

# Kapitel PTS:II

## II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisse
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

# Zufallsexperimente

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum  $\Omega$

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit → Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

# Zufallsexperimente

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum  $\Omega$

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit  $\rightarrow$  Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

# Zufallsexperimente

## Experimentbegriff

**Experiment:** Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

**Versuch:** einmalige Durchführung eines Experiments

**Kausalitätsprinzip** bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis**(se)

# Zufallsexperimente

## Experimentbegriff

**Experiment:** Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

**Versuch:** einmalige Durchführung eines Experiments



**Kausalitätsprinzip** bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis(se)**

Beispiel: Münzwurf

Ursache: Gesetz der Schwerkraft

Experiment: Eine Münze in die Luft werfen

**Frage:** Was geschieht mit der Münze?

Ergebnis: Die Münze fällt auf den Boden

→ Das Experiment läuft **determiniert** ab.



# Zufallsexperimente

## Experimentbegriff

**Experiment:** Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

**Versuch:** einmalige Durchführung eines Experiments



**Kausalitätsprinzip** bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis(se)**

Beispiel: Münzwurf

Ursache: **unüberschaubar**

Experiment: Eine Münze in die Luft werfen

Frage: Wird die Münze Kopf oder Zahl zeigen?

Ergebnis: **unvorhersehbar**

→ Das Experiment läuft **zufällig** ab.



# Zufallsexperimente

## „Definition“

Wir nennen ein Experiment **Zufallsexperiment**, wenn

- es nach dem Kausalitätsprinzip abläuft,
- Übersicht oder Informationen über die Ursachen fehlen, so dass
- das Ergebnis unvorhersehbar ist – es uns also „zufällig“ erscheint.

Je weniger Information über Ursachen vorliegen, desto „zufälliger“ das Experiment.

Beispiel: Münzwurf

Die Kette der Einzelursachen und ihr Zusammenspiel sind weder überschaubar noch sind viele von ihnen messbar. Mögliche Ursachen sind

- die Verfassung des Werfers,
- die Luftzusammensetzung,
- die Bodenbeschaffenheit, und
- die Besonderheiten der Münze.

# Zufallsexperimente

## Arten

**Künstliche Zufallsexperimente** (Experimentator stößt Durchführung an)

- Beliebig oft mit den gleichen Objekten wiederholbar  
Glücksspiele wie Münzwurf, Würfeln, Roulette, ...
- Beliebig oft mit gleichartigen Objekten wiederholbar  
Bauteilausfalltests, Medikamententests, Meinungsumfragen, ...

# Zufallsexperimente

## Arten

### Künstliche Zufallsexperimente (Experimentator stößt Durchführung an)

- Beliebig oft mit den gleichen Objekten wiederholbar  
Glücksspiele wie Münzwurf, Würfeln, Roulette, ...
- Beliebig oft mit gleichartigen Objekten wiederholbar  
Bauteilausfalltests, Medikamententests, Meinungsumfragen, ...

### Natürliche Zufallsexperimente (laufen von selbst ab, nur beobachtbar)

- Sich wiederholende Vorgänge in der Natur  
Atomzerfall pro Zeiteinheit; Registrierung des Geschlechts eines Neugeborenen
- Sich wiederholende Vorgänge in der Gesellschaft  
Verkehrsunfälle pro Woche; Tatsächliche Lebensdauer eines Versicherten

Natürliche Zufallsexperimente werden auch Zufallsbeobachtungen genannt.

# Zufallsexperimente

## Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen einer Experiments  
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

# Zufallsexperimente

## Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen einer Experiments  
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

Beispiel: Münzwurf

Vermessung des Wurfs:

- Werfer:in ganzen Tag komplett verdrahtet (EEG, Muskeltonus, Mageninhalt, etc.)
- Münze direkt vor Wurf vermessen (Gewicht, Temperatur, Unausgewogenheit, etc.)
- Luftraum ständig hochauflöst vermessen (Wind, O<sub>2</sub>-Gehalt, Temperatur, etc.)
- Bodenbeschaffenheit mit Messfühlern bestimmt (Härte, Feuchte, Seismik, etc.)
- Hochgeschwindigkeitskameras filmen Münzwurf aus jedem Winkel (Abwurf, Spin, etc.)
- Rechnercluster berechnet nebenbei entsprechende physikalische Gleichungen

Wird das Ergebnis mit diesen Informationen vorhersagbar?

# Zufallsexperimente

## Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen einer Experiments  
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

Beispiel: Münzwurf

Vermessung des Wurfs:

- Werfer:in ganzen Tag komplett verdrahtet (EEG, Muskeltonus, Mageninhalt, etc.)
- Münze direkt vor Wurf vermessen (Gewicht, Temperatur, Unausgewogenheit, etc.)
- Luftraum ständig hochauflöst vermessen (Wind, O<sub>2</sub>-Gehalt, Temperatur, etc.)
- Bodenbeschaffenheit mit Messfühlern bestimmt (Härte, Feuchte, Seismik, etc.)
- Hochgeschwindigkeitskameras filmen Münzwurf aus jedem Winkel (Abwurf, Spin, etc.)
- Rechnercluster berechnet nebenbei entsprechende physikalische Gleichungen

Wird das Ergebnis mit diesen Informationen vorhersagbar? **Nein.**

Ursache: Heisenberg'sche Unschärferelation

- Die Messgenauigkeit ist spätestens im atomaren Bereich begrenzt.
- Der Ort und der Impuls eines Teilchens kann nicht zugleich beliebig genau bestimmt werden.

## Bemerkungen:

- Mehr Wissen und ggf. eine höhere Messgenauigkeit „schwächen den Zufall ab.“