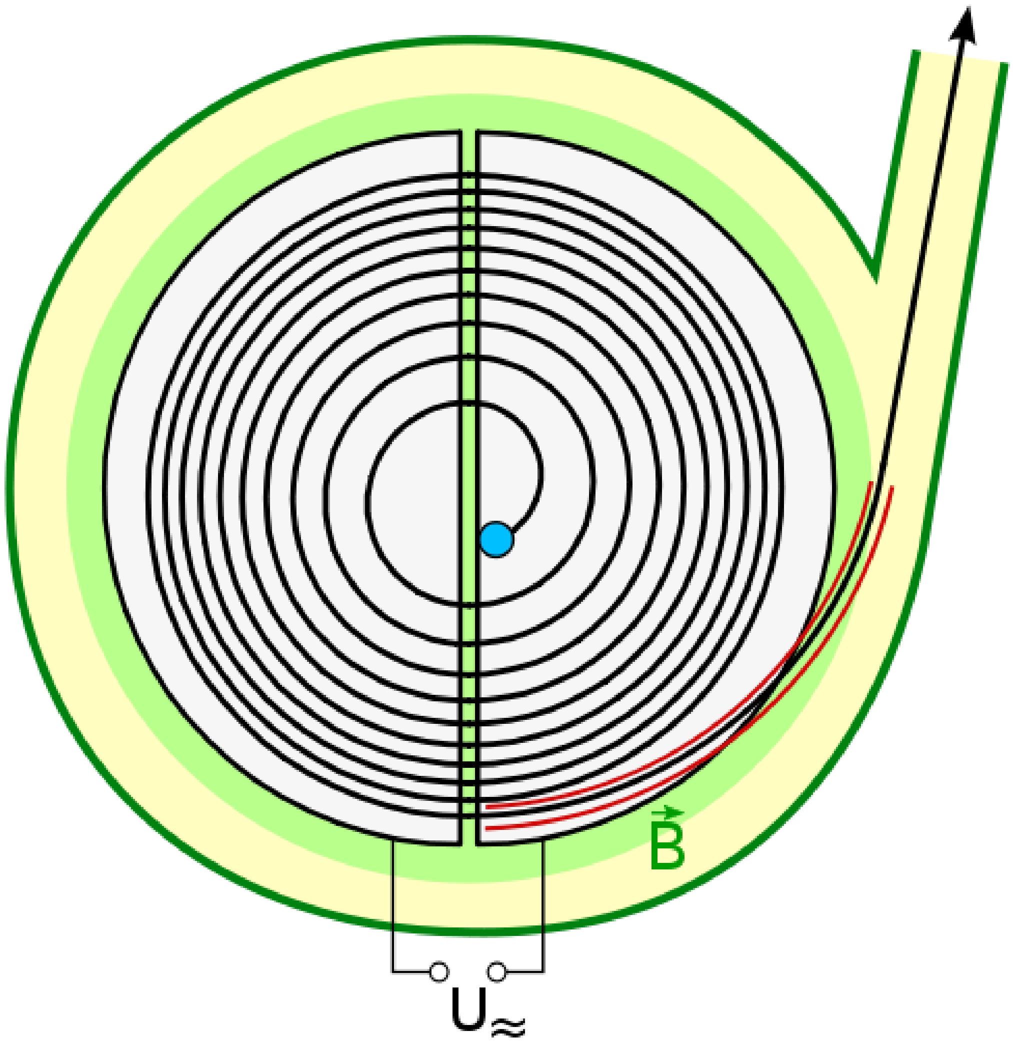
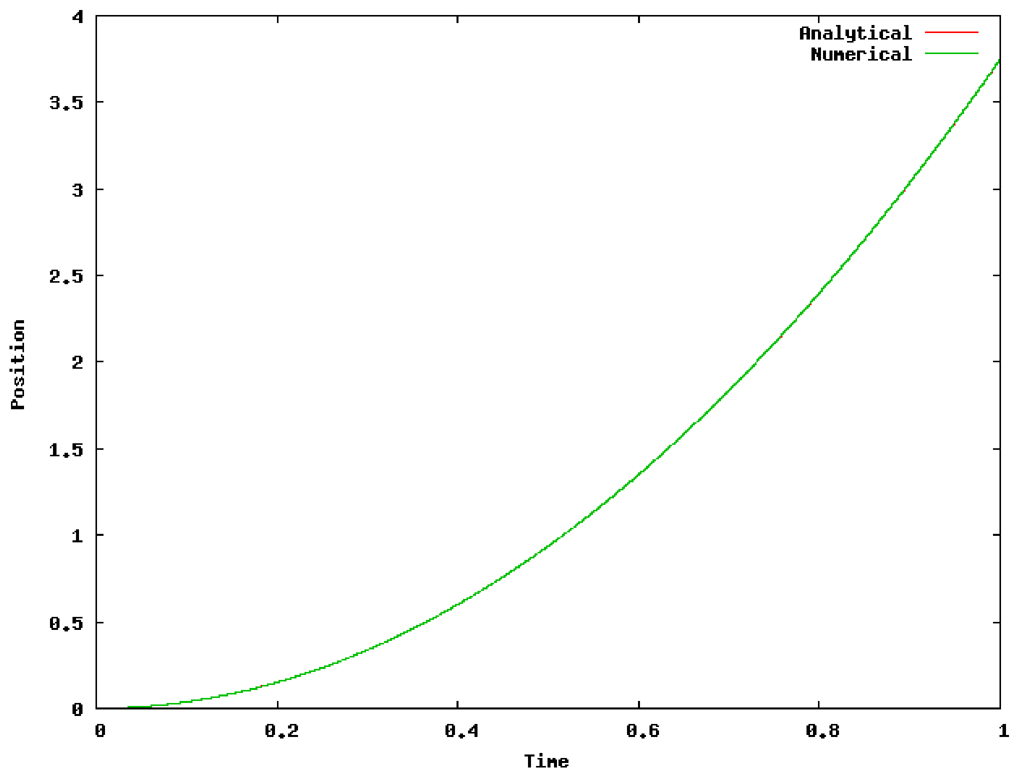
Obligatorisk oppgave i Elektromagnetisme
Syklotron
-
Thor Andreas Seiff Ellewsen
tellewsen@gmail.com



Oppgave1: Partikkel i elektrisk felt

I denne oppgaven skal man skrive et program som beregner banen til en partikkel i et elektrisk felt. Vi gjør tidsintegrasjonen ved hjelp av Euler-Cromer metoden.

a) Får oppgitt følgende:
$m = 2$, $q = 3$, $\mathbf{E} = (5, 0, 0)$, $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$ og $\mathbf{v}(t = 0) = (0, 0, 0)$.
Skal integrere bevegelsen fra $t = 0$ til $t = 1$ med $dt = 10^{-4}$.
Partikkelens x-posisjon skal plottes som funksjon av t for alle t



Figur 1: Ser at den numeriske og den analytiske løsningen overlapper

b) Skal løse problemet analytisk.
Bruker opplysningene fra a og får:

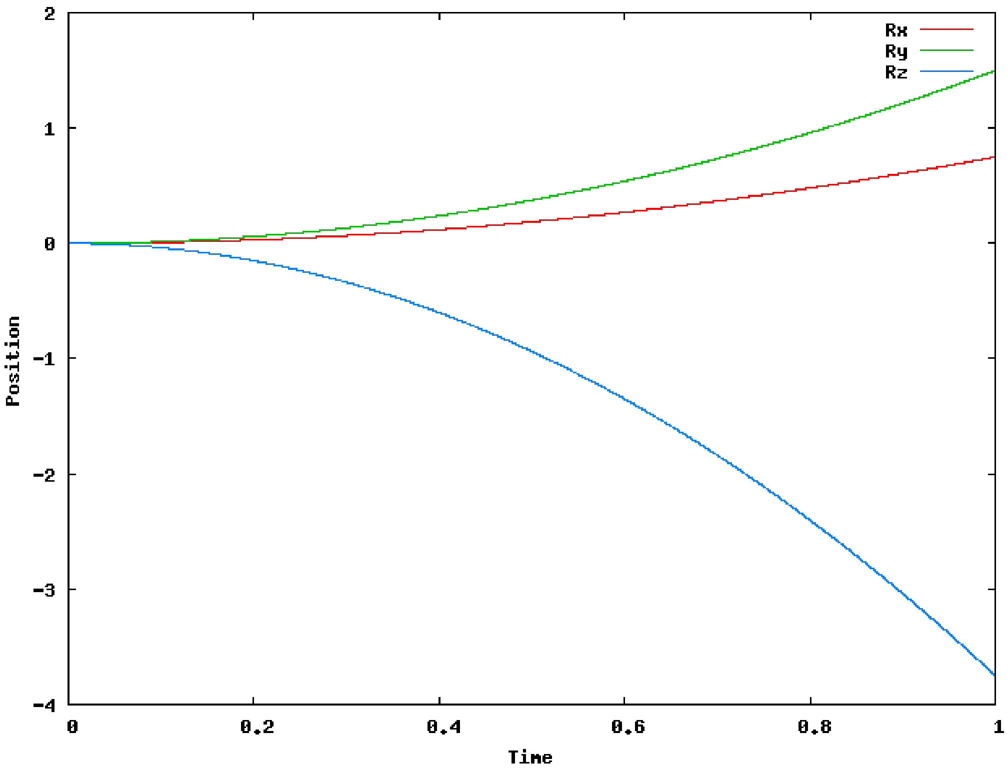
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$
$$\Downarrow$$
$$q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{v}(t) = \int(\mathbf{a})dt = \int(\frac{q\mathbf{E}}{m})dt$$
$$\Downarrow$$
$$r(t) = \int(v)dt = \int(\int(\frac{q\mathbf{E}}{m})dt)dt$$
$$\Downarrow$$
$$r(t) = \int(\frac{q\mathbf{E}}{m}t + V_0)dt$$
$$\Downarrow$$
$$r(t) = \frac{1}{2}\frac{q\mathbf{E}}{m}t^2 + V_0 t + r_0$$

Setter inn tall:

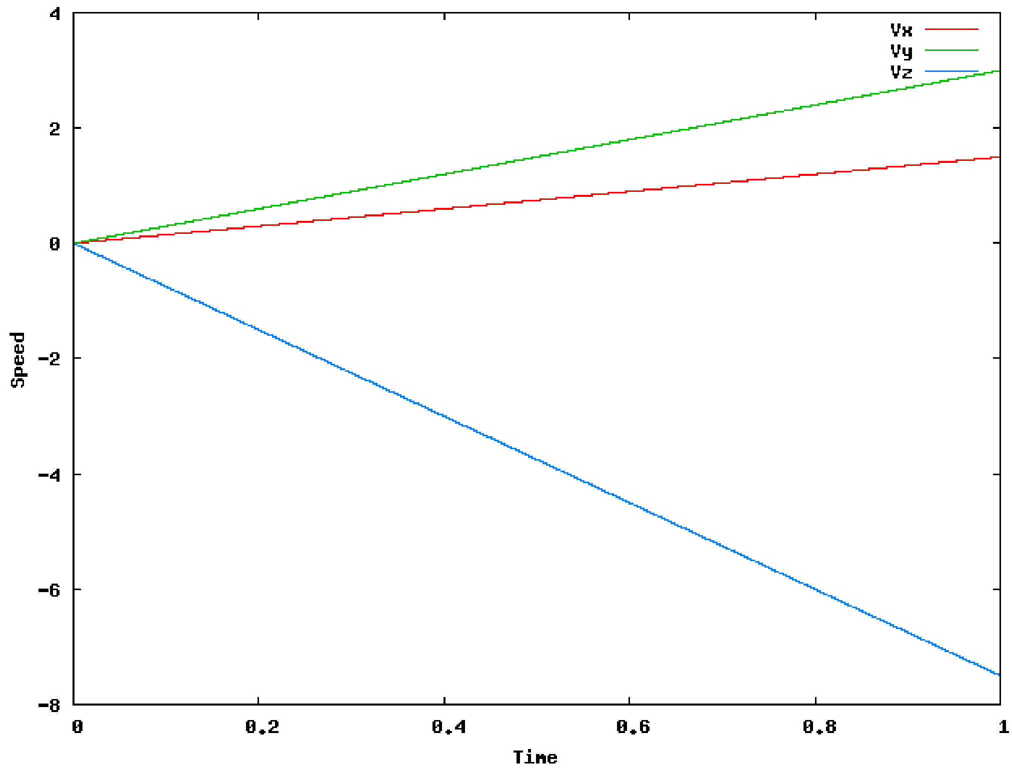
$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\frac{3(5,0,0)}{2}t^2 + (0,0,0)t + (0,0,0)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{r}(t) = (\frac{15}{4}t^2, 0, 0)$$
$$\Downarrow$$
$$r(1) = (\frac{15}{4}, 0, 0)$$

Denne løsningen er inkludert i plottet over

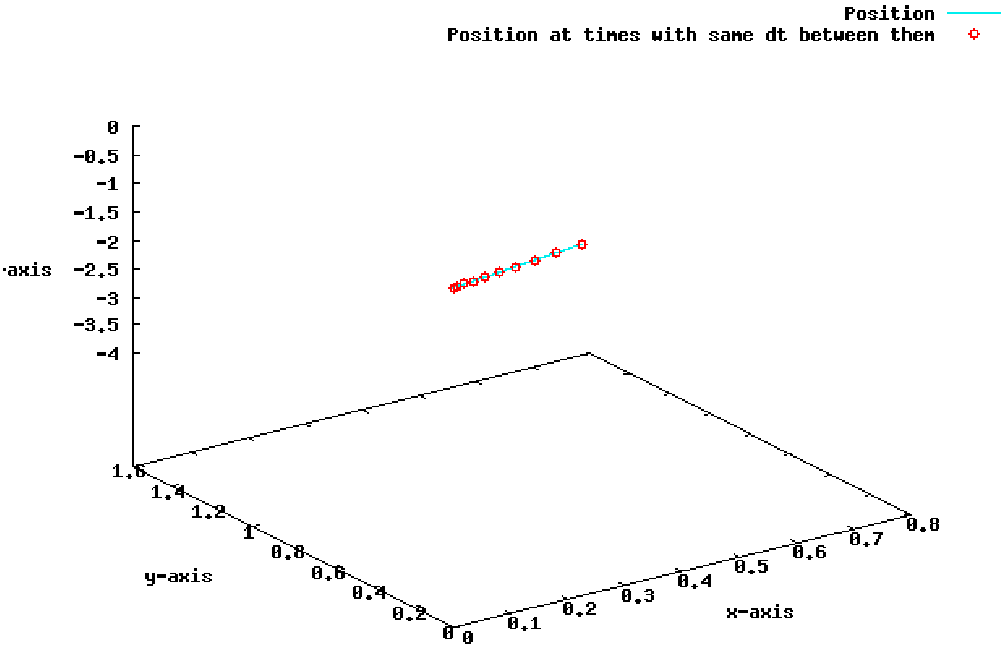
c) og d) Velger **E**= (1,2,-5), setter dette inn i programmet og får ut figurene på de neste sidene.
Skal også svare på hvorfor vi kan kalle dette en ballistisk bevegelse:
Det kan vi gjøre siden ballistisk bevegelse er definert som bevegelse av en masse i eksterne kraftfelt uten fremdrift fra massen selv. I denne oppgaven jobber vi kun med krefter fra et E-felt. Ergo har vi her ballistisk bevegelse.



Figur 2: Posisjonen til partikkelen



Figur 3: Farten til partikkelen

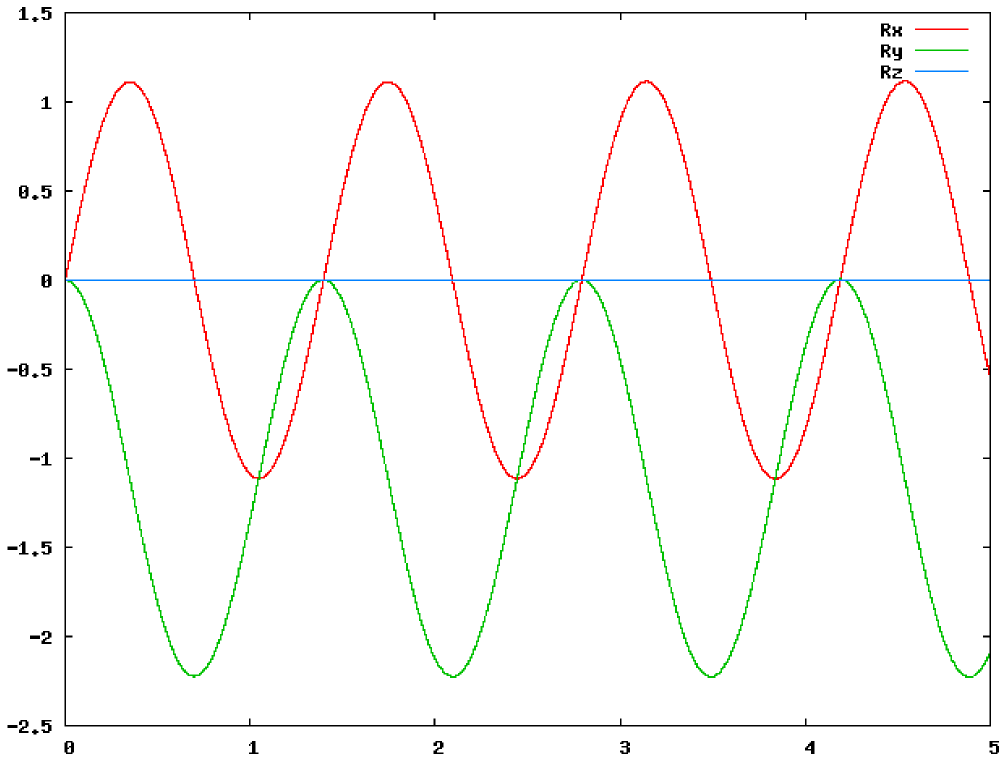


Figur 4: Posisjonen i 3D

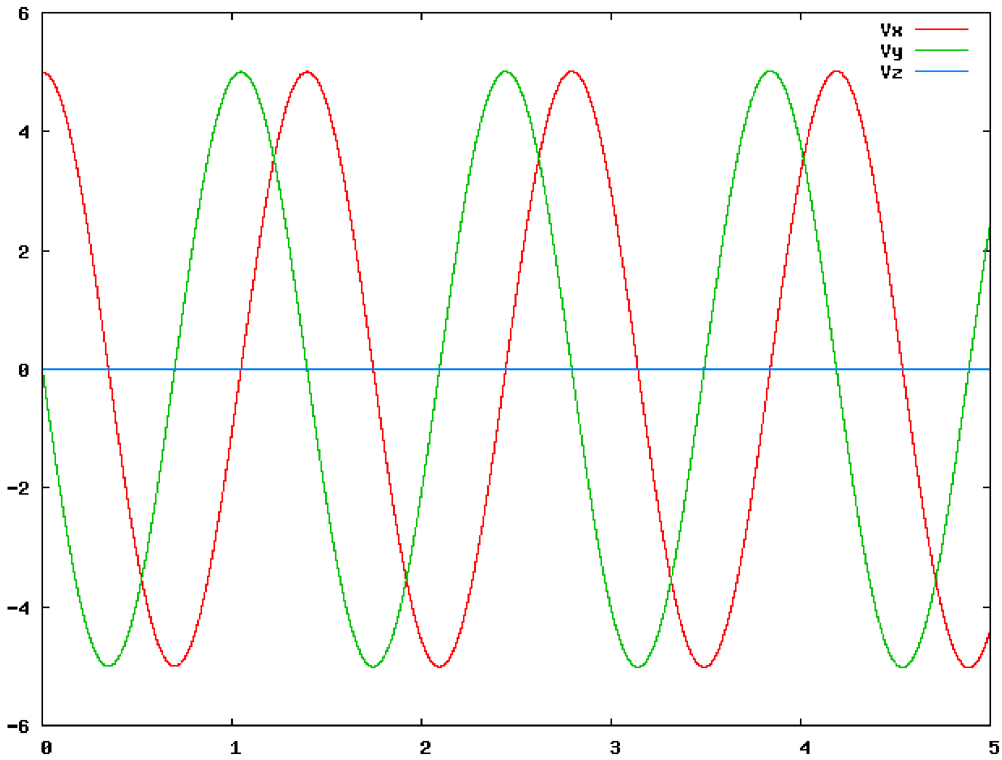
Oppgave2: Skal her bytte ut E-feltet med et magnetisk felt $\mathbf{B}$. Partikkelen påvirkes nå av en magnetisk kraft

$$\mathbf{F}_B = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

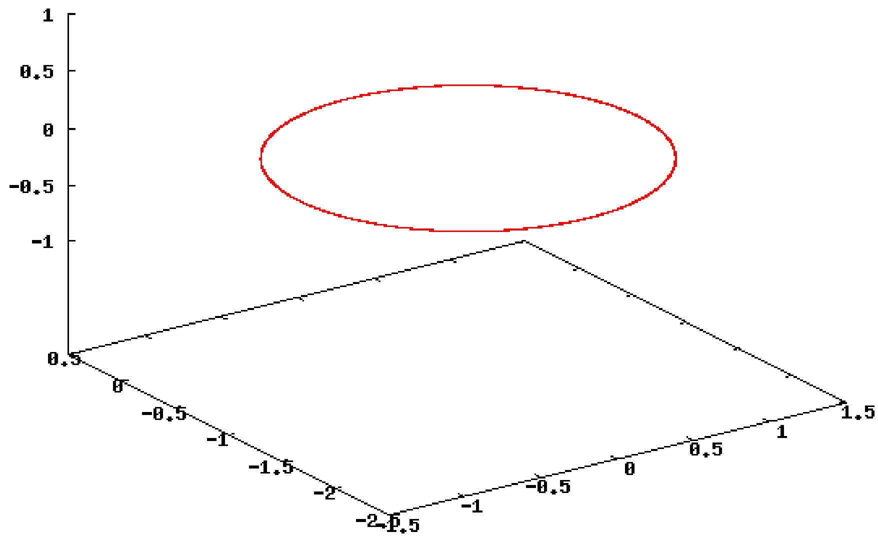
a) Skal bruke at $m = 2$, $q = 3$, $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0,)$, $\mathbf{v} = (5, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, 3)$ og så se på bevegelsen fra $t = 0$ til $t = 5$.
Bruker så og si akkurat samme program som i oppgave 1, men bytter ut kraften med den nye.
Resultatet kan sees på figurene på de neste sidene.



Figur 5: Posisjonen til partikkelen



Figur 6: Farten til partikkelen



Figur 7: Posisjonen i 3D

b)
Her skal vi bruke programmet vi har laget til å finne omløpstiden.
Vi kunne sikkert laget en test i programmet som fant ut når dette skjedde, men jeg ser ikke helt poenget når vi enkelt kan lese av dette på figuren.
Leser av omløpstiden i figuren og får ut en omløpstid på $t \approx 1.4$

c) I denne oppgaven skal vi først finne et utrykk for vinkelhastigheten til partikkelen og deretter løse omløpstiden analytisk
Har at:

$$a = \frac{v^2}{r} \text{ og } \omega = \frac{v}{r}$$

Har så:

$$\mathbf{F}_B = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$
$$\Downarrow$$
$$F = qvB = ma$$

Får da

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{mv}{r} = qB$$
$$\Downarrow$$
$$v = \frac{qBr}{m}(\star)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$
$$\Downarrow$$
$$\omega = \frac{qB}{m}$$

Definisjonen av omløpstid:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Dette gir oss:

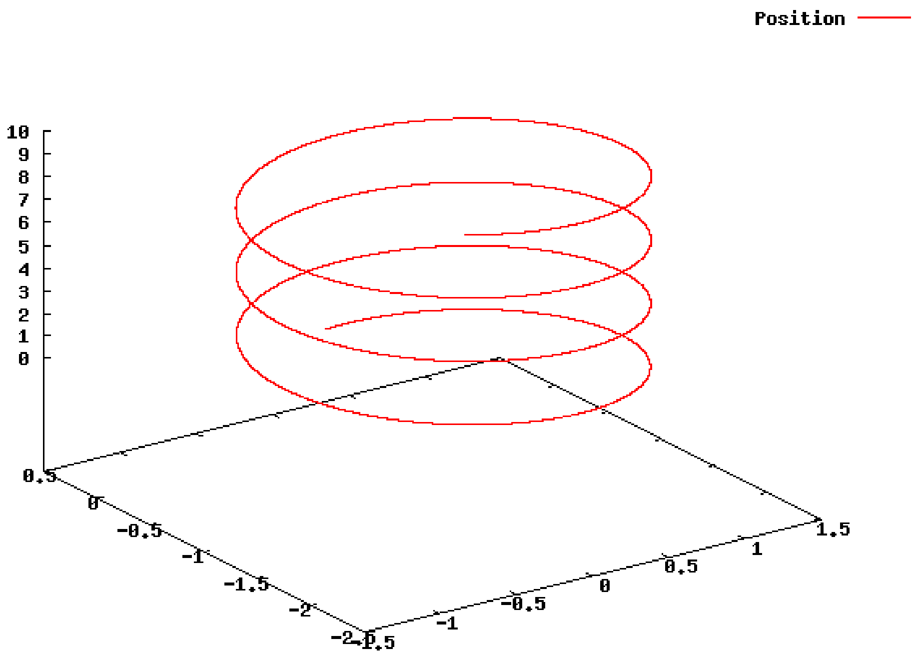
$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Setter inn tall:

$$T = \frac{4\pi}{9} \approx 1.4$$

Feilen mellom analytisk og numerisk er *imponerende* liten!

d) Går tilbake til a, endrer til $\mathbf{v}(t = 0) = (5, 0, 2)$ og får da figuren på neste side.



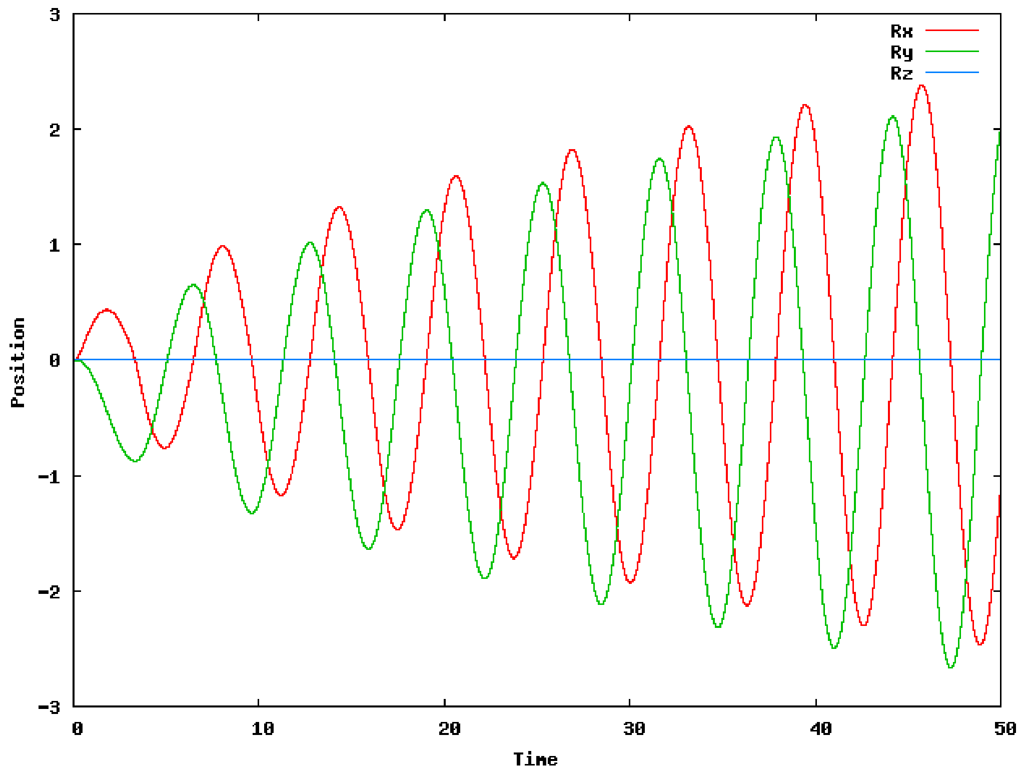
Figur 8: Posisjonen til partikkelen

Oppgave3:

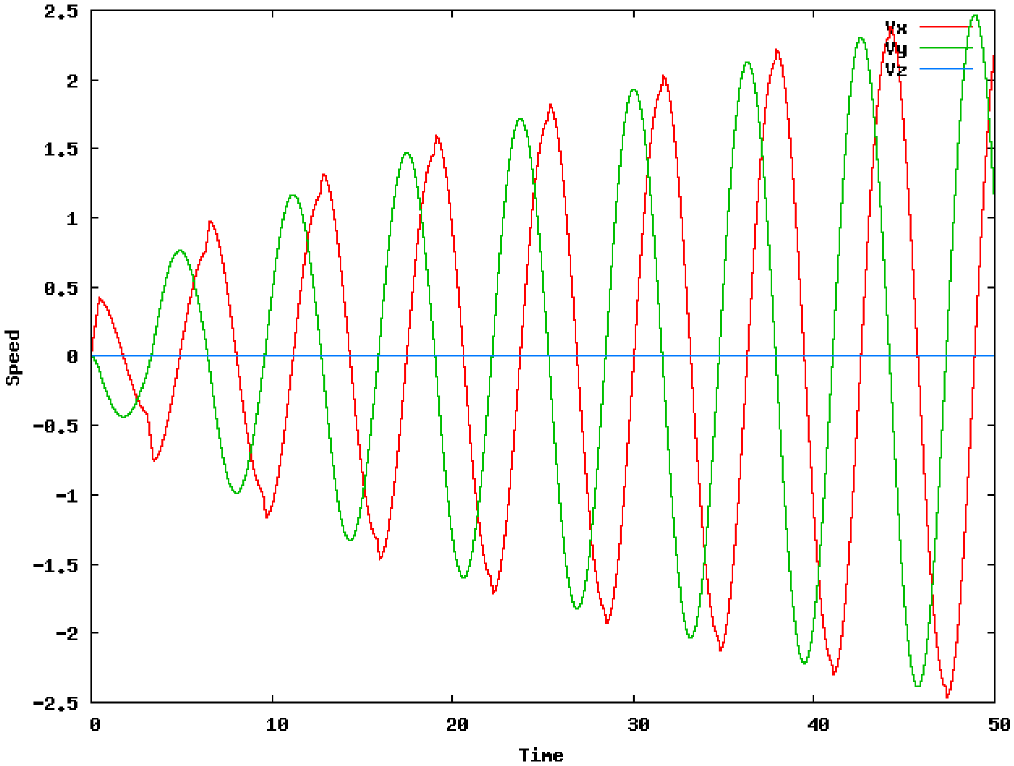
a) Skal her lage nytt program for partikkel i **E**- og **B**-felt. Bruker $m = 1$, $q = 1$, $\mathbf{v}(t = 0) = (0, 0, 0)$ og $\mathbf{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$. Setter $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ og

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x & \text{for } x \in [-0.1, 0.1], \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

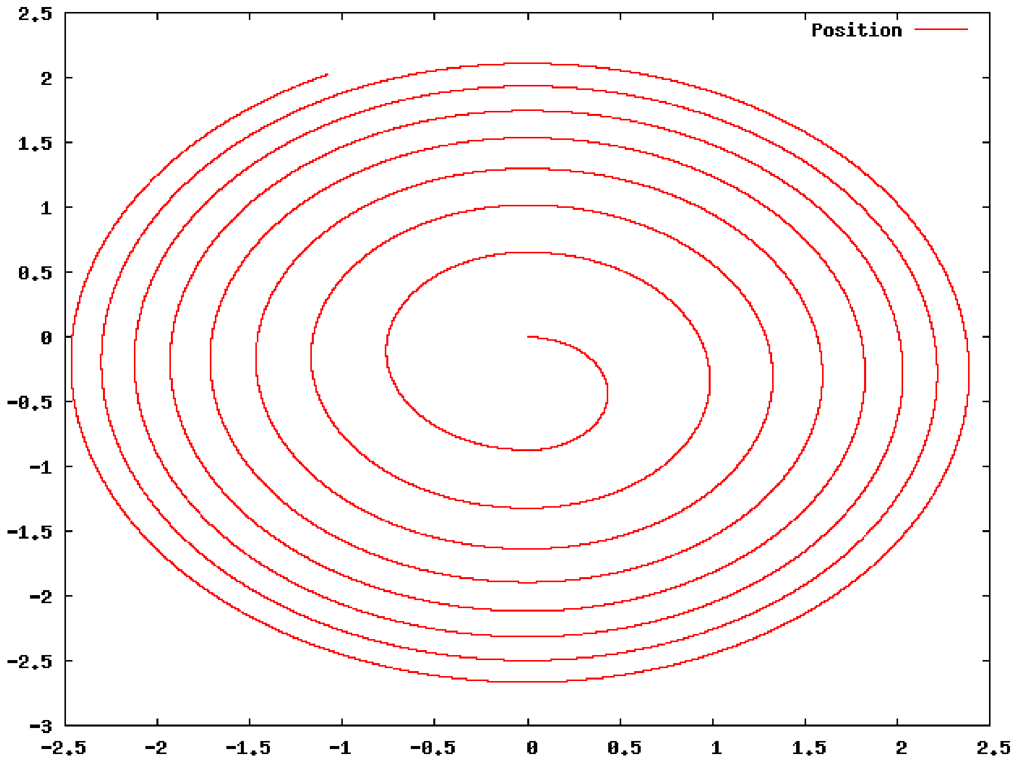
Lar tiden gå fra 0 til 50 og får ut figurene på de neste sidene.
Vi ser at radius ikke øker like mye i hvert omløp.
Dette skyldes at partikkelen tilbringer kortere tid i E-feltet for hvert omløp. Ergo får ikke feltet akselerert partikkelen like mye for hvert omløp. Ergo får vi en raskere økning av radius i starten enn etterhvert.



Figur 9: Posisjonen til partikkelen



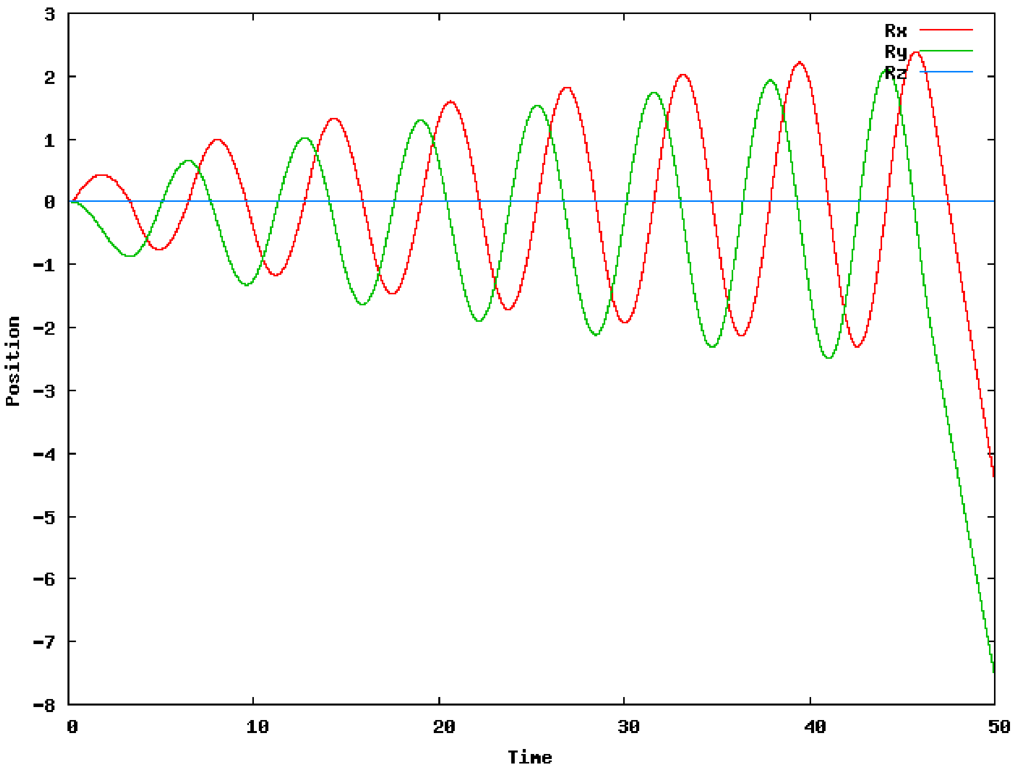
Figur 10: Farten til partikkelen



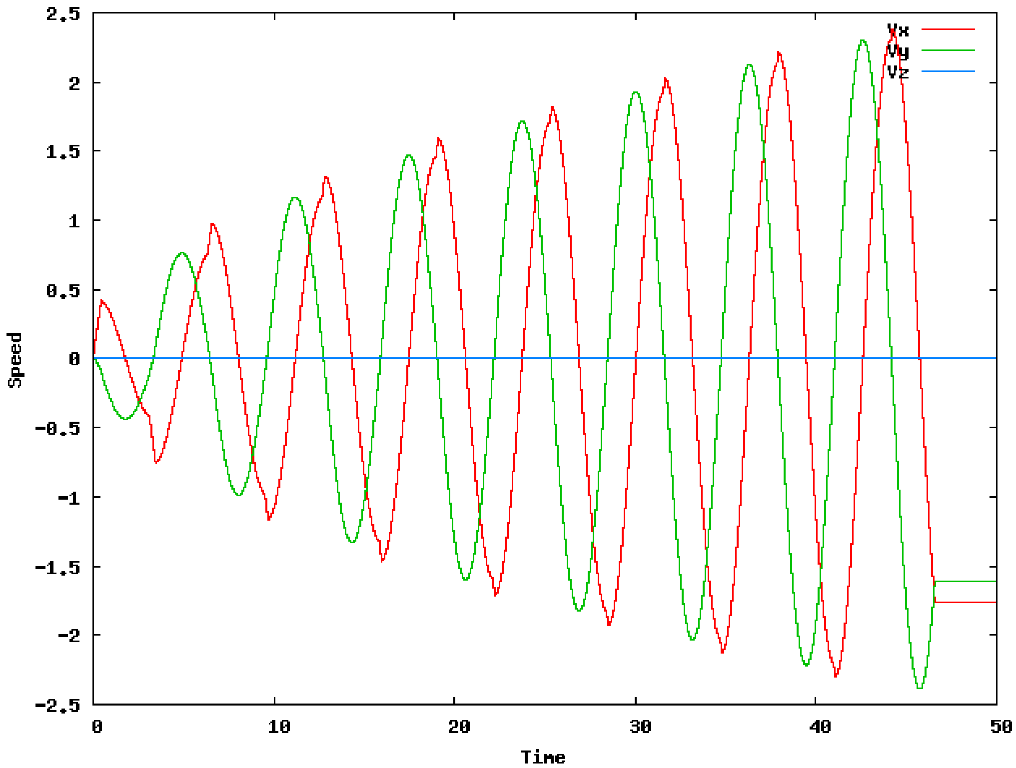
Figur 11: Posisjonen i 3D

b) Setter radiusen til D-ene $r_D = 2.6$ og tvinger programmet til å sette $F = 0$ hvis $r \geq r_D$

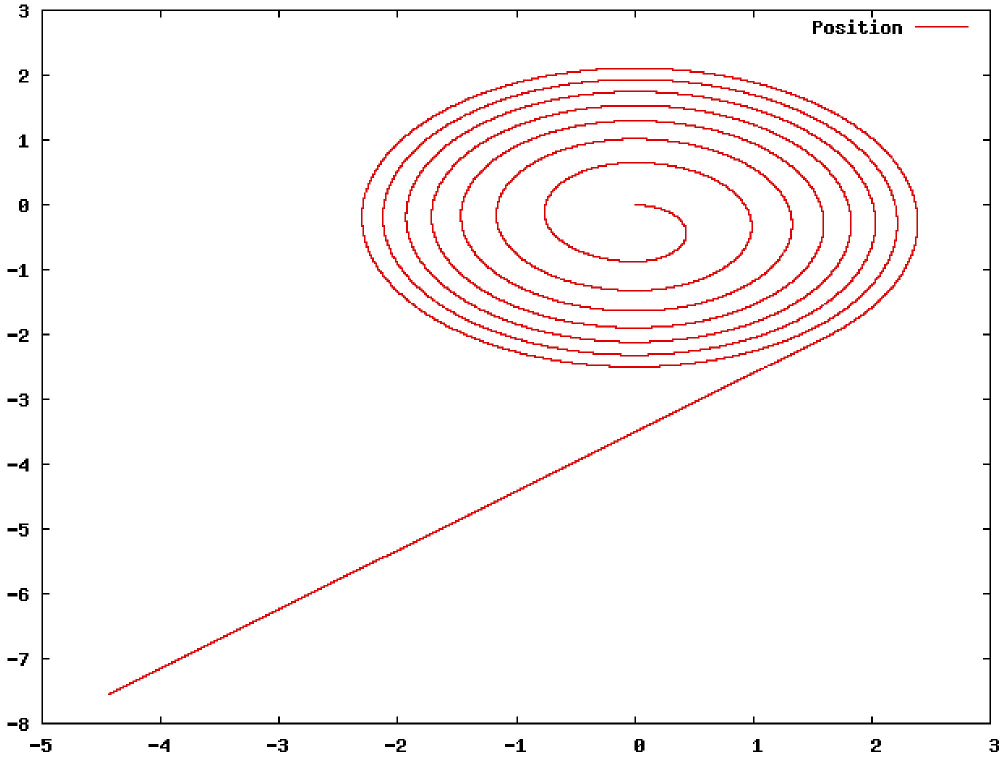
De resulterende plottene kan sees under:



Figur 12: Posisjonen til partikkelen



Figur 13: Farten til partikkelen



Figur 14: Posisjonen i 3D

c) Skal her finne farten som partikkelen forlater syklotronen med. Dette løses enkelt med en test i programmet og vi får ut at partikkelen forlater syklotronen med fart $v = 0.41$

d) Skal nå finne et uttrykk for den kinetiske energien til partikkelen. Har at:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Bruker ($\star$) fra oppgave 2c for v og får så:

$$E_k = \frac{1}{2}m(\frac{qB}{m})^2$$
$$\Downarrow$$
$$E_k = \frac{1}{2}\frac{q^2B^2r^2}{m}$$

Får så beskjed om å finne energien til et proton når $r = 1m$ og $B = 1T$. Svaret skal uttrykkes i MeV.

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{q_p^2B^2r^2}{m_p}$$
$$\Downarrow$$
$$E_k = \frac{1}{2}\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{1.67\times10^{-27}}\frac{C^2T^2m^2}{kg}$$
$$\Downarrow$$
$$E_k = \frac{1}{2}\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{1.67\times10^{-27}}\frac{kgm^2}{s^2}$$
$$\Downarrow$$
$$E_k \approx 7.67 \times 10^{-12}J$$

Har at $1J = 6.24150934 \times 10^{18}eV$
Konverterer og får:

$$E_k \approx 7.67 \times 10^{-12} \times 6.24150934 \times 10^{18}eV$$
$$\Downarrow$$
$$E_k \approx 4.8 \times 10^7 eV$$
$$\Downarrow$$
$$E_k \approx 48MeV$$

Skal så sammenligne med protonmassen og kommenter den ikke-relativistiske tilnæmingen som er gjort i modellen.
Har at energien til et proton i ro er:

$$E = m_pc^2$$
$$\Downarrow$$
$$E = 1.67 \times 10^-27 \times (3 \times 10^8)^2 J$$

Konverterer fra J til eV:

$$E = 1.67 \times 10^-27 \times (3 \times 10^8)^2 \times 6.24150934 \times 10^{18} eV$$
$$\Downarrow$$
$$E = 9.38 \times 10^8 eV$$
$$\Downarrow$$
$$E = 938 MeV$$

Da ser vi at:

$$\frac{E_k}{E} \times 100 = 5.11\%$$

Som forteller oss at dette trolig ikke er en veldig god tilnærming.
Eventuelt kan vi gjøre om E_k til en hastighet og sammelikne med lysfarten.
Når vi gjør det får vi at hastigheten når nesten 32% av lyshastigheten.
Da er det på tide å ta hensyn til relativitet.

e) Her skal vi bestemme oss for en spenning som er sannsynlig å ha mellom D-ene i syklotronen, og deretter beregne hvor mange runder et proton må ta rundt før det forlater syklotronen.
Vi får oppgitt at syklotronen har radius $r = 1m$ og $B = 1T$
Hvis vi sier at N = antall runder rundt syklotronen ender vi opp med å løse følgende ligning:

$$2NqV = \frac{1}{2}\frac{q^2B^2r^2}{m}$$
$$\Downarrow$$
$$N = \frac{qB^2r^2}{4mV}$$
$$\Downarrow$$
$$N = \frac{q}{V4m}$$
$$\Downarrow$$
$$N = \frac{1}{4}\frac{q_p}{Vm_p}$$

Setter inn tall for ladning og masse til et proton:

$$N = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{4 \times 1.67 \times 10^{-27}}$$
$$\Downarrow$$
$$N \approx \frac{1}{V} 2.4 \times 10^7$$

Har lest litt på internett om syklotroner og det er visstnok mulig å komme ganske høyt opp i spenning (94kV faktisk).
Jeg har valgt å være litt mer forsiktig og bruker en spenning $V = 12000V$.
Da får vi:

$$N = \frac{2.4\times10^7}{1.2\times10^4}$$
$$\Downarrow$$
$$N = 2000$$

Vi får så beskjed om å bestemme frekvensen til E-feltet.
Har at:

$$\omega = 2\pi f$$
$$\Downarrow$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Vi har så fra oppgave2 at:

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

Hvis vi nå setter inn for ω i formelen for frekvens får vi:

$$f = \frac{qB}{2m\pi}$$
$$\Downarrow$$
$$f = \frac{1.6\times10^{-19}}{2\pi 1.67\times10^{-27}}\frac{CT}{kg}$$
$$\Downarrow$$
$$f = \frac{1.6\times10^{-19}}{2\pi 1.67\times10^{-27}}\frac{Askg}{s^2Akg}$$
$$\Downarrow$$
$$f = \frac{1.6\times10^{8}}{2\pi 1.67}\frac{}{s}$$
$$\Downarrow$$
$$f = 15.2484MHz$$

PS: Jeg har jobbet mye sammen med Peter Hanken, Kristian Olsen, Ask Markestad og Sean Miller på denne obligen.
Antar det blir en del likheter mellom oss