

Kapitel PTS:III

III. Kombinatorik

- Permutationen und Kombinationen
- Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten
- Urnenmodell

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich haben unter k zufällig gewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?
Ausgenommen Schaltjahre; Geburtstage seien gleichmäßig verteilt (Laplace-Annahme).

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich haben unter k zufällig gewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?
Ausgenommen Schaltjahre; Geburtstage seien gleichmäßig verteilt (Laplace-Annahme).
- Ergebnisraum $\Omega = \text{„Menge aller } k\text{-Tupel aus der 365-Menge } \{1; 2; \dots; 365\}\text{“}$
- Ereignis $A = \text{„Mindestens zwei Geburtstage fallen zusammen“}$
 $A = \text{„Teilmenge aller } k\text{-Tupel aus } \Omega \text{ mit mindestens zwei gleichen Zahlen“}$
- $|\Omega| = 365^k$ und $|A| = ?$.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich haben unter k zufällig gewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?
Ausgenommen Schaltjahre; Geburtstage seien gleichmäßig verteilt (Laplace-Annahme).
- Ergebnisraum $\Omega = \text{„Menge aller } k\text{-Tupel aus der 365-Menge } \{1; 2; \dots; 365\}“}$
- Ereignis $A = \text{„Mindestens zwei Geburtstage fallen zusammen“}$
 $A = \text{„Teilmenge aller } k\text{-Tupel aus } \Omega \text{ mit mindestens zwei gleichen Zahlen“}$
- $|\Omega| = 365^k$ und $|A| = ?$.
- Gegenereignis $\bar{A} = \text{„Alle Geburtstage verschieden“}$
 $\bar{A} = \text{„Teilmenge aller } k\text{-Tupel aus } \Omega \text{ mit paarweise verschiedenen Zahlen“};$
 $\bar{A} = \text{„Alle } k\text{-Permutationen aus } \Omega“}$
- $|\bar{A}| = \frac{365!}{(365 - k)!} = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)$

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich haben unter k zufällig gewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?
Ausgenommen Schaltjahre; Geburtstage seien gleichmäßig verteilt (Laplace-Annahme).
- Ergebnisraum $\Omega = \text{„Menge aller } k\text{-Tupel aus der 365-Menge } \{1; 2; \dots; 365\}“}$
- Ereignis $A = \text{„Mindestens zwei Geburtstage fallen zusammen“}$
 $A = \text{„Teilmenge aller } k\text{-Tupel aus } \Omega \text{ mit mindestens zwei gleichen Zahlen“}$
- $|\Omega| = 365^k$ und $|A| = ?$.
- Gegenereignis $\bar{A} = \text{„Alle Geburtstage verschieden“}$
 $\bar{A} = \text{„Teilmenge aller } k\text{-Tupel aus } \Omega \text{ mit paarweise verschiedenen Zahlen“};$
 $\bar{A} = \text{„Alle } k\text{-Permutationen aus } \Omega“}$
- $|\bar{A}| = \frac{365!}{(365 - k)!} = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - k + 1)$
- Daraus folgt für A :

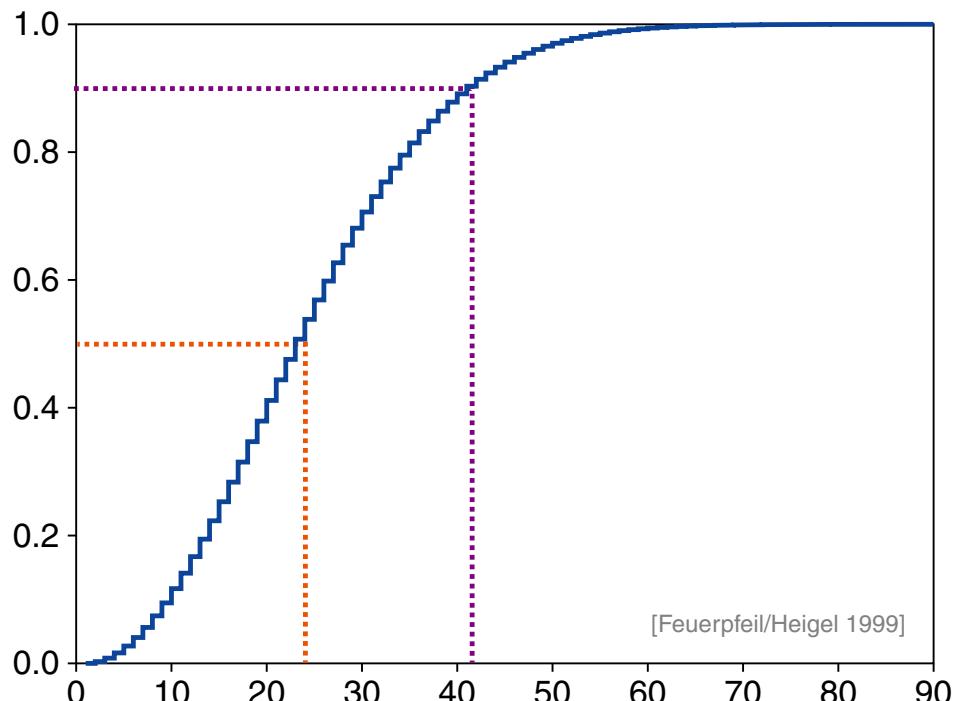
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (366 - k)}{365^k} \quad \text{für } k \leq 365$$

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Einige Werte:

| k | $P(A)$ | k | $P(A)$ |
|-----|--------|-----|--------|
| 2 | 0,003 | 35 | 0,814 |
| 3 | 0,008 | 40 | 0,891 |
| 5 | 0,027 | 41 | 0,903 |
| 10 | 0,117 | 45 | 0,941 |
| 15 | 0,253 | 50 | 0,970 |
| 20 | 0,411 | 55 | 0,986 |
| 22 | 0,476 | 60 | 0,994 |
| 23 | 0,507 | 65 | 0,998 |
| 25 | 0,569 | 70 | 0,999 |
| 30 | 0,706 | 75 | 1,000 |



- Paradox: Viele sind darüber erstaunt, wie wenige Personen genügen.
- Auflösung: Oft versagt die Intuition bei der Wahrscheinlichkeits schätzung.
Das Paradox ist bestätigt: Viele denken an eine bestimmte Person (sich selbst). Intuitiver ist, die Zahl $k \cdot (k - 1)$ der möglichen Personenpaare zu betrachten: $(23 \cdot 22)/2 = 253 > 365/2$.

Bemerkungen:

- Ein Paradoxon ist ein Befund, eine Aussage oder Erscheinung, die dem allgemein Erwarteten, der herrschenden Meinung oder Ähnlichem auf unerwartete Weise zuwiderläuft oder beim üblichen Verständnis der betroffenen Gegenstände bzw. Begriffe zu einem Widerspruch führt. [\[Wikipedia\]](#)
- Einen Sachverhalt „paradox“ zu nennen, ist keine Aussage über die Wirklichkeit, sondern eine Aussage über das eigene Verständnis (die eigene Intuition) der Wirklichkeit.
- Geburtstage sind übers Jahr nicht gleichverteilt [\[Statistisches Bundesamt\]](#) und eine zufällige Auswahl von Personen ist schwer zu realisieren (Herkunft aus derselben Region, etc.).
- Bei $k = 366$ Personen oder haben garantiert zwei am gleich Tag im Jahr Geburtstag. Gemäß [Schubfachprinzip](#) können nur höchstens 365 Objekte (hier: Personen) auf 365 Schubfächer (Tage im Jahr) verteilt werden, so dass in jedem Schubfach höchstens ein Objekt ist. Spätestens das 366. Objekt muss in ein Schubfach, in dem schon ein Objekt ist.
- Bei 41 Personen kann man schon „mit großer Sicherheit“ (90,32%) zwei Personen mit gleichem Geburtstag erwarten, bei 55 Personen mit 98,63%, und bei 75 Personen mit 99,97% kaum noch weniger als 100%. Beachten Sie, dass nur 14 zusätzliche Personen für weitere 8,31% Prozentpunkte, aber dann weitere 20 für nur 1,34-Prozentpunkte Wahrscheinlichkeitsdifferenz „benötigt“ werden.
- Ab 23 zufällig ausgewählten Personen würde es sich gemäß Laplace-Annahme also lohnen, darauf zu wetten, dass mindestens 2 der Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1: Gleichzeitiger Wurf zweier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Experiment 2: Gleichzeitiger Wurf dreier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Wieso beobachtet man bei zwei Würfeln die Augensumme 9 häufiger als die 10 und bei drei Würfeln die 10 häufiger als die 9?



Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1: Gleichzeitiger Wurf zweier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Experiment 2: Gleichzeitiger Wurf dreier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Wieso beobachtet man bei zwei Würfeln die Augensumme 9 häufiger als die 10 und bei drei Würfeln die 10 häufiger als die 9?
- Je 2 Möglichkeiten in Experiment 1:

$$9 = 3 + 6 = 4 + 5$$

$$10 = 4 + 6 = 5 + 5$$



- Je 6 Möglichkeiten in Experiment 2:

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 1 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3$$

$$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4$$

- Paradox: In beiden Experimenten gibt es jeweils gleich viele Möglichkeiten.
Dies steht im scheinbaren Widerspruch zur Laplace-Annahme.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1: Gleichzeitiger Wurf zweier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Experiment 2: Gleichzeitiger Wurf dreier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Wieso beobachtet man bei zwei Würfeln die Augensumme 9 häufiger als die 10 und bei drei Würfeln die 10 häufiger als die 9?
- Ergebnisraum 1: $\Omega_1 = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); \dots; (6; 5); (6; 6)\}$
„9“ = $\{(3; 6)\} \cup \{(4; 5)\} \cup \{(5; 4)\} \cup \{(6; 3)\}$
„10“ = $\{(4; 6)\} \cup \{(5; 5)\} \cup \{(6; 4)\}$
- Ergebnisraum 2: $\Omega_2 = \{(1; 1; 1); (1; 1; 2); (1; 2; 1); \dots; (6; 6; 5); (6; 6; 6)\}$
„9“ = $\{(1; 2; 6)\} \cup \dots \cup \{(3; 3; 3)\} \cup \dots \cup \{(5; 3; 1)\}$
„10“ = $\{(1; 3; 6)\} \cup \dots \cup \{(3; 3; 4)\} \cup \{(3; 4; 3)\} \cup \{(4; 3; 3)\} \cup \dots \cup \{(5; 3; 2)\}$
- **Auflösung:** Die Berücksichtigung der Reihenfolge ist notwendig.
Das Paradox ist falsifiziert: Es beruht auf der falschen Anwendung der Laplace-Annahme.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

| Augensumme | Wurf 1 | Häufigkeit |
|------------|--------|------------|
|------------|--------|------------|

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

| Wurf 2 | Augensumme Wurf 1 | | | | | | Häufigkeit | | | | | |
|---------------|--------------------------|---|---|---|---|---|-------------------|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 |
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | |

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

| Wurf 2 | Augensumme Wurf 1 | | | | | | Häufigkeit | | | | | |
|---------------|--------------------------|---|---|---|---|---|-------------------|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | |

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

| Wurf 2 | Augensumme Wurf 1 | | | | | | Häufigkeit |
|---------------|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-------------------|
| | 1 1 | 2 1 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | |
| 1 | 2 1 | 3 1 | | | | | |
| 2 | 3 1 | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |

- In den Diagonalen stehen gleiche Augensummen für Wurfkombinationen.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

| Wurf 2 | Augensumme Wurf 1 | | | | | | Häufigkeit |
|---------------|--------------------------|-----|-----|------|------|------|-------------------|
| | 1 1 | 2 1 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | |
| 1 | 2 1 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | 7 1 | |
| 2 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | 7 1 | 8 1 | |
| 3 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | 7 1 | 8 1 | 9 1 | |
| 4 | 5 1 | 6 1 | 7 1 | 8 1 | 9 1 | 10 1 | |
| 5 | 6 1 | 7 1 | 8 1 | 9 1 | 10 1 | 11 1 | |
| 6 | 7 1 | 8 1 | 9 1 | 10 1 | 11 1 | 12 1 | |

- In den Diagonalen stehen gleiche Augensummen für Wurfkombinationen.
- Die 9 tritt 4-mal, die 10 nur 3-mal auf.
- Mit $|\Omega_1| = 36$ gilt: $P_1(9) = \frac{4}{36}$ und $P_1(10) = \frac{3}{36}$

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

| Wurf 2 | Augensumme Wurf 1 | | | | | | Häufigkeit |
|---------------|--------------------------|-----|-----|------|------|------|-------------------|
| | 1 1 | 2 1 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | |
| 1 | 2 1 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | 7 1 | |
| 2 | 3 1 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | 7 1 | 8 1 | |
| 3 | 4 1 | 5 1 | 6 1 | 7 1 | 8 1 | 9 1 | |
| 4 | 5 1 | 6 1 | 7 1 | 8 1 | 9 1 | 10 1 | |
| 5 | 6 1 | 7 1 | 8 1 | 9 1 | 10 1 | 11 1 | |
| 6 | 7 1 | 8 1 | 9 1 | 10 1 | 11 1 | 12 1 | |

- In den Diagonalen stehen gleiche Augensummen für Wurfkombinationen.
- Die 9 tritt 4-mal, die 10 nur 3-mal auf.
- Mit $|\Omega_1| = 36$ gilt: $P_1(9) = \frac{4}{36}$ und $P_1(10) = \frac{3}{36}$

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 2:

| Wurf 3 | Augensumme Wurf 1 + 2 Häufigkeit | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|---|---|---|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 3 | 5 | 4 | 6 | 5 | 7 | 6 | 8 | 5 | 9 | 4 | 10 | 3 | 11 | 2 | 12 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 | 6 | 4 | 7 | 5 | 8 | 6 | 9 | 5 | 10 | 4 | 11 | 3 | 12 | 2 | 13 | 1 |
| 2 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 | 7 | 4 | 8 | 5 | 9 | 6 | 10 | 5 | 11 | 4 | 12 | 3 | 13 | 2 | 14 | 1 |
| 3 | 5 | 1 | 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 4 | 9 | 5 | 10 | 6 | 11 | 5 | 12 | 4 | 13 | 3 | 14 | 2 | 15 | 1 |
| 4 | 6 | 1 | 7 | 2 | 8 | 3 | 9 | 4 | 10 | 5 | 11 | 6 | 12 | 5 | 13 | 4 | 14 | 3 | 15 | 2 | 16 | 1 |
| 5 | 7 | 1 | 8 | 2 | 9 | 3 | 10 | 4 | 11 | 5 | 12 | 6 | 13 | 5 | 14 | 4 | 15 | 3 | 16 | 2 | 17 | 1 |
| 6 | 8 | 1 | 9 | 2 | 10 | 3 | 11 | 4 | 12 | 5 | 13 | 6 | 14 | 5 | 15 | 4 | 16 | 3 | 17 | 2 | 18 | 1 |

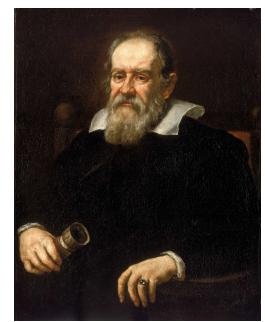
- Die möglichen Augensummen aus Experiment 1 und die Summen ihrer jeweiligen Häufigkeiten sind Ausgangspunkt für Experiment 2.
- Die 9 tritt nur 25-mal, die 10 27-mal auf.
- Mit $|\Omega_2| = 216$ gilt: $P_2(9) = \frac{25}{216}$ und $P_1(10) = \frac{27}{36}$

Bemerkungen:

- Schon 1477 wird in einem Kommentar zu Dantes „Divina Commedia“ an einer Stelle von der ungleichen Häufigkeit der verschiedenen Augensummen geschrieben. Allerdings wird unrichtigerweise beispielsweise der Summe 4 nur eine Entstehungsart (1;1;2) statt drei, der fünf nur die zwei Arten (1;1;3) und (1;2;2) statt der möglichen sechs Arten zugeschrieben.
- Gerolamo Cardano (1501–1576, italienischer Renaissance-Humanist) führte in seinem Buch „De ludo aleae“, dem ersten Buch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, das erst 100 Jahre nach seiner Abfassung erschien aus, dass das gleichzeitige Werfen zweier nicht unterscheidbarer Würfel dem zweimaligen Werfen eines Würfels unter Beachtung der Reihenfolge gleichzusetzen ist.
- Auch Galileo Galilei (1564–1642, italienischer Universalgelehrter) beschäftigte sich mit dem 3-Würfel-Problem und fertigte eine Tabelle mit den 216 Wurfmustern an, als ihn ein italienischer Edelmann fragte, warum die 9 seltener als die 10 als Augensumme vorkommt.
- Trotz der eigentlich Einfachheit des Problems konnte es auch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716, deutscher Universalgelehrter), der Begründer der Differential- und Integralrechnung, nicht lösen, da er die „Reihenfolge“ der Würfe nicht beachtete. Genau wie auf der vorigen Folie dargestellt, dachte auch Leibniz, dass es bei den gleichmöglichen Fällen (Laplace-Annahme) um 2-Kombinationen aus der 6-Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$ geht.



Gerolamo Cardano



Galileo Galilei



Gottfried Wilhelm Leibniz

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Sei A_k das Ereignis „ k Richtig“ beim Lotto.
 $k \in \{0; 1; \dots; 6\}$
- Wie wahrscheinlich sind „ k Richtig“ beim Lotto?
- $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13.983.816$ Lottotipps.



Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Sei A_k das Ereignis „ k Richtige“ beim Lotto.
 $k \in \{0; 1; \dots; 6\}$
- Wie wahrscheinlich sind „ k Richtige“ beim Lotto?
- $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13.983.816$ Lottotipps.
- „ k Richtige“ implizieren „ $6 - k$ Unrichtige“.
- $|„k“ \text{ Richtige}| = \binom{6}{k}$
- $|„k“ \text{ Unrichtige}| = \binom{43}{6-k}$



Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Sei A_k das Ereignis „ k Richtige“ beim Lotto.
 $k \in \{0; 1; \dots; 6\}$
- Wie wahrscheinlich sind „ k Richtige“ beim Lotto?
- $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13.983.816$ Lottotipps.
- „ k Richtige“ implizieren „ $6 - k$ Unrichtige“.
- $|„k“ \text{ Richtige}| = \binom{6}{k}$
- $|„k“ \text{ Unrichtige}| = \binom{43}{6-k}$
- Gemäß Zählprinzip folgt:

$$P(A_k) = \frac{\binom{6}{k} \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}} \quad (k \in \{0; 1; \dots; 6\}) .$$

- $P(A_6) = \frac{1}{13.983.816} = 0,0000000715$
- $P(A_0) = 0,436$



Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Die „Superzahl“ aus $\{0; \dots; 9\}$ wird zusätzlich gezogen.
- Sei A_k^+ das Ereignis „ k Richtige mit Superzahl“ und A_k^- das Ereignis „ k Richtige ohne Superzahl“.
- $|\Omega| = \binom{49}{6} \binom{10}{1}$
- $|A_k^+| = \binom{6}{k} \binom{43}{6-k} \binom{1}{1}$ und $|A_k^-| = \binom{6}{k} \binom{43}{6-k} \binom{9}{1}$
- $P(A_6^+) = \frac{1}{13.983.8160} = 0,0000000715$
- $P(A_6^-) = \frac{9}{13.983.8160} = 0,00000555$
- $P(A_0^-) = \frac{9}{13.983.8160} = 0,392$



Bemerkungen:

- In anderen Ländern sind andere Lotto-Formen üblich, etwa „6 aus 45“ in Österreich oder sogar „6 aus 90“ in Italien.