Программа для подготовки к устной части экзамена по курсу «Алгебра», 3-й модуль 2015/2016-го учебного года. Вопросы с доказательством.
26 марта 2016 г.

1. Сформулировать и доказать теорему о методе Гаусса.
2. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и доказать их (предполагается, что решение существует, а свойства определителя известны).
3. Дать определение обратной матрицы. Сформулировать и доказать критерий существования обратной матрицы. Единственна ли обратная матрица? Ответ обосновать.
4. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы и доказать её.
5. Сформулировать критерий линейной зависимости и доказать его.
6. Дать определение ранга. Как он меняется при транспонировании? Ответ обосновать, используя только определение.
7. Сформулировать и доказать критерий невырожденности квадратной матрицы, использующий понятие ранга (теорема о базисном миноре предполагается известной).
8. Выписать свойства решений однородных и неоднородных систем линейных алгебраических уравнений (линейная комбинация решений однородной СЛАУ является решением однородной СЛАУ, разность двух решений неоднородной СЛАУ есть решение однородной СЛАУ, сумма решения однородной СЛАУ и решения неоднородной СЛАУ есть решение неоднородной СЛАУ) и доказать их.
9. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли и доказать её.
10. Сформулировать критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей и доказать его.
11. Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Доказать теорему о существовании ФСР.
12. Доказать теорему о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений, то есть о том, что произвольное решение однородной СЛАУ может быть представлено в виде линейной комбинации ФСР.
13. Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и доказать её.
14. Выписать формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе, и доказать её.
15. Доказать теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве задает плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.
16. Выписать формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости и привести её вывод.
17. Выписать формулу для вычисления расстояния от точки до прямой и доказать её.
18. Выписать формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми и доказать её.
19. Выписать формулу Муавра и доказать её.
20. Доказать три свойства изоморфизма групп: 1) нейтральный элемент переходит в нейтральный, 2) обратный переходит в обратный, 3) обратное отображение тоже является изоморфизмом.
21. Сформулировать и доказать теорему Кэли.
22. Сформулировать и доказать теорему Лагранжа.
23. Сформулировать и доказать теорему о гомоморфизме групп.
24. Выведите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.
25. Сформулируйте и докажите теорему о том, что действие линейного оператора в конечномерном пространстве полностью определяется матрицей линейного оператора.
26. Докажите утверждение о формуле для преобразования матрицы оператора при замене базиса.
27. Сформулируйте и докажите утверждение о связи характеристического уравнения и спектра оператора.

28. Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям? Ответ обоснуйте.

29. Сформулируйте и докажите критерий диагональности матрицы оператора.

30. Каким свойством обладает оператор в n-мерном вещественном пространстве, у которого есть n различных действительных корней? Ответ обосновать.

31. Выпишите и докажите неравенство Коши-Буняковского.

32. Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.

33. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису и докажите её.

34. Докажите теорему о том, что евклидово пространство можно представить в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения.

35. Выписать формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного набора векторов, и доказать её.

36. Докажите, что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует сопряженный оператор.

37. Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям.

38. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора заданного в комплексном линейном пространстве? Ответ обосновать.

39. Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратно?

40. Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.

41. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений.

42. Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса? Ответ обосновать.

43. Сформулировать и доказать теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы.

44. Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

45. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выведите её каноническое уравнение.

46. Проведите полное исследование уравнения $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, A^2+C^2>0$ кривой второго порядка.