FYS2140 Kvantefysikk, Oblig 1

Mitt **navn** og **gruppenummer**

15. januar 2014

Obliger i FYS2140 merkes med navn og gruppenummer!

Dette oppgavesettet er ment å friske opp en del grunnleggende matematikk som dere forventes å beherske, og som er helt avgjørende for å komme seg helskinnet gjennom kurset.

Oppgave 1 Lek med komplekse tall

a) For hvert av de oppgitte komplekse tallene, beregn z^*, $|z|$ og $|z|^2$. Sjekk eksplisitt at $zz^* = |z|^2$.

(i) $z = i$.

(ii) $z = 3 + 4i$.

(iii) $z = -3$.

(iv) $z = 1 - i$.

(v) $z = -3 - 4i$.

Forklar hvorfor svarene for (ii) og (v) er så like.

b) Forenkle de oppgitte uttrykkene og skriv resultatet på formen $a + bi$. *Hint:* Bruk relasjonen $z_1/z_2 = z_1 z_2^*/|z_2|^2$.

(i) $\frac{3+4i}{1-2i}$.

(ii) $\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$.

(iii) $\frac{1-2i}{3-4i} - \frac{2+i}{5i}$.

c) Skriv hvert av de følgende komplekse tallene på polarform, $z = r\exp(i\theta)$, det vil si bestem r og θ. *Hint:* Bruk relasjonen $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ (**Eulers formel**). Velg θ slik at $-\pi < \theta \leq \pi$.

(i) $z = 2i$.

(ii) $z = -6 + 6\sqrt{3}i$.

(iii) $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

d) Finn $z = z_1 z_2$ når:

(i) $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ og $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(ii) $z_1 = 2e^{-i\pi}$ og $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(iii) $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{5}}$ og $z_2 = e^{i\frac{\pi}{5}}$.

Hva skjer geometrisk (i det komplekse planet) med et komplekst tall dersom du multipliserer det med $e^{i\frac{\pi}{2}}$?

Oppgave 2 Et par viktige differensialligninger

a) Skriv ned den generelle løsningen til differensialligningen

$$\frac{df(x)}{dx} = bf(x), \tag{1}$$

hvor b er en konstant. Vi setter så følgende randbetingelser: $f(0) = 1$ og $f'(0) = 3$. Bruk dette til å bestemme de to ukjente konstantene og skriv ned løsningen for $f(x)$ med disse randbetingelsene.

b) Vi skal så se på differensialligningen

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = af(x), \tag{2}$$

der a er en konstant. Anta først at a er positiv. Vis at den generelle løsningen kan skrives som

$$f(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}, \tag{3}$$

der A og B er vilkårlige konstanter. Hva kan vi si om konstanten A dersom vi krever at $f(x)$ skal gå mot null for $x \to \infty$? Hva blir B dersom vi i stedet krever at $f(x)$ skal gå mot null for $x \to -\infty$? Skriv til slutt om løsningen (3) som en lineærkombinasjon av hyperbolske funksjoner, $\sinh(\sqrt{a}x)$ og $\cosh(\sqrt{a}x)$, i stedet for eksponentialfunksjonen.

c) Nå betrakter vi i stedet tilfellet $a < 0$, dvs. $a = -|a|$. Hvordan modifiseres løsningen (3)? Skriv ned den generelle løsningen for dette tilfellet, både uttrykt ved eksponentialfunksjoner og uttrykt ved hjelp av trigonometriske funksjoner $\sin(\sqrt{|a|}x)$ og $\cos(\sqrt{|a|}x)$.

Oppgave 3 Litt integralregning

a) Finn følgende **gaussiske integraler** (det er lov å bruke Rottmann):

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-4x-1}\, dx. \tag{4}$$

(ii)

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-2x^2}\, dx. \tag{5}$$

b) Løs følgende integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz. \tag{6}$$

Hint: gjør om til **sfæriske koordinater** og bruk den (meget nyttige!) formelen

$$\int_{0}^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\, n!, \tag{7}$$

der n er et heltall.