

**Домашнее задание №2**  
**«Логика и Теория Алгоритмов»**

Саркисов Артём  
ИУ7-43Б  
Вариант №19

### Задание №1

Задана булева функция  $f = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$ .

x1	x2	x3	x4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

а) найти сокращенную ДНФ

Составим карту Карно для данной функции:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

Перечислим все импликаны:

Импликанта №1:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_1 = \bar{x}_2\bar{x}_4$$

Импликанта №2:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

Импликанта №3:

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$$

Импликанта №4:

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_4 = \bar{x}_1 x_2 x_4$$

Импликанта №5:

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_5 = x_2 x_3 x_4$$

Импликанта №6:

$x_1 x_2 \backslash x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_6 = x_1 x_2 x_3$$

Импликанта №7:

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	0	0	1

$$K_7 = x_1x_3\bar{x}_4$$

Сокращенная ДНФ:

$$K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 \vee K_7 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4$$

### б) Найти ядро функции.

Ядровая импликанта:  $K_1 = \bar{x}_2\bar{x}_4$ , т.к. на карте Карно элементарные конъюнкции  $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$  и  $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$  покрыты только этой импликантой. Следовательно, ядро:  $K_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ .

### в) Получить все тупиковые ДНФ и указать, какие из них являются минимальными.

$$(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6)(K_6 \vee K_7) = (K_2K_3 \vee K_2K_4 \vee K_3K_4 \vee K_3)(K_4K_5 \vee K_4K_6 \vee K_5K_6 \vee K_5)(K_6 \vee K_7) = (K_2K_4 \vee K_3)(K_4K_6 \vee K_5)(K_6 \vee K_7) = (K_2K_4K_6 \vee K_2K_4K_5 \vee K_3K_4K_6 \vee K_3K_5)(K_6 \vee K_7) = K_2K_4K_6 \vee K_2K_4K_5K_6 \vee K_3K_4K_6 \vee K_3K_5K_6 \vee K_2K_4K_6K_7 \vee K_2K_4K_5K_7 \vee K_3K_4K_6K_7 \vee K_3K_5K_7 = K_2K_4K_6 \vee K_3K_4K_6 \vee K_3K_5K_6 \vee K_3K_5K_7 \vee K_2K_4K_5K_7$$

Присоединяем ядровую импликанту  $K_1$  к каждому полученному члену и получаем 5 тупиковых ДНФ:

$$\begin{aligned} K_1K_2K_4K_6 &= \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3 \\ K_1K_3K_4K_6 &= \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3 \\ K_1K_3K_5K_6 &= \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3 \\ K_1K_3K_5K_7 &= \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \\ K_1K_2K_4K_5K_7 &= \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \end{aligned}$$

Первые четыре ДНФ состоят из четырёх элементарных конъюнкций, а последняя – из пяти. Следовательно, кратчайшими будут первые четыре ДНФ. Все они состоят из одинакового числа литералов. Следовательно, все они являются минимальными.

### г) На картах Карно указать ядро и покрытия, соответствующие минимальным ДНФ.

$$\text{Карта Карно для минимальной ДНФ: } K_1K_2K_4K_6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$$

		$X_3X_4$			
		00	01	11	10
$X_1X_2$	00	1	1	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	0	1

Карта Карно для минимальной ДНФ:  $K_1K_3K_4K_6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_3$

		$X_3X_4$			
		00	01	11	10
$X_1X_2$	00	1	1	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	0	1

Карта Карно для минимальной ДНФ:  $K_1K_3K_5K_6 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$

		$X_3X_4$			
		00	01	11	10
$X_1X_2$	00	1	1	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	0	1

Карта Карно для минимальной ДНФ:  $K_1K_3K_5K_7 = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4$

		$X_3X_4$			
		00	01	11	10
$X_1X_2$	00	1	1	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	0	1

## Задание №2

Даны функции  $f$  и  $w$ :

$f$	$w$
$((\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \Rightarrow (\bar{x}_2 \sim x_3)) \sim (x_1 \sim \bar{x}_3)$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$

а) Вычислить таблицу значений функции  $f$ .

Таблица значений функции  $f$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$	$\bar{x}_2 \sim x_3$	$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \Rightarrow (\bar{x}_2 \sim x_3)$	$x_1 \sim \bar{x}_3$	$f$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1

б) Найти минимальные ДНФ функций  $f$  и  $w$ .

Карта Карно функции  $f$ :

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
$X_3$	0	1	0	1	1
	1	1	0	1	0

$$K_1 = x_1x_2 \quad K_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \quad K_3 = x_1\bar{x}_3 \quad K_4 = \bar{x}_2\bar{x}_3$$

$K_1$  и  $K_2$  - ядровые импликанты, т.к на карте Карно элементарные конъюнкции  $\bar{x}_1x_2x_3$  и  $x_1x_2x_3$  покрыты только этими импликантами.

Минимальная ДНФ функции  $f$ :  $K_3K_1K_2 = x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$  и  $K_4K_1K_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$  - тупиковые ДНФ функции  $f$ , в свою очередь являются и минимальными, т.к имеет одинаково наименьшую сложность.

Карта Карно функции  $w$ :

		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$w$
	0	0	0	0	1
	0	0	1	1	1
	0	1	0	1	1
	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	1
	1	0	1	1	1
	1	1	0	0	0
	1	1	1	1	0

  

		$X_1X_2$			
		00	01	11	10
$X_3$	0	1	1	0	1
	1	1	1	0	1

$$K_1 = \bar{x}_1 \quad K_2 = \bar{x}_2$$

Минимальная ДНФ функции  $w$ :  $w = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$

в) Выяснить полноту системы  $\{f, w\}$ . Если система не полна, дополнить систему функцией  $g$  до полной системы.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$	$w$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Сохранение 0:  $f(0, 0, 0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$  и  $w(0, 0, 0) = 1 \Rightarrow w \notin T_0$

Сохранение 1:  $f(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow f \in T_1$  и  $w(1, 1, 1) = 0 \Rightarrow w \notin T_1$

Самодвойственность:  $f(1, 1, 1) = f(0, 0, 0) = 1 \Rightarrow f \notin S$  и  $w(1, 0, 1) = w(0, 1, 0) = 1 \Rightarrow w \notin S$

Монотонность:  $(0, 0, 0) < (0, 1, 0)$ , но  $f(0, 0, 0) > f(0, 1, 0) \Rightarrow f \notin M$  и  $(0, 0, 0) < (1, 1, 0)$ , но  $w(0, 0, 0) > w(1, 1, 0) \Rightarrow w \notin M$

Линейность функции: общий вид полинома Жигалкина для функции трёх переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 + a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	0	$a_0 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$
0	1	1	0	$a_0 + a_{23} + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	1	$a_0 + a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	0	$a_0 + a_{13} + a_1 + a_3 = 0 \Rightarrow a_{13} = 1$
1	1	0	1	$a_0 + a_{12} + a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	1	$a_0 + a_{123} + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow a_{123} = 1$

Полином Жигалкина функции  $f$ :  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2 + 1$ , т.к. полином функции  $f$  не является полиномом первой степени, то  $f \notin L$

$$w(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$w$	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 + a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	1	$a_0 + a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$
0	1	1	1	$a_0 + a_{23} + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	1	$a_0 + a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	1	$a_0 + a_{13} + a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_{13} = 0$
1	1	0	0	$a_0 + a_{12} + a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	0	$a_0 + a_{123} + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_{123} = 0$



Полином Жигалкина функции  $w$ :  $w(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 1$ , т.к. полином функции  $w$  не является полиномом первой степени, то  $w \notin L$

Критериальная таблица:

	$T_0$	$T_1$	$S$	$M$	$L$
$f$	—	+	—	—	—
$w$	—	—	—	—	—

Система  $\{f, w\}$  является функционально полным классом, т.к. функция  $w$  не сохраняет константу 1, которую сохраняет функция  $f$ .

**г) Из функциональных элементов, реализующих функции полной системы  $\{f, w\}$ , построить функциональные элементы, реализующие базовые функции  $(\vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ .**

Система  $\{f, w\}$  является функционально полным классом. Значит, из этих функций с помощью суперпозиций можно выразить константы 0, 1, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Отрицание:  $w \notin T_0$  и  $w \in T_1 \Rightarrow$  отрицанием строим из функции  $w$ , т.к.  $w(0, 0, 0) = 1$  и  $w(1, 1, 1) = 0$ , то  $w(x, x, x) = \bar{x}$ .

Константа 1:  $f \notin T_0$  и  $f \in T_1 \Rightarrow$  константу 1 строим из функции  $f$ , т.к.  $f(0, 0, 0) = 1$  и  $f(1, 1, 1) = 1$ , то  $f(x, x, x) = 1$ .

Константа 0: Для построения константы 0 возьмём отрицание от функции  $f(x, x, x)$ .  $\overline{f(x, x, x)} = w(f(x, x, x), f(x, x, x), f(x, x, x)) = 0$ . Проверка:  $w(f(0, 0, 0), f(0, 0, 0), f(0, 0, 0)) = w(1, 1, 1) = 0$  и  $w(f(1, 1, 1), f(1, 1, 1), f(1, 1, 1)) = w(1, 1, 1) = 0$ .

Дизъюнкция: для построения дизъюнкции из функции  $f = x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$ , зафиксируем переменную  $x_1 = 1$  и обозначим  $x_2 \rightarrow x$  и  $\bar{x}_3 \rightarrow y$ . Тогда:  $f(1, x, \bar{y}) = x \vee y$ . Выражение для дизъюнкции:  $d(x, y) = f(1, x, \bar{y}) = f(f(x, x, x), x, \bar{y}) = x \vee y$ .

Проверка:  $d(0, 0) = f(f(0, 0, 0), 0, 1) = f(1, 0, 1) = 0$ ,  $d(0, 1) = f(f(0, 0, 0), 0, 0) = f(1, 0, 0) = 1$ ,  $d(1, 0) = f(f(1, 1, 1), 1, 1) = f(1, 1, 1) = 1$ ,  $d(1, 1) = f(f(1, 1, 1), 1, 0) = f(1, 1, 0) = 1$ .

Конъюнкция: для построения конъюнкции из функции  $w = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ , пусть  $x_1 = 1$ , обозначим  $\bar{x}_2 \rightarrow xy$ . Тогда:  $w(1, \bar{xy}, 0) = xy$ . Выражение для конъюнкции:  $k(x, y) = w(1, \bar{xy}, 0) = w(f(x, x, x), \bar{xy}, w(f(x, x, x), f(x, x, x), f(x, x, x))) = xy$ .

Проверка:  $k(0, 0) = w(1, 1, w(1, 1, 1)) = w(1, 1, 0) = 0$ ,  $k(0, 1) = w(1, 1, w(1, 1, 1)) = w(1, 1, 0) = 0$ ,  $k(1, 0) = w(1, 1, w(1, 1, 1)) = w(1, 1, 0) = 0$ ,  $k(1, 1) = w(1, 0, w(1, 1, 1)) = w(1, 0, 0) = 1$ .

### Задание №3

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$$\neg(\neg(\neg B \vee C) \rightarrow (\neg A \vee C)) \equiv (A \& (B \& \neg C)).$$

Преобразуем исходное высказывание:  $\neg(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \equiv (A \& (B \& \neg C))$ .

Сначала докажем правило отрицания импликации:  $\neg(A \rightarrow B) \vdash A \& \neg B$ . Т.к. в левой части стоит внешнее отрицание и ее не удобно использовать в качестве гипотезы, по прибегнем к контрапозиции, то есть выведем отрицание левой части из отрицания правой:  $\neg(A \& \neg B) \vdash \neg\neg(A \rightarrow B)$ .

Шаг	Формула	Комментарий
1	$\neg(A \& \neg B)$	Гипотеза
2	$\neg\neg(A \rightarrow \neg\neg B)$	По определени $\&$
3	$A \rightarrow \neg\neg B$	$R3(2)$
4	$\neg\neg B \rightarrow B$	Секвенция 3
5	$A \rightarrow B$	$R1(2)(4)$
6	$\neg\neg(A \rightarrow B)$	$R4(5)$

Обозначим правило отрицание импликации -  $R10$ .

Шаг	Формула	Комментарий
1	$\neg(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Гипотеза
2	$\neg(B \rightarrow C) \& \neg(A \rightarrow C)$	Правило Де Моргана (отрицание дизъюнкции)
3	$\neg(B \rightarrow C)$	Свойство конъюнкции (2)
4	$\neg(A \rightarrow C)$	Свойство конъюнкции (2)
5	$B \& \neg C$	$R10(3)$
6	$A \& \neg C$	$R10(4)$
7	$\neg C$	Свойство конъюнкции (6)
8	$(A \& (B \& \neg C))$	Свойство конъюнкции (5) и (7)

Докажем выводимость левой части из правой. Заметим, что из секвенции 8, следует:  $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$ . По теореме дедукции имеем:  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ .

Шаг	Формула	Комментарий
1	$(A \& (B \& \neg C))$	Гипотеза
2	$A$	Свойство конъюнкции (1)
3	$B \& \neg C$	Свойство конъюнкции (1)
4	$B$	Свойство конъюнкции (3)
5	$\neg C$	Свойство конъюнкции (3)
6	$\neg C \& A$	Свойство конъюнкции (3) и (5)
7	$\neg(B \rightarrow C)$	$R8(4, 5))$
8	$\neg(A \rightarrow C)$	$R10(6))$
9	$\neg(B \rightarrow C) \& \neg(A \rightarrow C)$	Свойство конъюнкции (7) и (8)
10	$\neg(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$R10(9)$