface de la Terre. Une masse de 1 kg portant une charge égale est placée verticalement à 1 km au-dessus de la première

Quantités		Unités
Charge électrique	$q$	$\text{C} = \text{A s}$
Champ électrique	$E$	$\text{N C}^{-1} = \text{kg m s}^{-2} \text{C}^{-1}$
Densité de charge	$\rho$	$\text{C m}^{-3}$
Densité de surface de charge	$\sigma$	$\text{C m}^{-2}$
Densité linéique de charge	$\lambda$	$\text{C m}^{-1}$
Densité de courant	$j$	$\text{A m}^{-2}$
Courant électrique	$I$	$\text{A}$
Induction magnétique	$B$	$\text{kg C}^{-1} \text{s}^{-1} = \text{T}$

TAB. 3.1: Quantités électromagnétiques et leurs unités.

charge. Quelle valeur de  $Q$  fait que la répulsion électrostatique annule exactement l'attraction gravitationnelle? (L'accélération gravitationnelle à la surface de la terre vaut  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ .)

**3.2** La masse de l'électron est d'environ  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . Supposons qu'un électron tourne autour d'un proton immobile, sur une orbite circulaire de  $10^{-10} \text{ m}$  de rayon. Combien l'électron fait-il de tours par seconde?

**3.3** Quatre charges sont disposées aux sommets d'un carré, comme illustré. Quel est le champ électrique au centre du carré?

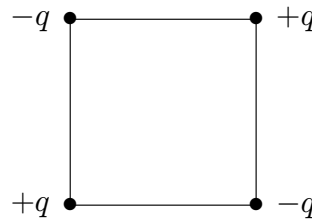


FIG. 3.5: Quatre charges aux sommets d'un carré.

**3.4** Deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , de signe contraire, sont situées sur l'axe  $x$  aux positions  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 1 \text{ m}$ , respectivement. On suppose que  $|q_1| > |q_2|$ . À quel endroit sur l'axe  $x$  le champ électrique est-il nul?

**3.5** Deux charges  $Q$  identiques sont situées sur l'axe  $x$  aux points  $+a$  et  $-a$ . La grandeur du champ électrique est-elle plus élevée au point  $\vec{r} = (2a, 0, 0)$  ou au point  $\vec{r} = (0, a, 0)$ ? Justifier.

**3.6** Trois charges sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté  $L$  (figure 3.6). Le triangle se trouve dans le plan  $xy$ , la charge  $\alpha q$  est sur l'axe  $y$  et l'origine est située au centre du triangle. Évaluer le champ électrique  $\vec{E}$  à l'origine et vérifier qu'il s'annule si  $\alpha = 1$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la grandeur de  $\vec{E}$  à l'origine vaut-elle le double de ce qu'elle vaut quand  $\alpha = 0$ ?

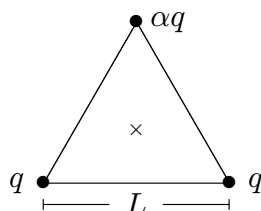


FIG. 3.6: Trois charges aux sommets d'un triangle équilatéral.

**3.7** Un fil situé sur l'axe  $x$  entre les points  $x = 0$  et  $x = 1$  m a une densité linéique de charge uniforme et égale à  $\lambda$ . Quel est le champ électrique sur l'axe  $x$  pour  $x > 1$  m?

**3.8** Un fil circulaire de rayon 1 m, dans le plan  $xy$  et centré à l'origine, a une densité linéique de charge uniforme et égale à  $\lambda$ . Manifestement, le champ électrique s'annule à l'origine. Quelle est la direction du champ électrique en un point situé sur l'axe  $y$  et juste un peu plus haut que l'origine? Justifiez votre réponse.

**3.9** Un fil circulaire de rayon  $R$  est situé dans le plan  $xy$  et centré à l'origine. Le fil porte une densité linéique de charge  $\lambda$ . Évaluer le champ électrique sur l'axe  $z$  pour  $z > 0$ .

**3.10** Reprendre l'ex. (3.9) pour un disque troué de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$ , et de densité de surface de charge uniforme  $\sigma$ .

**3.11** Un disque de rayon  $R$ , dans le plan  $xz$  et centré à l'origine, a une densité de surface de charge  $\sigma$ . Utiliser les calculs faits en classe pour montrer que le champ électrique sur l'axe  $y$  (pour  $y > 0$ ) est donné par

$$\vec{E} = \frac{\sigma \hat{y}}{2\epsilon_0} \left\{ 1 - \frac{y}{(R^2 + y^2)^{1/2}} \right\}.$$

**3.12** Quelle est, dans l'ex. (3.11), la valeur approximative du champ électrique lorsque  $y \ll R$ ? lorsque  $y \gg R$ ? Interpréter ces résultats. [Suggestion: utiliser le binôme de Newton,

$$(1 + \epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{1}{2!}n(n-1)\epsilon^2 + \dots \quad |\epsilon| < 1. \quad (3.25)$$

Obtenir, dans le premier cas, les termes en  $y/R$  et, dans le second, les termes en  $(R/y)^2$ .]

**3.13** Quatre fils infinis parallèles à l'axe  $z$  croisent le plan  $xy$  aux points  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, -1, 0)$ ,  $(-1, 1, 0)$  et  $(-1, -1, 0)$ . Les courants circulant dans ces fils sont respectivement égaux à  $+I$ ,  $+I$ ,  $-I$  et  $-I$ . Quel est le vecteur induction magnétique à l'origine?

**3.14** Trois fils infinis, perpendiculaires au plan d'un triangle équilatéral, passent par les sommets de celui-ci. Les valeurs des courants sont indiquées sur la figure 3.7. Si



$I \neq 0$ , peut-on trouver un  $I'$  qui fait que l'induction magnétique s'annule au centre du triangle? Justifier.

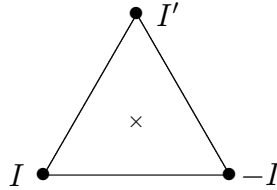


FIG. 3.7: Trois fils passant par les sommets d'un triangle équilatéral.

**3.15** Un fil de rayon  $R$  est situé dans le plan  $xy$  et centré à l'origine. Un courant  $I$  circule dans le fil dans le sens antihoraire. Évaluer l'induction magnétique à l'origine.

**3.16** Une plaque conductrice infiniment longue et infiniment mince, de largeur  $a$ , est placée dans le plan  $xz$  entre l'axe  $z$  et un axe parallèle situé à  $x = a$ . Un courant uniforme  $I$  circule dans la plaque, dans la direction  $\hat{z}$ . Évaluer l'induction magnétique partout sur la moitié négative de l'axe  $x$ .

**3.17** Un électron se déplace à une vitesse  $v = 3 \times 10^7$  m/s et se trouve, à un instant donné, à une distance  $d = 10$  cm d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant  $I = 10$  A. Obtenir la force agissant sur l'électron si sa vitesse est (i) perpendiculaire au fil et orientée vers celui-ci; (ii) parallèle au fil et dans le sens opposé au courant  $I$ .



# Chapitre 4

## Divergence des vecteurs de champ

### 4.1 Loi de Gauss

Soit  $\vec{E}$  un champ électrique, et soit  $S$  une surface (ouverte ou fermée) avec élément  $d\vec{S}$  orienté. On définit alors le *flux du champ* à travers la surface comme

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (4.1)$$

Nous allons maintenant évaluer le flux du champ dû à une charge ponctuelle, à travers une surface fermée quelconque (sur laquelle  $d\vec{S}$  est orienté vers l'extérieur).

Choisissons le système de coordonnées de sorte que la charge soit située à l'origine. Le champ électrique en tout point est alors donné par  $\vec{E} = (q/4\pi\epsilon_0)\hat{r}/r^2$ .

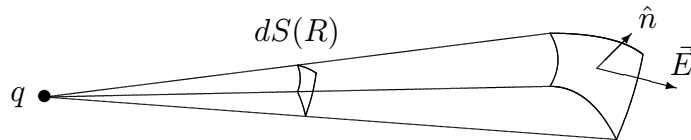


FIG. 4.1: Angle solide sous-tendu par un élément de surface.

Considérons un élément de surface  $d\vec{S} = \hat{n} dS$  situé à un point  $\vec{r}$  quelconque (figure 4.1). On a représenté, entre  $q$  et  $d\vec{S}$ , un élément  $dS(R)$  de surface sphérique (à une distance  $R$  de  $q$ ), sous-tendant à  $q$  le même “angle solide” que  $d\vec{S}$ . On a donc  $r^{-2}\hat{r} \cdot d\vec{S} = R^{-2}dS(R)$  quelle que soit la valeur de  $R$ . Ainsi,

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} dS(R). \quad (4.2)$$

Nous allons maintenant considérer séparément les cas où la charge est à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface fermée.

**i) Charge à l'intérieur de la surface**

Considérons une petite sphère de rayon  $R$ , centrée sur  $q$  et entièrement contenue dans  $S$ . La figure 4.2 illustre le cas bidimensionnel correspondant.

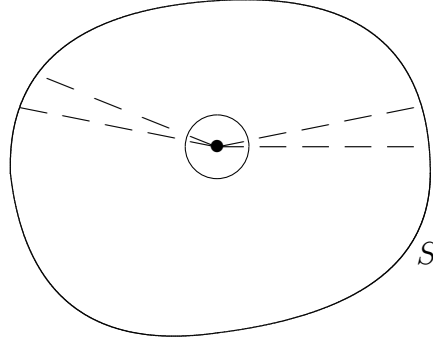


FIG. 4.2: Charge à l'intérieur d'une surface.

On a alors

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S(R)} \frac{1}{R^2} dS(R) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

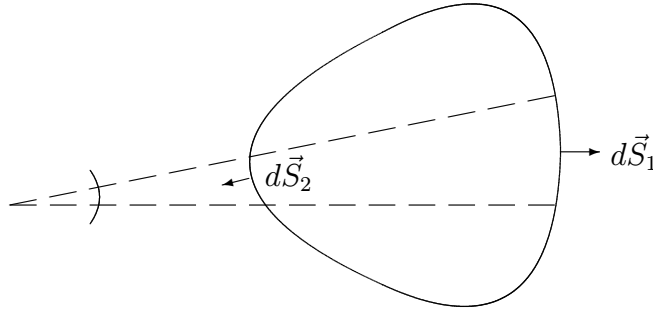
**ii) Charge à l'extérieur de la surface**

FIG. 4.3: Charge à l'extérieur d'une surface.

Ici, les contributions s'annulent deux à deux, comme l'illustre la figure 4.3. On a en effet

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{S}_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} dS(R), \\ \vec{E}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{S}_2 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} dS(R). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ainsi,

$$\vec{E}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{S}_1 + \vec{E}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{S}_2 = 0,$$

et donc

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.5)$$

Ainsi, le flux du champ à travers  $S$  est égal à  $q/\epsilon_0$  si  $q$  est à l'intérieur de  $S$ , et il s'annule si  $q$  est à l'extérieur de  $S$ .

Par le principe de superposition on voit que, pour plusieurs charges ponctuelles  $q_i$ ,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i (\text{à l'intérieur de } S). \quad (4.6)$$

Supposons maintenant qu'on ait une distribution continue de charge. On peut alors la diviser en un grand nombre d'éléments infinitésimaux, et appliquer le résultat précédent. On obtient donc, de manière tout à fait générale (à l'exception du cas où il y a une densité de surface de charge sur une partie de  $S$ )

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q(\text{dans } S). \quad (4.7)$$

C'est la *loi de Gauss*, dans sa forme intégrale.

**REMARQUE.** Une représentation très attrayante associe au champ électrique des lignes dont la direction coïncide avec celle du champ et dont la densité (par unité de surface) donne la grandeur du champ. Le flux (4.1) est alors proportionnel au nombre de lignes de champ passant à travers  $S$ . La loi de Gauss énonce que le nombre de lignes de champ sortant d'une surface fermée est proportionnel à la charge totale contenue à l'intérieur de la surface.

## 4.2 Applications

La loi de Gauss permet d'obtenir directement la valeur du champ électrique associé à certaines distributions de charge présentant un niveau élevé de symétrie.

### i) Couche sphérique uniformément chargée

Soit  $R$  le rayon de la couche sphérique et  $\sigma$  la densité de surface de charge. Choisissons les coordonnées de sorte que l'origine coïncide avec le centre de la sphère (figure 4.4).

Évaluons d'abord le champ à un point  $\vec{r}$  à l'extérieur de la couche. Par symétrie, il est clair que le champ est, au signe près, parallèle à  $\vec{r}$  et que sa grandeur est uniforme

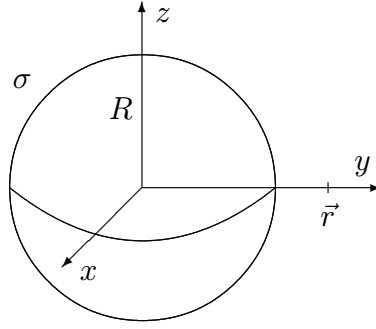


FIG. 4.4: Couche sphérique uniformément chargée.

sur la sphère de rayon  $r$ . On a donc  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ . Appliquons la loi de Gauss à la sphère de rayon  $r$ . On trouve

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_S E(r)\hat{r} \cdot d\vec{S} = \int_S E(r)dS \\ &= E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Par conséquent,

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^2. \quad (4.9)$$

Ici, bien sûr,  $Q$  est la charge totale sur la couche sphérique.

Pour  $\vec{r}$  à l'intérieur de la couche, on a encore  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ . L'application de la loi de Gauss donne  $E(r) = 0$ , puisqu'il n'y a pas de charges à l'intérieur de la sphère de rayon  $r$ .

Il est important de remarquer que le champ électrique produit à l'extérieur d'une couche sphérique de densité de charge uniforme est le même que le champ produit par une charge ponctuelle au centre de la couche, de grandeur égale à la charge totale sur la couche.

À la surface de la couche, le champ électrique est discontinu. Soit  $\Delta E$  la discontinuité de  $E(r)$ . On a

$$\begin{aligned} \Delta E &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \{E(R + \eta) - E(R - \eta)\} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{R + \eta}\right)^2 - 0 \right\} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

## ii) Distribution de charge centrale

Une distribution de charge centrale est telle que la densité de charge ne dépend que de la distance à un point fixe. Choissant ce point comme origine des coordonnées,

on a  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ .

Une distribution centrale peut être considérée comme la superposition de couches sphériques uniformément chargées, mais dont la densité de charge varie d'une couche à l'autre. Appliquons les résultats de l'exemple précédent. À un point  $\vec{r}$ , le champ est tel que  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ . Si l'on trace une sphère de rayon  $r$ , on voit que le champ est la résultante du champ de toutes les couches intérieures à la sphère (les couches extérieures ne contribuant pas). On a ainsi

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}, \quad (4.11)$$

où  $Q(r)$  est la charge totale contenue dans la sphère de rayon  $r$ .

### iii) Couche cylindrique uniformément chargée

Soit  $R$  le rayon du cylindre et  $\sigma$  la densité de surface de charge. Choisissons les coordonnées de sorte que l'axe du cylindre coïncide avec l'axe  $z$ . On suppose que le cylindre est infini (figure 4.5).

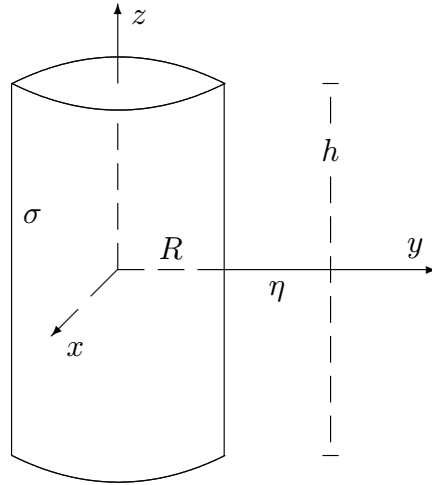


FIG. 4.5: Couche cylindrique uniformément chargée.

Évaluons le champ à un point  $\vec{r}$  situé à l'extérieur du cylindre. Appelons  $\eta$  la distance entre ce point et l'axe, et  $\hat{\eta}$  le vecteur unitaire qui va de l'axe au point  $\vec{r}$  (perpendiculairement à l'axe). Par symétrie, il est clair que le champ est dirigé suivant  $\hat{\eta}$  (à un signe près), et que sa grandeur est uniforme sur un cylindre de rayon  $\eta$ . On a ainsi

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\eta)\hat{\eta}, \quad \vec{\eta} = x\hat{x} + y\hat{y} = \vec{r} - z\hat{z}. \quad (4.12)$$

Appliquons la loi de Gauss à la surface suivante: une portion de cylindre de rayon  $\eta$  et de hauteur  $h$ , et les deux disques de rayon  $\eta$  en haut et en bas de cette portion. On a

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{\text{cyl}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{disque 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{disque 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{cyl}} E(\eta) \hat{\eta} \cdot \hat{\eta} dS + \int_{\text{disque 1}} E(\eta) \hat{\eta} \cdot \hat{z} dS + \int_{\text{disque 2}} E(\eta) \hat{\eta} \cdot (-\hat{z}) dS \\ &= E(\eta) 2\pi\eta h + 0 + 0 = \frac{Q(\text{dans } S)}{\epsilon_0} = \frac{2\pi R h \sigma}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Par conséquent,

$$E(\eta) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \eta}. \quad (4.14)$$

Manifestement, le champ s'annule à l'intérieur du cylindre.

On remarque que le champ électrique à l'extérieur d'une couche cylindrique infinie et uniformément chargée est le même que le champ produit par une densité linéique de charge sur l'axe, avec  $\lambda = 2\pi\sigma R$ . La discontinuité du champ à la surface du cylindre est égale à  $\sigma/\epsilon_0$ .

### 4.3 Divergence du champ électrique

Soit  $\rho(\vec{r})$  une densité de charge quelconque. Soit  $V$  un volume quelconque. La charge totale contenue dans  $V$  est donnée par

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV. \quad (4.15)$$

Par ailleurs, si  $S$  est la surface bornant  $V$  et si  $\vec{E}$  est le champ électrique, on a de la loi de Gauss

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV, \quad (4.16)$$

où la dernière égalité vient du théorème de la divergence. Comparant les éqs. (4.15) et (4.16), on trouve

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) dV. \quad (4.17)$$

Cette égalité étant vraie pour tout volume  $V$ , on obtient que<sup>1</sup>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.18)$$

<sup>1</sup>Pour se convaincre de ce résultat, il suffit de considérer autour du point  $\vec{r}$  un volume  $\delta V$  très petit, sur lequel  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  et  $\rho$  sont essentiellement uniformes.



Le résultat que nous venons d'obtenir s'appelle la *loi de Gauss* sous forme différentielle. Il est important de noter que  $\rho(\vec{r})$  représente la densité totale de charge.

## 4.4 Conducteurs

Un *conducteur* est un matériau où des charges électriques peuvent se déplacer librement. En fait, ces charges sont les électrons de la bande de conduction. Les autres électrons restent localisés autour des noyaux, eux-mêmes immobiles relativement aux noeuds du réseau cristallin.

Supposons qu'on essaie d'induire un champ électrique dans un conducteur, par exemple en approchant des charges extérieures. Alors le champ met en mouvement les charges libres du conducteur. Cette modification de la distribution de charge modifie en retour le champ, jusqu'à ce qu'à l'équilibre, le champ s'annule partout dans le conducteur. Cet équilibre est atteint extrêmement vite pour un bon conducteur, dans des temps de l'ordre de  $10^{-17}$  s.

Puisque le champ s'annule partout à l'intérieur d'un conducteur, la densité totale de charge s'annule aussi ( $\rho \sim \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ ). Les charges nettes se trouvent donc toutes à la surface du conducteur.

La présence de charges nettes à la surface d'un conducteur peut être due à une charge totale non nulle sur le conducteur, à des champs externes ou aux deux. Quoi qu'il en soit, les charges de surface se disposent de manière à annuler le champ à l'intérieur.

Considérons un conducteur creux, sans charge nette nulle part dans le trou. Le champ est alors nul partout dans le conducteur et dans le trou, quoi qu'il se passe à l'extérieur. C'est le phénomène de *blindage électrostatique*. S'il y a une charge nette dans le trou, des charges se disposent à la surface interne du conducteur (de manière à annuler le champ) et le blindage tient toujours.

À la surface d'un conducteur, le champ ne peut être que perpendiculaire. Si, en effet, il y avait une composante tangentielle non nulle, alors les charges se déplaceraient immédiatement de manière à annuler cette composante.

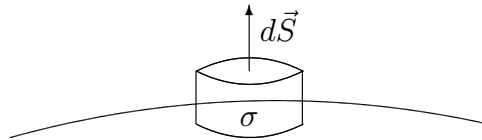


FIG. 4.6: Calcul du champ électrique à la surface d'un conducteur.

La loi de Gauss permet de calculer la valeur du champ à la surface d'un conducteur. Soit  $\sigma$  la densité de surface de charge en un point donné (figure 4.6). Traçons un petit

cylindre autour du point. On a  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ , sauf sur le disque externe où  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E_n dS$  ( $E_n$  positif ou négatif). Ainsi,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \quad (4.19)$$

et donc  $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

## 4.5 Divergence de l'induction magnétique

Soit  $f = f(r)$  et soit  $\vec{c}$  un vecteur uniforme. Il est aisé de montrer (ex. 2.15) que  $\vec{\nabla} \cdot \{f\vec{c} \times \vec{r}\} = 0$ . Utilisant l'ex. (2.14), l'exemple (ii) de la p. 5 et l'exemple (c) de la p. 6, on voit en effet que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \{f(r)\vec{c} \times \vec{r}\} &= f\vec{\nabla} \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) + (\vec{\nabla} f) \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) \\ &= f \times 0 + \frac{df}{dr} \hat{r} \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Cette relation reste valable si l'on remplace  $\vec{r}$  par  $\vec{r} - \vec{a}$ , où  $\vec{a}$  est un vecteur uniforme. En effet, désignant par un indice les variables par rapport auxquelles on dérive, et posant  $\vec{s} = \vec{r} - \vec{a}$ , on a  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s_x}$ , etc., de sorte que  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} = \vec{\nabla}_{\vec{s}}$ . Ainsi,

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \{f(|\vec{r} - \vec{a}|) \vec{c} \times (\vec{r} - \vec{a})\} = \vec{\nabla}_{\vec{s}} \cdot \{f(s)\vec{c} \times \vec{s}\} = 0. \quad (4.21)$$

Nous allons maintenant utiliser cette relation pour calculer la divergence de l'induction magnétique produite par une densité de courant uniforme. De l'éq. (3.12), on a

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (4.22)$$

Ainsi,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') \right\} dV' = 0, \quad (4.23)$$

puisque  $\vec{r}'$  est fixe dans le processus de différenciation par rapport à  $\vec{r}$ .

C'est dire que la divergence de  $\vec{B}$  s'annule. Par le théorème de la divergence, cela signifie que le flux de  $\vec{B}$  (c'est-à-dire, son intégrale de surface) s'annule sur toute surface fermée. Notons ici que les unités du flux de  $B$  sont des webers ( $\text{Wb} = \text{T m}^2$ ).

## 4.6 Champs microscopiques et champs macroscopiques

Bien que nous les ayons obtenues dans le contexte de l'électrostatique et de la magnétostatique, les équations

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.24)$$

ont, en électromagnétisme, une validité universelle. Ceci, cependant, suppose une description microscopique des charges et des champs. La densité  $\rho$ , par exemple, vient des charges portées par les particules élémentaires, et  $\vec{E}$  est le champ produit par cette densité, qui varie sur des distances microscopiques. Les équations pour la divergence de  $\vec{E}$  et de  $\vec{B}$  sont deux des quatre équations de Maxwell.

Dans plusieurs circonstances, il est très utile de définir des champs macroscopiques comme des moyennes des champs microscopiques, sur des volumes petits à notre échelle mais grands par rapport aux atomes. On définit également des densités macroscopiques de charge et de courant. Ce faisant, on ne s'attend pas que les relations entre champs et sources macroscopiques soient nécessairement les mêmes que les relations entre champs et sources microscopiques. Et de fait, ces relations diffèrent (comme on le verra) dans les isolants et les milieux magnétiques.

Les conducteurs fournissent un bon exemple de la différence entre quantités microscopiques et macroscopiques. Manifestement, ni la densité de charge microscopique ni le champ électrique microscopique ne s'annulent dans le conducteur. Ce sont les quantités macroscopiques qui s'annulent. Pour un conducteur, on peut montrer que la relation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  (ou sa généralisation aux milieux diélectriques) vaut aussi pour les champs macroscopiques.

Il en est de même, dans un conducteur, de la densité de courant, qui n'est certainement pas uniforme au niveau microscopique. C'est la densité macroscopique qui peut être uniforme. La relation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  vaut aussi pour le champ macroscopique.

Notons, en terminant, que la relation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  implique qu'il n'existe pas de "charges" magnétiques, c'est-à-dire de points d'origine des lignes de champ magnétique.

## 4.7 Exercices

4.1 On considère la distribution de charge

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(a/r) & \text{si } 0 < r < a, \\ 0 & \text{si } r > a, \end{cases}$$

où  $\rho_0$  et  $a$  sont des constantes. Calculer le champ électrique (sa grandeur et sa direction) pour  $r < a$  et  $r > a$ .

**4.2** Évaluer, en calculant les dérivées, la divergence du champ obtenu à l'ex. (4.1). On devrait retrouver ainsi la distribution de charge initiale.

**4.3** Reprendre l'ex. (4.1) avec la distribution de charge suivante:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } 0 < r < a, \\ 0 & \text{si } r > a. \end{cases}$$

**4.4** Reprendre l'ex. (4.1) avec la distribution de charge suivante:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0(r/a) & \text{si } 0 < r < a, \\ 0 & \text{si } r > a. \end{cases}$$

**4.5** Obtenir, à tout point  $\vec{r} \neq 0$ , la divergence du champ produit par une charge ponctuelle à l'origine.

**4.6** Utiliser la loi de Gauss pour obtenir (i) le champ dû à un fil rectiligne infini uniformément chargé et (ii) le champ dû à un plan infini uniformément chargé.

**4.7** Un cylindre infini de rayon  $R$  a, dans son volume, une densité de charge uniforme  $\rho_0$ . Utiliser la loi de Gauss pour obtenir le champ électrique partout à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

**4.8** Le cuivre a un poids atomique de 63.5 et une densité de  $8.96 \text{ g/cm}^3$ . Un seul électron par atome participe à la conduction électrique. Évaluer le nombre d'électrons de conduction par unité de volume. Si un courant de 1 A circule dans un fil de  $1 \text{ mm}^2$  de section, quelle est la vitesse moyenne des électrons?

**4.9** Deux plaques conductrices minces et carrées d'aire  $L^2$  sont séparées d'une distance  $\eta$ , où  $\eta \ll L$ . Elles portent des charges totales  $Q$  et  $-Q$ , respectivement. Comment les charges se répartissent-elles, en première approximation? Quelle est la force exercée par une plaque sur l'autre?

**4.10** Vérifier que la divergence de l'induction magnétique due à un fil rectiligne infini porteur d'un courant  $I$  s'annule. [Attention! Bien exprimer l'induction à tout point  $(x, y, z)$ .]

# Chapitre 5

## Potentiel

### 5.1 Potentiel électrique

Dans cette section, nous aurons besoin de connaître le gradient de  $|\vec{r} - \vec{a}|^{-1}$ , où  $\vec{a}$  est un vecteur uniforme. Évaluons-le:

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \hat{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (5.1)$$

Posant  $\vec{s} = \vec{r} - \vec{a}$  et sachant que  $\vec{\nabla}_{\vec{s}} = \vec{\nabla}_{\vec{r}}$ , on trouve que

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right) = \vec{\nabla}_{\vec{s}} \left( \frac{1}{s} \right) = -\frac{\vec{s}}{s^3} = -\frac{(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}. \quad (5.2)$$

Il est aisé, par ailleurs, de vérifier ce résultat directement.

Soit  $\rho(\vec{r})$  une distribution de charge et soit  $\vec{E}(\vec{r})$  le champ électrostatique produit par cette distribution. Nous allons montrer que  $\vec{E}$  est le gradient d'une fonction scalaire. En effet, à partir de l'éq. (3.7), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') (-1) \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= -\vec{\nabla} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

où

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (5.4)$$

Dans l'éq. (5.3), nous avons pu extraire l'opérateur  $\nabla_{\vec{r}}$  de l'intégrale puisque celle-ci est effectuée sur les variables  $\vec{r}'$ .

Il est clair que la relation  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  vaut aussi pour le champ produit par des charges discrètes. On a alors

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (5.5)$$

La fonction  $V$  s'appelle le *potentiel électrique*. Le potentiel ne fait intervenir qu'une seule intégrale scalaire. Par conséquent, il est en général plus simple de calculer le champ électrique à partir de  $V$  que directement.

Les unités de champ électrique sont des  $\text{N C}^{-1}$ . Les unités de potentiel sont donc des  $\text{N m C}^{-1} = \text{J C}^{-1}$ , qu'on appelle des volts (V). En retour, le champ électrique peut s'exprimer en  $\text{V m}^{-1}$ .

Terminons cette section par quelques remarques importantes.

1. Le potentiel, comme nous l'avons défini, s'annule à l'infini (pour une distribution de charge finie et bornée). On peut, cependant, lui ajouter une constante sans changer le champ. Cette constante peut être ajustée de manière que  $V$  s'annule ailleurs qu'à l'infini.
2. Le champ est dirigé à l'opposé de la direction de variation maximum de  $V$ . La composante de  $\vec{E}$  dans une direction où  $V$  ne varie pas s'annule. Autrement dit,  $\vec{E}$  est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.
3. Indépendamment du parcours d'intégration,  $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(a) - V(b)$ .
4. Le potentiel est uniforme partout dans un conducteur, y compris à la surface.
5. On a  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ . Cette relation, cependant, n'est plus valable hors du domaine de l'électrostatique (où, par conséquent, le champ n'est plus le gradient d'une fonction scalaire).

## 5.2 Applications

Nous allons évaluer le potentiel électrique dans trois situations. Dans les deux premières, nous utiliserons les formules développées à la section précédente, c'est-à-dire les éqs. (5.5) et (5.4). Dans la dernière, nous utiliserons un calcul préalable du champ électrique.

## i) Dipôle électrique

Un dipôle électrique est constitué de deux charges de grandeur égale et de signe contraire. Choisissons les coordonnées de sorte que les charges soient situées sur l'axe  $z$ , aux points  $z = -a$  et  $z = +a$ , respectivement (figure 5.1). De l'éq. (5.5), on a ( $q > 0$ )

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - a\hat{z}|} + \frac{-q}{|\vec{r} + a\hat{z}|} \right\}. \quad (5.6)$$

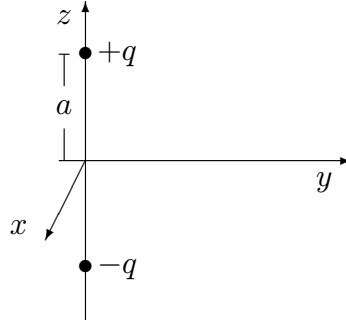


FIG. 5.1: Dipôle électrique.

Supposons que  $r \gg a$ . Alors, par le binôme de Newton (eq. 3.25),

$$\begin{aligned} |\vec{r} - a\hat{z}|^{-1} &= \left\{ r^2 + a^2 - 2a\vec{r} \cdot \hat{z} \right\}^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{2a}{r} \hat{r} \cdot \hat{z} + \frac{a^2}{r^2} \right\}^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{a}{r} \hat{r} \cdot \hat{z} \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

et donc

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} \left[ 1 + \frac{a}{r} \hat{r} \cdot \hat{z} \right] - \frac{q}{r} \left[ 1 - \frac{a}{r} \hat{r} \cdot \hat{z} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2qa\hat{r} \cdot \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{p} \cdot \hat{r}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

où  $\vec{p} = 2qa\hat{z}$  s'appelle le *moment dipolaire*. En général,  $\vec{p}$  est le produit de la charge, de la distance entre les charges et du vecteur unitaire qui va de  $-q$  à  $+q$ . L'expression de  $V(\vec{r})$  en termes du moment dipolaire est générale, c'est-à-dire qu'elle vaut quelle que soit la direction de ce dernier. Notons que  $V$  dépend de  $r$  et de  $\theta$ , l'angle entre  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$ .

Évaluons le champ produit par le dipôle. Pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ ,

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f, \quad (5.9)$$

et donc

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\left\{\frac{1}{r^3}\vec{p}\cdot\vec{r}\right\} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3}\vec{p} + \vec{p}\cdot\vec{r}\left(\frac{-3}{r^4}\right)\hat{r}\right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5}\left\{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}\right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left\{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right\}.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Remarquons que le champ d'un dipôle décroît comme  $1/r^3$ .

## ii) Fil circulaire uniformément chargé

Choisissons les coordonnées de sorte que le fil soit centré à l'origine et situé dans le plan  $xy$  (figure 5.2). Nous allons évaluer le potentiel dans ce plan. Sans perte de généralité, nous pouvons nous placer sur l'axe  $y$ .

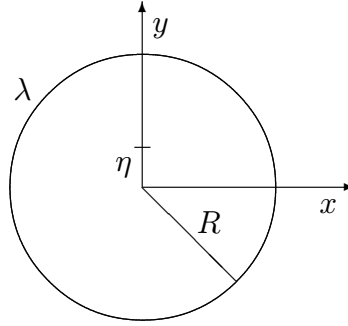


FIG. 5.2: Fil uniformément chargé.

Soit  $\lambda$  la densité linéique de charge. Le potentiel au point  $\vec{r} = (0, \eta, 0)$  est donné par

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda dl'}{|\hat{y}\eta - \vec{r}'|} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi}{|\hat{y}\eta - (R \cos \varphi \hat{x} + R \sin \varphi \hat{y})|} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi}{\{R^2 \cos^2 \varphi + (\eta - R \sin \varphi)^2\}^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left\{1 - \frac{2\eta}{R} \sin \varphi + \frac{\eta^2}{R^2}\right\}^{1/2}}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Cette intégrale ne s'évalue pas sous forme close. Dans le cas où  $\eta \ll R$ , on peut utiliser le binôme de Newton (éq. 3.25) et obtenir

$$\begin{aligned}\left\{1 - \frac{2\eta}{R} \sin \varphi + \frac{\eta^2}{R^2}\right\}^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2\eta}{R} \sin \varphi + \frac{\eta^2}{R^2}\right) + \frac{3}{8} \left(-\frac{2\eta}{R} \sin \varphi + \frac{\eta^2}{R^2}\right)^2 + \dots \\ &\approx 1 + \frac{\eta}{R} \sin \varphi + \frac{\eta^2}{R^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right).\end{aligned}\quad (5.12)$$



On trouve ainsi, approximativement,

$$\begin{aligned} V(0, \eta, 0) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{\eta}{R} \sin \varphi + \frac{\eta^2}{R^2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \right\} d\varphi \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 2\pi + \frac{\eta^2}{R^2} \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Par symétrie, il est clair que le champ au point  $(0, \eta, 0)$  est dirigé suivant l'axe  $y$ . On a

$$E_y = \left[ -\frac{\partial}{\partial y} V(0, y, 0) \right]_{\eta} = -\frac{\lambda\eta}{4\epsilon_0 R^2}, \quad \eta \ll R. \quad (5.14)$$

### iii) Sphère uniformément chargée

Considérons une sphère de rayon  $R$ , centrée à l'origine, dans laquelle se trouve une densité de charge uniforme  $\rho$ . Nous allons calculer le potentiel à partir du champ. De la loi de Gauss, on a

$$\vec{E} = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (5.15)$$

Ici,  $Q(r)$  est la charge à l'intérieur du rayon  $r$ , c'est-à-dire (ex. 4.3)

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho & \text{si } r < R, \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \rho & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (5.16)$$

Pour  $r < R$ , le champ est donné par

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}, \quad (5.17)$$

de sorte que

$$V(\vec{r}) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + C_1, \quad (5.18)$$

où  $C_1$  est une constante arbitraire.

Pour  $r > R$ ,

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (5.19)$$

de sorte que

$$V(\vec{r}) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2, \quad (5.20)$$

où  $C_2$  est une autre constante.

Si l'on pose  $V(\infty) = 0$ , la constante  $C_2$  s'annule.  $C_1$  est alors déterminée par la continuité de  $V$  à  $r = R$ . On trouve finalement

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) & \text{si } r < R, \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (5.21)$$

### 5.3 Équations de Poisson et de Laplace

Le calcul du potentiel électrique au moyen de la formule générale suppose qu'on connaît la distribution de charge  $\rho(\vec{r})$ . Mais ce n'est pas toujours le cas. Dans plusieurs circonstances, on connaît le potentiel sur une surface fermée (dont une portion peut être située à l'infini), et on le cherche à l'intérieur de cette surface. Considérons, par exemple, les deux conducteurs illustrés à la figure 5.3. Le potentiel est égal à  $V_1$  dans le premier conducteur, et à  $V_2$  dans le second. Il s'annule à l'infini.



FIG. 5.3: Deux conducteurs isolés.

Nous cherchons  $V(\vec{r})$  partout à l'extérieur des conducteurs, c'est-à-dire dans la portion d'espace bornée par les surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S$ , où  $S$  est la surface à l'infini. La solution de tels problèmes passe par l'obtention d'une équation différentielle pour  $V(\vec{r})$ . Ceci est aisé. En effet,

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = -\nabla^2 V. \quad (5.22)$$

C'est l'équation de Poisson. Dans le cas où la densité de charge s'annule à l'intérieur de la région d'intérêt, on a

$$\nabla^2 V = 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (5.23)$$

C'est l'équation de Laplace.

On peut montrer que, si le potentiel est spécifié sur une surface fermée, alors l'équation de Laplace possède une solution unique à l'intérieur de cette surface. C'est la solution du problème que nous avons énoncé plus haut.

Il existe plusieurs méthodes analytiques de solution de l'équation de Laplace (Boridy, 1990, sections 4.8 et 4.9). Nous allons ici, très brièvement, développer une méthode numérique de solution, pour une géométrie simple, et en deux dimensions.

Pour ce faire, nous avons besoin de formules approximatives pour les dérivées secondes de  $V$ . Soit  $f(x)$  une fonction de  $x$ . Si  $\Delta x$  est suffisamment petit, la dérivée de  $f$  est approximativement donnée par

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta} \left\{ f\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta}{2}\right) \right\}. \quad (5.24)$$

Pour la dérivée seconde, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left( \frac{df}{dx} \right)_{x+\frac{\Delta}{2}} - \left( \frac{df}{dx} \right)_{x-\frac{\Delta}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{\Delta} [f(x + \Delta) - f(x)] - \frac{1}{\Delta} [f(x) - f(x - \Delta)] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left\{ f(x + \Delta) + f(x - \Delta) - 2f(x) \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Appliquant cette formule au potentiel, on trouve

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ V(x + \Delta, y) + V(x - \Delta, y) - 2V(x, y) \right\}, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ V(x, y + \Delta) + V(x, y - \Delta) - 2V(x, y) \right\}. \quad (5.27)$$

L'équation de Laplace en deux dimensions devient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left\{ V(x + \Delta, y) + V(x - \Delta, y) - 2V(x, y) \right. \\ &\quad \left. + V(x, y + \Delta) + V(x, y - \Delta) - 2V(x, y) \right\}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

et donc

$$V(x, y) = \frac{1}{4} \left\{ V(x + \Delta, y) + V(x - \Delta, y) + V(x, y + \Delta) + V(x, y - \Delta) \right\}. \quad (5.29)$$

Considérons une région rectangulaire, et quadrillons-la de petits carrés de côté  $\Delta$ , comme l'illustre la figure 5.4.

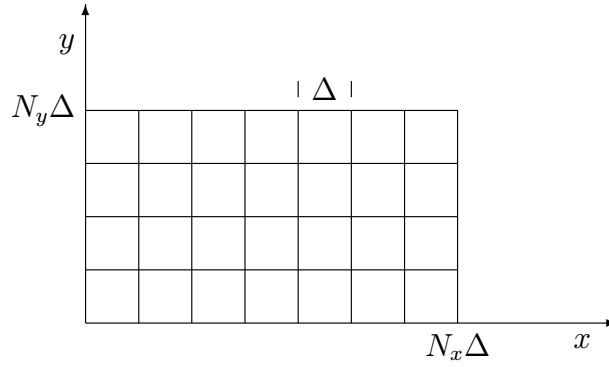


FIG. 5.4: Maillage d'une région rectangulaire.

Désignons par  $(i, j)$  les noeuds du réseau, où  $i$  et  $j$  sont des entiers tels que  $0 \leq i \leq N_x$  et  $0 \leq j \leq N_y$ . Notons  $V(i, j)$  le potentiel au point  $x = i\Delta$ ,  $y = j\Delta$ , c'est-à-dire  $V(i, j) \equiv V(i\Delta, j\Delta)$ . L'équation de Laplace s'écrit alors comme

$$V(i, j) = \frac{1}{4} \{V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1)\}. \quad (5.30)$$

Le problème consiste à trouver les valeurs de  $V(i, j)$  à l'intérieur de la région à partir des valeurs aux bornes, qui sont données. Celles-ci sont  $V(0, j)$  et  $V(N_x, j)$  pour  $0 \leq j \leq N_y$ , et  $V(i, 0)$  et  $V(i, N_y)$  pour  $0 \leq i \leq N_x$ .

Pour résoudre le problème, on donne des valeurs initiales (zéro, par exemple) aux  $V(i, j)$  à l'intérieur de la région. Dans une première étape, on trouve des valeurs améliorées en appliquant l'éq. (5.30) à tous les points intérieurs. Dans une seconde étape, on se sert des valeurs de  $V(i, j)$  déjà obtenues pour en obtenir de meilleures, en appliquant de nouveau l'éq. (5.30) à tous les points intérieurs. On répète la procédure un grand nombre de fois, jusqu'à l'obtention de la précision voulue. Il est important de remarquer que les valeurs de  $V(i, j)$  aux bornes ne changent pas, mais restent ajustées aux valeurs données.

Le résultat de ce calcul est une approximation discrète du potentiel sur les noeuds du réseau. Il est aisé d'obtenir une approximation discrète du champ électrique en posant, par exemple,<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \vec{E}(i, j) &\equiv \vec{E}(x = i\Delta, y = j\Delta) = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} \\ &= -\left\{ \frac{V(i+1, j) - V(i, j)}{\Delta} \right\} \hat{x} - \left\{ \frac{V(i, j+1) - V(i, j)}{\Delta} \right\} \hat{y}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Par ailleurs, on peut utiliser diverses méthodes d'interpolation pour extraire des valeurs de  $V(i, j)$  une approximation continue de  $V$ . Ceci, cependant, dépasse le cadre

<sup>1</sup>Plus exactement, ceci représente le champ comme  $E_x(x + \frac{\Delta}{2}, y) \hat{x} + E_y(x, y + \frac{\Delta}{2}) \hat{y}$ .

de la discussion.

La généralisation à trois dimensions est immédiate. L'adaptation à des surfaces irrégulières, par contre, est plus compliquée.

Le tableau 5.1 présente un programme simple, écrit en Maple V, qui obtient le potentiel discret sur la région rectangulaire illustrée à la figure 5.4. Les fonctions **fg** et **fd** servent à définir les conditions aux limites sur les lignes verticales, c'est-à-dire les valeurs de  $V(0, j)$  et  $V(N_x, j)$ . Les fonctions **fb** et **fh** servent à définir les conditions aux limites sur les lignes horizontales, c'est-à-dire les valeurs de  $V(i, 0)$  et  $V(i, N_y)$ . La variable **pre** est reliée à la précision voulue.

## 5.4 Potentiel magnétique

Nous avons vu que l'induction magnétique a une divergence nulle. Ceci signifie qu'il existe un champ vectoriel  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . En fait, il en existe plusieurs. Si, en effet,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , alors pour tout champ scalaire  $f$ , le champ  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$  est tel que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$ .

Quoi qu'il en soit, il est aisé de trouver au moins un  $\vec{A}$ . En effet, on a des éqs. (3.12) et (2.17)

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left\{ \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{j}(\vec{r}') \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') dV' = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

où

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (5.33)$$

Le champ  $\vec{A}(\vec{r})$  est appelé *potentiel vecteur magnétique* (ou simplement *potentiel vecteur*, par opposition au potentiel scalaire  $V$ ).

Nous allons maintenant montrer que la divergence du potentiel vecteur, défini à l'éq. (5.33), s'annule. Notons, cependant, que ceci n'est pas une équation fondamentale. En effet, la divergence de  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$  ne s'annule pas, en général, et  $\vec{A}'$  est un potentiel vecteur tout aussi adéquat.

Notons d'abord que, dans le cas qui nous intéresse présentement (courant continu et densité de charge nulle), la divergence de  $\vec{j}(\vec{r})$  s'annule. Si tel n'était pas le cas,

```

lapl:= proc(fb,fd,fh,fg,del,Nx,Ny,pre);
  V:= array(sparse,0..Nx,0..Ny);
  for i from 0 by 1 to Nx do
    V[i,0]:= fb(i*del);
    V[i,Ny]:= fh(i*del);
  od;
  for j from 0 by 1 to Ny do
    V[0,j]:= fg(j*del);
    V[Nx,j]:= fd(j*del);
  od;
  ncount:= 0;
  Vtest:= 0;
  while ncount <= max(Nx,Ny)
  or pre <= abs(Vtest - V[trunc(Nx/2),trunc(Ny/2)]) do
    ncount:= ncount + 1;
    Vtest:= V[trunc(Nx/2),trunc(Ny/2)];
    for i from 1 by 1 to Nx-1 do
      for j from 1 by 1 to Ny-1 do
        V[i,j]:= evalf(V[i-1,j] + V[i+1,j]
          + V[i,j-1] + V[i,j+1])/4;
      od;
    od;
    od;
    S:= ;
    for i from 0 by 1 to Nx do
      for j from 0 by 1 to Ny do
        S:= op(S),[i*del,j*del,V[i,j]];
      od;
    od;
    plots[pointplot3d](S,axes=BOXED,shading=Z);
  end;
  # Exemple de données
  fb:= x -> 1-x;
  fd:= y -> 0;
  fh:= x -> 1-x**3;
  fg:= y -> 1;
  del:= 0.04;
  Nx:= 25;
  Ny:= 25;
  pre:= 0.0005;
  lapl(fb,fd,fh,fg,del,Nx,Ny,pre);

```

TAB. 5.1: Procédure pour résoudre l'équation de Laplace en deux dimensions.

on aurait pour une certaine surface fermée  $S$ ,

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV \neq 0, \quad (5.34)$$

auquel cas il y aurait accumulation de charge à l'intérieur de  $S$ . Ceci dit on trouve, en utilisant deux fois l'éq. (2.16), que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \left\{ \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{j}(\vec{r}') + \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left( \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}') \right\} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Ici,  $S'$  borne le volume où les courants circulent. Manifestement,  $\vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' = 0$ , autrement les courants sortiraient du volume (ou des charges s'accumuleraient). L'intégrale précédente s'annule, et donc  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ .

Revenons maintenant à l'expression de  $\vec{A}$  en termes de  $\vec{j}$ , c'est-à-dire l'éq. (5.33). Chaque composante de  $\vec{A}$  est liée à la composante correspondante de  $\vec{j}$  de la même manière que  $V$  est lié à  $\rho$  (sauf que  $\mu_0$  remplace  $\frac{1}{\epsilon_0}$ ). Ainsi, comme à l'éq. (5.22),

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z \quad (5.36)$$

et donc,

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (5.37)$$

Chaque composante de  $\vec{A}$  satisfait à l'équation de Poisson.

## 5.5 Dipôle magnétique

À titre d'application, nous allons calculer le potentiel vecteur produit loin d'une petite boucle circulaire de courant (figure 5.5).

Il est clair que, dans le cas d'un circuit filiforme

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.38)$$

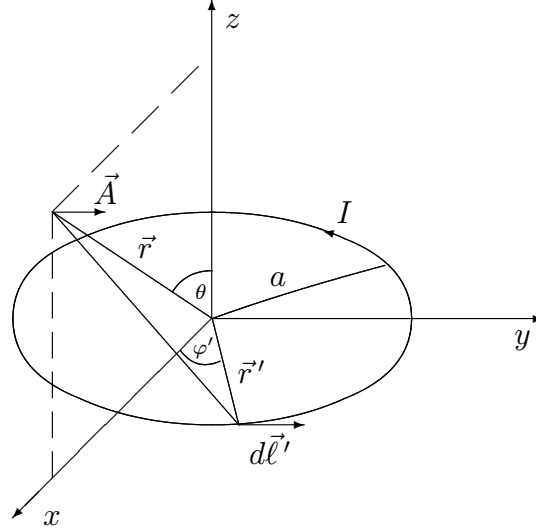


FIG. 5.5: Boucle circulaire de courant.

Évaluons  $\vec{A}$  quelque part dans le plan  $xz$ . Manifestement,  $A_z = 0$ , puisque  $d\vec{\ell}'$  n'a pas de composante suivant  $z$ . Par symétrie,  $A_x = 0$ . Par ailleurs, on voit que  $(d\vec{\ell}')_y = a d\varphi' \cos \varphi'$ . Soit  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
 A_y(x, 0, z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \varphi' d\varphi'}{|(x - a \cos \varphi')^2 + (a \sin \varphi')^2 + z^2|^{1/2}} \\
 &= \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{r \left\{ 1 - \frac{2ax}{r^2} \cos \varphi' + \frac{a^2}{r^2} \right\}^{1/2}} \\
 &\approx \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{ax}{r^2} \cos \varphi' \right\} \cos \varphi' d\varphi' \\
 &\approx \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \frac{ax}{r^3} \pi = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2}.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Définissons un vecteur  $\vec{m}$  comme  $\vec{m} = I\pi a^2 \hat{z}$ . Autrement dit,  $\vec{m}$  est un vecteur dont la grandeur est égale au produit du courant par l'aire de la boucle, et dont la direction est perpendiculaire au plan de la boucle. Le vecteur  $\vec{m}$  s'appelle le *moment dipolaire magnétique* de la boucle. Il est clair que, peu importe l'orientation,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}. \tag{5.40}$$

En effet, cette expression coïncide avec celle que nous avons obtenue dans le cas où  $\vec{r}$  est dans le plan  $xz$ , et elle a les propriétés de symétrie correctes. Elle est valable, bien sûr, lorsque  $a \ll r$ . On peut montrer que l'éq. (5.40) est valable quelle que



soit la forme de la boucle de courant, pourvu qu'on définisse  $\vec{m}$  de façon appropriée (Jackson, 1999, section 5.6).

Il est aisé d'obtenir l'induction magnétique associée au potentiel vecteur d'un dipôle. On a, des éqs. (2.17) et (2.8) et des exemples (ii) de la p. 5 et (iii) de la p. 6,

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left\{ \frac{1}{r^3} \vec{m} \times \vec{r} \right\} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \vec{r}) + \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) \times (\vec{m} \times \vec{r}) \right\} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} 2\vec{m} - \frac{3}{r^4} \hat{r} \times (\vec{m} \times \vec{r}) \right\} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} 2\vec{m} - \frac{3}{r^4} (\vec{m}r - \vec{r}(\vec{m} \cdot \hat{r})) \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \{ 3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m} \}.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Ainsi, l'induction magnétique associée à un dipôle magnétique a exactement la même forme que le champ électrique associé à un dipôle électrique.

## 5.6 La loi d'Ampère

Nous avons vu que le potentiel vecteur est lié à la densité de courant par l'éq. (5.37). Établissons maintenant la relation entre l'induction magnétique et la densité de courant. Pour ce faire, nous aurons besoin de l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \tag{5.42}$$

On a

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \tag{5.43}$$

Cette relation constitue la *loi d'Ampère* (sous forme différentielle).<sup>2</sup> On peut la transformer en une relation intégrale en l'intégrant sur une surface ouverte  $S$  bornée par un contour  $C$ :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I. \tag{5.44}$$

Ici,  $I$  est le courant total qui traverse la surface  $S$ .

À titre d'application, nous allons calculer l'induction magnétique produite par la bobine toroïdale illustrée à la figure 5.6, dans le plan de symétrie.

Soit  $I$  le courant circulant dans le fil, et soit  $N$  le nombre de tours (uniformément et faiblement espacés) de la bobine.

<sup>2</sup>Cette terminologie n'est pas très appropriée. Voir là-dessus Erlichson (1999).

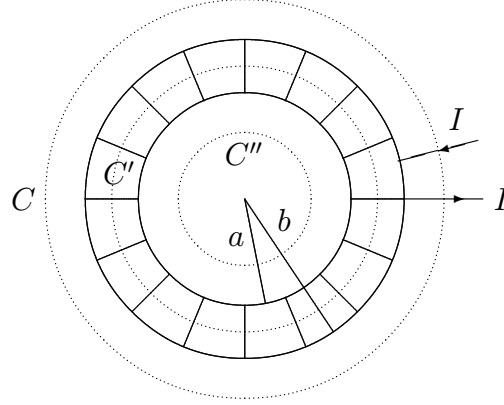


FIG. 5.6: Bobine toroïdale.

Par symétrie, les lignes de champ de l'induction magnétique doivent être des cercles centrés sur l'axe du tore. La grandeur de  $B$  est uniforme sur chacun des cercles. Considérons les trois contours  $C, C'$  et  $C''$  illustrés. Les courants totaux circulant à l'intérieur de ces contours sont, respectivement,  $NI - NI = 0$ ,  $NI$  et  $0$ . Par la loi d'Ampère, on a donc ( $\rho$  désigne le rayon de chaque contour)

$$\begin{aligned}
 \rho < a : \quad \int_{C''} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= 2\pi\rho B = 0 & \Rightarrow B = 0, \\
 a < \rho < b : \quad \int_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= 2\pi\rho B = NI\mu_0 & \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}, \\
 b < \rho : \quad \int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= 2\pi\rho B = 0 & \Rightarrow B = 0.
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Augmentons maintenant  $a$  et  $b$  de sorte que  $b - a$  reste fixe, et augmentons  $N$  de sorte que  $N/2\pi R_m$ , où  $R_m = \frac{1}{2}(a + b)$ , soit fixe. Posons  $N_\ell = N/2\pi R_m$ , où  $N_\ell$  représente le nombre de tours par unité de longueur. À la limite, lorsque  $a, b$  et  $N \rightarrow \infty$ , la bobine devient un solénoïde infini, et on a à l'intérieur une induction uniforme et égale à  $\mu_0 N_\ell I$ . Ce résultat est important: le champ à l'intérieur d'un long solénoïde est essentiellement uniforme, et il s'annule à l'extérieur du solénoïde (spécifiquement, aux bords de celui-ci; plus loin, il ne s'annule pas).

## 5.7 Conclusion

En électrostatique, le champ électrique s'obtient d'un potentiel scalaire, et son rotationnel s'annule. Ceci, cependant, n'est plus vrai lorsque les champs dépendent du temps.

L'induction magnétique peut toujours s'exprimer comme le rotationnel d'un potentiel vecteur. En magnétostatique, le rotationnel de l'induction magnétique est égal

à  $\mu_0 \vec{j}$ , mais ceci n'est plus vrai lorsque les champs dépendent du temps.

Ainsi, les équations

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.46)$$

sont toujours vraies, tandis que la validité des équations

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (5.47)$$

est restreinte à l'électrostatique et à la magnétostatique.

Le tableau 5.2 complète le tableau 3.1 de la p. 23.

Quantités		Unités
Flux de l'induction magnétique	$\Phi_B$	$\text{Wb} = \text{T m}^2$
Potentiel électrique	$V$	$\text{V} = \text{J C}^{-1}$
Induction magnétique	$B$	$\text{Wb m}^{-2}$
Champ électrique	$E$	$\text{V m}^{-1}$
Moment dipolaire électrique	$p$	$\text{C m}$
Moment dipolaire magnétique	$m$	$\text{A m}^2$
Potentiel vecteur magnétique	$A$	$\text{Wb m}^{-1} = \text{T m}$

TAB. 5.2: Quantités électromagnétiques et leurs unités (suite).

## 5.8 Exercices

**5.1** Un fil rectiligne est placé sur l'axe  $z$  entre  $z = -L$  et  $z = L$ . Il possède une densité de charge linéique uniforme  $\lambda$ . Quel est le potentiel électrostatique sur l'axe  $y$  à une distance  $\eta$  du fil? Que devient le potentiel quand  $L \rightarrow \infty$ ?

**5.2** Trois charges sont disposées le long de l'axe  $x$ , selon la figure 5.7. Évaluer le potentiel électrostatique partout sur l'axe  $x$ . Montrer que si  $|x|$  est grand, le potentiel est essentiellement proportionnel à  $|x|^{-3}$ , et trouver le coefficient de proportionnalité.

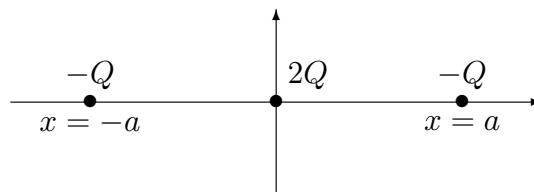


FIG. 5.7: Trois charges colinéaires.

**5.3** Un disque mince de rayon  $R$ , uniformément chargé, est placé dans le plan  $xy$  et centré à l'origine. Évaluer le potentiel électrostatique partout sur l'axe  $z$ .

**5.4** La série de Taylor d'une fonction  $f$  autour d'un point  $x$  peut s'écrire comme

$$f(x + \Delta) = f(x) + \frac{df}{dx}\Delta + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\Delta^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}\Delta^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4f}{dx^4}\Delta^4 + \dots,$$

où les dérivées sont évaluées au point  $x$ . Utiliser ce développement pour montrer que l'erreur commise dans l'éq. (5.25) est d'ordre  $\Delta^2$ .

**5.5** Trouver un potentiel vecteur qui engendre (à travers l'équation  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ) une induction magnétique uniforme et parallèle à  $\hat{z}$  ( $\vec{B} = B\hat{z}$  avec  $B$  uniforme).

**5.6** L'induction magnétique produite par un courant rectiligne infini le long de l'axe  $z$  peut s'exprimer comme

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}.$$

Trouver un potentiel vecteur  $\vec{A}$  qui donne ce champ à partir de la relation  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . [Suggestion. Évaluer le rotationnel de  $(0, 0, \ln(x^2 + y^2))$ .]

**5.7** Un fil de longueur  $2L$  coïncide avec l'axe  $z$  (entre  $-L$  et  $+L$ ). Le fil est parcouru d'un courant  $I$ . Montrer que le potentiel vecteur dans le plan  $xy$ , à une distance  $\eta$  de l'axe  $z$  telle que  $\eta \ll L$ , est donné par

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{2L}{\eta}\right) \hat{z}.$$

Évaluer les composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  dans le plan  $xy$ , et vérifier que ce résultat reproduit ce qu'on avait obtenu à la section 3.9.

**5.8** Un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur infinie porte un courant total  $I$  réparti uniformément à sa surface et dirigé parallèlement à son axe. Utiliser la loi d'Ampère sous forme intégrale pour obtenir l'induction magnétique partout à l'extérieur et à l'intérieur du cylindre.

**5.9** Un tube cylindrique épais, de longueur infinie, a un rayon interne  $a$  et un rayon externe  $b$ . Son axe coïncide avec l'axe  $z$ . Une densité de courant uniforme  $\vec{j}$ , parallèle à l'axe  $z$ , circule partout dans le tube (c'est-à-dire, entre  $a$  et  $b$ ) et s'annule ailleurs. Par un raisonnement qualitatif, établir partout dans l'espace la direction de l'induction magnétique. Utiliser ensuite la loi d'Ampère sous forme intégrale pour obtenir, partout dans l'espace, la grandeur de l'induction magnétique.

## Chapitre 6

# Énergie électrostatique

### 6.1 Énergie d'une distribution de charge

Considérons un ensemble de charges ponctuelles  $q_i$  situées aux points  $\vec{r}_i$ . Nous allons définir *l'énergie électrostatique* de ces charges comme le travail nécessaire pour amener ces charges de l'infini (là où leur séparation est infinie) aux points  $\vec{r}_i$ . En calculant cette énergie, nous allons vérifier qu'elle ne dépend ni des trajectoires utilisées ni de l'ordre dans lequel on amène les charges.

Supposons que les  $M$  premières charges ont été amenées aux points  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_M$ . Le travail nécessaire pour amener la  $(M + 1)^{\text{e}}$  charge au point  $\vec{r}_{M+1}$  est alors donné par (le signe négatif indique que le travail est fait sur le système)

$$\begin{aligned} W_{M+1} &= - \int_{\infty}^{\vec{r}_{M+1}} \vec{F}_{M+1} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{\infty}^{\vec{r}_{M+1}} \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i q_{M+1} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right\} \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{q_{M+1}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^M q_i \int_{\infty}^{\vec{r}_{M+1}} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{q_{M+1}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^M q_i \frac{1}{|\vec{r}_{M+1} - \vec{r}_i|} \\ &= q_{M+1} V(\text{dû aux } M \text{ charges}). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Le travail total est la somme des  $W_j$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} W &= \sum_{j=2}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{j-1} q_i \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j V_j. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ici,

$$V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} q_i \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (6.3)$$

c'est-à-dire que  $V_j$  est le potentiel produit au point  $\vec{r}_j$  par toutes les charges sauf  $q_j$ .

Dans le cas d'une distribution continue de charge, l'énergie peut être obtenue en divisant le volume en petits éléments, et en transposant la formule discrète à ces petits éléments. On obtient ainsi

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV. \quad (6.4)$$

En principe,  $V(\vec{r})$  devrait être le potentiel produit par tous les éléments de charge, à l'exception de l'élément situé au point  $\vec{r}$ . Mais cette restriction peut être éliminée car le potentiel local produit par un élément de charge infinitésimal de densité finie s'annule.

Remarquons qu'il y a une différence entre la formule discrète et la formule continue. Dans la formule discrète, on ne tient pas compte du travail nécessaire pour assembler chaque charge. Ce travail est infini si les charges sont ponctuelles. Autrement, il dépend de la géométrie des charges, et peut être calculé si celle-ci est connue.

Nous allons maintenant obtenir une formule pour l'énergie électrostatique en termes du champ électrique. On a

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V(\vec{r}) dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \{ \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}V) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V \} dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left\{ \int_S (\vec{E}V) \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{E} \cdot \vec{E} dV \right\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

À l'origine, le volume d'intégration inclut toutes les régions de l'espace où  $\rho$  ne s'annule pas. Mais on peut l'étendre à l'infini. Dans la mesure où les charges sont localisées dans une région finie de l'espace, et où la charge totale est finie, le champ et le potentiel s'annulent à l'infini (le champ comme  $r^{-2}$  et le potentiel comme  $r^{-1}$ ). L'intégrale de surface (sur une aire proportionnelle à  $r^2$ ) s'annule donc, et on trouve

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{espace}} \vec{E} \cdot \vec{E} dV. \quad (6.6)$$

Ainsi, l'énergie électrostatique est toujours positive.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>L'énergie de charges discrètes peut donner un résultat négatif, mais ceci vient du fait qu'on n'a pas tenu compte du travail effectué pour assembler les charges.

## 6.2 Énergie de conducteurs chargés

Soit  $N$  conducteurs chargés. Soit  $Q_i$  la charge totale sur le conducteur  $i$ , et  $V_i$  le potentiel. On sait que les charges sont réparties en surface, et que les potentiels sont uniformes sur chaque conducteur. On a donc

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i \int_{S_i} \sigma(\vec{r}) dS_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i Q_i. \quad (6.7)$$

Ici,  $V_i$  représente le potentiel dû à toutes les charges de tous les conducteurs. Dans le cas où on a un seul conducteur sphérique de charge totale  $Q$  et de rayon  $R$ , la charge est répartie uniformément et le potentiel au bord du conducteur coïncide avec celui d'une charge ponctuelle. On a donc

$$W = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (6.8)$$

## 6.3 Capacité

À la surface d'un conducteur sphérique isolé dans le vide, le potentiel est proportionnel à la charge totale sur le conducteur. Nous allons maintenant montrer que  $Q = CV$  pour tout conducteur isolé dans le vide.

Partout à l'extérieur du conducteur, le potentiel est une solution de l'équation de Laplace. La distribution de charge à la surface est reliée à la composante normale du champ électrique, elle-même égale à la dérivée du potentiel.

Soit  $V$  une solution de l'équation de Laplace et soit  $\sigma$  la densité de surface de charge. La charge totale est l'intégrale de  $\sigma$  sur la surface du conducteur. Manifestement,  $\alpha V$  est aussi une solution de l'équation de Laplace (où  $\alpha$  est une constante non nulle). Mais alors, la composante normale du champ est multipliée par  $\alpha$ , de même que  $\sigma$ , et  $Q$ . Ainsi,  $Q$  et  $V$  varient dans les mêmes proportions, ce qu'on voulait démontrer.

Dans l'équation  $Q = CV$ , la constante de proportionnalité  $C$  s'appelle la *capacité* du conducteur. Elle dépend de la géométrie du conducteur (et, nous le verrons plus tard, du milieu dans lequel le conducteur est plongé). La capacité s'exprime en coulombs/volt, ou farads (F).<sup>2</sup> La capacité d'une sphère d'un mètre de rayon vaut environ  $10^{-10}$  F, ou 100 pF.

Considérons maintenant deux conducteurs voisins et neutres, dans le vide (figure 6.1). Supposons qu'on transfère une charge  $Q$  d'un conducteur à l'autre. Soit  $V^+$  le potentiel qu'acquiert le conducteur chargé positivement, et  $V^-$  le potentiel qu'acquiert le conducteur chargé négativement. Un tel système s'appelle un *condensateur*, et chaque conducteur constitue une *armature* du condensateur.

<sup>2</sup>La permittivité s'exprime alors en farads/mètre.

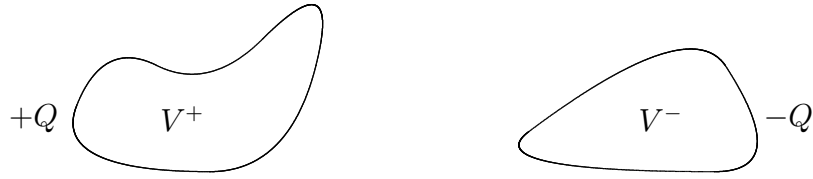


FIG. 6.1: Deux conducteurs dans le vide.

Par un argument semblable à celui que nous avons développé plus tôt, on voit que les potentiels sont proportionnels à  $Q$ . On peut poser, par conséquent,  $Q = C(V^+ - V^-)$ . On appelle  $C$  la *capacité* du condensateur. L'énergie totale emmagasinée dans le condensateur est donnée par

$$\begin{aligned} W = W^+ + W^- &= \frac{1}{2}QV^+ - \frac{1}{2}QV^- = \frac{Q}{2}(V^+ - V^-) \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C(V^+ - V^-)^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Nous allons maintenant donner trois exemples de calcul de la capacité d'un condensateur.

### i) Condensateur à plaques parallèles

Le condensateur à plaques parallèles est illustré à la figure 6.2.

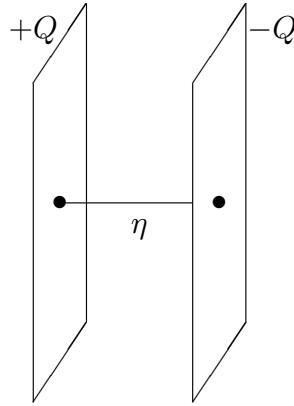


FIG. 6.2: Condensateur à plaques parallèles.

Soit  $S$  l'aire de chaque plaque. Nous supposons que la distance  $\eta$  entre les plaques est petite en comparaison des dimensions de celles-ci. Le champ est alors essentiellement uniforme, de sorte que

$$Q = \sigma S = \epsilon_0 E S = \epsilon_0 \frac{V^+ - V^-}{\eta} S.$$



Par conséquent,

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\eta}. \quad (6.10)$$

## ii) Condensateur sphérique

Le condensateur sphérique est constitué d'une sphère conductrice à l'intérieur d'une coquille conductrice (figure 6.3).

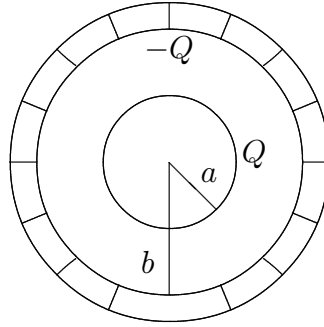


FIG. 6.3: Condensateur sphérique.

Soit  $a$  le rayon de la sphère, et  $b$  le rayon interne de la coquille. À cause de la symétrie sphérique, le champ électrique a la forme  $E(r)\hat{r}$ . Pour tout  $r > b$ , la charge totale à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r$  s'annule, de sorte que  $V(r) = 0$ . On a donc  $V^- = 0$ . Pour  $a < r < b$ , par contre, on a

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2},$$

et l'on obtient

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right\},$$

où la constante  $C_1$  a été ajustée de façon que  $V(r = b) = 0$ . À  $r = a$ , on trouve que

$$V^+ = V(r = a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right\}.$$

Ainsi,

$$Q = 4\pi\epsilon_0 \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right\}^{-1} (V^+ - V^-)$$

et finalement

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b - a}. \quad (6.11)$$

### iii) Condensateur cylindrique

Le condensateur cylindrique est formé d'un cylindre conducteur (de rayon  $a$  et de hauteur  $h$ ) à l'intérieur d'une coquille cylindrique conductrice (de rayon interne  $b$  et de hauteur  $h$ ). On suppose que  $h \gg b$ , de sorte que les formules du cylindre infini s'appliquent essentiellement (figure 6.4).

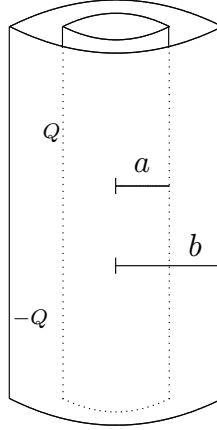


FIG. 6.4: Condensateur cylindrique.

Nous avons vu que, pour un cylindre infini de rayon  $R$ , la grandeur du champ à une distance  $\eta > R$  de l'axe est égale à  $\sigma R/\epsilon_0\eta$ . Pour que la charge sur chaque armature soit la même (au signe près), on doit avoir  $-\sigma^-b = \sigma^+a$ . Ainsi, pour  $\eta > b$ ,

$$\vec{E} = \frac{\sigma^-b}{\epsilon_0\eta}\hat{\eta} + \frac{\sigma^+a}{\epsilon_0\eta}\hat{\eta} = 0,$$

de sorte que  $V^- = 0$ . Pour  $a < \eta < b$ , par ailleurs,

$$\vec{E} = \frac{\sigma^+a}{\epsilon_0\eta}\hat{\eta},$$

de sorte que

$$V = -\frac{\sigma^+a}{\epsilon_0} \ln \eta + C_1 = -\frac{\sigma^+a}{\epsilon_0} \ln \left( \frac{\eta}{b} \right).$$

Ainsi,

$$V^+ = -\frac{\sigma^+a}{\epsilon_0} \ln \left( \frac{a}{b} \right) = \frac{\sigma^+a}{\epsilon_0} \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

On obtient donc

$$Q = 2\pi ah\sigma^+ = 2\pi h\epsilon_0 \frac{1}{\ln(b/a)}(V^+ - V^-),$$

et finalement

$$C = \frac{2\pi h\epsilon_0}{\ln(b/a)}. \quad (6.12)$$

La formule du condensateur sphérique est exacte. Pour le condensateur à plaques parallèles et le condensateur cylindrique, elle est valable dans la limite où les dimensions ( $h$  et  $S$ ) tendent vers l'infini. Pour des condensateurs de dimension finie, les effets de bord modifient les formules idéales.

Remarquons que dans les applications concrètes, la capacité d'un condensateur de forme irrégulière est plus souvent obtenue de manière empirique que calculée à partir de principes généraux.

## 6.4 Association de condensateurs

Les condensateurs sont utilisés dans les circuits électriques. Plusieurs condensateurs peuvent être associés en série ou en parallèle. Dans ce cas, pour fins de calcul, on peut les remplacer par un condensateur équivalent.

Examinons d'abord deux condensateurs en série, représentés à la figure 6.5.

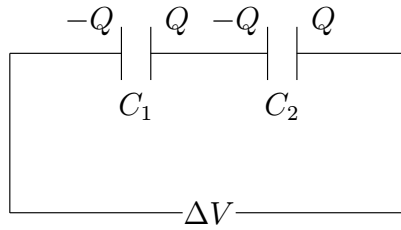


FIG. 6.5: Deux condensateurs en série.

Lorsqu'on établit une différence de potentiel  $\Delta V$ , les condensateurs accumulent des charges identiques (au signe près) sur chaque armature. On a alors

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C}, \quad (6.13)$$

où

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (6.14)$$

Examinons maintenant deux condensateurs en parallèle (figure 6.6). Ici, le potentiel est le même aux bornes de chaque condensateur. On a

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1\Delta V + C_2\Delta V = C\Delta V, \quad (6.15)$$

où

$$C = C_1 + C_2. \quad (6.16)$$

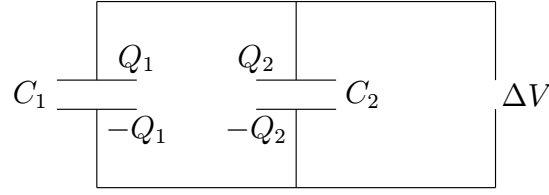


FIG. 6.6: Deux condensateurs en parallèle.

## 6.5 Dipôle électrique dans un champ

Soit un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p}$  placé dans un champ électrique qui, sur la longueur du dipôle, peut être considéré uniforme. Soit  $V^+$  et  $V^-$  le potentiel dû à toutes les autres charges, là où sont les charges  $q$  et  $-q$ . L'énergie du dipôle dans le champ (c'est-à-dire le travail nécessaire pour l'amener de l'infini à sa position finale) est donnée par

$$\begin{aligned}
 W &= qV^+ - qV^- \\
 &= q \int_{\vec{r}_+}^{\vec{r}_-} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot \int_{\vec{r}_+}^{\vec{r}_-} d\vec{r} \\
 &= q\vec{E} \cdot (\vec{r}_- - \vec{r}_+) = -\vec{p} \cdot \vec{E}.
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

La force totale exercée par le champ sur le dipôle s'annule. Le couple total, toutefois, ne s'annule pas. Il est donné par

$$\begin{aligned}
 \vec{\tau} &= \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \vec{r}_+ \times (q\vec{E}) + \vec{r}_- \times (-q\vec{E}) \\
 &= q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}.
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

## 6.6 Exercices

**6.1** Deux charges identiques de grandeur  $q$  sont situées sur l'axe  $x$ , aux points  $x = a$  et  $x = -a$ . Une charge de grandeur  $\alpha q$  ( $\alpha$  réel) est située à l'origine. Quelle est l'énergie électrostatique totale du système (on exclut l'énergie individuelle de chaque particule ponctuelle)? Pour quelle valeur de  $\alpha$  l'énergie électrostatique totale s'annule-t-elle?

**6.2** Un conducteur sphérique de rayon  $R$  porte une charge totale  $Q$ . Évaluer son énergie électrostatique au moyen de l'éq. (6.6), c'est-à-dire en évaluant l'intégrale du carré du champ électrique.

**6.3** Évaluer l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon  $R$  et de charge  $Q$  répartie uniformément dans son volume. Par ailleurs, la charge du proton est égale à  $1.602 \times$

$10^{-19}$  C. En supposant que le proton est une sphère de rayon  $0.5 \times 10^{-15}$  m et que la charge y est uniformément répartie, obtenir son énergie électrostatique.

**6.4** Évaluer l'énergie d'un condensateur cylindrique par l'éq. (6.6). Montrer que le résultat coïncide avec  $Q^2/(2C)$ .

**6.5** Évaluer numériquement la capacité dans les trois cas suivants: (i) un condensateur plan d'aire  $1 \text{ m}^2$  et de séparation  $1 \text{ mm}$ ; (ii) un condensateur sphérique où  $a = 1 \text{ m}$  et  $b = 1.001 \text{ m}$ ; (iii) un condensateur cylindrique de mêmes  $a$  et  $b$  qu'en (ii) et de hauteur  $100 \text{ m}$ .

**6.6** Montrer que la capacité par unité de longueur de deux fils infinis parallèles, placés à une distance  $\eta$  l'un de l'autre, est égale à  $\pi\epsilon_0/\ln(\eta/a)$ , où  $a$  est le rayon des fils. On suppose que  $\eta \gg a$ , ce qui implique que la densité de surface de charge est essentiellement uniforme sur chaque fil. [Boridy, 1990, ex. 4-36]

**6.7** Évaluer la capacité de deux sphères conductrices de rayon  $a$ , placées à une distance  $r$  l'une de l'autre. On suppose que  $r \gg a$ , ce qui implique que la densité de surface de charge est essentiellement uniforme sur chaque sphère.

**6.8** Évaluer la capacité équivalente du circuit représenté à la figure 6.7.

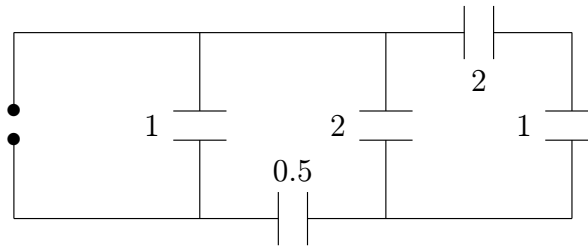


FIG. 6.7: Association de condensateurs.

**6.9** Évaluer la capacité équivalente du circuit représenté à la figure 6.8. Pour quelles valeurs de  $x$  est-elle maximum et minimum?

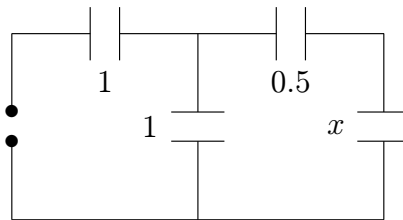


FIG. 6.8: Association de condensateurs avec valeur inconnue.

**6.10** Soit deux dipôles  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  et soit  $\vec{r}$  le vecteur qui va du premier au second. Obtenir une formule pour l'énergie électrostatique du système en termes de ces trois vecteurs. Trouver l'énergie électrostatique dans les trois cas suivants: (i)  $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \perp \vec{r}$ ; (ii)  $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \parallel \vec{r}$ ; (iii)  $\vec{p}_1 \perp \vec{p}_2 \parallel \vec{r}$ .



# Chapitre 7

## Inductance

### 7.1 Loi de Faraday

Considérons deux circuits  $C_1$  et  $C_2$ , illustrés à la figure 7.1. Une source de tension engendre un courant dans  $C_1$ , tandis qu'un ampèremètre mesure le courant éventuel dans  $C_2$ . Expérimentalement, on observe les faits suivants:

1. Si le courant est continu dans  $C_1$  et si  $C_2$  est immobile, alors il n'y a pas de courant dans  $C_2$ .
2. Si le courant est variable dans  $C_1$  et si  $C_2$  est immobile, alors il y a un courant dans  $C_2$ .
3. Si un courant continu circule dans  $C_1$  et si  $C_2$  est en mouvement, alors il y a un courant dans  $C_2$ .

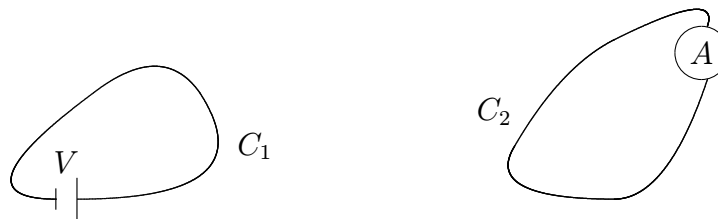


FIG. 7.1: Deux circuits voisins.

Le courant dans  $C_2$  apparaît lorsque le flux magnétique à travers  $C_2$  varie. Ces phénomènes sont régis par la *loi de Faraday*, qui est l'une des équations de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7.1)$$

Voyons comment la loi de Faraday permet d'expliquer la seconde observation ci-dessus. Soit  $d\vec{S}$  l'élément d'une surface appuyée sur  $C_2$  et reliée au sens de  $C_2$  par la

règle de la main droite. Intégrons la loi de Faraday sur la surface, et appliquons le théorème de Stokes. On a

$$\int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (7.2)$$

Étant donné que  $C_2$  est immobile, nous avons pu changer l'ordre d'intégration et de différentiation dans la troisième égalité.

Ainsi, la variation temporelle de l'induction magnétique induit un champ électrique de circulation non nulle dans le fil, champ qui provoque un courant électrique. Faisons ici deux remarques importantes.

1. Nous avons vu, en électrostatique, que le champ électrique s'annule dans un conducteur. Mais ici, nous ne sommes plus dans le domaine statique. Le champ induit déplace des charges. Si le flux magnétique redevient constant, le champ électrique se ramène rapidement à zéro.
2. Supposons que l'induction créée par  $C_1$  en  $S_2$  soit dans le sens de  $d\vec{S}$ . Si  $B$  augmente, alors  $\Phi_B$  augmente. Dans ce cas, la circulation de  $\vec{E}$  est négative, de sorte que  $\vec{E}$  est opposé à  $d\vec{\ell}$ . Le courant  $\vec{j}$  provoqué par  $\vec{E}$  est aussi opposé à  $d\vec{\ell}$ . L'induction magnétique produite par  $\vec{j}$  s'oppose donc à l'induction originale. C'est la *loi de Lenz*: Dans une boucle conductrice, le courant induit circule dans le sens qui le fait s'opposer à la variation du flux magnétique à travers la boucle.

Il est clair que la loi de Faraday rend compte de la première observation ci-dessus. La troisième observation s'explique par le principe de relativité. Si, en effet, on se place dans un référentiel où  $C_2$  est immobile, alors le flux dû à  $C_1$  varie, et on se retrouve dans le second cas. Un courant est induit dans  $C_2$ , courant qui existe aussi dans le référentiel original.<sup>1</sup>

Revenons maintenant à l'expression de la loi de Faraday. Étant donné que  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  n'est pas nul, il n'est plus vrai, comme en électrostatique, que  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . Mais, puisque  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , on a

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (7.3)$$

de sorte que

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \times \left\{ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\}. \quad (7.4)$$

<sup>1</sup>La justification de ce raisonnement vient des propriétés de transformation des champs et des sources.



Ainsi, il existe un champ scalaire  $V$  tel que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V. \quad (7.5)$$

De façon équivalente,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (7.6)$$

C'est l'expression générale du champ électrique en termes des potentiels.

EXEMPLE. Le principe d'une génératrice.

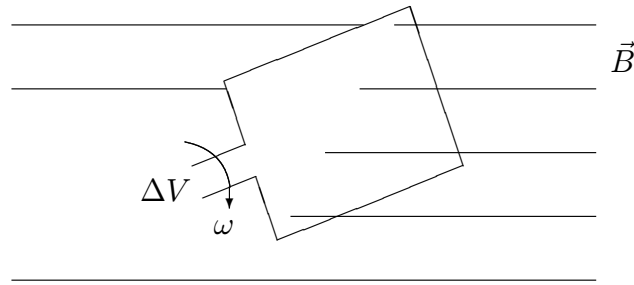


FIG. 7.2: Génératrice de tension.

Considérons une boucle rectangulaire tournant autour d'un axe perpendiculaire à une induction constante et uniforme. Soit  $S$  la surface de la boucle (figure 7.2). On a

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS \cos \omega t = BS \cos \omega t. \quad (7.7)$$

Le flux magnétique à travers la boucle dépend du temps. Prenons pour acquis que l'éq. (7.2) vaut toujours, que le changement de  $\Phi_B$  vienne d'une induction variable ou d'un déplacement de la boucle. Aux bornes de la boucle se crée alors l'équivalent d'une différence de potentiel variable, appelée *force électromotrice* et donnée par

$$\Delta V = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d\Phi_B}{dt} = -BS\omega \sin \omega t. \quad (7.8)$$

Si un circuit est connecté aux bornes de la boucle, il y a génération de courant alternatif, de fréquence angulaire  $\omega$ . ♣

Dans l'exemple précédent, on peut voir de façon plus directe l'origine de la force électromotrice. Les électrons dans le fil, qui se déplacent à cause du mouvement de la boucle, subissent une force magnétique. Si le circuit est ouvert, les électrons ne peuvent circuler dans le sens du fil. La force magnétique les déplace légèrement, et

il se crée un champ électrique qui a pour effet d'annuler la force magnétique. On a ainsi  $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ . La force électromotrice s'exprime donc comme

$$\Delta V = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}. \quad (7.9)$$

On montre à l'ex. (7.3) que le calcul du membre de droite de l'éq. (7.9) redonne le résultat (7.8).

## 7.2 Inductance

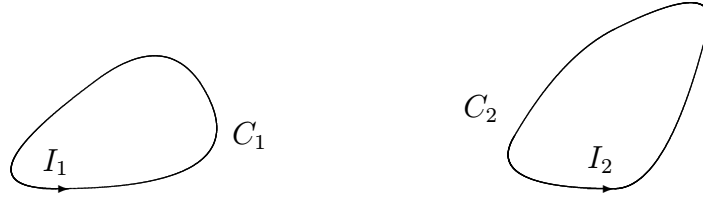


FIG. 7.3: Deux circuits en interaction.

Considérons deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  parcourus de courants  $I_1$  et  $I_2$  (figure 7.3). Nous allons établir une formule pour le flux magnétique  $\Phi_{12}$  à travers  $C_2$  dû au courant  $I_1$ . Soit  $\vec{B}_1$  l'induction produite par  $I_1$ . De l'éq. (5.38), on a

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2 = \int_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \\ &= \int_{C_2} \left\{ \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} d\vec{\ell}_1 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right\} \cdot d\vec{\ell}_2 \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = M_{12} I_1, \end{aligned} \quad (7.10)$$

où

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \quad (7.11)$$

La quantité  $M_{12}$  s'appelle *l'inductance mutuelle*. Elle dépend de la géométrie des deux circuits. Notons que  $M_{12} = M_{21}$ .

L'inductance mutuelle s'exprime en  $\text{Wb A}^{-1}$ , unités qu'on appelle des henry (H). C'est dire que la perméabilité peut être exprimée en  $\text{H m}^{-1}$ .

Le courant dans un circuit produit un flux magnétique à travers ce même circuit. Le rapport du flux au courant s'appelle la *self-inductance*, notée  $L$  et donnée par

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \int_C \frac{d\vec{\ell} \cdot d\vec{\ell}'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}. \quad (7.12)$$

Les singularités de l'intégrale sont résolues en prenant des densités de courant quasi filiformes.

Les notions de self-inductance et d'inductance mutuelle sont très importantes dans la théorie des circuits électriques. Le plus souvent, les valeurs de  $L$  et  $M_{12}$  sont prises comme des paramètres phénoménologiques plutôt que calculées à partir des expressions générales.

L'élément de circuit qui est porteur d'une self-inductance est en général une *bobine*, tandis que le *transformateur* porte une inductance mutuelle. L'inductance mutuelle de bobines voisines est le plus souvent négligée.

Une différence de potentiel  $\Delta V$  appliquée aux bornes d'une bobine produit une circulation du champ électrique, une variation du flux magnétique et un courant satisfaisant à<sup>2</sup>

$$\Delta V = \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{dI}{dt}. \quad (7.13)$$

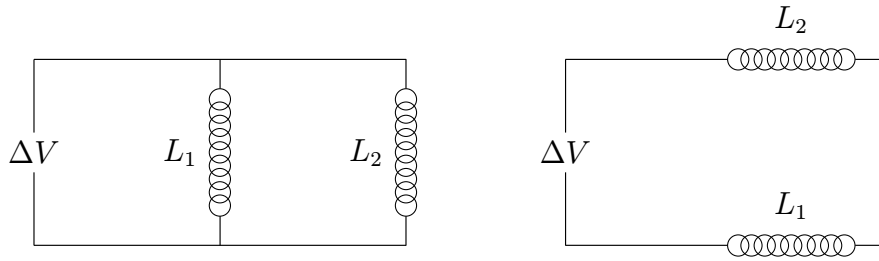


FIG. 7.4: Inductances en parallèle (à gauche) et en série (à droite).

La figure 7.4 illustre deux associations différentes d'inductances. Pour deux bobines en parallèle, on a

$$\Delta V = L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt}, \quad (7.14)$$

de sorte que

$$\Delta V \left\{ \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right\} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = \frac{dI}{dt}. \quad (7.15)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}, \quad (7.16)$$

<sup>2</sup>Pour une bobine normale, on peut montrer que le second terme du membre de droite de l'éq. (7.6) est négligeable devant le premier.

où  $L$  est l'inductance équivalente.

Pour deux bobines en série, par ailleurs,

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{dI}{dt}, \quad (7.17)$$

de sorte que

$$L = L_1 + L_2. \quad (7.18)$$

### 7.3 Énergie magnétique

Soit  $\vec{j}$  une densité de courant circulant dans un volume  $V$ . Si un champ électrique est présent dans le volume, alors le champ effectue un travail sur les charges en mouvement. Supposons que les charges contenues dans l'élément de volume  $dV$  se déplacent de  $\delta \vec{r}$ . Alors

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = (\rho_m dV) \vec{E} \cdot \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \delta t = dV \vec{E} \cdot (\rho_m \vec{v}) \delta t = dV \vec{E} \cdot \vec{j} \delta t \quad (7.19)$$

et donc

$$\frac{dW}{dt} = dV \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (7.20)$$

Il est entendu que  $\rho_m$  représente, ici, la densité de charge mobile. Pour l'ensemble du volume  $V$ , on a

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV. \quad (7.21)$$

Définissons l'énergie (magnétique) d'un ensemble de courants comme le travail nécessaire pour constituer ces courants à partir de courants nuls. Nous supposons, ici, qu'il n'y a pas de pertes résistives ni d'énergie due à une accumulation de charges.<sup>3</sup> L'augmentation du courant fait varier le champ magnétique, et produit un champ électrique  $\vec{E}$  égal à  $-\partial \vec{A} / \partial t$ . La puissance nécessaire pour établir le courant contre ce champ électrique est donnée par

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV = \int_V \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV. \quad (7.22)$$

L'énergie magnétique de la distribution de courant est donc égale à

$$W = \int_{t_0}^t dt \int_V \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV, \quad (7.23)$$

---

<sup>3</sup>S'il y en avait, on obtiendrait l'énergie magnétique en les soustrayant du travail.

où  $t_0$  est un instant où les courants sont nuls et  $t$  un instant où ils ont atteint leur valeur stationnaire.

Nous allons maintenant développer deux autres formules pour l'énergie magnétique. Notons d'abord l'identité vectorielle suivante, développée à l'ex. (2.20):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{F}. \quad (7.24)$$

Par la loi d'Ampère,<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int_V \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV = \frac{1}{\mu_0} \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_V \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{B} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV + \frac{1}{\mu_0} \int_V \left( \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot \vec{B} dV \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_V \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{B} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dV + \frac{1}{\mu_0} \int_V \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} dV. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Le volume  $V$  peut être étendu à tout l'espace, puisque  $\vec{j}$  est nul dans le volume ajouté. L'application du théorème de la divergence fait alors que le premier terme du membre de droite s'annule ( $A \sim r^{-2}$ ,  $B \sim r^{-3}$ ,  $S \sim r^2$ ). On trouve finalement

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\text{espace}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{B}) dV = \frac{1}{2\mu_0} \frac{d}{dt} \int_{\text{espace}} \vec{B} \cdot \vec{B} dV \quad (7.26)$$

et donc

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{espace}} \vec{B} \cdot \vec{B} dV. \quad (7.27)$$

Ainsi, on peut associer  $(2\mu_0)^{-1} \vec{B} \cdot \vec{B}$  à la densité d'énergie magnétique.

Une autre formule pour l'énergie magnétique s'obtient de la façon suivante:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{espace}} \vec{B} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{espace}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} dV \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{espace}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) dV + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{espace}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} dV \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_{\text{espace}} \vec{j} \cdot \vec{A} dV. \end{aligned} \quad (7.28)$$

<sup>4</sup>La loi d'Ampère sera éventuellement modifiée à la section 9.1. La contribution du terme additionnel est toutefois négligeable ici. Elle fait intervenir un produit du type  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , dans un processus très lent.

EXEMPLE. Pour une bobine de self-inductance  $L$ , le courant est essentiellement filiforme et

$$\begin{aligned} W &= \frac{I}{2} \int_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \frac{I}{2} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \frac{I}{2} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{I}{2} \Phi_B = \frac{1}{2} LI^2. \end{aligned} \quad (7.29)$$

$\Phi_B$  est le flux à travers les  $N$  boucles du bobinage. ♣

## 7.4 Loi d'Ohm et effet Joule

Les condensateurs et les bobines sont deux éléments importants des circuits linéaires. Le troisième est constitué des éléments résistifs ou résistances.

Une *résistance* est essentiellement une pièce conductrice. Dans un circuit, un champ électrique peut être maintenu à travers la résistance par une source extérieure. Une densité de courant est alors produite dans la résistance, qui dans de nombreuses circonstances satisfait à l'équation

$$\vec{j} = g\vec{E}. \quad (7.30)$$

Le facteur  $g$  est une “constante” appelée *conductivité*. En fait, la conductivité dépend du matériau et aussi de paramètres telle la température. Elle se mesure en ampères par volt · mètre. Les valeurs numériques oscillent de  $10^6$  à  $10^8$  pour les métaux, de  $10^{-2}$  à  $10^2$  pour les semiconducteurs et de  $10^{-14}$  à  $10^{-17}$  pour les isolants.

Considérons une résistance constituée d'un fil long et mince. La différence de potentiel aux bornes  $a$  et  $b$  est donnée par

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \frac{1}{g} \vec{j} \cdot d\vec{\ell}. \quad (7.31)$$

On peut considérer que la densité de courant est parallèle à  $d\vec{\ell}$ , et qu'en tout point du fil  $j = I/s$ , où  $I$  est le courant et  $s$  l'aire de la section du fil au point considéré. On a donc

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \frac{1}{g} \frac{I}{s} d\ell = I \int_a^b \frac{1}{gs} d\ell = RI. \quad (7.32)$$

Ici,  $R$  est une constante appelée *résistance* et donnée par

$$R = \int_a^b \frac{1}{gs} d\ell. \quad (7.33)$$

Dans le cas où  $g$  et  $s$  sont uniformes le long du fil, on a  $R = \ell/g s$ , où  $\ell$  est la longueur du fil. Notons que la résistance s'exprime en volts par ampère, unités qu'on appelle des ohms ( $\Omega$ ).

L'éq. (7.32) est en fait plus générale que le contexte dans lequel on l'a obtenue. On l'appelle la *loi d'Ohm*.

Le travail que le champ électrique effectue par unité de temps dans la résistance est donné par l'éq. (7.21). Ce travail est fait sur les charges mobiles et est éventuellement dissipé en chaleur. La puissance dissipée est donc égale à

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV = \int_V \frac{1}{g} j^2 dV \quad (7.34)$$

$$= I^2 \int_V \frac{1}{gs^2} dV = I^2 \int_V \frac{1}{gs} d\ell = RI^2. \quad (7.35)$$

La dissipation d'énergie électrique dans une résistance s'appelle *l'effet Joule*.

EXEMPLE. Un circuit *RLC* en série est illustré à la figure 7.5. Initialement, le potentiel est nul partout. À partir de l'instant  $t = 0$ , on applique une tension donnée par  $\Delta V = V_0 \sin \omega t$ . On cherche la tension à tout point du circuit à  $t > 0$ .

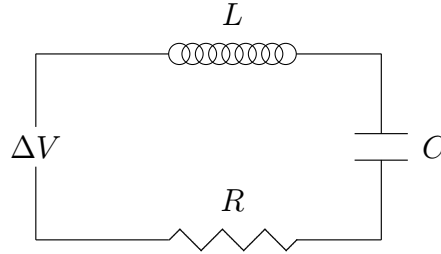


FIG. 7.5: Circuit *RLC* en série.

On a

$$\Delta V = \Delta V_L + \Delta V_C + \Delta V_R = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI.$$

Ici,  $Q(t)$  est la charge aux bornes du condensateur, égale à l'intégrale du courant. Ainsi, pour  $t > 0$ ,

$$\Delta V = V_0 \sin \omega t = L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I dt + RI.$$

Différentiant par rapport à  $t$ , on a

$$V_0 \omega \cos \omega t = L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} + R \frac{dI}{dt},$$

qui est une équation différentielle pour  $I(t)$ .

À  $t = 0$ ,  $\Delta V_R = 0$  et  $\Delta V_L = 0$ . Ceci implique que

$$I(t = 0) = 0, \quad \left[ \frac{dI}{dt} \right]_{t=0} = 0.$$

Le problème se ramène donc à une équation différentielle linéaire avec conditions initiales, qui se résout par les méthodes classiques. ♣

## 7.5 Dipôle magnétique dans un champ

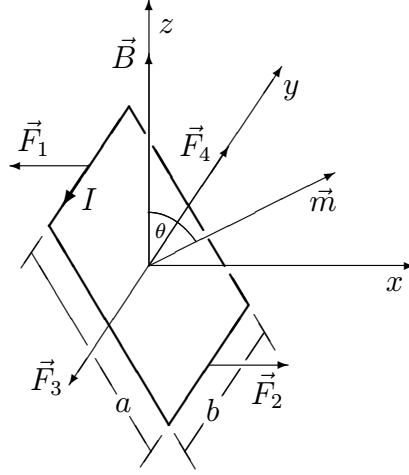


FIG. 7.6: Boucle rectangulaire plongée dans une induction uniforme.

Considérons une boucle de courant rectangulaire plongée dans une induction magnétique uniforme  $\vec{B} = B\hat{z}$  (figure 7.6). Le moment magnétique de la boucle est donné par

$$\vec{m} = Iab \{ \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{x} \}. \quad (7.36)$$

Les forces magnétiques sur chacun des côtés sont données par

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B} = -IbB\hat{x}, \quad (7.37)$$

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4 = -IaB \cos \theta \hat{y}. \quad (7.38)$$

Ainsi, la force totale s'annule. Mais il y a un couple non nul donné par

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 2\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = 2\frac{a}{2} \{ \sin \theta \hat{z} - \cos \theta \hat{x} \} \times (-IbB\hat{x}) \\ &= -IabB \sin \theta \hat{y} = \vec{m} \times \vec{B}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Le travail effectué pour faire pivoter le dipôle d'un angle  $\delta\theta$  contre les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  est donné par

$$\begin{aligned} \delta W &= -\{ \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 \} = -2\vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 \\ &= -2(-IbB\hat{x}) \cdot \frac{a}{2} \delta\theta \{ \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{x} \} = IabB \sin \theta \delta\theta. \end{aligned} \quad (7.40)$$

On peut donc associer au dipôle une énergie donnée par

$$W = -IabB \cos \theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (7.41)$$



Notons, cependant, que cette énergie ne tient pas compte du travail nécessaire pour établir le courant dans le dipôle.

Les formules  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$  et  $W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  sont valables pour des dipôles de géométrie arbitraire. On peut montrer que, dans une induction non uniforme, la force exercée sur le dipôle est donnée par (Jackson, 1999, section 5.7)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (7.42)$$

## 7.6 Exercices

**7.1** Une boucle rectangulaire de  $1 \text{ m}^2$  se déplace dans le plan  $xy$  à une vitesse égale à  $(0, 1, 0) \text{ m/sec}$  dans une induction magnétique donnée par  $(0, 0, (B_0/a)y)$ , où  $B_0$  et  $a$  sont des constantes. Quelle est la valeur de la force électromotrice induite?

**7.2** Une tige métallique tourne à une vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un axe passant par un bout de la tige, perpendiculairement à celle-ci. Si une densité de flux magnétique uniforme  $\vec{B}$  est appliquée parallèlement à l'axe de rotation, calculer la force électromotrice induite aux bouts de la tige. [Boridy, 1990, ex. 8-8] (Suggestion: calculer le champ électrique nécessaire pour annuler la force magnétique sur les charges de la tige.)

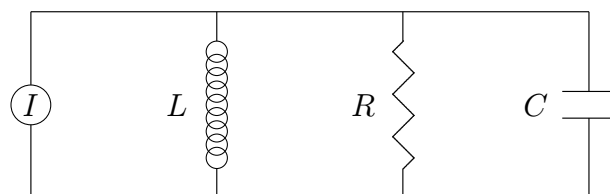
**7.3** Dans la génératrice rectangulaire illustrée à la figure 7.2, évaluer la force magnétique exercée sur un électron dans chacun des segments de la boucle. Montrer que l'éq. (7.8) [pour les second et quatrième termes] est satisfaite.

**7.4** Supposons qu'à la figure 6.7, on remplace les condensateurs par des bobines dont l'inductance en henry est la même que la capacité indiquée. Quelle est l'inductance équivalente du circuit?

**7.5** Reprendre l'ex. (7.4) avec la figure 6.8. Pour quelles valeurs de  $x$  l'inductance équivalente est-elle minimum et maximum?

**7.6** Appliquer la formule de l'énergie magnétique à un courant rectiligne infini. Le résultat diverge. Comment faudrait-il modifier le problème pour obtenir un résultat fini?

**7.7** Soit un circuit  $RLC$  en parallèle, comme illustré à la figure 7.7. Initialement, le courant est nul partout. À partir de  $t = 0$ , on établit par une source extérieure un courant donné par  $I = I_0 \sin \omega t$ . Obtenir une équation pour la tension aux bornes des éléments à  $t > 0$ , et donner les conditions auxquelles la tension et sa dérivée obéissent à  $t = 0$ .

FIG. 7.7: Circuit  $RLC$  en parallèle.

# Chapitre 8

## Milieux diélectriques et magnétiques

### 8.1 Polarisation électrique

Un conducteur est un milieu où des charges peuvent se déplacer librement. À l'inverse, un *isolant* (ou *diélectrique*) est un milieu où les charges ne peuvent se déplacer que sur des distances microscopiques. Autrement dit, chaque électron d'un isolant est lié à une molécule spécifique.

On dit qu'une molécule est non polaire si le centre de ses charges positives coïncide avec le centre de ses charges négatives ( $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_2$ , ...). Dans une molécule polaire, par contre, ces centres ne coïncident pas ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{NO}$ , ...). Les molécules polaires possèdent donc un moment dipolaire.

En l'absence de champ extérieur, les isolants ne possèdent pas, en général, de moment dipolaire macroscopique (exception faite des ferroélectriques). Ceci est vrai même pour les molécules polaires, l'agitation thermique répartissant les moments individuels dans des directions aléatoires.

En présence de champ extérieur, les isolants acquièrent un moment dipolaire macroscopique. Les molécules polaires ont tendance à s'aligner dans la direction du champ, tandis que les molécules non polaires se polarisent sous l'effet du champ.

Considérons un isolant soumis à un champ extérieur. Soit  $\Delta V$  un volume de l'isolant grand à l'échelle atomique et petit à notre échelle. On définit le vecteur *polarisation électrique*  $\vec{P}$  comme le moment dipolaire total contenu dans  $\Delta V$ , divisé par  $\Delta V$ . Autrement dit,  $\vec{P}$  est une densité de moment dipolaire. La polarisation électrique produit, dans le milieu et à l'extérieur de celui-ci, un champ électrique qui s'ajoute au champ externe. Nous allons maintenant évaluer ce champ.

Commençons par évaluer le potentiel, que nous noterons  $V_d$ . Le moment dipolaire total dans le volume  $dV'$  est égal à  $\vec{P}dV'$  (figure 8.1). Le potentiel au point  $\vec{r}$  dû à ce

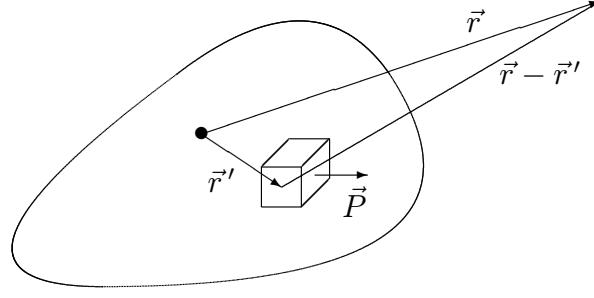


FIG. 8.1: Effet des charges de polarisation.

moment est donné par l'éq. (5.8) comme

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{P}(\vec{r}') dV' \right) \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (8.1)$$

Le potentiel dipolaire total est donc égal à

$$\begin{aligned} V_d(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{P}(\vec{r}') \right\} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' + \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left( -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{P}(\vec{r}') \right) dV' \right\}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Cette formule illustre que les charges de polarisation se répartissent en une densité volumique  $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  et une densité de surface  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$ , où  $\hat{n}$  est la normale à la surface. Le champ électrique dû à la polarisation est donc donné par

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma_P(\vec{r}') dS' + \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho_P(\vec{r}') dV' \right\}. \quad (8.3)$$

On peut montrer qu'à l'intérieur du diélectrique, le champ électrique de polarisation moyen est donné par la même formule. Le champ électrique moyen total est donc partout donné par

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \vec{E}_d(\vec{r}), \quad (8.4)$$

où  $\vec{E}_0(\vec{r})$  est le champ externe. Il est important de se rappeler que le champ microscopique, que nous ne considérons pas à ce moment-ci, diffère de  $\vec{E}(\vec{r})$  de façon importante.

## 8.2 Déplacement électrique

Nous avons obtenu, à la section précédente, une formule pour le champ électrique dû à la polarisation. Celle-ci est produite par le champ microscopique total qui agit sur les molécules. L'évaluation de la polarisation nécessite donc un calcul microscopique qui peut être très compliqué. Nous verrons cependant que certains arguments phénoménologiques permettent de contourner le problème, dans la mesure où seules les considérations macroscopiques nous intéressent.

Nous allons d'abord obtenir une conséquence de la loi de Gauss pour le champ macroscopique. Considérons un isolant plongé dans un champ électrique, et traçons une surface de Gauss partiellement dans l'isolant et partiellement dans le vide (figure 8.2).

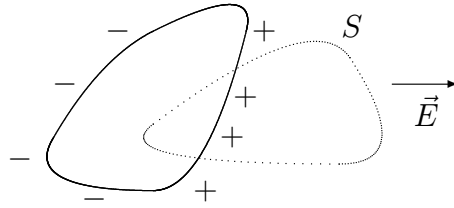


FIG. 8.2: Isolant et surface de Gauss.

La loi de Gauss s'exprime comme

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_F + Q_P). \quad (8.5)$$

Ici,  $Q_F$  représente la charge libre dans  $S$ , tandis que  $Q_P$  représente la charge de polarisation. Celle-ci est donnée par

$$\begin{aligned} Q_P &= \int_{\bar{S}} \sigma_P(\vec{r}) dS + \int_{\bar{V}} \rho_P(\vec{r}) dV \\ &= \int_{\bar{S}} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \int_{\bar{V}} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Le volume  $\bar{V}$  est la portion de l'isolant contenue dans  $S$ , et la surface  $\bar{S}$  est la portion de la surface de l'isolant contenue dans  $S$ . Par le théorème de la divergence, on a

$$\begin{aligned} Q_P &= \int_{\bar{S}} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} - \int_{S(\bar{V})} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = - \int_{S(\bar{V})-\bar{S}} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \\ &= - \int_S \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

la dernière égalité venant du fait que  $\vec{P}(\vec{r})$  s'annule sur la portion de  $S$  qui est dans le vide. Reportant l'éq. (8.7) dans (8.5), on trouve que

$$\int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + Q_F. \quad (8.8)$$

Par conséquent,

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_F, \quad (8.9)$$

où

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (8.10)$$

Le vecteur  $\vec{D}$  s'appelle le *déplacement électrique*.<sup>1</sup> On montre facilement qu'il satisfait à l'équation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_F$ , où  $\rho_F$  est la densité de charge libre.

En pratique, nous avons reformulé l'équation de Maxwell pour la divergence de  $\vec{E}$  en une équation qui ne fait intervenir que la densité de charge libre.

### 8.3 Susceptibilité et permittivité

La polarisation est un effet microscopique produit par le champ microscopique. Malgré cela, il existe souvent une relation simple entre le vecteur  $\vec{P}$  et le champ macroscopique  $\vec{E}$ . Pour plusieurs substances et dans plusieurs circonstances,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad (8.11)$$

où  $\chi_e$  est une constante appelée *susceptibilité électrique*.<sup>2</sup>

La susceptibilité varie si le milieu est hétérogène. Elle dépend aussi de paramètres telle la température. Notons que dans les milieux anisotropes, l'éq. (8.11) est remplacée par

$$\rho_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{eij} E_j. \quad (8.12)$$

Si le champ est très intense,  $\chi_e$  peut dépendre de  $E$ . Dans les substances ferroélectriques, il y a une polarisation résiduelle à  $E = 0$ .

Dans un milieu où l'éq. (8.11) est valable, on a

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon \vec{E}, \quad (8.13)$$

où  $\epsilon$  est la *permittivité* ou *constante diélectrique*. Des valeurs typiques de la permittivité relative  $\epsilon/\epsilon_0$  sont 80 (pour l'eau), de 5 à 10 (pour le verre) ou 1.0006 (pour l'air à température et pression normales).

Si, dans un isolant, le champ électrique est très intense ( $\sim 10^7$  V/m), des électrons peuvent être arrachés des molécules et le milieu devient conducteur. On dit qu'il y a *claquage*.

<sup>1</sup>Le déplacement électrique a la dimension de  $\text{C m}^{-2}$ .

<sup>2</sup>La susceptibilité est parfois définie de manière à inclure le facteur  $\epsilon_0$ . Voir par exemple Boridy (1990, section 5.5).

## 8.4 Électrostatique macroscopique en milieu diélectrique

Le champ électrique macroscopique est la somme du champ externe  $\vec{E}_0(\vec{r})$  et du champ de polarisation  $\vec{E}_d(\vec{r})$ . Le premier vient de charges libres, et est donc le gradient d'un scalaire. La formule pour  $\vec{E}_d(\vec{r})$  montre que ce champ est lui aussi le gradient d'un scalaire. Par conséquent,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ . Les équations de l'électrostatique macroscopique sont les suivantes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_F, \quad (8.14)$$

auxquelles il faut ajouter la relation entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$ . Dans le cas où  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , avec  $\epsilon$  uniforme, on obtient

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_F / \epsilon. \quad (8.15)$$

Dans ce cas, les résultats qu'on a obtenus en électrostatique valent encore, pourvu qu'on remplace  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$ . Ainsi, la loi de Coulomb devient

$$\vec{F}_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}. \quad (8.16)$$

La densité d'énergie est donnée par

$$\frac{\epsilon}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}, \quad (8.17)$$

tandis que la capacité d'un condensateur à plaques parallèles devient

$$C = \frac{\epsilon S}{\eta}. \quad (8.18)$$

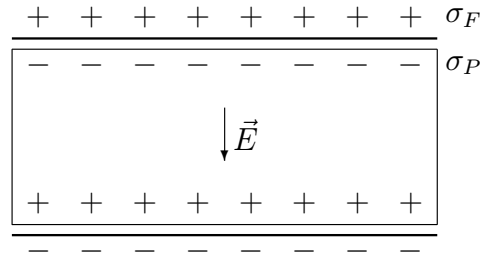


FIG. 8.3: Diélectrique entre les plaques d'un condensateur.

Il est utile d'examiner le mécanisme d'augmentation de la capacité (figure 8.3). La présence de l'isolant entre les plaques crée des charges de polarisation, qui réduisent le champ moyen entre les plaques. On a

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_F + \sigma_P) = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_F + \vec{P} \cdot \hat{n}) = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_F - \epsilon_0 \chi_e E). \quad (8.19)$$

Ainsi,

$$\epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \sigma_F, \quad (8.20)$$

de sorte que

$$E = \frac{1}{\epsilon} \sigma_F. \quad (8.21)$$

## 8.5 Transition entre deux milieux diélectriques

Certains champs sont discontinus lorsqu'on passe d'un diélectrique de permittivité  $\epsilon_1$  à un diélectrique de permittivité  $\epsilon_2$ . Nous allons examiner la composante normale et la composante tangentielle du champ à ce type de discontinuité.

### i) Composante normale

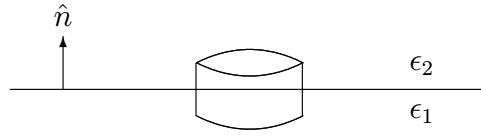


FIG. 8.4: La composante normale à la surface de transition entre deux diélectriques.

Soit un petit cylindre infiniment mince (figure 8.4). Appliquons le théorème de la divergence à l'éq. (8.14) pour  $\vec{D}$ :

$$\int_V \rho_F dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (8.22)$$

Ainsi,

$$\sigma_F \Delta S = D_{n2} \Delta S - D_{n1} \Delta S, \quad (8.23)$$

et donc

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_F. \quad (8.24)$$

S'il n'y a pas de densité de surface de charge libre,  $D_{n2} = D_{n1}$ , ce qui signifie que  $\epsilon_2 E_{n2} = \epsilon_1 E_{n1}$ .



### ii) Composante tangentielle

Considérons un parcours rectangulaire infiniment étroit et de longueur  $\ell$  (figure 8.5). Appliquons le théorème de Stokes à l'éq. (8.14) pour  $\vec{E}$ :

$$0 = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_{t2}\ell - E_{t1}\ell. \quad (8.25)$$

Par conséquent,

$$E_{t2} = E_{t1}. \quad (8.26)$$

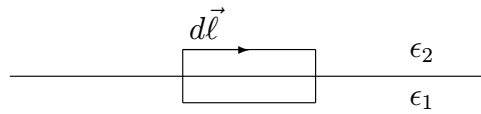


FIG. 8.5: La composante tangentielle à la surface de transition entre deux diélectriques.

## 8.6 Milieux magnétiques

Les milieux magnétiques présentent plusieurs analogies avec les milieux diélectriques. Nous n'allons pas les examiner en détail, mais signalerons quelques propriétés importantes.

À l'échelle microscopique, le mouvement des électrons dans les atomes et les molécules (que ce soit le mouvement orbital ou le spin) produit des courants qui sont en fait de petits dipôles magnétiques. En l'absence de champ, ces dipôles sont orientés aléatoirement (sauf dans les ferromagnétiques). Mais une induction externe peut orienter les dipôles. Il en résulte une aimantation macroscopique  $\vec{M}$ , c'est-à-dire un moment dipolaire par unité de volume, qui produit une induction additionnelle. Il est commode, alors, de définir un vecteur supplémentaire  $\vec{H}$ , appelé *champ magnétique*, comme<sup>3</sup>

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (8.27)$$

On montre que

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_F, \quad (8.28)$$

<sup>3</sup>Le champ magnétique, comme l'aimantation, a la dimension de A m<sup>-1</sup>.

où  $\vec{j}_F$  est la densité de courant libre, qui exclut les dipôles atomiques. L'éq. (8.28), avec l'équation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  et la relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ , constitue la base de la magnétostatique dans les milieux magnétiques.

Dans plusieurs situations, l'aimantation est proportionnelle au champ magnétique, c'est-à-dire que  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ . La constante  $\chi_m$  est appelée *susceptibilité magnétique*. La relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  est obtenue comme:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (8.29)$$

Ici,  $\mu$  est la *perméabilité*. Le plus souvent,  $\chi_m \ll 1$ . Le milieu est *paramagnétique* si  $\chi_m > 0$ , et *diamagnétique* si  $\chi_m < 0$ . Pour les *ferromagnétiques*,  $\chi_m \gg 1$ , et le milieu peut être aimanté même en l'absence de champ externe.

Les relations suivantes sont satisfaites lors d'une transition entre deux milieux magnétiques:

$$B_{n2} = B_{n1}, \quad H_{t2} - H_{t1} = \mathcal{J}_F, \quad (8.30)$$

où  $\mathcal{J}_F$  est la densité de surface de courant libre.

## 8.7 Exercices

**8.1** Une molécule d'eau a un moment dipolaire égal à  $6.2 \times 10^{-30}$  C m. En supposant que tous les moments sont alignés, quelle est la grandeur du vecteur  $\vec{P}$ ? La densité de l'eau est de  $1 \text{ g/cm}^3$ .

**8.2** Un condensateur plan a des armatures parallèles d'aire  $S$  à une distance  $\eta$  l'une de l'autre. À mi-chemin entre les armatures, on introduit une plaquette d'aire  $S$ , d'épaisseur  $b < \eta$  et de permittivité  $\epsilon$ . On place des charges  $+Q$  et  $-Q$  sur les armatures (figure 8.6). On néglige les effets de bord.

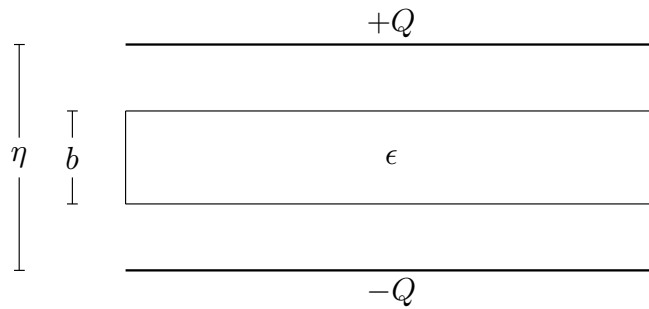


FIG. 8.6: Isolant dans un condensateur plan.

a) Donner le vecteur déplacement électrique et le vecteur champ électrique partout entre les armatures.

- b) Où sont situées les charges de polarisation? Donner leur densité.
- c) Quelle est la capacité du condensateur?

**8.3** Une substance diélectrique remplit tout l'espace entre les plaques d'un condensateur plan, à une distance  $\eta$  l'une de l'autre. La permittivité varie linéairement d'une plaque à l'autre, de sorte que ( $\alpha > 0$ )

$$\epsilon(y) = \epsilon_0(1 + \alpha y), \quad 0 \leq y \leq \eta.$$

- a) Évaluer la densité volumique et la densité de surface des charges de polarisation.
- b) Quelle est la capacité du condensateur?

**8.4** Une sphère de rayon  $R$  porte, uniformément répartie à sa surface, une charge totale  $Q$ . La sphère est recouverte d'une substance diélectrique de permittivité  $\epsilon$  et d'épaisseur uniforme  $\eta$ . La région  $r > R + \eta$  est vide.

- a) Obtenir le champ électrique partout dans l'espace.
- b) Obtenir l'énergie électrostatique totale.

**8.5** Une sphère de permittivité uniforme  $\epsilon$  et de rayon  $R$  porte une densité de charge libre uniforme  $\rho_0$ . Il n'y a aucune charge à l'extérieur de la sphère. Obtenir le champ électrique et le potentiel électrostatique partout dans l'espace.

**8.6** Obtenir les relations (8.30) pour la transition entre deux milieux magnétiques.



# Chapitre 9

## Les équations de Maxwell

### 9.1 Courant de déplacement

En électrostatique, le rotationnel du champ électrique s'annule. Ceci, cependant, n'est plus vrai lorsque les champs dépendent du temps. De la même façon, nous allons voir que dans ce cas la loi d'Ampère doit être modifiée.

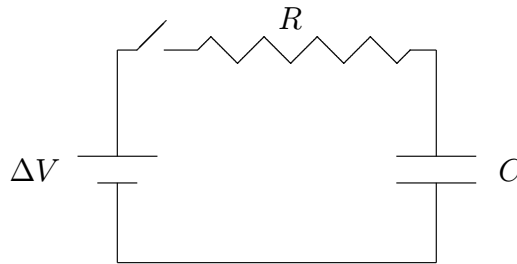


FIG. 9.1: Circuit RC élémentaire.

Considérons un circuit  $RC$  muni d'un interrupteur, d'une source de tension et d'un condensateur à plaques parallèles (figure 9.1).

Dès que l'interrupteur est fermé, un courant transitoire s'établit qui charge le condensateur. Le courant circule partout dans le circuit sauf, semble-t-il, entre les plaques du condensateur, où le courant paraît discontinu.

Cela dit, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV(\text{plaques})}{dt} = \frac{\epsilon_0 S}{\eta} \frac{dV(\text{plaques})}{dt} \\ &= \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

L'intégrale est effectuée sur une surface parallèle aux plaques et entre celles-ci, et les effets de bord sont négligés. Cette relation signifie que le courant dans le circuit est

égal à l'intégrale de surface de  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  entre les plaques. Ceci suggère d'identifier  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  à une densité de courant (appelée *courant de déplacement*), et de modifier la loi d'Ampère microscopique comme

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left\{ \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\}. \quad (9.2)$$

L'ajout du courant de déplacement constitue l'intuition géniale de Maxwell. Nous verrons qu'elle a des conséquences majeures.

## 9.2 Les équations de Maxwell

Nous allons écrire côte à côte les équations de Maxwell microscopiques et les équations macroscopiques.

Éqs. microscopiques	Éqs. macroscopiques
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_F$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left\{ \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_F + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

TAB. 9.1: Les équations de Maxwell.

Les équations microscopiques ont une validité universelle. Elles permettent de calculer le champ électrique et l'induction magnétique à partir de la densité de charge et de la densité de courant totales.

Les équations macroscopiques sont des conséquences des équations microscopiques. Les champs macroscopiques  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont des moyennes des champs microscopiques  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Les quantités  $\rho_F$  et  $\vec{J}_F$  sont les densités de charge et de courant libres. Pour résoudre les équations de Maxwell macroscopiques, il est nécessaire de connaître la relation entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  et la relation entre  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$ .

Dans tous les cas, la force exercée sur une charge par un champ électromagnétique est donnée par la force de Lorentz, c'est-à-dire

$$\vec{F} = q \left\{ \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right\}. \quad (9.3)$$

## 9.3 Conservation de la charge électrique

Nous allons montrer, ici, que la loi de la conservation de la charge électrique est une conséquence des équations de Maxwell. Ce ne serait pas le cas sans le courant de

déplacement. En effet,

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} = \mu_0 \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right\}, \quad (9.4)$$

et donc

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (9.5)$$

L'éq. (9.5) représente la conservation de la charge électrique. En effet, intégrons-la sur un volume quelconque  $V$ :

$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (9.6)$$

Par conséquent,

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (9.7)$$

Cette équation signifie que la variation temporelle de la charge totale contenue dans  $V$  est égale à la charge qui entre dans  $V$ .

De la même façon, les équations macroscopiques impliquent la conservation de la charge libre, exprimée par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_F + \frac{\partial \rho_F}{\partial t} = 0. \quad (9.8)$$

## 9.4 Énergie et impulsion du champ

Des équations de Maxwell microscopiques et de l'ex. (2.20), on a

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ &= \vec{B} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \mu_0 \left\{ \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (9.9)$$

et donc

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = - \left\{ \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \vec{B} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{E} \right\} - \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (9.10)$$

Posons

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad u = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B} + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}. \quad (9.11)$$

On a alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (9.12)$$

Nous avons vu que  $\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}$  représente la densité d'énergie électrostatique et que  $\frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}$  représente la densité d'énergie magnétostatique. Il est donc naturel d'identifier  $u$  à la densité d'énergie totale du champ. Par ailleurs,  $\vec{E} \cdot \vec{j}$  représente le travail effectué (par unité de volume et de temps) par le champ sur les charges en mouvement. L'éq. (9.12) exprimera donc un bilan énergétique dans la mesure où  $\vec{S}$  représente le flux d'énergie du champ par unité de surface et de temps.  $\vec{S}$  s'appelle le *vecteur de Poynting*. On peut montrer également que  $c^{-2} \vec{S}$  représente la densité d'impulsion du champ.

Dans le cas macroscopique, l'équation de Poynting s'écrit de même, avec toutefois (dans le cas où  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ )

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad u = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}, \quad \vec{j} \rightarrow \vec{j}_F. \quad (9.13)$$

## 9.5 Ondes électromagnétiques

Considérons les équations microscopiques en l'absence de charge et de courant, c'est-à-dire lorsque  $\rho = 0 = \vec{j}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \\ &= \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.14)$$

et donc

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.15)$$

De même,

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.16)$$

L'équation pour  $\vec{E}$  a la solution particulière suivante:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (9.17)$$



où  $\vec{E}_0$  est un vecteur constant,  $\vec{k}$  est un vecteur constant et  $\omega$  est une constante, et où  $\vec{k} \cdot \vec{k} - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 = 0$ . De même, l'équation pour  $\vec{B}$  a la solution particulière suivante:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (9.18)$$

Reportons ces solutions dans les équations de Maxwell. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 \cdot (-\vec{k}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \end{aligned} \quad (9.19)$$

De ceci, on tire que

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0. \quad (9.20)$$

De la même façon, l'équation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  implique que

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0. \quad (9.21)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{E}_0) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - \vec{E}_0 \times \vec{\nabla} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \vec{B}_0 \frac{\partial}{\partial t} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 \times \vec{k} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \vec{B}_0 \omega \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \end{aligned} \quad (9.22)$$

De ceci, on tire que

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0. \quad (9.23)$$

De la même façon, l'équation

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (9.24)$$

implique que

$$\vec{E}_0 = -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} \vec{k} \times \vec{B}_0. \quad (9.25)$$

Les éqs. (9.20), (9.21), (9.23) et (9.25) sont cohérentes pourvu qu'on ait, comme tantôt,  $\vec{k} \cdot \vec{k} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2$ . Les trois vecteurs  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}$  sont mutuellement perpendiculaires.

Il est clair que les solutions pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  représentent des ondes. Les fronts d'onde sont les plans  $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{constante}$ . Ils sont perpendiculaires au vecteur  $\vec{k}$ , et se déplacent suivant  $\vec{k}$ . La vitesse de déplacement  $v$  est telle que

$$0 = \vec{k} \cdot \delta \vec{r} - \omega \delta t = \delta t \left\{ \vec{k} \cdot \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} - \omega \right\}. \quad (9.26)$$

Ceci implique que

$$kv - \omega = 0 \quad (9.27)$$

et donc

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad (9.28)$$

Les équations de Maxwell admettent donc des solutions ondulatoires qui se déplacent à la vitesse de la lumière.

## 9.6 Énergie de l'onde électromagnétique

La densité d'énergie de l'onde électromagnétique (9.17) et (9.18) est donnée par

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B} + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} \\ &= \left\{ \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 \right\} \cos^2 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \end{aligned} \quad (9.29)$$

La densité en un point oscille très rapidement. Il est utile de définir la densité moyenne comme la moyenne temporelle de  $u$ , qu'on note  $\langle u \rangle$ . Ainsi,

$$\langle u \rangle = \left\{ \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 \right\} \frac{1}{2}. \quad (9.30)$$

Puisque  $B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} E_0$ , on a finalement

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0. \quad (9.31)$$

Si  $E_0 = 1 \text{ V m}^{-1}$ , alors  $\langle u \rangle = 4.43 \times 10^{-12} \text{ J m}^{-3}$ .

Le flux d'énergie de l'onde électromagnétique est donné par

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (9.32)$$

et donc

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_0 \times \left\{ \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \right\} \\ &= \frac{1}{2\mu_0\omega} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \vec{k} = \frac{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{2\mu_0} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \langle u \rangle \hat{k}.\end{aligned}\quad (9.33)$$

Le flux d'énergie est donc dirigé suivant  $\hat{k}$ , et il est égal à la densité d'énergie multipliée par la vitesse de la lumière.

## 9.7 Exercices

**9.1** Obtenir l'éq. (9.8).

**9.2** Obtenir l'éq. (9.12) dans le cas macroscopique, avec l'identification faite en (9.13).

**9.3** Obtenir l'éq. (9.25).

**9.4** Vérifier que le développement de la section 9.5 vaut encore si l'on remplace les éqs. (9.17) et (9.18) par

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \phi),\end{aligned}$$

où  $\phi$  est une constante arbitraire.

**9.5** La permittivité  $\epsilon$  et la perméabilité  $\mu$  d'un milieu sont uniformes. Montrer que les équations de Maxwell macroscopiques admettent des solutions en ondes planes, et trouver la vitesse de ces ondes.



# Bibliographie

## Quelques repères historiques

- H. ERLICHSON (1999), “Ampère was not the author of ‘Ampère’s circuital law’,” *American Journal of Physics* **67**, pp. 448–50.
- J. C. MAXWELL (1891), *A Treatise on Electricity and Magnetism*, t. 1 et 2, 3<sup>e</sup> éd. (réimprimé par Dover, New York, 1954).
- J. ROSMORDUC (1987), éditeur, *Histoire de la physique*, t. 1, *La formation de la physique classique* (Lavoisier, Paris).
- E. SEGRÈ (1987), *Les physiciens classiques et leurs découvertes. De la chute des corps aux ondes hertziennes* (Fayard, Paris).
- E. T. WHITTAKER (1951), *History of the Theories of Aether and Electricity. I. The Classical Theories* (réimprimé par The American Institute of Physics, 1987).

## Ouvrages de base

- É. BORIDY (1990), *Électromagnétisme. Théorie et applications*, 2<sup>e</sup> éd. (Presses de l’Université du Québec, Québec).
- J. A. EDMINISTER (1980), *Électromagnétisme, Cours et problèmes* (McGraw-Hill, série Schaum, New York).
- R. EHRLICH, J. TUSZYNSKI, L. ROELOFS ET R. STONER (1995), *Electricity and Magnetism Simulations* (Wiley, New York).
- R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON ET M. SANDS (1969), *Le cours de physique de Feynman*, t. II, édition bilingue (Addison-Wesley, Reading, MA).
- M. FOGIEL, directeur (1983), *The Electromagnetics Problem Solver* (Research and Education Association, Piscataway, NJ).
- E. M. PURCELL (1963), *Electricity and Magnetism*, Berkeley physics course, vol. 2 (McGraw-Hill, New York).

## Ouvrages plus avancés

- G. BRUHAT (1967), *Électricité*, 8<sup>e</sup> éd. (Masson, Paris).

- R. S. ELLIOTT (1993), *Electromagnetics. History, Theory, and Applications* (IEEE Press, New York).
- A. FRÜHLING (1966), *Cours d'électricité*, t. 1 et 2 (Dunod, Paris).
- J. D. JACKSON (1999), *Classical Electrodynamics*, 3<sup>e</sup> éd. (Wiley, New York).
- E. C. JORDAN ET K. G. BALMAIN (1968), *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2<sup>e</sup> éd. (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ).
- L. LANDAU ET E. LIFCHITZ (1969), *Électrodynamique des milieux continus*, 2<sup>e</sup> éd. (Mir, Moscou).
- L. LANDAU ET E. LIFCHITZ (1970), *Théorie des champs*, 5<sup>e</sup> éd. (Mir, Moscou).
- P. LORRAIN ET D. R. CORSON (1979), *Champs et ondes électromagnétiques*, 2<sup>e</sup> éd. révisée (Armand Colin, Paris).
- W. K. H. PANOFSKY ET M. PHILLIPS (1962), *Classical Electricity and Magnetism*, 2<sup>e</sup> éd. (Addison-Wesley, Reading, MA).
- J. A. STRATTON (1941), *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, New York).
- A. VANDER VORST (1994) *Électromagnétisme. Champs et circuits* (De Boeck Université, Bruxelles).

### Méthodes mathématiques

- G. B. ARFKEN ET H. J. WEBER (1995), *Mathematical Methods for Physicists*, 4<sup>e</sup> éd. (Academic Press, San Diego, CA).
- E. KREYSZIG (1993), *Advanced Engineering Mathematics*, 7<sup>e</sup> éd. (Wiley, New York).

### Quelques articles pédagogiques

- P. A. ASSIMAKOPOULOS (2000), "A computer-aided introductory course in electricity and magnetism," *Computing in Science & Engineering* **2**, N° 6, pp. 88–93.
- T. K. BOYER (1988), "The force on a magnetic dipole," *American Journal of Physics* **56**, pp. 688–92.
- P. W. GASH (1991), "Improved numerical solutions of Laplace's equation," *American Journal of Physics* **59**, pp. 509–15.
- A. GRÜNBAUM ET A. I. JANIS (1978), "Can the effect precede its cause in classical electrodynamics?" *American Journal of Physics* **46**, pp. 337–41.
- A. HOVEY (1989), "On the magnetic field generated by a short segment of current," *American Journal of Physics* **57**, pp. 613–6.
- F. ROHRICH (2000), "The self-force and radiation reaction," *American Journal of Physics* **68**, pp. 1109–12.
- L. VAIDMAN (1990), "Torque and force on a magnetic dipole," *American Journal of Physics* **58**, pp. 978–83.