Zadanie 1. Dokumentacja: Implementacja algorytmu gradientu prostego

Artem Kukushkin, 317140

1. Opis implementowanych algorytmów

W ramach tego projektu zaimplementowano algorytm gradientu prostego do minimalizacji funkcji celu. Algorytm ten iteracyjnie aktualizuje wartości wektora zmiennych decyzyjnych w kierunku przeciwnym do gradientu funkcji celu, zgodnie ze wzorem:

$$x_{t+1} = x_t - \alpha \nabla f(x_t)$$

Gdzie:

- x_t – wektor zmiennych decyzyjnych w iteracji t,
- α – współczynnik uczenia (krok algorytmu),
- $\nabla f(x_t)$ – gradient funkcji celu w punkcie x_t.

Algorytm został zaprojektowany tak, aby można było zastosować go do różnych funkcji celu. W implementacji wykorzystano bibliotekę **autograd** do obliczania gradientów.

Warunki stopu

Aby uniknąć nieskończonej liczby iteracji, algorytm kończy działanie, gdy spełniony zostanie jeden z warunków:

- Norma gradientu jest mniejsza od zadanej tolerancji ϵ\epsilon,
- Osiągnięta została maksymalna liczba iteracji.

2. Opis planowanych eksperymentów numerycznych

Aby zbadać skuteczność algorytmu gradientu prostego, przeprowadzono eksperymenty dla trzech różnych funkcji celu:

a. **Funkcja kwadratowa:**

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

Jest to funkcja wypukła o minimum globalnym w punkcie (0,0)(0,0).

b. **Funkcja Rosenbrocka:**

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2]$$

Znajduje szeroką dolinę prowadzącą do minimum globalnego w punkcie (1,1)(1,1), co czyni ją trudnym problemem optymalizacyjnym.

c. **Funkcja Ackleya:**

$$f(x) = -20\exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(2\pi x_i)\right) + 20 + e$$

Funkcja ta posiada wiele minimów lokalnych, a jej globalne minimum znajduje się w punkcie (0,0)(0,0).

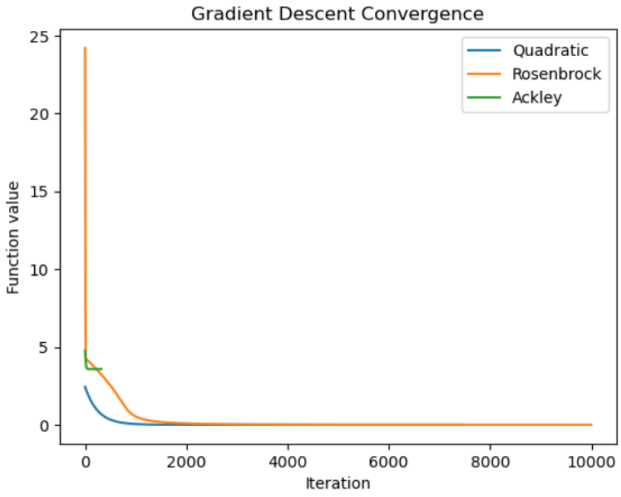
Dla każdej z funkcji przetestowano różne wartości początkowe x0:

[−1.2, 1.0], [−2, 2], [−5, 5], [2, 2], [0, 0], [−10, 10], [100, −100]

Eksperymenty miały na celu zbadanie wpływu wyboru początkowego punktu na zbieżność algorytmu oraz jego skuteczność w minimalizacji funkcji.

3. Opis uzyskanych wyników

X0 = [-1.2, 1.0]



Wyniki dla różnych wartości x0:

x0	Funkcja kwadratowa	Funkcja Rosenbrocka	Funkcja Ackleya
[−1.2,1.0]	[−3.84·10^7, 3.20·10^−7] 0.868s	[0.992, 0.984] 2.698s	[−0.968, 0.968], 0.102s
[−2, 2]	[−3.53·10^−7, 3.53·10^−7] 0.894s	[0.989, 0.978] 2.722s	[−1.974, 1.974], 0.091s

[−5, 5]	[−3.53·10^−7, 3.53·10^−7] 1.061s	[−2.693, 7.284] 2.666s	[−4.986, 4.986], 0.090s
[2, 2]	[3.53·10^−7, 3.53·10^−7] 0.878s	[1.032, 1.066], 2.737s	[1.974, 1.974], 0.099s
[0, 0]	[0, 0], 0.002s	[0.994, 0.989], 2.890s	[nan, nan], 3.681s
[−10, 10]	[−3.53·10^−7, 3.53·10^−7] 1.005s	[−4, 15.956], 2.657s	[−9.995, 9.995], 0.085s
[100, −100]	[1.838, −1.838], 1.084s	[0.106, −0.010] 2.612s	[100, -100], 0.000s

Analiza wyników

- **Funkcja kwadratowa** – algorytm dobrze radził sobie z minimalizacją niezależnie od wartości x0.
- **Funkcja Rosenbrocka** – gradient prosty miał trudności z dojściem do optymalnego rozwiązania dla dużych wartości x0, co wynika z jej specyfiki.
- **Funkcja Ackleya** – wartości x0 = [0, 0] i x0 = [100, −100] pokazały problemy numeryczne i brak zbieżności.

4. Wnioski z przeprowadzonych badań

1. Zbieżność algorytmu zależy od wyboru funkcji celu i punktu startowego.
2. Gradient prosty może nie radzić sobie dobrze z funkcjami o wielu minimach lokalnych (Ackley).
3. Dla funkcji Rosenbrocka algorytm często kończy w lokalnym minimum zamiast w optymalnym punkcie (1, 1).
4. Dobre wartości początkowe przyspieszają zbieżność, ale nie eliminują problemu utknięcia w minimum lokalnym.