

Problemario.

Matroid Theory (Oxley)

Sección 1.1 Conjuntos independientes y circuitos

Problemas 2,7 y 9.

2. Sea A la matriz

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Para $q \in \{2, 3\}$, sea $M_q[A]$ el matroide vectorial de A cuando A es vista sobre $GF(q)$, el campo de q elementos. Muestra que:

(i) Los conjuntos de circuitos de $M_2[A]$ y $M_3[A]$ son distintos.

(ii) $M_2[A]$ es gráfico, pero $M_3[A]$ no.

(iii) $M_2[A]$ es representable sobre $GF(3)$, pero $M_3[A]$ no es representable sobre $GF(2)$.

7. Sean M_1 y M_2 matroides en conjuntos disjuntos E_1 y E_2 . Sea $E = E_1 \cup E_2$ y

$\mathcal{I} = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{I}(M_1), I_2 \in \mathcal{I}(M_2)\}$. Pruebe que (E, \mathcal{I}) es un matroide.

9. Sean M_1 y M_2 matroides en E . Da un ejemplo que muestre que $(E, \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2))$ no necesariamente es un matroide.

Sección 1.2 Bases

Problemas 1 y 6.

1. Prueba que \mathfrak{B} es la colección de bases de un matroide en E si y sólo si \mathfrak{B} satisface (B1) y las siguientes dos condiciones:

(B2)' Si $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ y $e \in B_1$, entonces existe un elemento f de B_2 tal que $(B_1 - e) \cup f \in \mathfrak{B}$.

(B3) Si $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ y $B_1 \subseteq B_2$ entonces $B_1 = B_2$.

6. Sea B una base para un matroide M , $f \in E(M)$ y $e \in E(M) - B$. Demuestra que $(B \cup e) - f$ es una base si y sólo si $f \in C(e, B)$.

Sección 1.3 Rango

Problemas 4 y 5.

4. Muestra que un matroide M es uniforme si y sólo si no tiene circuitos de tamaño menor que $r(M) + 1$.

5.

- (i) Caracteriza los matroides paving en términos de sus colecciones de conjuntos independientes y en términos de sus colecciones de bases.
- (ii) Caracteriza los matroides uniformes en términos de sus colecciones de circuitos.

Sección 1.4 Cerradura

Problemas 2 y 6.

2. Muestra que un conjunto X es base para un matroide si y sólo si X es independiente y generador.

6. Muestra que los enunciados (a)-(g) son equivalentes para un elemento e en un matroide M .

- (a) e esta a todas las bases
- (b) e no pertenece a ningún circuito.
- (c) Si $X \subseteq E(M)$ y $e \in cl(X)$, entonces $e \in X$.
- (d) $r(E(M) - e) = r(E(M)) - 1$
- (e) $E(M) - e$ es un flat.
- (f) $E(M) - e$ es un hiperplano.
- (g) Si I es un conjunto independiente, entonces $I \cup e$ también.

Sección 1.6 Matroides Transversales

Problemas 1, 3 y 4.

1. Muestra lo siguiente:

- (i) Todos los matroides uniformes son transversales.
- (ii) Un matroide transversal no necesariamente es gráfico.
- (iii) Un matroide paving no necesariamente es transversal.

3. Sea $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ y $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ donde $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$ y $A_3 = \{4, 5, 6\}$.

- (i) Encuentra $\Delta[\mathcal{A}]$.
- (ii) Da una representación geométrica para $M[\mathcal{A}]$.

4. Caracteriza los circuitos de $M[A]$ en términos de la gráfica bipartita $\Delta[\mathcal{A}]$.

Sección 1.7 Lattices

5. Demuestra que en una lattice finita \mathfrak{L} es semimodular si para toda x, y en \mathfrak{L} , la siguiente condición se satisface:

si ambas x, y cubren $x \wedge y$, entonces $x \vee y$ cubre a x e y .

Sección 1.8 Algoritmo Greedy

1.

(i) Encuentra todos los árboles generadores de peso máximo en la gráfica de la figura 1.32, ¿Es éste el único árbol?

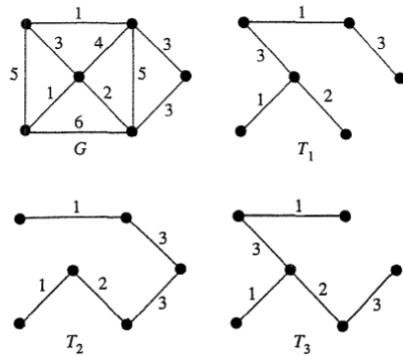


Fig. 1.32. G and its minimum-weight spanning trees.

Figura 1

(ii) Encuentra todos los árboles generadores de peso máximo de la gráfica en la figura 1.28(a) donde las etiquetas de las aristas se interpretan como pesos.

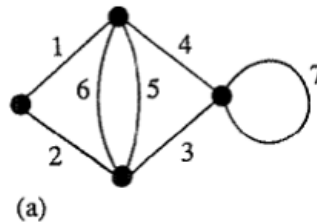


Fig. 1.28. (a) A graph G .

Figura 2

4. Sea M un matroide y $w : E(M) \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Prueba que M tiene una única base con peso máximo.