Практическая работа № 3.
РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

1. Цель работы

Научиться решать уравнения методом итераций и делать соответствующие выводы.

2. Пояснения к работе

В работе приводится 20 вариантов заданий. Номер варианта обучающийся определяет по порядковому номеру в списке учебной группы.

При выполнении практической работы обучающийся должен

уметь:

- использовать метод итераций для решения алгебраических и трансцендентных уравнений;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения алгебраических и трансцендентных уравнений методом итераций, учитывая необходимую точность получаемого результата;

знать:

- оценку точности вычислений;
- методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений с помощью ЭВМ.

3. Теоретические сведения

Любое уравнение можно представить в виде:

$$f(x)=0 \tag{2.1}$$

Или

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x) \tag{2.2}$$

Решить уравнения (2.1) и (2.2) численными методами, означает:

- Установить имеют ли уравнения корни;
- Определить сколько корней;
- Найти значения корней (с заданной степенью точности).

I этап: Отделение корней – определение количества корней и нахождение промежутков, на каждом из которых лежит только один корень уравнения.

II этап: Уточнение корней до заданной степени точности.

Корень ξ (кси) уравнения (2.1) считается отделенным на отрезке $[a,b]$, если на этом отрезке данное уравнение не имеет других корней.

Отделить корни это означает разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится ровно по одному корню или корней на этом промежутке нет.

Отделение корней

Графический метод отделения корней

1случай. Пусть задано уравнение $f(x)=0$, строим график функции $y=f(x)$ Значения действительных корней уравнения есть абсциссы точек пересечения графика функции *y* = *f(x)* с осью *Ox*.

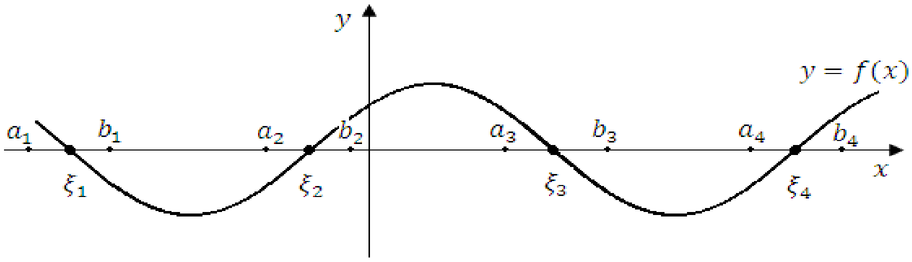

Рисунок 2.1

ξ_1 отделен на отрезке [a_1; b_1], и. т. д.

2 случай. Представляем уравнение в виде $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ и строим графики этих функций.

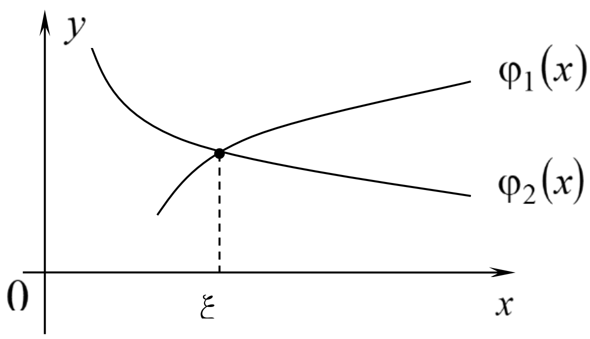

Рисунок 2.2

Значения действительных корней уравнения есть абсциссы точек пересечения графиков функций $y_1=\varphi_1(x)$ и $y_2=\varphi_2(x)$.

Аналитический метод отделения корней

Процедура отделения корней:

1) Найти производную $f'(x)$ и стационарные точки;

2) Составить таблицу знаков функции f(x) и определить интервалы (α; β), где функция имеет на концах разные знаки.

Уточнение корней

Уточнить корень это значит довести его значение до заданной степени точности.

Метод итераций (последовательных приближений)

Пусть дано уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ непрерывная функция. Требуется определить вещественный корень этого уравнения, заключенный на отрезке $[a; b]$.

Заменим данное уравнение равносильным ему уравнением $x = \varphi(x)$.

Выберем каким-либо способом $x_0 \in [a; b]$ и подставим его в правую часть уравнения, тогда получим $x_1 = \varphi(x_0)$, затем значение x_1 подставим снова в правую часть уравнения (2.9) получим второе приближение $x_2 = \varphi(x_1)$, повторяя этот процесс получим последовательность чисел $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Возможны два случая:

1) Последовательность $x_0, x_1,..., x_n,...$ сходится, то есть имеет предел и тогда этот предел будет корнем уравнения $f(x)=0$.

2) Последовательность расходится, то есть не имеет предела.

Теорема (условие сходимости итерационного процесса).

Пусть на отрезке $[a; b]$ имеется единственный корень уравнения $x = \varphi(x)$ и во всех точках этого отрезка производная $|\varphi'(x)|$ удовлетворяет неравенству: $|\varphi'(x)| \le q < 1$.

Если при этом выполняется условие $a \le \varphi(x) \le b$, то итерационный процесс сходится, а за нулевое приближение x_0 можно взять любое число из отрезка $[a; b]$.

Последнее условие означает, что все приближения $x_0, x_1,..., x_n,...$ также находятся на отрезке $[a; b]$, чем меньше $|\varphi'(x)|$, тем лучше сходимость итерационного процесса.

Уравнение $f(x)=0$ к виду $x = \varphi(x)$ можно привести следующим способом:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k},$$

где k следует выбирать так, чтобы $|k| \ge Q/2$, где $Q = \max|f'(x)|$ на отрезке $[a; b]$ и знак k совпадал бы со знаком $f'(x)$ на отрезке $[a; b]$. Уточнение корня происходит по формуле:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0,1,2,....$$

Определение точности вычисленных приближенных значений корня

Пусть ξ точное значение корня уравнения $x = \varphi(x)$, а число q определяется из соотношения $|\varphi'(x)| \le q < 1$, тогда справедливо соотношение:

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}|$$

Если поставить условие, что истинное значение корня ξ должно отличаться от приближенного значения на величину ε, то приближения $x_0, x_1,..., x_n,...$ надо вычислять до тех пор, пока не будет выполняться неравенство:

$$\frac{q}{1-q} \cdot |x_n - x_{n-1}| \le \xi \quad \text{или} \quad |x_n - x_{n-1}| \le \xi \cdot \frac{1-q}{q}$$

4. Задание

1. Отделите корни уравнения графически и уточните один из них методом итераций с точностью до 0,001.
2. Дайте ответы на контрольные вопросы.
3. Оформите отчёт.

4. Порядок выполнения работы

На основании исходных данных, представленных в приложении А (таблица А.3) и теоретических сведений:

1. Отделите корни графически.
2. Уточните один из них методом итераций с точностью до 0,001:

-составьте блок-схему алгоритма уточнения корней методом итераций,

-составьте программу для решения уравнений указанным методом.

2. Дайте ответы на контрольные вопросы.
3. Оформите отчет.

6.Содержание отчета

Отчет должен быть выполнен в соответствии с Общими требованиями к оформлению документов учебной деятельности обучающихся. Отчет должен содержать следующие разделы:

1. Наименование работы.
2. Цель работы.
3. Отделение корней графически и уточнение один из них методом итераций с точностью до 0,001.
4. Ответы на контрольные вопросы.
5. Вывод.

1. Контрольные вопросы

4. В чем заключается этап уточнения корней при использовании численных методов решения уравнений?
5. Дайте определение сходящегося итерационного процесса.

2. Список источников, рекомендуемых для выполнения практической работы

1. Балабко, Л. В. Численные методы [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л. В. Балабко, А. В. Томилова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. авт. образоват. учреждение высш. проф. образования "Сев. (Аркт.) федер. ун-т им. М. В. Ломоносова". – Электрон. текстовые дан. – Архангельск : Северный (Арктический) федеральный университет, 2014. – 160, [2] с. : ил., табл. – Режим доступа :

http://lib.narfu.ru/index.php?option=com_irbis&view=irbis&Itemid=108&task=set_static_req&search_form_enable=0&select_catalog_enable=0&req_description_enable=0&checkbox_enable=0&number_enable=0&lang=ru&bns_string=ELIB&sys_code=-281114507, свободный. – Загл. с экрана.

2. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов учреждений среднего профессионального образования / В. Д. Колдаев ; под ред. Л. Г. Гагарина. – Электрон. текстовые дан. – Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2018. – 335 с. : ил. – (Среднее профессиональное образование). – Режим доступа : http://znanium.com/bookread2.php?book=672966, доступ из ЭБС «Znanium.com». – Загл. с экрана.

Таблица А.3 - Исходные данные для выполнения задания

вариант		вариант	
1	$ln\,x + (x+1)^3 = 0$	2	$x2^x = 1$
3	$0{,}5x + \lg(x-1) = 0{,}5$	4	$x - cos\,x = 0$
5	$3x + cos\,x + 1 = 0$	6	$x + ln\,x = 0{,}5$
7	$2 - x = ln\,x$	8	$(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$
9	$(2-x)e^x = 0{,}5$	10	$2{,}2x - 2^x = 0$
11	$x^2 + 4\,sin\,x = 0$	12	$2x - lg\,x = 7$
13	$5x - 8\,ln\,x = 8$	14	$3x - e^x = 0$
15	$x(x+1)^2 = 1$	16	$x = (x+1)^3$
17	$x^2 = sin\,x$	18	$x^3 = sin\,x$
19	$x = \sqrt{lg(x+2)}$	20	$x^2 = ln(x+1)$