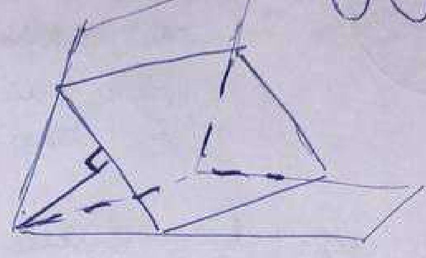
№5) Дано: $\Pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\Pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

Π_3 - ? $\Pi_3: A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$

Также дан парам-р, который задает размер Васи:



Пусть это будет d:

d - расстояние от прямой (которую получим: $\Pi_1 \cap \Pi_2$)

Пусть l - прямая | $l = \Pi_1 \cap \Pi_2$

1) Найдем т-ку на этой прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad x = \frac{-D_1 - C_1z - B_1y}{A_1}$$

(Если $A_1 = 0$ - просто выражаем другую коорд-ту, $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ - нас такой случай не интересует, т.к тогда Π_1 не задает ур-е пл-ти)

$$\frac{A_2}{A_1}(-D_1 - C_1z - B_1y) + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$y\left(B_2 - \frac{A_2}{A_1}B_1\right) + z\left(C_2 - \frac{A_2}{A_1}C_1\right) + \left(D_2 - \frac{A_2}{A_1}D_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{z\left(\frac{A_2}{A_1}C_1 - C_2\right) + \left(\frac{A_2}{A_1}D_1 - D_2\right)}{B_2 - \frac{A_2}{A_1}B_1}$$

(Если $B_2A_1 - A_2B_1 = 0$, то выражаем другую коорд-ту, а $B_2A_1 - A_2B_1 = 0 = A_2C_1 - A_1C_2 = B_1C_2 - B_2C_1$

Нас этот случай не интересует, т.к тогда $\pi_1 \| \pi_2$)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{-D_1 - C_1 z - B_1 y}{A_1} \\[2ex] \dfrac{z(A_2C_1 - A_1C_2) + (A_2D_1 - A_1D_2)}{B_2A_1 - A_2B_1} \\[2ex] z \end{pmatrix}$$

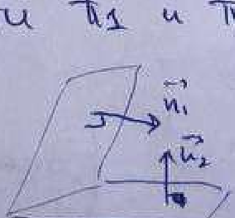
– т-ки, которые лежат на пр. l.

Возьмем $z=0$, т.к. нам нужна любая т-ка на этой пр-й

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{-D_1 - B_1\left(\dfrac{A_2D_1 - A_1D_2}{B_2A_1 - A_2B_1}\right)}{A} \\[2ex] \dfrac{A_2D_1 - A_1D_2}{B_2A_1 - A_2B_1} \\[2ex] 0 \end{pmatrix}$$

2)

Ориентируем пл-ти π_1 и π_2 | их нормали смотрели внутрь:



Это можно сделать так:

возьмем т-ку внутри 3D-модели: $Q = (q_1, q_2, q_3)$

$\pi_1|_Q = A_1q_1 + B_1q_2 + C_1q_3 + D_1$ – если меньше нуля, то домножаем на (-1)

Аналогично для $\pi_2|_Q$.

$\Rightarrow$ нормали Π_1 и Π_2 смотрят внутрь:

$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ $\quad\quad$ $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

$\vec{n}_1 \perp \Pi_1$ $\quad\quad$ $\vec{n}_2 \perp \Pi_2$

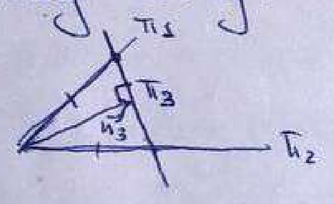
Теперь нормируем $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1' = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} (A_1, B_1, C_1).$$

$$\vec{n}_2' = \frac{1}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} (A_2, B_2, C_2)$$

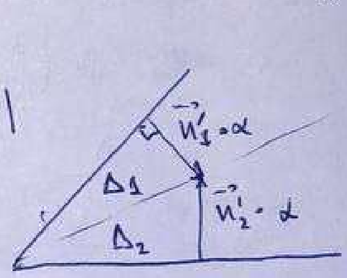
$$\vec{n}_1' + \vec{n}_2' = \vec{n}_3 = \left(\frac{A_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{A_2}{|\vec{n}_2|}, \frac{B_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{B_2}{|\vec{n}_2|}, \frac{C_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{C_2}{|\vec{n}_2|} \right)$$

Вид сбоку:



~~$\vec{n}_3 \perp \Pi_3$, т.к. $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2|$~~

$\vec{n}_3 \perp \Pi_3$, т.к.



$\Delta_1 = \Delta_2$, по трем сторонам ($|\vec{n}_1 \cdot \alpha| = |\vec{n}_2 \cdot \alpha|$, две другие равны по усл-ю и одна общая)

$\alpha \in \mathbb{R}$ - какой-то коэф-т.

4) Т.о. мы нашли A_3, B_3, C_3, т.к $\vec{n}_3 = (A_3, B_3, C_3)$

Из условия $d = \rho(P, \Pi_3)$, т.к $P \in l$. Пусть $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$$d = -\left(\frac{A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3 z_0 + D_3}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2 + C_3^2}} \right)$$

(Знак „-", т.к $\vec{n}_3$ напр-на в другую сторону отн-но P)

$$\Rightarrow D_3 = -d\sqrt{A_3^2 + B_3^2 + C_3^2} - A_3 x_0 - B_3 y_0 - C_3 z_0.$$

$$A_3 = \frac{A_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{A_2}{|\vec{n}_2|}, \quad B_3 = \frac{B_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{B_2}{|\vec{n}_2|}, \quad C_3 = \frac{C_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{C_2}{|\vec{n}_2|}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 - B_1\left(\dfrac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{B_2 A_1 - A_2 B_1}\right) \\ \dfrac{A_2 D - A_1 D_2}{B_2 A_1 - A_2 B_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$