

Zadanie domowe Sudoku w CNF

Artem Kukushkin, 317140, WSI

Reprezentacja zmiennych

Dla planszy Sudoku 9×9 , gdzie każda komórka może przyjąć wartość od 1 do 9, wprowadzamy zmienne logiczne postaci:

- $x_{i,j,k}$ – gdzie $i, j, k \in \{1, 2, \dots, 9\}$
Znaczenie:
- $x_{i,j,k} = \text{True}$ oznacza, że w wierszu i , kolumnie j znajduje się cyfra k .
- $x_{i,j,k} = \text{False}$ oznacza, że cyfra k nie znajduje się w tej komórce.

Reguły Sudoku w CNF

Aby zakodować reguły Sudoku, musimy zapewnić następujące warunki:

1. Każda komórka zawiera dokładnie jedną cyfrę

Dla każdej komórki (i, j) :

- **Przynajmniej jedna cyfra jest ustawiona:**

$$(x_{i,j,1} \vee x_{i,j,2} \vee \dots \vee x_{i,j,9}) \quad (\text{dla każdego } i, j)$$

- **Nie więcej niż jedna cyfra w komórce** (dla każdej pary $k \neq l$):

$$(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{i,j,l}) \quad (\text{dla każdego } k < l)$$

2. Każda cyfra występuje dokładnie raz w wierszu

Dla każdego wiersza i i każdej cyfry k :

- **Cyfra k występuje przynajmniej raz w wierszu i :**

$$(x_{i,1,k} \vee x_{i,2,k} \vee \dots \vee x_{i,9,k}) \quad (\text{dla każdego } i, k)$$

- **Cyfra k nie powtarza się w wierszu** (dla każdej pary kolumn $j \neq m$):

$$(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{i,m,k}) \quad (\text{dla każdego } j < m)$$

3. Każda cyfra występuje dokładnie raz w kolumnie

Analogicznie do wierszy, dla każdej kolumny j i cyfry k :

- **Przynajmniej jedno wystąpienie:**

$$(x_{1,j,k} \vee x_{2,j,k} \vee \dots \vee x_{9,j,k}) \quad (\text{dla każdego } j, k)$$

- **Brak powtórzeń** (dla każdej pary wierszy $i \neq n$):

$$(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{n,j,k}) \quad (\text{dla każdego } i < n)$$

4. Każda cyfra występuje dokładnie raz w bloku 3×3

Dla każdego bloku B (np. $B \in \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$) i cyfry k :

- **Przynajmniej jedno wystąpienie w bloku:**

$$\bigvee_{(i,j) \in B} x_{i,j,k}$$

- **Brak powtórzeń w bloku** (dla każdej pary komórek $(i,j) \neq (m,n)$ w bloku):

$$(\neg x_{i,j,k} \vee \neg x_{m,n,k})$$

5. Uwzględnienie początkowego wypełnienia planszy

Jeśli w komórce (i,j) na początku jest wpisana cyfra k , dodajemy klauzulę:

$$(x_{i,j,k})$$

Przykład dla Sudoku 4×4

Dla uproszczenia, rozważmy Sudoku 2×2 (4 komórki, cyfry 1-2).

- Zmienne: $x_{i,j,k}$ dla $i, j, k \in \{1, 2\}$.
- **Przynajmniej jedna cyfra w komórce (1,1):**

$$(x_{1,1,1} \vee x_{1,1,2})$$

- **Co najwyżej jedna cyfra w komórce (1,1):**

$$(\neg x_{1,1,1} \vee \neg x_{1,1,2})$$

- **Cyfra 1 występuje w wierszu 1:**

$$(x_{1,1,1} \vee x_{1,2,1})$$

- **Cyfra 1 nie powtarza się w wierszu 1:**

$$(\neg x_{1,1,1} \vee \neg x_{1,2,1})$$

... i analogicznie dla pozostałych warunków.

Złożoność

Dla pełnego Sudoku 9×9 :

- Liczba zmiennych: $9 \times 9 \times 9 = 729$ (bo $x_{i,j,k}$ dla każdego i, j, k).
- Liczba klauzul:
 - Dla "każda komórka ma dokładnie jedną cyfrę": $81 \times (1 + 36) = 2997$ (81 komórek, 1 klauzula "co najmniej jedna", 36 klauzul "co najwyżej jedna").
 - Analogicznie dla wierszy, kolumn i bloków.
 - Łącznie może być kilkadziesiąt tysięcy klauzul.

Podsumowanie

Kodowanie Sudoku w CNF polega na:

1. Reprezentacji cyfr za pomocą zmiennych logicznych.
2. Zapewnieniu, że każda komórka, wiersz, kolumna i blok spełniają reguły Sudoku.
3. Dodaniu klauzul dla początkowego wypełnienia.