Лекция 23

11.4.3 Интеграл Лебега и предельный переход

Одним из основных преимуществ интеграла Лебега перед интегралом Римана является бóльшая свобода при выполнении предельных переходом под знаком интеграла. Для осуществления этой процедуры в интеграле Римана нам фактически требуется равномерная сходимость последовательности подынтегральных функций. Для интеграла Лебега это требование можно значительно ослабить. Как и ранее, мы предположим, что $\mu(X) < \infty$.

Теорема 11.4.21 (Лебега)**.** *Пусть последовательность $\{f_k\}$ измеримых функций сходится почти всюду на множестве X к функции f и $|f_k(x)| \leqslant \varphi(x)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и почти всех $x \in X$. Если $\varphi \in \mathscr{L}(X)$, то $f \in \mathscr{L}(X)$ и*

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Доказательство. Очевидно, что $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ для почти всех $x \in X$, поэтому, как следует из теоремы 11.4.16, $f \in \mathscr{L}(X)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\int_E \varphi\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}$$

для произвольного измеримого множества $E \subset X$, мера Лебега которого меньше δ. В то же время, согласно теореме Егорова множество E можно выбрать так, чтобы последовательность $\{f_k\}$ сходилась равномерно на $X \setminus E$. Поэтому существует такое $k_* \in \mathbb{N}$, что

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(X \setminus E)}$$

при $k > k_*$ и $x \in X \setminus E$.

Таким образом,

$$\Big|\int_X f_k\, d\mu - \int_X f\, d\mu\Big| = \Big|\int_{X\setminus E} (f_k - f)\, d\mu + \int_E f_k\, d\mu - \int_E f\, d\mu\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\int_{X\setminus E} (f_k - f)\, d\mu\Big| + 2\int_E \varphi\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

при $k > k_*$. Из этого неравенства следует утверждение теоремы. □

Пример 11.4.22. Условие существования интегрируемой мажоранты φ для последовательности $\{f_k\}$ важно в теореме Лебега. Пусть $X = [0,1]$ и

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & x \in [0, 1/k), \\ 0, & x \in [1/k, 1]. \end{cases}$$

Тогда $f_k(x) \to 0$ для любого $x > 0$. То есть $f_k \to f \equiv 0$ при $k \to \infty$ для почти всех $x \in X$. В то же время,

$$\int_X f_k\, d\mu = k \cdot \frac{1}{k} = 1 \not\to \int_X f\, d\mu = 0.$$

Для последовательности $\{f_k\}$ нет интегрируемой мажоранты. •

На практике интегрируемую мажоранту φ для последовательности $\{f_k\}$ бывает довольно сложно отыскать. Чаще всего такой мажорантой служит какая-нибудь постоянная. Если же последовательность $\{f_k\}$ не является ограниченной, возникают определённые проблемы при использовании теоремы Лебега. Следующие теоремы позволяют осуществить предельный переход без использования мажоранты, однако и на последовательность $\{f_k\}$ налагаются более ограничительные условия.

Теорема 11.4.23 (Б. Леви). *Пусть $\{f_k\}$ — почти всюду неубывающая последовательность интегрируемых по Лебегу на множестве X функций, то есть $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_k(x) \leqslant \ldots$ для почти всех $x \in X$. Если $\int_X f_k\, d\mu \leqslant M$ для некоторой постоянной $M \in \mathbb{R}$ и всех $k \in \mathbb{N}$, то для почти всех $x \in X$ существует конечный предел $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$, $f \in \mathscr{L}(X)$ и*

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Доказательство. Обозначим через E такое множество в X, что $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_k(x) \leqslant \ldots$ для всех $x \in E$. Согласно условию теоремы, $\mu(X \setminus E) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $f_k \geqslant 0$ в E для всех k, иначе вместо функций f_k мы рассмотрим функции $f_k - f_1$. Проведём доказательство теоремы в два шага.

Шаг 1. Покажем, что для почти всех $x \in E$ существует конечный предел $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. Обозначим через E^∞ множество точек $x \in E$, таких что $f_k(x) \to +\infty$ при $k \to \infty$. Нам необходимо показать, что $\mu(E^\infty) = 0$.

Определим множества

$$E_k^m = \{x \in E \mid f_k(x) \geqslant m\}.$$

Если $x \in E_k^m$, то $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x) \geqslant m$ и поэтому $x \in E_{k+1}^m$. Следовательно $E_k^m \subset E_{k+1}^m$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через E^m множество $\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k^m$. Из непрерывности меры Лебега следует, что

$$\mu(E^m) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k^m).$$

В то же время, в силу неравенства Чебышёва,

$$\mu(E_k^m) \leqslant \frac{1}{m} \int f_k\, d\mu \leqslant \frac{M}{m}.$$

Поэтому $\mu(E^m) \leqslant M/m$ и $\lim_{m\to\infty} \mu(E^m) = 0$.

Если $x_* \in E^\infty$, то для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует такое число k, что $f_k(x_*) \geqslant m$, то есть $x_* \in E_k^m$. Поскольку $x_* \in E_k^m$ хотя бы для одного k, мы делаем вывод, что $x_* \in E^m$, а поскольку это включение справедливо для всех m, мы заключаем, что $x_* \in \cap_{m\in\mathbb{N}} E^m$. Таким образом, $E^\infty \subset \cap_{m\in\mathbb{N}} E^m$. Заметим, что $E^{m+1} \subset E^m$ для всех $m \in \mathbb{N}$, так как $E_k^{m+1} \subset E_k^m$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Опять используя непрерывность меры Лебега, мы получаем:

$$\mu(E^\infty) \leqslant \mu\big(\cap_{m\in\mathbb{N}} E^m\big) = \lim_{m\to\infty} \mu(E^m) = 0.$$

Следовательно $\mu(E^\infty) = 0$.

Шаг 2. Функция f определена на множестве $E \setminus E^\infty$. Доопределим её как-нибудь на всём множестве X и новую функцию снова обозначим через f. Согласно теореме 11.3.13 функция f будет измеримой на X.

Обозначим через A_j, $j \in \mathbb{N}$, множество тех точек $x \in X$, для которых $j-1 \leqslant f(x) < j$, и положим $\varphi(x) = j$ при $x \in A_j$. Заметим, что $f_k \leqslant f < \varphi \leqslant f+1$ почти всюду в X. Кроме того, множества не пересекаются и $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$.

Положим $B_\ell = \cup_{j=1}^{\ell} A_j$. Почти всюду на этом множестве функции f_k и f ограничены числом ℓ, поэтому, используя теорему Лебега о предельном переходе, мы получим:

$$\sum_{j=1}^{\ell} j\,\mu(A_j) = \int_{B_\ell} \varphi\,d\mu \leqslant \int_{B_\ell} (f+1)\,d\mu = \int_{B_\ell} f\,d\mu + \mu(X)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{B_\ell} f_k\,d\mu + \mu(X) \leqslant M + \mu(X).$$

То есть частичные суммы ряда $\sum_{j=1}^{\infty} j\,\mu(A_j)$ равномерно ограничены. Следовательно, этот ряд сходится (так как его члены неотрицательны). Но сумма этого ряда есть не что иное, как $\int_X \varphi\,d\mu$. Поэтому $\varphi \in \mathscr{L}(X)$. Таким образом, φ является интегрируемой мажорантой последовательности $\{f_k\}$. Применив ещё раз теорему Лебега, мы получим утверждение теоремы. $\square$

Теорема 11.4.24 (Фату). *Если последовательность неотрицательных интегрируемых функций $\{f_k\}$ сходится почти всюду на X к функции f и $\int_X f_k\,d\mu \leqslant M$ для некоторой постоянной $M \in \mathbb{R}$ и всех $k \in \mathbb{N}$, то $f \in \mathscr{L}(X)$ и $\int_X f\,d\mu \leqslant M$.*

Доказательство. Для всех $x \in X$ положим $g_m(x) = \inf_{k\geqslant m} f_k(x)$. При каждом $m \in \mathbb{N}$ функция g_m измерима и $0 \leqslant g_m \leqslant f_m$ в X. Поэтому $g_m \in \mathscr{L}(X)$ и

$$\int_X g_m\,d\mu \leqslant \int_X f_m\,d\mu \leqslant M.$$

Поскольку $\{g_m\}$ — неубывающая последовательность и

$$\lim_{m\to\infty} g_m = \varliminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \text{почти всюду в } X,$$

доказываемое утверждение следует из теоремы Леви. $\square$

Замечание 11.4.25. Часто используется следующий вариант теоремы Фату: *если последовательность неотрицательных интегрируемых функций $\{f_k\}$ сходится почти всюду на X к функции f и $\int_X f_k\,d\mu \leqslant M$ для некоторой постоянной $M \in \mathbb{R}$ и всех $k \in \mathbb{N}$, то $f \in \mathscr{L}(X)$ и $\int_X f\,d\mu \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu$.*

По сравнению с предыдущей формулировкой теоремы Фату новым является только последнее интегральное неравенство. Чтобы его доказать, посмотрим внимательнее на доказательство теоремы. Вообще говоря, предел $\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu$ может и не существовать. Однако $0 \leqslant \int_X f_k\,d\mu \leqslant M$, а нижний предел у ограниченной последовательности существует всегда. Поэтому, согласно теореме Леви,

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k\,d\mu = \varliminf_{k\to\infty} \int_X g_k\,d\mu \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_X f_k\,d\mu.$$

Заметим, что из сформулированного утверждения следует утверждение теоремы 11.4.24. $\bullet$