Домашнее задание №2
«Логика и Теория Алгоритмов»

Саркисов Артём
ИУ7-43Б
Вариант №19

Москва — 2020 г.

Задание №1
Задана булева функция $f = (1,1,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,0,1,1)$.

x1	x2	x3	x4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

а) найти сокращенную ДНФ
Составим карту Карно для данной функции:

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Перечислим все импликанты:

Импликанта №1:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_1 = \overline{x}_2\overline{x}_4$$

Импликанта №2:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$$

Импликанта №3:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_3 = \overline{x}_1\overline{x}_3x_4$$

Импликанта №4:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_4 = \overline{x}_1x_2x_4$$

Импликанта №5:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_5 = x_2x_3x_4$$

Импликанта №6:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_6 = x_1x_2x_3$$

Импликанта №7:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_7 = x_1x_3\overline{x}_4$$

Сокращенная ДНФ:

$$K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 = \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3\overline{x}_4$$

б) Найти ядро функции.

Ядровая импликанта: $K_1 = \overline{x}_2\overline{x}_4$, т.к. на карте Карно элементарные конъюнкции $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$ и $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$ покрыты только этой импликантой.Следовательно, ядро: $K_1\overline{x}_2\overline{x}_4$.

в) Получить все тупиковые ДНФ и указать, какие из них являются минимальными.

$(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6)(K_6 \vee K_7) = (K_2K_3 \vee K_2K_4 \vee K_3K_4 \vee K_3)(K_4K_5 \vee K_4K_6 \vee K_5K_6 \vee K_5)(K_6 \vee K_7) = (K_2K_4 \vee K_3)(K_4K_6 \vee K_5)(K_6 \vee K_7) = (K_2K_4K_6 \vee K_2K_4K_5 \vee K_3K_4K_6 \vee K_3K_5)(K_6 \vee K_7) = K_2K_4K_6 \vee K_2K_4K_5K_6 \vee K_3K_4K_6 \vee K_3K_5K_6 \vee K_2K_4K_6K_7 \vee K_2K_4K_5K_7 \vee K_3K_4K_6K_7 \vee K_3K_5K_7 = K_2K_4K_6 \vee K_3K_4K_6 \vee K_3K_5K_6 \vee K_3K_5K_7 \vee K_2K_4K_5K_7$

Присоединяем ядровую импликанту K1 к каждому полученному члену и получаем 5 тупиковых ДНФ:

$K_1K_2K_4K_6 : \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$
$K_1K_3K_4K_6 : \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$
$K_1K_3K_5K_6 : \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$
$K_1K_3K_5K_7 : \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\overline{x}_4$
$K_1K_2K_4K_5K_7 : \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\overline{x}_4$

Первые четыре ДНФ состоят из четырёх элементарных конъюнкций, а последняя – из пяти. Следовательно, кратчайшими будут первые четыре ДНФ. Все они состоят из одинакового числа литералов. Следовательно, все они являются минимальными.

г) На картах Карно указать ядро и покрытия, соответствующие минимальным ДНФ.

Карта Карно для минимальной ДНФ: $K_1K_2K_4K_6 = \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$

X_3X_4

X_1X_2	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Карта Карно для минимальной ДНФ: $K_1K_3K_4K_6 = \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$

X_3X_4

X_1X_2	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Карта Карно для минимальной ДНФ: $K_1K_3K_5K_6 = \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$

X_3X_4

X_1X_2	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Карта Карно для минимальной ДНФ: $K_1K_3K_5K_7 = \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\overline{x}_4$

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Задание №2

Даны функции f и w:

f	w
$((\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \Rightarrow (\overline{x}_2 \sim x_3)) \sim (x_1 \sim \overline{x}_3)$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$

а) Вычислить таблицу значений функции f.

Таблица значений функции f:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$	$\overline{x}_2 \sim x_3$	$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \Rightarrow (\overline{x}_2 \sim x_3)$	$x_1 \sim \overline{x}_3$	f
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1

б) Найти минимальные ДНФ функций f и w.

Карта Карно функции f:

X_3 \ X_1X_2	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	1	0

$K_1 = x_1x_2$ $K_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2$ $K_3 = x_1\overline{x}_3$ $K_4 = \overline{x}_2\overline{x}_3$

K_1 и K_2 - ядровые импликанты, т.к на карте Карно элементарные конъюнкции $\overline{x}_1x_2x_3$ и $x_1x_2x_3$ покрыты только этими импликантами.

Минимальная ДНФ функции f: $K_3K_1K_2 = x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2$ и $K_4K_1K_2 = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2$ - тупиковые ДНФ функции f, в свою очередь являются и минимальными, т.к имеет одинаково наименьшую сложность.

Карта Карно функции w:

x_1	x_2	x_3	w
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

X_3 \ X_1X_2	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	1	0	1

$K_1 = \overline{x}_1$ $K_2 = \overline{x}_2$

Минимальная ДНФ функции w: $w = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$

в) Выяснить полноту системы $\{f, w\}$. Если система не полна, дополнить систему функцией g до полной системы.

x_1	x_2	x_3	f	w
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Сохранение 0: $f(0,0,0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$ и $w(0,0,0) = 1 \Rightarrow w \notin T_0$

Сохранение 1: $f(1,1,1) = 1 \Rightarrow f \in T_1$ и $w(1,1,1) = 0 \Rightarrow w \notin T_1$

Самодвойственность: $f(1,1,1) = f(0,0,0) = 1 \Rightarrow f \notin S$ и $w(1,0,1) = w(0,1,0) = 1 \Rightarrow w \notin S$

Монотонность: $(0,0,0) < (0,1,0)$, но $f(0,0,0) > f(0,1,0) \Rightarrow f \notin M$ и $(0,0,0) < (1,1,0)$, но $w(0,0,0) > w(1,1,0) \Rightarrow w \notin M$

Линейность функции: общий вид полинома Жигалкина для функции трёх переменных: $f(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$

x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	0	$a_0 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$
0	1	1	0	$a_0 \oplus a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	1	$a_0 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	0	$a_0 \oplus a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow a_{13} = 1$
1	1	0	1	$a_0 \oplus a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	1	$a_0 \oplus a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_{123} = 1$

Полином Жигалкина функции f: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2 + 1$, т.к. полином функции f не является полиномом первой степени, то $f \notin L$

$w(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$

x_1	x_2	x_3	w	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	1	$a_0 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$
0	1	1	1	$a_0 \oplus a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	1	$a_0 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	1	$a_0 \oplus a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_{13} = 0$
1	1	0	0	$a_0 \oplus a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	0	$a_0 \oplus a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow a_{123} = 0$

Полином Жигалкина функции w: $w(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 1$, т.к. полином функции w не является полиномом первой степени, то $w \notin L$

Критериальная таблица:

	T_0	T_1	S	M	L
f	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
w	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Система $\{f, w\}$ является функционально полным классом, т.к. функция w не сохраняет константу 1, которую сохраняет функция f.

г) Из функциональных элементов, реализующих функии полной системы $\{f, w\}$, построить функциональные элементы, реализующие базовые функции ($\vee, \wedge, , 0, 1$).

Система $\{f, w\}$ является функционально полным классом. Значит, из этих функций с помощью суперпозиций можно выразить константы 0, 1, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Отрицание: $w \notin T_0$ и $w \notin T_1 \Rightarrow$ отрицанием строим из функции w, т.к. $w(0,0,0) = 1$ и $w(1,1,1) = 0$, то $w(x, x, x) = \overline{x}$.

Константа 1: $f \notin T_0$ и $f \in T_1 \Rightarrow$ константу 1 строим из функции f, т.к. $f(0,0,0) = 1$ и $f(1,1,1) = 1$, то $f(x, x, x) = 1$.

Константа 0: Для построения константы 0 возьмём отрицание от функции $f(x, x, x)$. $\overline{f(x, x, x)} = w(f(x, x, x), f(x, x, x), f(x, x, x)) = 0$. Проверка: $w(f(0,0,0), f(0,0,0), f(0,0,0)) = w(1,1,1) = 0$ и $w(f(1,1,1), f(1,1,1), f(1,1,1)) = w(1,1,1) = 0$.

Дизъюнкция: для построения дизъюнкции из функции $f = x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2$, зафиксируем переменную $x_1 = 1$ и обозначим $x_2 \to x$ и $\overline{x}_3 \to y$. Тогда: $f(1, x, \overline{y}) = x \vee y$. Выражение для дизъюнкции: $d(x, y) = f(1, x, \overline{y}) = f(f(x, x, x), x, \overline{y}) = x \vee y$.

Проверка: $d(0,0) = f(f(0,0,0), 0, 1) = f(1,0,1) = 0$, $d(0,1) = f(f(0,0,0), 0, 0) = f(1,0,0) = 1$, $d(1,0) = f(f(1,1,1), 1, 1) = f(1,1,1) = 1$, $d(1,1) = f(f(1,1,1), 1, 0) = f(1,1,0) = 1$.

Конъюнкция: для построения конъюнкции из функции $w = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$, пусть $x_1 = 1$, обозначим $\overline{x}_2 \to xy$. Тогда: $w(1, \overline{xy}, 0) = xy$. Выражение для конъюнкции: $k(x, y) = w(1, \overline{xy}, 0) = w(f(x, x, x), \overline{xy}, w(f(x, x, x), f(x, x, x), f(x, x, x))) = xy$.

Проверка: $k(0,0) = w(1, 1, w(1,1,1)) = w(1,1,0) = 0$, $k(0,1) = w(1, 1, w(1,1,1)) = w(1,1,0) = 0$, $k(1,0) = w(1, 1, w(1,1,1) = w(1,1,0) = 0$, $k(1,1) = w(1, 0, w(1,1,1)) = w(1,0,0) = 1$.

Задание №3

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произовльные формулы):
$\neg(\neg(\neg B \vee C) \to (\neg A \vee C)) \equiv (A \& (B \& \neg C))$.

Преобразуем исходное высказывание: $\neg(\neg(\neg\neg B \to C) \to (A \to C)) \equiv (A \& (B \& \neg C))$.

Сначала докажем правило отрицания импликации: $\neg(A \to B) \vdash A\&\neg B$. Т.к. в левой части стоит внешнее отрицание и ее не удобно использовать в качестве гипотезы, по прибегнем к контрапозиции, то есть выведем отрицание левой части из отрицания правой: $\neg(A\&\neg B) \vdash \neg\neg(A \to B)$.

Шаг	Формула	Комментарий
1	$\neg(A\&\neg B)$	Гипотеза
2	$\neg\neg(A \to \neg\neg B)$	По определени &
3	$A \to \neg\neg B$	$R3(2)$
4	$\neg\neg B \to B$	Секвенция 3
5	$A \to B$	$R1(2)(4)$
6	$\neg\neg(A \to B)$	$R4(5)$

Обозначим правило отрицания импликации - $R10$.

Шаг	Формула	Комментарий
1	$\neg(\neg(\neg\neg B \to C) \to (A \to C))$	Гипотеза
2	$\neg(\neg\neg B \to C)\&\neg(A \to C)$	Правило Де Моргана (отрицание дизъюнкции)
3	$\neg(\neg\neg B \to C)$	Свойство конъюнкции (2)
4	$\neg(A \to C)$	Свойство конъюнкции (2)
5	$\neg\neg B\&\neg C$	$R10(3)$
6	$\neg\neg B \equiv B$	Эквивалентность $\neg A \equiv A$, где $A = B$
7	$A\&\neg C$	$R10(4)$
8	$\neg C$	Свойство конъюнкции (6)
9	$(A\&(B\&\neg C))$	Свойство конъюнкции (5) и (7)

Докажем выводимость левой части из правой. Заметим, что из секвенции 8, следует: $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$. По теореме дедукции имеем: $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$.

Шаг	Формула	Комментарий
1	$(A\&(B\&\neg C))$	Гипотеза
2	A	Свойство конъюнкции (1)
3	$B\&\neg C$	Свойство конъюнкции (1)
4	B	Свойство конъюнкции (3)
5	$B \equiv \neg\neg B$	Эквивалентность $A \equiv \neg\neg A$, где $A = B$
6	$\neg C$	Свойство конъюнкции (3)
7	$\neg C\&A$	Свойство конъюнкции (3) и (5)
8	$\neg(\neg\neg B \to C)$	$R8(4, 5))$
9	$\neg(A \to C)$	$R10(6))$
10	$\neg(\neg\neg B \to C)\&\neg(A \to C)$	Свойство конъюнкции (7) и (8)
11	$\neg(\neg(\neg\neg B \to C) \to (A \to C))$	$R10(9)$