

Kapitel PTS:II

II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisse
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zufallsexperimente

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit → Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Zufallsexperimente

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit \rightarrow Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Zufallsexperimente

Experimentbegriff

Experiment: Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

Versuch: einmalige Durchführung eines Experiments

Kausalitätsprinzip bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis**(se)

Zufallsexperimente

Experimentbegriff

Experiment: Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

Versuch: einmalige Durchführung eines Experiments



Kausalitätsprinzip bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis(se)**

Beispiel: Münzwurf

Ursache: Gesetz der Schwerkraft

Experiment: Eine Münze in die Luft werfen

Frage: Was geschieht mit der Münze?

Ergebnis: Die Münze fällt auf den Boden

→ Das Experiment läuft **determiniert** ab.



Zufallsexperimente

Experimentbegriff

Experiment: Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

Versuch: einmalige Durchführung eines Experiments



Kausalitätsprinzip bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis(se)**

Beispiel: Münzwurf

Ursache: **unüberschaubar**

Experiment: Eine Münze in die Luft werfen

Frage: Wird die Münze Kopf oder Zahl zeigen?

Ergebnis: **unvorhersehbar**

→ Das Experiment läuft **zufällig** ab.



Zufallsexperimente

„Definition“

Wir nennen ein Experiment **Zufallsexperiment**, wenn

- es nach dem Kausalitätsprinzip abläuft,
- Übersicht oder Informationen über die Ursachen fehlen, so dass
- das Ergebnis unvorhersehbar ist – es uns also „zufällig“ erscheint.

Je weniger Information über Ursachen vorliegen, desto „zufälliger“ das Experiment.

Beispiel: Münzwurf

Die Kette der Einzelursachen und ihr Zusammenspiel sind weder überschaubar noch sind viele von ihnen messbar. Mögliche Ursachen sind

- die Verfassung des Werfers,
- die Luftzusammensetzung,
- die Bodenbeschaffenheit, und
- die Besonderheiten der Münze.

Zufallsexperimente

Arten

Künstliche Zufallsexperimente (Experimentator stößt Durchführung an)

- Beliebig oft mit den gleichen Objekten wiederholbar
Glücksspiele wie Münzwurf, Würfeln, Roulette, ...
- Beliebig oft mit gleichartigen Objekten wiederholbar
Bauteilausfalltests, Medikamententests, Meinungsumfragen, ...

Zufallsexperimente

Arten

Künstliche Zufallsexperimente (Experimentator stößt Durchführung an)

- Beliebig oft mit den gleichen Objekten wiederholbar
Glücksspiele wie Münzwurf, Würfeln, Roulette, ...
- Beliebig oft mit gleichartigen Objekten wiederholbar
Bauteilausfalltests, Medikamententests, Meinungsumfragen, ...

Natürliche Zufallsexperimente (laufen von selbst ab, nur beobachtbar)

- Sich wiederholende Vorgänge in der Natur
Atomzerfall pro Zeiteinheit; Registrierung des Geschlechts eines Neugeborenen
- Sich wiederholende Vorgänge in der Gesellschaft
Verkehrsunfälle pro Woche; Tatsächliche Lebensdauer eines Versicherten

Natürliche Zufallsexperimente werden auch Zufallsbeobachtungen genannt.

Zufallsexperimente

Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen einer Experiments
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

Zufallsexperimente

Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen einer Experiments
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

Beispiel: Münzwurf

Vermessung des Wurfs:

- Werfer:in ganzen Tag komplett verdrahtet (EEG, Muskeltonus, Mageninhalt, etc.)
- Münze direkt vor Wurf vermessen (Gewicht, Temperatur, Unausgewogenheit, etc.)
- Luftraum ständig hochauflöst vermessen (Wind, O₂-Gehalt, Temperatur, etc.)
- Bodenbeschaffenheit mit Messfühlern bestimmt (Härte, Feuchte, Seismik, etc.)
- Hochgeschwindigkeitskameras filmen Münzwurf aus jedem Winkel (Abwurf, Spin, etc.)
- Rechnercluster berechnet nebenbei entsprechende physikalische Gleichungen

Wird das Ergebnis mit diesen Informationen vorhersagbar?

Zufallsexperimente

Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen einer Experiments
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

Beispiel: Münzwurf

Vermessung des Wurfs:

- Werfer:in ganzen Tag komplett verdrahtet (EEG, Muskeltonus, Mageninhalt, etc.)
- Münze direkt vor Wurf vermessen (Gewicht, Temperatur, Unausgewogenheit, etc.)
- Luftraum ständig hochauflöst vermessen (Wind, O₂-Gehalt, Temperatur, etc.)
- Bodenbeschaffenheit mit Messfühlern bestimmt (Härte, Feuchte, Seismik, etc.)
- Hochgeschwindigkeitskameras filmen Münzwurf aus jedem Winkel (Abwurf, Spin, etc.)
- Rechnercluster berechnet nebenbei entsprechende physikalische Gleichungen

Wird das Ergebnis mit diesen Informationen vorhersagbar? **Nein.**

Ursache: Heisenberg'sche Unschärferelation

- Die Messgenauigkeit ist spätestens im atomaren Bereich begrenzt.
- Der Ort und der Impuls eines Teilchens kann nicht zugleich beliebig genau bestimmt werden.

Bemerkungen:

- Mehr Wissen und ggf. eine höhere Messgenauigkeit „schwächen den Zufall ab.“