ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук

Департамент программной инженерии

Линейная алгебра

Москва 2016

Содержание

1. 1 Сформулировать и доказать теорему о методе Гаусса

Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. В доказательство предъявим алгоритм, который гарантированно завершится для конечных матриц:

Шаг 1
(a) Фиксируем элемент в верхнем левом углу a_{ij}
(b) Если $a_{ij} = 0$: переходим к шагу 2.
Иначе объявляем этот элемент ведущим.
(c) Используя ведущий элемент будем добиваемся того, что элементы во всех строках ниже него обнуляются. Если a_{ij} - ведущий, то сложим строки $k, (k \neq i)$ и i. Причем строку i домножим на $\lambda = -\frac{a_{kj}}{a_{ij}}$.
(d) Смещаемся в матрице на строку вниз и на столбец вправо. Переходим к шагу 1. (пока не закончится матрица)

Шаг 2 Если текущий элемент нулевой, просматриваем все элементы под ним: Если найдем ненулевой в строке k то меняем строки k и i местами и переходим к шагу 1. Если все нулевые переходим к шагу 3.

Шаг 3 Переходим на один столбец вправо. Если справа есть столбцы переходим к шагу 1. Если столбцы закончились - конец алгоритма.

2. 43 Сформулировать и доказать теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы.

Ранг матрицы квадратичной формы не меняется в зависимости от базиса.

$$Rg(A_f) = Rg(S^T_{e\to f} A_e S_{e\to f})$$

Матрица S это преобразование между двумя ортонормиованными системами координат $\implies$ S ортагональна $\implies$ $\implies \exists S^{-1} = S^T \implies detS \neq 0$ S - невырожденная матрица.

Домножение матрицы на невырожденную матрицу B не меняет ранг матрицы A. Это отдельная теорема, докажем ее. Очевидно что $Rg(AB) \leq Rg(A)$, а также $Rg(ABB^{-1}) \leq Rg(AB)$, следовательно $Rg(A) \leq Rg(AB) \leq Rg(A) = Rg(A)$

Поэтому: $Rg(A_f) = Rg(S^T_{e\to f} A_e S_{e\to f})$

3. 44 Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному (каноническому) виду при помощи ортагональной замены координат.

1. Рассмотрим квадратичную форму $q(x)$

2. Возьмем стандартный ортонормированный базис $e = e_1, \dots e_n$.

3. Составим матрицу этой квадратичной формы A_e. Она будет симметрична, $A^T = A \implies A$ - самосопряженная матрица.

4. Докажем что самосопряженный оператор всегда диагонализируем. Докажем две леммы, а затем приведем основное доказательство.

   Лемма 1. Собственные значения самосопряженного оператора будут вещественными.

   Доказательство. Обозначим через (a, b) скалярное произведение векторов a и b. Пусть $A : V \to V$ – самосопряженный оператор (то есть $A = A^*$), λ - его собственное значение, e - вектор отвечающий этому собственному значению. По определению $\lambda(e, e) = (\lambda e, e) = (Ae, e) = (e, A^* e) = (e, Ae) = (e, \lambda e) = \bar{\lambda}(e, e)$ Здесь $\bar{\lambda}$ это комплексное сопряжение λ.

   Так как $(e, e) \neq 0 \implies \bar{\lambda} = \lambda$. ■ - доказано нормально.

5. У каждого самосопряженного оператора есть 1 или 2 инвариантных подпространства.

6. Если одно под-пространство. Есть решение.

7. Если два подпространства. Тоже обязательно будут решения.

8. Рассмотрим ее как матрицу оператора ϕ. Об операторах уже много чего известно, воспользуемся этим.

9. Так как матрица ϕ_e симметрична $\implies$ оператор диагонализируем. (Именно поэтому любую кв. форму можно привести к канон виду). Будем приводить оператор ϕ к диагональному виду.

10. Найдем собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

11. Найдем собственные вектора.

12. Процессом ортагонализации Грамма-Шмидта добьемся того чтобы все собственные вектора были ортагональны. Далее нормируем каждый вектор. В результате получим набор векторов $\{f_1, \dots, f_n\}$, которые образуют ортонормированный базис f.

13. Для операторов верно: $\phi_e = T_{e \to f} \phi_f T_{e \to f}^{-1}$

    $T_{e \to f}$ - матрица оператора перехода от базиса e к базису f (матрица из векторов базиса f записанных по столбцам, она будет ортагональна).

    ϕ_f - матрица оператора в базисе f (будет диагональной матрицей).

    ϕ_e - матрица оператора в изначальном базисе e (симметричная матрица).

14. Базисы e и f ортонормированны $\iff$ оператор перехода $T_{e\to f}$ будет ортагональным $\implies T^{-1}_{e\to f} = T^{T}_{e\to f}$

$$\phi_e = T_{e\to f}\phi_f T^{-1}_{e\to f}$$

$$\phi_f = T^{-1}_{e\to f}\phi_e T_{e\to f}$$

$$\phi_f = T^{T}_{e\to f}\phi_e T_{e\to f}$$

15. Вернемся к квадратичным формам и перепишем матрицу оператора как кв. форму:

$$A_f = T^{T}_{e\to f} A_e T_{e\to f}$$

Где A_f - построенная диагональная матрица квадратичной формы. $T_{e\to f}$ - ортагональная матрица перехода (применение такой матрицы это ортагональная замена координат). A_e - изначальная матрица кв. формы.
(или по формуле стас: $A_{e'} = S^{T}_{e\to e'} A_e S_{e\to e'}$)

16. Теперь по матрице A_f мы можем выписать канонический вид кв. формы $q(x)$, который мы получили при помощи ортагональной замены координат.

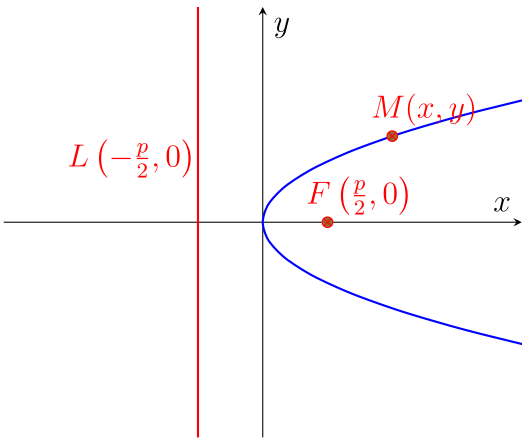
17. Так как все манипуляции логичны и не запрещенны $\implies \forall q(x)$можно привести к канон. виду с помощью оратагональной замены координат.

4. 45 Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выведите ее каноническое уравнение.

(Мы уже знаем что каноническое уравнение параболы это $y^2 = 2px$, осталось это показать.)
Геометрические точки задающие параболу равноудалены от фокуса пораболы и директрисы (смотри википедию «эксцентриситет»). В каноническом уравнении параболы (картинка ниже также дана для канонического случая):

Фокус – точка $F(p/2, 0)$.

Директриса – вертикальная прямая L заданная уравнением: $x = -p/2$.



Пусть $\rho(A, B)$ – дистанция между точками A и B. Рассмотрим точку $M(x, y)$. Точка $M \in$ параболе $\iff$ выполнятся соотношение $\rho(F, M) = \rho(F, L)$. Перепишем уравнение относительно координат:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|$$

Возведем обе стороны в квадрат:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Раскрываем скобки и переносим:

$$y^2 = 2px$$

Каноническое уравнение. Здесь $2p$ просто коэффициент. (Каноническое уравнение параболы записывают через $y^2 = 2px$ вместо $y^2 = kx$, так как у параметра p появляется геометрическое значение, это параметр параболы)

5. 46 Проведите полное исследование уравнения $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, A^2 + C^2 > 0$ кривой второго порядка

Сначала перепишем уравнение в более хорошей форме:

$$A\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) - \frac{D^2}{4A} + C\left(y^2 + 2\frac{E}{2C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) - \frac{E^2}{4C} + F = 0$$

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \left(F - \frac{E^2}{4C} - \frac{D^2}{4A}\right) = 0$$

Для параллельного переноса координат, сделаем замену $x' = x + \frac{D}{2A}$, а также $y' = y + \frac{E}{2C}$. Заодно заменим константу: $F' = F - \frac{E^2}{4C} - \frac{D^2}{4A}$

$$A(x')^2 + C(y')^2 + F' = 0$$

$$A(x')^2 + C(y')^2 = -F'$$

Теперь рассмотрим 3 варианта (будем строит дерево вариантов):

Вариант 1 $AC > 0$

(a) $F' = 0 \implies Ax'^2 + Cy'^2 = 0 \iff x'^2 = 0, y'^2 = 0$. То есть решение это точка на плоскости $x = -\frac{D}{2A}, y = -\frac{E}{2C}$.

(b) $F' \neq 0 \implies \frac{x'^2}{-F'/A} + \frac{y'^2}{-F'/C} = 1$ (Разделили на $-F'$ и перенесли коэффициенты A, C вниз).

   i. $F' < 0 \implies (-F'/A) > 0, (-F'/C) > 0$. Решение можо переписать в виде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это эллипс.

ii. $F' > 0 \implies -F' < 0$. Так как рассматриваем $AC > 0$ следовательно решение для $A(x')^2 + C(y')^2 = -F'$ это пустое множество.

Вариант 2 $AC < 0$

(a) $F' = 0 \implies Ax'^2 + Cy'^2 = 0$.
Разложим по $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$, так как либо $A < 0$, либо $C < 0$. Получим либо $(\sqrt{|A|}x' - \sqrt{|C|}y')(\sqrt{|A|}x' + \sqrt{|C|}y') = 0$,
либо $(-\sqrt{|A|}x' + \sqrt{|C|}y')(\sqrt{|A|}x' + \sqrt{|C|}y') = 0$.
В любом случае верно что: $\sqrt{|A|}x' = \sqrt{|C|}y'$, $\sqrt{|A|}x' = -\sqrt{|C|}y'$. Это пара прямых на плоскости.

(b) $F' \neq 0 \implies \frac{x'^2}{-F'/A} + \frac{y'^2}{-F'/C} = 1$

i. $F' > 0 (A < 0, C > 0) \implies (-F'/A) > 0, (-F'/C) < 0$. Решение можо переписать в виде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это гипербола.

ii. $F' < 0 (A > 0, C < 0) \implies (-F'/A) < 0, (-F'/C) > 0$. Решение можно переписать в виде $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это сопряженная гипербола.

Вариант 3 $AC = 0$

(a) $A \neq 0, C = 0 \implies Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
Выделим полный квадрат по x:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + Ey + F - \frac{D^2}{4A} = 0$$

Введем $F' = F - \frac{D}{4A} \implies A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -Ey - F'$

i. Если $E = 0 \implies A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -F'$

A. $F' = 0 \implies \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = 0$. Это вертикальная прямая $x = \frac{-D}{2A}$

B. $F' \neq 0$ Перепишем уравнение в виде $\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = \frac{-F'}{A}$
При $signF' = signA \implies \frac{-F'}{A} < 0 \implies \emptyset$.
При $signF' = -signA \implies x = \pm\sqrt{\frac{-F'}{A}} - \frac{D}{2A}$. Это пара вертикальных прямых.

ii. Если $E \neq 0 \implies A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -E(y + \frac{F'}{E})$. Осуществим параллельный перенос системы координат $x' = x + \frac{D}{2A}, y' = y + \frac{F'}{E}$. Получим:

$$x'^2 = -\frac{E}{A}y' \iff y' = -\frac{A}{E}x'^2$$

Это парабола (обыкновенная, вдоль оси y)

(b) $A = 0, C \neq 0 \implies Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
Разбор случая полностью аналогичен предыдущему. Вертикальные линии станут горизонтальными. Парабола будет вдоль оси х.