Kapitel PTS:VII

VII. Gesetz der großen Zahlen

- Ungleichung von Tschebyscheff
- Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen
- Borel’sche Gesetz der großen Zahlen

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Sei X binomialverteilt nach $B(n;p)$: Was ist die absolute Abweichung der Trefferhäufigkeit $\frac{X}{n}$ von der Trefferwahrscheinlichkeit p?

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Sei X binomialverteilt nach $B(n;p)$: Was ist die absolute Abweichung der Trefferhäufigkeit $\frac{X}{n}$ von der Trefferwahrscheinlichkeit p?

- Ausgangspunkt ist folgende Fassung der Tschebyscheff-Ungleichung:

$$P(|X - E(X)| < c) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{c^2} \ .$$

- Mit $E(X) = np$ und $\text{Var}(X) = npq$ ergibt sich:

$$P(|X - np| < c) \geq 1 - \frac{npq}{c^2} \ .$$

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Herleitung

- Sei X binomialverteilt nach $B(n;p)$: Was ist die absolute Abweichung der Trefferhäufigkeit $\frac{X}{n}$ von der Trefferwahrscheinlichkeit p?

- Ausgangspunkt ist folgende Fassung der Tschebyscheff-Ungleichung:

$$P(|X - E(X)| < c) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{c^2} \ .$$

- Mit $E(X) = np$ und $\text{Var}(X) = npq$ ergibt sich:

$$P(|X - np| < c) \geq 1 - \frac{npq}{c^2} \ .$$

- Umformung der absoluten Trefferhäufigkeit X in Ereignis $|X - np| < c$ in die relative $\frac{X}{n}$ mittels Division durch n ergibt das äquivalente Ereignis $\left|\frac{X}{n} - p\right| < \frac{c}{n}$.

- Die Substitution $\frac{c}{n} = \varepsilon$ führt mit $c^2 = n^2\varepsilon^2$ zur Abschätzung:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} \ .$$

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Satz 3

Sei $\frac{X}{n}$ die relative Häufigkeit eines Treffers in einer Bernoulli-Kette mit den Parametern n und p. Dann gilt für jedes reelle $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \ .$$

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

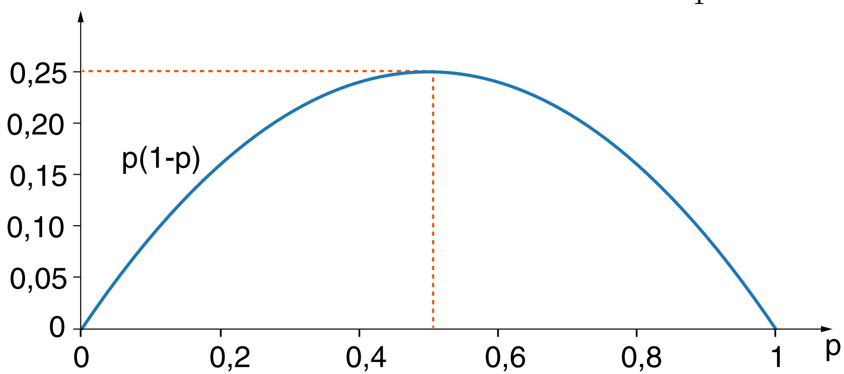
Satz 3

Sei $\frac{X}{n}$ die relative Häufigkeit eines Treffers in einer Bernoulli-Kette mit den Parametern n und p. Dann gilt für jedes reelle $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}\ .$$

Vereinfachung / Vergröberung:

- Für $0 \leq p \leq 1$ kann $pq = 1(1-p)$ nicht größer als $\frac{1}{4}$ werden:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Daraus folgt:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}\ .$$

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Mit $\frac{X}{n} = H_n(A)$ ergibt sich für den Grenzübergang $n \to \infty$:

Satz 4 (Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen)

Sei $H_n(A)$ die relative Häufigkeit eines Ereignisses A in einer Bernoulli-Kette mit den Parametern n und $p = P(A)$, so gilt für jedes reelle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|H_n(A) - p| < \varepsilon\right) = 1 \ .$$

Jakob Bernoulli

Bemerkungen:

- Die Abschätzung in Satz 3 stammt von Jakob Bernoulli (1655–1705, Schweizer Mathematiker).
- Sätze 3 und 4 gelten für jedes beliebig kleine positive ε. Sie lassen sich wie folgt interpretieren: In einer Bernoulli-Kette sehr großer Länge ist die relative Trefferhäufigkeit $\frac{X}{n}$ fast sicher ungefähr gleich der Trefferwahrscheinlichkeit p.
- Das Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen bedeutet, dass die Zuverlässigkeit P der relativen Häufigkeit als Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit wachsender Zahl der Versuche bzw. Beobachtungen ansteigt.
- Wie genau sich die Annäherung der Zuverlässigkeit P an die Zahl 1 vollzieht, kann mit Satz 3 abgeschätzt werden.
- Beide Sätze „legitimieren“ also die Häufigkeitsinterpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.
- Bernoulli schreibt sinngemäß: [Ars Conjectandi]

  > Was sich der Bestimmung *a priori* entzieht, lässt sich schließlich *a posteriori* ermitteln – also aus der oftmaligen Beobachtung des Ereignisses unter ähnlichen Umständen.

- Der heute als Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen bekannte Zusammenhang stellt das Hauptwerk Jakob Bernoullis dar. Er hat es allerdings nicht in der Weise abgeleitet, die wir gewählt haben, da ihm die Tschebyscheff-Ungleichung noch nicht zur Verfügung stand. Stattdessen hat Bernoulli das Gesetz durch unmittelbare Rechnung bzw. Abschätzung unter Verwendung seiner Formel für $B(n; p)$ gefunden.

Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Bernoulli bezeichnete das Gesetz als *Hauptsatz* bzw. *Goldenes Theorem*, weil es eine Brücke zwischen Theorie und Wirklichkeit schlägt, indem es die wechselseitige Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit klärt.
- Die Bezeichnung *Gesetz der großen Zahlen* wurde erst 1837, also nach Bernoullis Tod, von Siméon-Denis Poisson (1781–1840, französischer Physiker und Mathematiker) eingeführt.

- Es gibt viele Versuchsreihen für den Münzwurf, das Würfeln sowie Analyse von Roulette-Permanenzen und Lotto-Statistiken, in denen sich das Gesetz der großen Zahlen immer wieder bestätigt hat. Bei solchen Versuchen kennt man durch die Symmetrie der Versuchsgeräte die zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten.
- Implizit war das Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen schon früher angeführt worden; beispielsweise von Gerolamo Cardano (1501–1576, italienischer Renaissance-Humanist). Bernoulli war aber der Erste, der es theoretisch untermauert hat.
- Heutzutage hat sich das Gesetz auf viele Bereiche nachhaltig ausgewirkt, beispielsweise in der Physik, Chemie, Biologie, Medizin, Psychologie oder den Sozialwissenschaften – quasi überall, wo Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine Rolle spielen.

Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen

Veranschaulichung

- Wie nähern sich relative Häufigkeiten der Wahrscheinlichkeit p an?
- Gewünschte Mindestwahrscheinlichkeit $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 99\%$:

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 0{,}99 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varepsilon = \frac{5}{\sqrt{n}}$$

- Mit wachsendem n wird
  das ε-Intervall um p enger:

$$p - \varepsilon < \frac{X}{n} < p + \varepsilon$$

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Veranschaulichung

- Wie nähern sich relative Häufigkeiten der Wahrscheinlichkeit p an?
- Gewünschte Mindestwahrscheinlichkeit $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 99\%$:

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 0{,}99 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varepsilon = \frac{5}{\sqrt{n}}$$

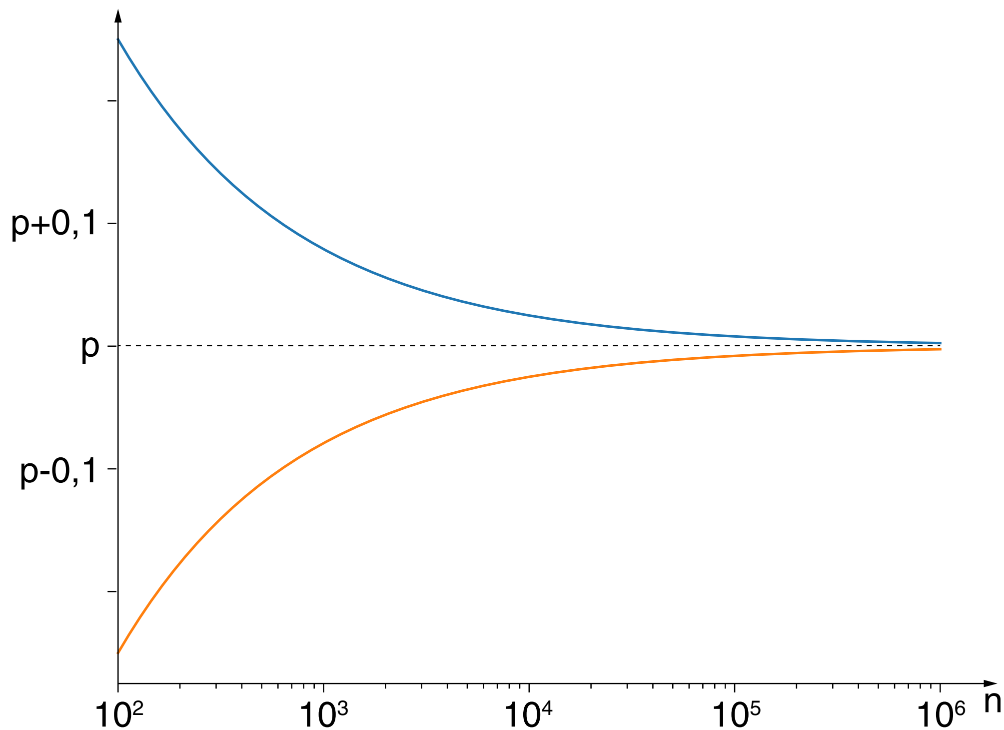
- Mit wachsendem n wird das ε-Intervall um p enger:

$$p - \varepsilon < \frac{X}{n} < p + \varepsilon$$

- 99%-Trichter:

n	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
ε	0,5	0,16	0,05	0,016	0,005

- Relative Häufigkeiten sind bei n Versuchen mit min. 99% Wahrscheinlichkeit im Trichter.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- In der Praxis interessiert man sich für eine Abschätzung der kleinsten Versuchszahl, die erforderlich ist, damit vorgezeichnete Grenzen der relativen Häufigkeit mit vorgeschriebener Mindestwahrscheinlichkeit eingehalten werden.

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Beispiel

- Sei $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{2}{5}$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$ und die Mindestwahrscheinlichkeit sei $99{,}9\%$.

  Annahme gemäß Bernoulli.

- Obere Schranke für die Mindestanzahl der Versuche:

$$1 - \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}{n \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2} \;=\; 0{,}999 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \;=\; 600.000\ .$$

- Obere Schranke für die Mindestanzahl der Versuche gemäß Vergröberung:

$$1 - \frac{1}{4n \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2} \;=\; 0{,}999 \qquad \Leftrightarrow \qquad n \;=\; 625.000\ .$$

Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Konvergenz

- Man sagt $H_n(A)$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen p, wenn

$$P(|H_n(A) - p| < \varepsilon) \to 1 \qquad \text{für} \qquad n \to \infty \,.$$

- Konvergenz in Wahrscheinlichkeit untercheidet sich vom Konvergenzbegriff der Analysis.

- In der Analysis lässt sich der Wert der Variablen genau angeben, von dem an die absolute Differenz zwischen Funktionswert und Grenzwert *mit Sicherheit* unter einem festgelegten Wert liegt.

Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Paradoxon von Kopf und Zahl

- Das Bernoulli’sche Gesetz der großen Zahlen kann zu Fehlschlüssen führen.
- Angenommen nach vielmaligen Werfen einer Laplace-Münze ist Kopf bedeutend häufiger gefallen als Zahl.
- Viele folgern, dass „zum Ausgleich“ das Fallen der Zahl wahrscheinlicher wird.
  Wissenschaftler wie Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716, deutscher Universalgelehrter) und Jean le Rond d’Alembert (1717–1783, französischer Mathematiker) behaupteten das.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Jean le Rond d’Alembert

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Paradoxon von Kopf und Zahl

- Eine Münze hat kein „Gedächtnis".
- Nach 1000-mal Kopf in Folge fällt Zahl im 1001. Wurf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.
- Paradox: Nach Bernoullis Gesetz der großen Zahlen müssen jedoch Kopf und Zahl bei genügend vielen Würfen *annähernd gleich oft* vorkommen.
- Auflösung: Betrachtung was unter „annähernd gleich oft" zu verstehen ist.
- Zulässige Interpretationen:
  - Der Quotient aus Anzahl von Kopfwürfen und einer großen Zahl an Versuchen soll mit Wahrscheinlichkeit von nahezu 1 annähernd $\frac{1}{2}$ sein.
  - Der Quotient aus den Anzahlen der Kopf- und Zahlwürfe strebt gegen 1.
- Nicht zulässige Interpretation:
  - Die absolute Differenz aus der Anzahl X der Kopfwürfe und der Anzahl Y der Zahlwürfe ist klein.

    Diese Interpretation widerspricht der Gedächtnislosigkeit der Münze.

Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Paradoxon von Kopf und Zahl

- Abraham de Moivre hat gezeigt, dass bei n Würfen

$$P(|X - Y| \leq \sqrt{n}) = 68\% \ .$$

- Mit 32% Wahrscheinlichkeit ist die absolute Differenz der Anzahlen von Kopf- und Zahlwürfen größer als $\sqrt{n}$.
- Die Funktion $\sqrt{n}$ divergiert.

Beispiel: Selbstversuch

- John Kerrich (1903–1985, südafrikanischer Mathematiker englischer Abstammung) ist bekannt für Zufallsexperimente, die er während seiner Internierung in Dänemark während des Zweiten Weltkrieges durchführte.
- Bei 10.000 Würfen einer als fair angenommenen Münze fiel 5.067-mal Zahl.
- Der beobachtete Unterschied von 134 ist größer als $\sqrt{10.000} = 100$.

Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Empirisches Gesetz der großen Zahlen

- Das empirische Gesetz der großen Zahlen zeigt, dass es Ereignisse in Zufallsexperimenten gibt, deren relative Häufigkeit Versuchsreihen umso weniger von einem fest Zahlenwert abweicht, je länger die Versuchsreihe ist.

- Diese Erfahrungstatsache gab Anlass zur Definition des mathematischen Wahrscheinlichkeitsmaßes durch die drei Axiome von Kolmogorow.

- Mit dem Axiomensystem wurde die erfahrbare Wirklichkeit verlassen und ein *rein mathematisches Modell* entwickelt.

- Alle bisher gezeigten Sätze stützen sich auf die drei Kolmogorow-Axiome und den Unabhängigkeitsbegriff.

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß unterscheidet sich wesentlich von anderen Maßen.

- Wie gelangt man aus dem mathematischen Modell zurück zur Wirklichkeit?

Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Empirisches Gesetz der großen Zahlen

- Soll ein mathematisches Modell einen Teil der Erfahrungswelt beschreiben, muss man sagen, *welche* Aussagen des Modells auf *welche Weise* beobachtbaren Phänomenen entsprechen.
- Das Modell erlaubt dann nicht nur die nachträgliche Beschreibung von Phänomenen, sondern Vorhersagen über zukünftige.
- Die den Gesetzen der Physik unterliegenden Modelle dienen nicht nur zur Beschreibung, sondern vor allem zur Vorhersage physikalischer Phänomene.
- Auf ihnen beruht mehr oder weniger unsere gesamte technische Zivilisation.

- Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein Gebiet der reinen Mathematik.
- Wahrscheinlichkeiten sind streng genommen rein mathematische Größen, die erst interpretiert werden müssen.

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Empirisches Gesetz der großen Zahlen

- Intuitiv wurde in den vorigen Beispielen angenommen, dass die relative Häufigkeit eines Ereignisses eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit ist.
- Streng mathematisch ermöglicht erlaubt erst der Vergleich des empirischen und des Bernoulli'schen Gesetzes der großen Zahlen die Interpretation.

- Das empirische Gesetz der großen Zahlen als Erfahrungstatsache:

  Es ist *praktisch sicher*, dass in einer langen Versuchsfolge die relative Trefferhäufigkeit *nur wenig* von einer *festen Zahl* abweicht.

- Das Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen als mathematischer Satz:

  Die *Wahrscheinlichkeit ist ungefähr* 1, dass in einer langen Versuchsfolge die relative Trefferhäufigkeit *nur beliebig wenig* von der *Trefferwahrscheinlichkeit* abweicht.

- Beide Aussagen entsprechen sich unmittelbar und verbinden Wirklichkeit und Theorie.

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Verbindung von Wirklichkeit und Theorie

- Interpretationsregel:

  Ein Ereignis, dem ungefähr die Wahrscheinlichkeit 1 zugeordnet ist, tritt praktisch mit Sicherheit ein.

- Die rechnerische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses lässt sich damit als relative Häufigkeit bei vielen Versuchen interpretieren:

	Interpretation	
Mathematisches Modell	$\rightarrow$	Wirklichkeit
$P(A) \approx 1$		A ist (praktisch) fast *sicher*
$P(A)$		relative Häufigkeit von A in einer langen Versuchsfolge

Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (a)

- Die Frage nach der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Beschreibung der Wirklichkeit ist damit beantwortet.
- Aus den Kolmogorow-Axiomen als Fundament kann das Bernoulli’sche Gesetz der großen Zahlen deduktiv abgeleitet werden.
- Das Bernoulli’sche Gesetz lässt sich als experimentell feststellbares Phänomen interpretieren: das empirische Gesetz der großen Zahlen, das die entscheidende Gesetzmäßigkeit zufälligen Geschehens wiedergibt.
- Die Kolmogorow’sche Theorie hat sich damit nachträglich nochmals bewährt.
- Es war daher tatsächlich nicht notwendig, das empirische Gesetz der großen Zahlen in irgendeiner Form ins Axiomensystem mit aufzunehmen.

Bernoulli’sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (b)

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird interpretiert als seine relative Häufigkeit in einer langen Versuchsfolge.

- Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich prinzipiell beliebig genau bestimmen – wie auch andere naturwissenschaftliche Größen.

- Das entspricht der Aussage von Bernoullis Gesetz der großen Zahlen:

  > In einer hinreichend langen Versuchsfolge weicht die relative Häufigkeit eines Ereignisses praktisch mit Sicherheit beliebig wenig von seiner Wahrscheinlichkeit ab.

- Jede aufgrund der Laplace-Annahme berechnete Wahrscheinlichkeit ist empirisch überprüfbar.

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (c)

- Konsequenz der Interpretation der Wahrscheinlichkeit ist, dass zwei Arten von Ereignissen unterschieden werden müssen:
  - Kategorisch sichere / unmögliche Ereignisse
  - Praktisch sichere / unmögliche Ereignisse

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (c)

- Konsequenz der Interpretation der Wahrscheinlichkeit ist, dass zwei Arten von Ereignissen unterschieden werden müssen:
  - Kategorisch sichere / unmögliche Ereignisse
  - Praktisch sichere / unmögliche Ereignisse

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Die Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ ist in etwa $\frac{1}{14 \cdot 10^6}$.
- Viele Lottospieler:innen machen sich keine großen Hoffnungen darauf.
  Sie empfinden das Ereignis als praktisch unmöglich, wenn auch nicht kategorisch unmöglich. Bei letzterem, wäre es unvernünftig, zu spielen.
- In den 1970-er Jahren wurden in der Bundesrepublik Deutschland bei jeder Ausspielung etwa 140 Millionen Lottoscheine ausgefüllt (Stand: 1976).
  Annahme: Einzelne Tipps finden unabhängig statt.
- Wir wahrscheinlich ist „keinmal / mindestens einmal 6 Richtige“?

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (c)

Beispiel: Lotto „6 aus 49“: (Fortsetzung)

- Wahrscheinlichkeit für „keinmal 6 Richtige“:

$$\left(1 - \frac{1}{14 \cdot 10^6}\right)^{140 \cdot 10^6} = \left(1 - \frac{1}{14 \cdot 10^6}\right)^{14 \cdot 10^6 \cdot \frac{140 \cdot 10^6}{14 \cdot 10^6}} \approx \mathrm{e}^{-10} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-5}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (c)

Beispiel: Lotto „6 aus 49“: (Fortsetzung)

- Wahrscheinlichkeit für „keinmal 6 Richtige“:

$$\left(1 - \frac{1}{14 \cdot 10^6}\right)^{140\cdot 10^6} = \left(1 - \frac{1}{14 \cdot 10^6}\right)^{14\cdot 10^6 \cdot \frac{140\cdot 10^6}{14\cdot 10^6}} \approx \mathrm{e}^{-10} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n = \tfrac{1}{\mathrm{e}}$$

- Wahrscheinlichkeit für „mindestens einmal 6 Richtige“:

$$1 - 0{,}000045 = 0{,}999955$$

- Es ist nicht kategorisch sicher, dass bei einer Ausspielung jemand „6 Richtige“ tippt, aber praktisch sicher, was auch zu beobachten ist.

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (d)

- Wie groß bzw. klein muss die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sein, damit es als praktisch sicher bzw. unmöglich zu interpretieren ist?
- Diese Frage ist mathematischen nicht beantwortbar: „Es kommt darauf an."
  Ein häufiges Kriterium ist die Wichtigkeit des Ereignisses.

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (d)

- Wie groß bzw. klein muss die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sein, damit es als praktisch sicher bzw. unmöglich zu interpretieren ist?
- Diese Frage ist mathematischen nicht beantwortbar: „Es kommt darauf an."
  Ein häufiges Kriterium ist die Wichtigkeit des Ereignisses.

Beispiel: Vermessung eines Berges

- Der Messfehler einer Berghöhe sei mit 3% Wahrscheinlichkeit größer als 2m.
- Größere Messfehler sind für viele praktische Anwendungen vernachlässigbar.
- Man wird daher größere Messfehler als praktisch unmöglich betrachten.

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Hintergrund: Interpretation der Wahrscheinlichkeit (d)

- Wie groß bzw. klein muss die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sein, damit es als praktisch sicher bzw. unmöglich zu interpretieren ist?
- Diese Frage ist mathematischen nicht beantwortbar: „Es kommt darauf an."
  Ein häufiges Kriterium ist die Wichtigkeit des Ereignisses.

Beispiel: Vermessung eines Berges

- Der Messfehler einer Berghöhe sei mit 3% Wahrscheinlichkeit größer als 2m.
- Größere Messfehler sind für viele praktische Anwendungen vernachlässigbar.
- Man wird daher größere Messfehler als praktisch unmöglich betrachten.

Beispiel: Brückenkonstruktion

- Eine Brückenkonstruktion stürzt unter bestimmten klimatischen Bedingungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% ein.
- Das Risiko wirkt für nahezu alle Brückennutzer zu groß.
- Man wird das Eintreten eines Einsturzes nicht für praktisch unmöglich halten.

Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen

Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wirklichkeit		Mathematische Theorie
		Ergebnisraum
Zufallsexperiment		↓
↓		Ereignisraum
Relative Häufigkeit		↓
↓	↘	Axiome von Kolmogorow
	↗	Wahrscheinlichkeitsraum
Empirisches Gesetz		↓
der großen Zahlen		Unabhängige Ereignisse
↑		↓
Interpretation		Unabhängige Versuche
		↓
		Bernoulli-Kette
		↓
	→	Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen
↓		
Ein Ereignis A tritt praktisch sicher ein	⟷	$P(A) \approx 1$