

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук  
Департамент программной инженерии

**Линейная алгебра**

Москва 2016

## Содержание

1	1	Сформулировать и доказать теорему о методе Гаусса	2
2	44	Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному (каноническому) виду при помощи ортогональной замены координат.	2
3	45	Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выведите ее каноническое уравнение.	3
4	46	Проведите полное исследование уравнения $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, A^2 + C^2 > 0$ кривой второго порядка	4

## 1. 1 Сформулировать и доказать теорему о методе Гаусса

Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. В доказательство предъявим алгоритм, который гарантированно завершится для конечных матриц:

- Шаг 1 (a) Фиксируем элемент в верхнем левом углу  $a_{ij}$   
 (b) Если  $a_{ij} = 0$  : переходим к шагу 2.  
 Иначе объявляем этот элемент ведущим.  
 (c) Используя ведущий элемент будем добиваемся того, что элементы во всех строках ниже него обнуляются. Если  $a_{ij}$  - ведущий, то сложим строки  $k, (k \neq i)$  и  $i$ . При чем строку  $i$  домножим на  $\lambda = -\frac{a_{kj}}{a_{ij}}$ .  
 (d) Смещаемся в матрице на строку вниз и на столбец вправо. Переходим к шагу 1. (пока не закончится матрица)
- Шаг 2 Если текущий элемент нулевой, просматриваем все элементы под ним: Если найдем ненулевой в строке  $k$  то меняем строки  $k$  и  $i$  местами и переходим к шагу 1. Если все нулевые переходим к шагу 3.
- Шаг 3 Переходим на один столбец вправо. Если справа есть столбцы переходим к шагу 1. Если столбцы закончились - конец алгоритма.

## 2. 44 Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному (каноническому) виду при помощи ортогональной замены координат.

1. Рассмотрим квадратичную форму  $q(x)$
2. Составим симметричную матрицу этой квадратичной формы  $A_e$ , (если составлять как обычно, то получается что мы выписываем ее в стандартном ортонормированном базисе  $e = e_1, \dots, e_n$ ).
3. Рассмотрим ее как матрицу оператора  $\phi$ . Об операторах уже много чего известно, воспользуемся этим.
4. Так как матрица  $\phi_e$  симметрична  $\implies$  оператор диагоналируем. (Именно поэтому любую кв. форму можно привести к канон виду). Будем приводить оператор  $\phi$  к диагональному виду.
5. Найдем собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .
6. Найдем собственные вектора.
7. Процессом ортогонализации Грамма-Шмидта добьемся того чтобы все собственные вектора были ортогональны. Далее нормируем каждый вектор. В результате получим набор векторов  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , которые образуют ортонормированный базис  $f$ .

8. Для операторов верно:  $\phi_e = T_{e \rightarrow f} \phi_f T_{e \rightarrow f}^{-1}$

$T_{e \rightarrow f}$  - матрица оператора перехода от базиса  $e$  к базису  $f$  (матрица из векторов базиса  $f$  записанных по столбцам, она будет ортогональна).

$\phi_f$  - матрица оператора в базисе  $f$  (будет диагональной матрицей).

$\phi_e$  - матрица оператора в изначальном базисе  $e$  (симметричная матрица).

9. Базисы  $e$  и  $f$  ортонормированны  $\iff$  оператор перехода  $T_{e \rightarrow f}$  будет ортогональным  $\implies T_{e \rightarrow f}^{-1} = T_{e \rightarrow f}^T$

$$\phi_e = T_{e \rightarrow f} \phi_f T_{e \rightarrow f}^{-1}$$

$$\phi_f = T_{e \rightarrow f}^{-1} \phi_e T_{e \rightarrow f}$$

$$\phi_f = T_{e \rightarrow f}^T \phi_e T_{e \rightarrow f}$$

10. Вернемся к квадратичным формам и перепишем матрицу оператора как кв. форму:

$$A_f = T_{e \rightarrow f}^T A_e T_{e \rightarrow f}$$

Где  $A_f$  - построенная диагональная матрица квадратичной формы.  $T_{e \rightarrow f}$  - ортогональная матрица перехода (применение такой матрицы это ортогональная замена координат).  $A_e$  - изначальная матрица кв. формы.

(или по формуле стас:  $A_{e'} = S_{e \rightarrow e'}^T A_e S_{e \rightarrow e'}$ )

11. Теперь по матрице  $A_f$  мы можем выписать канонический вид кв. формы  $q(x)$ , который мы получили при помощи ортогональной замены координат.
12. Так как все манипуляции логичны и не запрещены  $\implies \forall q(x)$  можно привести к канон. виду с помощью ортогональной замены координат.

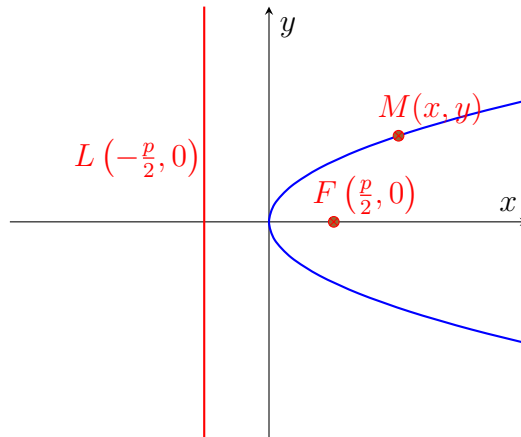
### 3. 45 Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выведите ее каноническое уравнение.

(Мы уже знаем что каноническое уравнение параболы это  $y^2 = 2px$ , осталось это показать.)

Геометрические точки задающие параболу равноудалены от фокуса параболы и директрисы (смотри википедию «эксцентриситет»). В каноническом уравнении параболы (картинка ниже также дана для канонического случая):

Фокус – точка  $F(p/2, 0)$ .

Директриса – вертикальная прямая  $L$  заданная уравнением:  $x = -p/2$ .



Пусть  $\rho(A, B)$  – дистанция между точками  $A$  и  $B$ . Рассмотрим точку  $M(x, y)$ . Точка  $M \in$  параболы  $\iff$  выполнятся соотношение  $\rho(F, M) = \rho(F, L)$ . Перепишем уравнение относительно координат:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Раскрываем скобки и переносим:

$$y^2 = 2px$$

Каноническое уравнение. Здесь  $2p$  просто коэффициент. (Каноническое уравнение параболы записывают через  $y^2 = 2px$  вместо  $y^2 = kx$ , так как у параметра  $p$  появляется геометрическое значение, это параметр параболы)

#### 4. 46 Проведите полное исследование уравнения $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , $A^2 + C^2 > 0$ кривой второго порядка

Сначала перепишем уравнение в более хорошей форме:

$$A\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) - \frac{D^2}{4A} + C\left(y^2 + 2\frac{E}{2C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) - \frac{E^2}{4C} + F = 0$$

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \left(F - \frac{E^2}{4C} - \frac{D^2}{4A}\right) = 0$$

Для параллельного переноса координат, сделаем замену  $x' = x + \frac{D}{2A}$ , а также  $y' = y + \frac{E}{2C}$ . Заодно заменим константу:  $F' = F - \frac{E^2}{4C} - \frac{D^2}{4A}$

$$A(x')^2 + C(y')^2 + F' = 0$$

$$A(x')^2 + C(y')^2 = -F'$$

Теперь рассмотрим 3 варианта (будем строит дерево вариантов):

Вариант 1  $AC > 0$

- (a)  $F' = 0 \implies Ax'^2 + Cy'^2 = 0 \iff x'^2 = 0, y'^2 = 0$ . То есть решение это точка на плоскости  $x = -\frac{D}{2A}, y = -\frac{E}{2C}$ .
- (b)  $F' \neq 0 \implies \frac{x'^2}{-F'/A} + \frac{y'^2}{-F'/C} = 1$  (Разделили на  $-F'$  и перенесли коэффициенты  $A, C$  вниз).
- i.  $F' < 0 \implies (-F'/A) > 0, (-F'/C) > 0$ . Решение можно переписать в виде  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Это эллипс.
  - ii.  $F' > 0 \implies -F' < 0$ . Так как рассматриваем  $AC > 0$  следовательно решение для  $A(x')^2 + C(y')^2 = -F'$  это пустое множество.

Вариант 2  $AC < 0$

- (a)  $F' = 0 \implies Ax'^2 + Cy'^2 = 0$ .  
Разложим по  $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ , так как либо  $A < 0$ , либо  $C < 0$ .  
Получим либо  $(\sqrt{|A|}x' - \sqrt{|C|}y')(\sqrt{|A|}x' + \sqrt{|C|}y') = 0$ ,  
либо  $(-\sqrt{|A|}x' + \sqrt{|C|}y')(\sqrt{|A|}x' + \sqrt{|C|}y') = 0$ .  
В любом случае верно что:  $\sqrt{|A|}x' = \sqrt{|C|}y'$ ,  $\sqrt{|A|}x' = -\sqrt{|C|}y'$ . Это пара прямых на плоскости.
- (b)  $F' \neq 0 \implies \frac{x'^2}{-F'/A} + \frac{y'^2}{-F'/C} = 1$
- i.  $F' > 0 (A < 0, C > 0) \implies (-F'/A) > 0, (-F'/C) < 0$ . Решение можно переписать в виде  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Это гипербола.
  - ii.  $F' < 0 (A > 0, C < 0) \implies (-F'/A) < 0, (-F'/C) > 0$ . Решение можно переписать в виде  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Это сопряженная гипербола.

Вариант 3  $AC = 0$

- (a)  $A \neq 0, C = 0 \implies Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Выделим полный квадрат по  $x$ :

$$A \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 + Ey + F - \frac{D^2}{4A} = 0$$

Введем  $F' = F - \frac{D^2}{4A} \implies A \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 = -Ey - F'$

- i. Если  $E = 0 \implies A \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 = -F'$

A.  $F' = 0 \implies \left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 = 0$ . Это вертикальная прямая  $x = -\frac{D}{2A}$

B.  $F' \neq 0$  Перепишем уравнение в виде  $\left( x + \frac{D}{2A} \right)^2 = \frac{-F'}{A}$

При  $\text{sign} F' = \text{sign} A \implies \frac{-F'}{A} < 0 \implies \emptyset$ .

При  $\text{sign} F' = -\text{sign} A \implies x = \pm \sqrt{\frac{-F'}{A}} - \frac{D}{2A}$ . Это пара вертикальных прямых.

- ii. Если  $E \neq 0 \implies A \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -E\left(y + \frac{F'}{E}\right)$ . Осуществим параллельный перенос системы координат  $x' = x + \frac{D}{2A}, y' = y + \frac{F'}{E}$ . Получим:

$$x'^2 = -\frac{E}{A}y' \iff y' = -\frac{A}{E}x'^2$$

Это парабола (обыкновенная, вдоль оси  $y$ )

- (b)  $A = 0, C \neq 0 \implies Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Разбор случая полностью аналогичен предыдущему. Вертикальные линии станут горизонтальными. Парабола будет вдоль оси  $x$ .