

# Kapitel PTS:IV

## IV. Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Einführung und Definition
- Berechnung mit Baumdiagrammen
- Satz von Bayes
- Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse
- Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

Beispiel: Prüfungserfolg

- Von 100 Prüfungsteilnehmer:innen wurde die Ubungsbeteiligung erhoben:  
Interessierende Ereignisse bei zufälliger Auswahl eines Studierenden.

Ubungsbeteiligung	Prüfung		$\sum$
	$B$ bestanden	$\bar{B}$ nicht bestanden	
aktiv $A$	55	5	60
nicht aktiv $\bar{A}$	10	30	40
$\sum$	65	35	100

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

Beispiel: Prüfungserfolg

- Von 100 Prüfungsteilnehmer:innen wurde die Ubungsbeteiligung erhoben:  
Interessierende Ereignisse bei zufälliger Auswahl eines Studierenden.

Ubungsbeteiligung	Prüfung		$\sum$
	$B$ bestanden	$\bar{B}$ nicht bestanden	
aktiv $A$	55	5	60
nicht aktiv $\bar{A}$	10	30	40
$\sum$	65	35	100

- Folgende Wahrscheinlichkeiten lassen sich ablesen:

$$P(A) = \frac{60}{100} = 0,6 \quad P(B|A) = \frac{55}{60} = 0,917$$

$$P(\bar{B}) = \frac{35}{100} = 0,35 \quad P(B|\bar{A}) = \frac{10}{40} = 0,25$$

- Was legen diese Unterschiede zwischen den Wahrscheinlichkeiten nahe?

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Beispiel: Prüfungserfolg

- Von 100 Prüfungsteilnehmer:innen wurde die Ubungsbeteiligung erhoben:  
Interessierende Ereignisse bei zufälliger Auswahl eines Studierenden.

Ubungsbeteiligung	Prüfung		$\sum$
	$B$ bestanden	$\bar{B}$ nicht bestanden	
aktiv $A$	55	5	60
nicht aktiv $\bar{A}$	10	30	40
$\sum$	65	35	100

- Folgende Wahrscheinlichkeiten lassen sich ablesen:

$$P(A) = \frac{60}{100} = 0,6 \quad P(B|A) = \frac{55}{60} = 0,917$$

$$P(B) = \frac{65}{100} = 0,65 \quad P(B|\bar{A}) = \frac{10}{40} = 0,25$$

- Der große Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten legt einen Zusammenhang zwischen  $A$  und  $B$  nahe.
- Die Ereignisse  $A$  und  $B$  nennt man **statistisch abhängig**.  
Sonst würde man  $P(B|A) \approx P(B|\bar{A}) \approx P(B)$  erwarten.

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Begriffsbildung

- Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse mit  $P(A) > 0$  und  $P(B) > 0$ .
- Die Unabhängigkeit von  $A$  und  $B$  lässt sich plausibel wie folgt ausdrücken:  
Anschaulich: Kenntnis vom Eintreten von  $A$  oder  $B$  liefert keine Informationen zu  $B$  bzw.  $A$ .

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{bzw.} \quad P(A|B) = P(A)$$

- Daraus folgt für die Multiplikationsregel:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

- Diese Varianten sind quivalente Definitionen von Unabhängigkeit.

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Begriffsbildung

- Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse mit  $P(A) > 0$  und  $P(B) > 0$ .
- Die Unabhängigkeit von  $A$  und  $B$  lässt sich plausibel wie folgt ausdrücken:  
Anschaulich: Kenntnis vom Eintreten von  $A$  oder  $B$  liefert keine Informationen zu  $B$  bzw.  $A$ .

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{bzw.} \quad P(A|B) = P(A)$$

- Daraus folgt für die Multiplikationsregel:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

- Diese Varianten sind quivalente Definitionen von Unabhängigkeit.
- Die Grenzfälle  $P(A) = 0$  oder  $P(B) = 0$  sind auch für  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  sinnvoll, da  $P(A \cap B) \leq P(A)$  und  $P(A \cap B) \leq P(B)$ .  
Es erfolgt kein Rückgriff mehr auf bedingte Wahrscheinlichkeiten.

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Definition 4 (Stochastische Unabhängigkeit, spezielle Multiplikationsregel)

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen **stochastisch unabhängig** im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$ , wenn die **spezielle Multiplikationsregel** gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) .$$

Sonst heißen sie **stochastisch abhängig**.



Georg Bohlmann

## Bemerkungen:

- Georg Bohlmann (1869-1828, deutscher Mathematiker) formulierte um 1900 als erster die moderne Definition der stochastischen Unabhängigkeit. Bereits Christiaan Huygens unterschied in seinem Lehrbuch „*De ratiociniis in ludo aleae*“ zwischen abhängigen und unabhängigen Ereignissen.
- Man spricht von „stochastischer (Un-)Abhängigkeit“ oder „statistischer (Un-)Abhängigkeit“, um diesen Unabhängigkeitsbegriff von anderen der Mathematik zu unterscheiden. Wenn kein Verwirrungspotenzial besteht, wird oft einfach von (Un-)Abhängigkeit gesprochen.
- Ein weiterer Grund, eher „stochastische (Un-)Abhängigkeit“ zu sagen, ist, eine Verwechslung mit kausaler (Un-)Abhängigkeit in der Wirklichkeit zu vermeiden: Kausale (Un-)Abhängigkeit impliziert stochastische (Un-)Abhängigkeit, nicht umgekehrt.
- Aus der Definition folgt, dass die Unabhängigkeit eine symmetrische Relation ist:

$$A \text{ unabhängig von } B \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ unabhängig von } A .$$

Wir sagen daher auch: *A* und *B* sind **voneinander unabhängig**.



# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Feststellung der Unabhängigkeit

### 1. Untersuchung der Unabhängigkeit:

- Vergleich von  $P(A \cap B)$  mit  $P(A) \cdot P(B)$
- Vergleich von  $P(A|B)$  mit  $P(A)$
- Vergleich von  $P(B|A)$  mit  $P(B)$
  
- Beispiel: Würfeln.

Die Ereignisse  $A = \{3; 4; 5\}$  und  $B = \{1; 2; 3; 4\}$  sind stochastisch unabhängig, denn es gilt  $P(A) = P(A|B) = \frac{1}{2}$  und  $P(B) = P(B|A) = \frac{2}{3}$ .

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Feststellung der Unabhängigkeit

### 1. Untersuchung der Unabhängigkeit:

- Vergleich von  $P(A \cap B)$  mit  $P(A) \cdot P(B)$
- Vergleich von  $P(A|B)$  mit  $P(A)$
- Vergleich von  $P(B|A)$  mit  $P(B)$
  
- Beispiel: Würfeln.

Die Ereignisse  $A = \{3; 4; 5\}$  und  $B = \{1; 2; 3; 4\}$  sind stochastisch unabhängig, denn es gilt  $P(A) = P(A|B) = \frac{1}{2}$  und  $P(B) = P(B|A) = \frac{2}{3}$ .

### 2. Annahme der Unabhängigkeit aus Mangel an Gründen für Abhängigkeit.

Verwendung der speziellen Multiplikationsregel zur Berechnung von  $P(A \cap B)$ .

- Beispiel: Würfeln.

Beim zweimaligen Würfeln gibt es keinen Grund, anzunehmen, dass  $A$ : „6 beim ersten Wurf“ und  $B$ : „3 beim zweiten Wurf“ abhängig sind. Daher wird angenommen, dass  $P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ . Dies entspricht der Laplace-Wahrscheinlichkeit für  $A \cap B = \{(6; 3)\}$ .

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Beispiel: Ausfallsicherheit

- Ein Gerät bestehe aus zwei Bauteilen  $T_1$  und  $T_2$ , die unabhängig voneinander kaputt gehen können.
- Die Ereignisse  $A_i$ : „Bauteil  $T_i$  ist intakt“ treten mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  ( $i \in \{1; 2\}$ ) unabhängig voneinander ein.
- Konfigurationen:
  - Reihenschaltung: Gerät funktionstüchtig, wenn  $T_1$  und  $T_2$  intakt sind.
  - Parallelschaltung: Gerät funktionstüchtig, wenn  $T_1$  oder  $T_2$  intakt ist.

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Beispiel: Ausfallsicherheit

- Ein Gerät bestehe aus zwei Bauteilen  $T_1$  und  $T_2$ , die unabhängig voneinander kaputt gehen können.
- Die Ereignisse  $A_i$ : „Bauteil  $T_i$  ist intakt“ treten mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  ( $i \in \{1; 2\}$ ) unabhängig voneinander ein.
- Konfigurationen:
  - Reihenschaltung: Gerät funktionstüchtig, wenn  $T_1$  und  $T_2$  intakt sind.
  - Parallelschaltung: Gerät funktionstüchtig, wenn  $T_1$  oder  $T_2$  intakt ist.
- $G$ : „Gerät funktionstüchtig“
  - Reihenschaltung:  $P(G) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p_2$
  - Parallelschaltung: 
$$\begin{aligned}P(G) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) \\&= p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 \\&= 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)\end{aligned}$$

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Beispiel: Ausfallsicherheit

- Ein Gerät bestehe aus zwei Bauteilen  $T_1$  und  $T_2$ , die unabhängig voneinander kaputt gehen können.
- Die Ereignisse  $A_i$ : „Bauteil  $T_i$  ist intakt“ treten mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  ( $i \in \{1; 2\}$ ) unabhängig voneinander ein.
- Konfigurationen:
  - Reihenschaltung: Gerät funktionstüchtig, wenn  $T_1$  und  $T_2$  intakt sind.
  - Parallelschaltung: Gerät funktionstüchtig, wenn  $T_1$  oder  $T_2$  intakt ist.
- $G$ : „Gerät funktionstüchtig“
  - Reihenschaltung:  $P(G) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p_2$
  - Parallelschaltung: 
$$\begin{aligned}P(G) &= P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) \\&= p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 \\&= 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)\end{aligned}$$
- Für  $p_1 = 0,8$  und  $p_2 = 0,9$  ergibt sich bei
  - Reihenschaltung:  $P(G) = 0,72$
  - Parallelschaltung:  $P(G) = 0,98$

## Bemerkungen:

- Parallelschaltung ist eine gute Methode um die Betriebssicherheit zu erhöhen. Das redundante Vorhalten gleichartiger Bauteile ist allerdings auch ein Kostenfaktor und wird deshalb nicht überall umgesetzt.
- Anwendungsfälle: doppelte Hinterräder bei LKW, doppelte Zündstromkreise bei Flugzeugmotoren, doppeltes Vorhalten der Master-Knoten von Clusterrechnern, etc.
- Werden mehr als zwei gleichartige Bauteile parallel geschaltet, wird das Gerät noch ausfallsicherer. Beispiele sind die dreifache oder sogar vierfache Redundanz von Flugassistenzsystemen wie „[Autoland](#)“ oder „[Fly-by-wire](#)“ (jedes Bauteil drei oder viermal vorhanden) oder das standardmäßige Anlegen von drei Replikaten in [Hadoop-Dateisystemen](#) (jedes Datum dreimal auf verschiedenen Rechnern vorhanden).

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

Beispiel: Munzparadoxon

- Experiment 1: Wurf zweier fairer Münzen.
- Experiment 2: Wurf dreier fairer Münzen.
- Ereignisse:  $A_i$ : „Höchstens einmal Zahl“,  $B_i$ : „Jede Seite wenigstens einmal“
- Sind  $A_i$  und  $B_i$  für Experiment  $i \in [1; 2]$  unabhängig?

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Beispiel: Munzparadoxon

- Experiment 1: Wurf zweier fairer Münzen.
- Experiment 2: Wurf dreier fairer Münzen.
- Ereignisse:  $A_i$ : „Höchstens einmal Zahl“,  $B_i$ : „Jede Seite wenigstens einmal“
- Sind  $A_i$  und  $B_i$  für Experiment  $i \in [1; 2]$  unabhängig?
  
- $\Omega_1 = \{\text{ZZ}; \text{ZK}; \text{KZ}; \text{KK}\}$
- $A_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}; \text{KK}\}$  und  $P(A_1) = \frac{3}{4}$
- $B_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}\}$  und  $P(B_1) = \frac{1}{2}$
- $A_1 \cap B_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}\}$  und  $P(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{2}$

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Beispiel: Munzparadoxon

- Experiment 1: Wurf zweier fairer Münzen.
  - Experiment 2: Wurf dreier fairer Münzen.
  - Ereignisse:  $A_i$ : „Höchstens einmal Zahl“,  $B_i$ : „Jede Seite wenigstens einmal“
  - Sind  $A_i$  und  $B_i$  für Experiment  $i \in [1; 2]$  unabhängig?
- 
- $\Omega_1 = \{\text{ZZ}; \text{ZK}; \text{KZ}; \text{KK}\}$   $\Omega_2 = \{\text{ZZZ}; \text{ZZK}; \text{ZKZ}; \text{KZZ}; \text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}; \text{KKK}\}$
  - $A_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}; \text{KK}\}$  und  $P(A_1) = \frac{3}{4}$   $A_2 = \{\text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}; \text{KKK}\}$  und  $P(A_2) = \frac{1}{2}$
  - $B_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}\}$  und  $P(B_1) = \frac{1}{2}$   $B_2 = \{\text{ZZK}; \text{ZKZ}; \text{KZZ}; \text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}\}$  und  $P(B_2) = \frac{3}{4}$
  - $A_1 \cap B_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}\}$  und  $P(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{2}$   $A_2 \cap B_2 = \{\text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}\}$  und  $P(A_2 \cap B_2) = \frac{3}{8}$

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Beispiel: Munzparadoxon

- Experiment 1: Wurf zweier fairer Münzen.
  - Experiment 2: Wurf dreier fairer Münzen.
  - Ereignisse:  $A_i$ : „Höchstens einmal Zahl“,  $B_i$ : „Jede Seite wenigstens einmal“
  - Sind  $A_i$  und  $B_i$  für Experiment  $i \in [1; 2]$  unabhängig?
- 
- |   |   |
|---|---|
| □ $\Omega_1 = \{\text{ZZ}; \text{ZK}; \text{KZ}; \text{KK}\}$                   | $\Omega_2 = \{\text{ZZZ}; \text{ZZK}; \text{ZKZ}; \text{KZZ}; \text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}; \text{KKK}\}$ |
| □ $A_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}; \text{KK}\}$ und $P(A_1) = \frac{3}{4}$        | $A_2 = \{\text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}; \text{KKK}\}$ und $P(A_2) = \frac{1}{2}$                           |
| □ $B_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}\}$ und $P(B_1) = \frac{1}{2}$                   | $B_2 = \{\text{ZZK}; \text{ZKZ}; \text{KZZ}; \text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}\}$ und $P(B_2) = \frac{3}{4}$   |
| □ $A_1 \cap B_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}\}$ und $P(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{2}$ | $A_2 \cap B_2 = \{\text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}\}$ und $P(A_2 \cap B_2) = \frac{3}{8}$                     |
| □ $\frac{1}{2} = P(A_1 \cap B_1) \neq P(A_1) \cdot P(B_1) = \frac{3}{8}$        | $\frac{3}{8} = P(A_2 \cap B_2) = P(A_2) \cdot P(B_2) = \frac{3}{8}$   |
| → $A_1$ und $B_1$ sind abhängig.   | $A_2$ und $B_2$ sind unabhängig.   |

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Beispiel: Munzparadoxon

- Experiment 1: Wurf zweier fairer Münzen.
  - Experiment 2: Wurf dreier fairer Münzen.
  - Ereignisse:  $A_i$ : „Höchstens einmal Zahl“,  $B_i$ : „Jede Seite wenigstens einmal“
  - Sind  $A_i$  und  $B_i$  für Experiment  $i \in [1; 2]$  unabhängig?
- 
- |   |   |
|---|---|
| □ $\Omega_1 = \{\text{ZZ}; \text{ZK}; \text{KZ}; \text{KK}\}$                   | $\Omega_2 = \{\text{ZZZ}; \text{ZZK}; \text{ZKZ}; \text{KZZ}; \text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}; \text{KKK}\}$ |
| □ $A_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}; \text{KK}\}$ und $P(A_1) = \frac{3}{4}$        | $A_2 = \{\text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}; \text{KKK}\}$ und $P(A_2) = \frac{1}{2}$                           |
| □ $B_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}\}$ und $P(B_1) = \frac{1}{2}$                   | $B_2 = \{\text{ZZK}; \text{ZKZ}; \text{KZZ}; \text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}\}$ und $P(B_2) = \frac{3}{4}$   |
| □ $A_1 \cap B_1 = \{\text{ZK}; \text{KZ}\}$ und $P(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{2}$ | $A_2 \cap B_2 = \{\text{ZKK}; \text{KZK}; \text{KKZ}\}$ und $P(A_2 \cap B_2) = \frac{3}{8}$                     |
| □ $\frac{1}{2} = P(A_1 \cap B_1) \neq P(A_1) \cdot P(B_1) = \frac{3}{8}$        | $\frac{3}{8} = P(A_2 \cap B_2) = P(A_2) \cdot P(B_2) = \frac{3}{8}$   |
| → $A_1$ und $B_1$ sind abhängig.   | $A_2$ und $B_2$ sind unabhängig.   |
- 
- Paradox:  $A_i$  und  $B_i$  sind im einen Experiment abhängig, im anderen nicht.
  - Auflösung: Es handelt sich um **stochastische** (Un-)Abhängigkeit  
Das Paradox ist bestigt. Die Abhängigkeit erwächst aus der Problemstruktur.

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Grade der Abhängigkeit

Beispiel: Schwangerschaft

- **Extreme Abhängigkeit** liegt bei menschlichen Schwangerschaften zwischen den Ereignissen  $S$ : „Schwangerschaft“ und  $W$ : „Geschlecht weiblich“ vor.
- $P(W) \approx 0,51$  (ganze deutsche Bevölkerung, nicht nur Geburtsgeschlecht)
- $P(W|S) = 1$

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Grade der Abhängigkeit

Beispiel: Schwangerschaft

- Extreme Abhängigkeit** liegt bei menschlichen Schwangerschaften zwischen den Ereignissen  $S$ : „Schwangerschaft“ und  $W$ : „Geschlecht weiblich“ vor.
- $P(W) \approx 0,51$  (ganze deutsche Bevölkerung, nicht nur Geburtsgeschlecht)
- $P(W|S) = 1$

Beispiel: Rot-Grün-Sehschwäche

- Starke Abhängigkeit** besteht aus genetischen Gründen zwischen den Ereignissen  $R$ : „Rot-Grün-Sehschwäche“ und  $M$ : „Geschlecht männlich“
- $P(M) \approx 0,49$
- $P(M|R) = 0,9$

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Grade der Abhängigkeit

### Beispiel: Schwangerschaft

- **Extreme Abhängigkeit** liegt bei menschlichen Schwangerschaften zwischen den Ereignissen  $S$ : „Schwangerschaft“ und  $W$ : „Geschlecht weiblich“ vor.
- $P(W) \approx 0,51$  (ganze deutsche Bevölkerung, nicht nur Geburtsgeschlecht)
- $P(W|S) = 1$

### Beispiel: Rot-Grün-Sehschwäche

- **Starke Abhängigkeit** besteht aus genetischen Gründen zwischen den Ereignissen  $R$ : „Rot-Grün-Sehschwäche“ und  $M$ : „Geschlecht männlich“
- $P(M) \approx 0,49$
- $P(M|R) = 0,9$

### Beispiel: Wetter

- Dass Ereignis  $A$ : „es regnet in Halle“ ist zumindest stochastisch vollkommen unabhängig vom Ereignis  $B$ : „es regnet in <sehr weit entfernter Ort>“.

## Bemerkungen:

- Ob zwei Ereignisse abhängig oder unabhängig sind, lässt sich oft nur statistisch entscheiden. Ausnahmen sind aufs Engste verknüpfte Ereignisse oder Ereignisse, die sich quasi überhaupt nicht beeinflussen.

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Satz 5 (Unabhängigkeit von Gegenereignissen)

Sind die Ereignisse  $A$  und  $B$  unabhängig im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$ , so auch die Ereignisse  $\bar{A}$  und  $B$ ,  $A$  und  $\bar{B}$  sowie  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ .

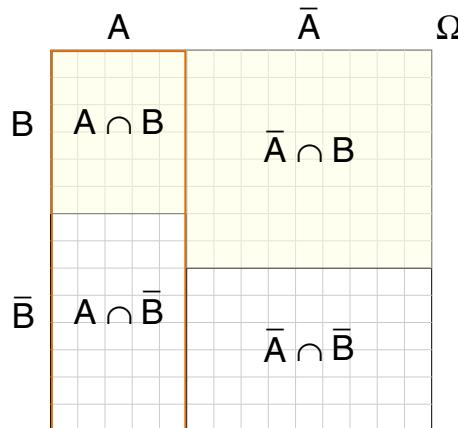
# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Satz 5 (Unabhängigkeit von Gegenereignissen)

Sind die Ereignisse  $A$  und  $B$  unabhängig im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$ , so auch die Ereignisse  $\bar{A}$  und  $B$ ,  $A$  und  $\bar{B}$  sowie  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ .

Herleitung:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) && \text{da } B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \cdot P(B) && \text{da } A \text{ und } B \text{ unabhängig} \\ &= P(B) \cdot (1 - P(A)) && \text{Ausklammern} \\ &= P(B) \cdot P(\bar{A}) && \text{Gegenwahrscheinlichkeit} \end{aligned}$$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

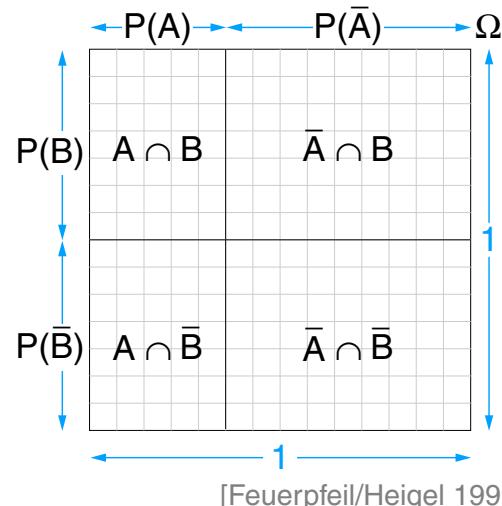
# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## Unabhängigkeit von Gegenereignissen

- Wegen Satz 5 ist die Vierfeldertafel dieser vier Ereigniskombinationen bei Unabhängigkeit von  $A$  und  $B$  eine **Multiplikationstabelle**:

	$A$	$\bar{A}$	$\sum$
$B$	$P(A) \cdot P(B)$	$P(\bar{A}) \cdot P(B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{B})$
$\sum$	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

- Venn-Diagramm zur Prüfung der Gültigkeit der Multiplikationsregeln:



# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit

- Vereinbarkeit und Unvereinbarkeit sind Eigenschaften von Ereignissen.  
Bestimmung über Mengenvergleich.
- Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen sind Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega; P)$ .  
Mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  ändern sich oft auch zuvor bestehende (Un-)Abhängigkeiten.
- Wie hängen (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit zusammen?

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit

- Vereinbarkeit und Unvereinbarkeit sind Eigenschaften von Ereignissen.  
Bestimmung über Mengenvergleich.
- Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen sind Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega; P)$ .  
Mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  ändern sich oft auch zuvor bestehende (Un-)Abhängigkeiten.
- Wie hängen (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit zusammen?
- Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse mit  $0 < P(A) < 1$  und  $0 < P(B) < 1$ .
- Wenn  $A$  und  $B$  unvereinbar sind, dann besteht eine extreme Abhängigkeit:  
Das Eintreten eines Ereignisses schließt das eintreten des anderen aus.

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) .$$

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit

- Vereinbarkeit und Unvereinbarkeit sind Eigenschaften von Ereignissen.  
Bestimmung über Mengenvergleich.
- Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen sind Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega; P)$ .  
Mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  ändern sich oft auch zuvor bestehende (Un-)Abhängigkeiten.
- Wie hängen (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit zusammen?
- Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse mit  $0 < P(A) < 1$  und  $0 < P(B) < 1$ .
- Wenn  $A$  und  $B$  unvereinbar sind, dann besteht eine extreme Abhängigkeit:  
Das Eintreten eines Ereignisses schließt das eintreten des anderen aus.

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) .$$

- Wenn  $A$  und  $B$  total vereinbar sind, dann besteht eine extreme Abhängigkeit:  
Das Eintreten von z.B.  $A$  zieht das Eintreten von  $B$  nach sich.

$$A \cap B = A \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \neq P(A) \cdot P(B) .$$

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit

- Vereinbarkeit und Unvereinbarkeit sind Eigenschaften von Ereignissen.  
Bestimmung über Mengenvergleich.
- Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Ereignissen sind Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega; P)$ .  
Mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  ändern sich oft auch zuvor bestehende (Un-)Abhängigkeiten.
- Wie hängen (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit zusammen?
- Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse mit  $0 < P(A) < 1$  und  $0 < P(B) < 1$ .
- Wenn  $A$  und  $B$  unvereinbar sind, dann besteht eine extreme Abhängigkeit:  
Das Eintreten eines Ereignisses schließt das eintreten des anderen aus.

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) .$$

- Wenn  $A$  und  $B$  total vereinbar sind, dann besteht eine extreme Abhängigkeit:  
Das Eintreten von z.B.  $A$  zieht das Eintreten von  $B$  nach sich.

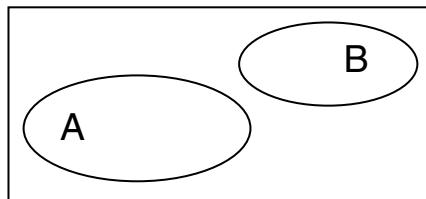
$$A \cap B = A \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \neq P(A) \cdot P(B) .$$

- Wenn  $A$  und  $B$  partiell vereinbar sind, können sie auch unabhängig sein.

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit

$$A \cap B = \emptyset$$

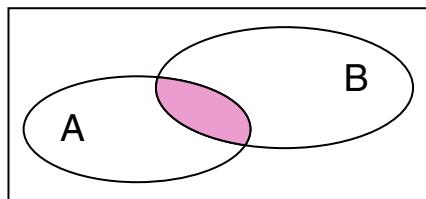
 $\Omega$ 

Unvereinbarkeit

extreme Abhängigkeit

$$P(A \cap B) = 0$$

$$\emptyset \subset A \cap B \subset A$$

 $\Omega$ 

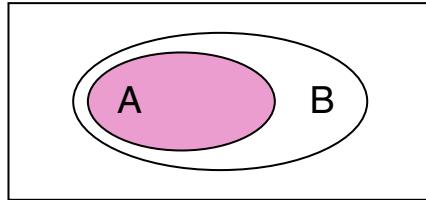
Vereinbarkeit  
(partiell)

mogliche Unabhängigkeit  
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

sonst Abhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$A \cap B = A$$

 $\Omega$ 

Vereinbarkeit  
(total)

extreme Abhängigkeit

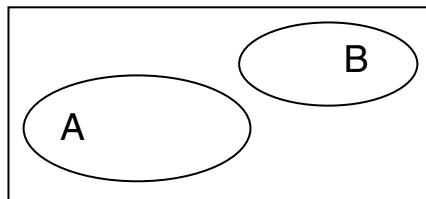
$$P(A \cap B) = P(A)$$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse

## (Un-)Vereinbarkeit und (Un-)Abhängigkeit

$$A \cap B = \emptyset$$



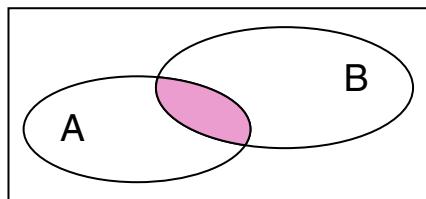
$$\Omega$$

Unvereinbarkeit

extreme Abhängigkeit

$$P(A \cap B) = 0$$

$$\emptyset \subset A \cap B \subset A$$



$$\Omega$$

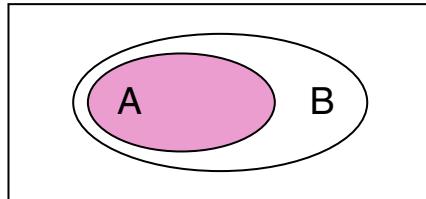
Vereinbarkeit  
(partiell)

mögliche Unabhängigkeit  
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

sonst Abhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$A \cap B = A$$



$$\Omega$$

Vereinbarkeit  
(total)

extreme Abhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A)$$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Sind  $A$  und  $B$  unvereinbar, so sind sie (extrem) abhängig.
- Sind  $A$  und  $B$  vereinbar, so können sie abhängig oder unabhängig sein.
- Sind  $A$  und  $B$  unabhängig, so sind sie vereinbar.
- Sind  $A$  und  $B$  abhängig, so können sie vereinbar oder unvereinbar sind.

## Bemerkungen:

- Ein besonderer Fall von Unabhängigkeit besteht zwischen Ereignis  $A$  und dem unmöglichen Ereignis  $\emptyset$ , das nie eintritt.
- Dasselbe gilt für ein Ereignis  $A$  und dem sicheren Ereignis  $\Omega$ , das unbeeinflusst von  $A$  oder  $\bar{A}$  immer eintritt.

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Paradoxon von Bernstein

- Experiment: Zweimaliger Wurf einer fairen Münze.
- Ereignisse:  $A = \text{„Kopf im ersten Wurf“} = \{\text{KK; kz}\}$   
 $B = \text{„Kopf im zweiten Wurf“} = \{\text{KK; zk}\}$   
 $C = \text{„genau einmal Kopf“} = \{\text{zk; kz}\}$
- $A$  und  $B$  sind offensichtlich unabhängig.
- $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $C$  scheinen nicht unabhängig zu sein; es gilt jedoch  
$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C) \quad \text{und} \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C) .$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Paradoxon von Bernstein

- Experiment: Zweimaliger Wurf einer fairen Münze.
- Ereignisse:  $A = \text{„Kopf im ersten Wurf“} = \{\text{KK; kz}\}$   
 $B = \text{„Kopf im zweiten Wurf“} = \{\text{KK; zk}\}$   
 $C = \text{„genau einmal Kopf“} = \{\text{zk; kz}\}$
- $A$  und  $B$  sind offensichtlich unabhängig.
- $A$  und  $C$  bzw.  $B$  und  $C$  scheinen nicht unabhängig zu sein; es gilt jedoch
$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C) \quad \text{und} \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C) .$$
- Sind zwei Ereignisse eingetreten, kann das dritte nicht auch eintreten; z.B. gilt  $A$  und  $(B \cap C)$ ,  $B$  und  $(A \cap C)$  sowie  $C$  und  $(A \cap B)$  sind jeweils unvereinbar.
$$P(A \cap (B \cap C)) = P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) .$$
- Paradox: Paarweise Unabhängigkeit dreier Ereignisse ist nicht hinreichend für völlige Unabhängigkeit aller Paare von Ereigniskombinationen.
- Auflösung: Mehr als zwei Ereignisse haben oft Abhängigkeiten. [St epniak 2009]

## Bemerkungen:

- Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von drei paarweise unabhängigen Ereignissen  $A$ ,  $B$  und  $C$  berechnete man früher intuitiv nach der Formel  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ .
- Erst Sergej Natanowitsch Bernstein (1880–1968, russischer Mathematiker) kam 1946 darauf, dass bei nur paarweiser Unabhängigkeit  $P(A \cap B \cap C) = 0$  sein kann, auch wenn die  $P(A)$ ,  $P(B)$  und  $P(C)$  von Null verschieden sind: das für die Definition der Unabhängigkeit von drei Ereignissen wichtige *Paradoxon von Bernstein*.



# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Definition

- Es liegt nahe, drei Ereignisse erst dann als vollständig unabhängig zu bezeichnen, wenn

$$P(A \cap (B \cap C)) = P(A) \cdot P(B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap (A \cap C)) = P(B) \cdot P(A \cap C) = P(B) \cdot P(A) \cdot P(C)$$

$$P(C \cap (A \cap B)) = P(C) \cdot P(A \cap B) = P(C) \cdot P(A) \cdot P(B)$$

- Zusammengefasst folgt  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ . Diese Multiplikationsregel schließt jedoch nicht auch paarweise Unabhängigkeit mit ein (siehe Übungsaufgabe).
- Es bedarf der Anpassung der Definition des Unabhangigkeitsbegriffs.

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Definition 6 (Unabhängigkeit von drei Ereignissen)

Drei Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  heißen **stochastisch unabhängig** im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$ , wenn folgende **spezielle Multiplikationsregeln** gelten:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Sonst heißen sie **stochastisch abhängig**.

## Bemerkungen:

- Interessant ist die Analogie zwischen der Multiplikationsregel für zwei *unabhängige* Ereignisse und der Additionsregel für zwei *unvereinbare* Ereignisse:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B), \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$

Sind drei Ereignisse paarweise unvereinbar, besteht die Additionsregel fort. Sind sie dagegen paarweise unabhängig, muss die Multiplikationsregel nicht notwendigerweise gelten.

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Satz 7 (Unabhängigkeit von Gegenereignissen)

Sind die Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  unabhängig im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$ , so gilt dies auch für  $A, B, \bar{C}$ , für  $A, \bar{B}, C$ , für  $\bar{A}, B, C$ , für  $A, \bar{B}, \bar{C}$ , für  $\bar{A}, B, \bar{C}$ , für  $\bar{A}, \bar{B}, C$  und für  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ .

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Satz 7 (Unabhängigkeit von Gegenereignissen)

Sind die Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  unabhängig im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$ , so gilt dies auch für  $A, B, \bar{C}$ , für  $A, \bar{B}, C$ , für  $\bar{A}, B, C$ , für  $A, \bar{B}, \bar{C}$ , für  $\bar{A}, B, \bar{C}$ , für  $\bar{A}, \bar{B}, C$  und für  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ .

Herleitung:

$$A \cap B = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C})$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap \bar{C}) &= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot (1 - P(C)) \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) \end{aligned}$$

		A	$\bar{A}$	$\Omega$
		$A \cap B \cap \bar{C}$	$A \cap B \cap C$	
B	$\bar{B}$			
	C			
		$\bar{C}$	C	$\bar{C}$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Unabhängigkeit von Gegenereignissen

- Wegen Satz 7 ist die Achtfeldertafel dieser acht Ereigniskombinationen bei Unabhängigkeit von  $A$ ,  $B$  und  $C$  eine **Multiplikationstabelle**:

	$A$	$\bar{A}$	
$B$	$P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C})$	$P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C})$	$\bar{C}$
	$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$	$P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)$	$C$
$\bar{B}$	$P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C)$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C)$	
	$P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C})$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C})$	$\bar{C}$

- Wenn  $A$ ,  $B$  und  $C$  unabhängig sind, dann insbesondere auch  $A$  und  $(B \cap C)$ .
- Des Weiteren folgt auch, dass  $A$  und  $(B \cup C)$  unabhängig sind.  
Die Definition muss nicht ergänzt werden (siehe Übungsaufgabe).

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Verallgemeinerung auf viele Ereignisse

## Definition 8 (Stochastische Abhängigkeit)

Die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_m$  ( $m \geq 2$ ) heißen **stochastisch unabhängig** im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$ , wenn für jede Auswahl von mindestens zwei verschiedenen Ereignissen die spezielle Multiplikationsregel gilt. Sonst heißen sie **stochastisch abhängig**.

## Satz 9 (Unabhängigkeit von Gegenereignissen)

Sind  $m$  Ereignisse im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$  unabhängig und ersetzt man eine beliebige Anzahl von ihnen durch ihre Gegenereignisse, so sind auch die so erhaltenen  $m$  Ereignisse unabhängig.

## Bemerkungen:

- Die Anzahl der Bedingungsgleichungen zur Ermittlung stochastischer Unabhängigkeit ist die Anzahl aller mindestens zweielementigen Teilmengen aus der  $m$ -Menge  $\{1; 2; \dots; m\}$  der Indizes. Da die  $m$ -Menge genau  $2^m$  Teilmengen besitzt und die leere und die einelementigen Teilmengen fehlen also  $2^m - m - 1$ .
- Die Unabhängigkeit von Ereignissen ist derjenige Begriff, welcher der Wahrscheinlichkeitstheorie für den Geschmack von manchen ein gewisses „eigenartiges“ Gepräge gibt. Mit Hilfe des Unabhängigkeitsbegriffs können allerdings interessante Probleme gelöst werden.

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Beispiel: Tennisparadoxon

- Ein Junge spielt Tennis gegen seine Eltern, wobei sich die Eltern abwechseln.
- Für zwei Siege nacheinander wurde ihm eine Belohnung versprochen.
- Der Junge weiß, dass die Mutter besser als der Vater spielt.
- Welche Gegnerfolge maximiert seine Gewinnchancen:  
Vater-Mutter-Vater oder Mutter-Vater-Mutter?

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Beispiel: Tennisparadoxon

- Ein Junge spielt Tennis gegen seine Eltern, wobei sich die Eltern abwechseln.
- Für zwei Siege nacheinander wurde ihm eine Belohnung versprochen.
- Der Junge weiß, dass die Mutter besser als der Vater spielt.
- Welche Gegnerfolge maximiert seine Gewinnchancen:  
Vater-Mutter-Vater oder Mutter-Vater-Mutter?

- Für Ereignisse  $V_i$ : „Sieg gegen Vater im  $i$ -ten Spiel“ und  $M_j$ : „Sieg gegen Mutter im  $j$ -ten Spiel“ für  $i; j \in [1; 2; 3]$  sei  $P(V_i) = r$  und  $P(M_j) = s$ .
- Seien  $G_1$  und  $G_2$  zusammengesetzte Ereignisse, die zwei Siege nacheinander bei den jeweiligen Reihenfolgen repräsentieren:

$$G_1 = (V_1 \cap M_2) \cup (\bar{V}_1 \cap M_2 \cap V_3) \quad \text{bzw.} \quad G_2 = (M_1 \cap V_2) \cup (\bar{M}_1 \cap V_2 \cap M_3)$$

- Ereignisse  $V_i$  und  $M_j$  sind gegenseitig unabhängig; die geklammerten Teilereignisse von  $G_1$  und  $G_2$  sind jeweils unvereinbar.

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Beispiel: Tennisparadoxon

- Daraus folgt:

$$P(G_1) = r \cdot s + (1 - r) \cdot s \cdot r = rs(2 - r)$$

$$P(G_2) = s \cdot r + (1 - s) \cdot r \cdot s = rs(2 - s)$$

- Da die Mutter besser spielt als der Vater, ist  $s < r$  anzunehmen.  
Es ist wahrscheinlicher gegen den Vater als gegen die Mutter zu gewinnen.
- $P(G_2) > P(G_1)$ : Es ist besser, zweimal gegen die Mutter zu spielen.
- Paradox: Intuitiv würden viele Vater-Mutter-Vater wählen.
- Auflösung: Da das mittlere Spiel entscheidend ist, macht es Sinn, hier dem einfacheren Gegner zu begegnen.

## Bemerkungen:

- Das Tennis-Paradoxon, das sich im Prinzip auf alle Zwei-Personen-Spiele übertragen lässt, wurde von Leo Moser (1921–1970, österreichisch-kanadischer Mathematiker) vorgestellt.



# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Platinen mit elektronischen Bauteilen

- Unabhängige Fehlerereignisse beim Bestücken von Platinen:  
Es besteht kein sachlogischer Zusammenhang für eine Abhängigkeit.
  - Bauteilfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,10\%$  je Bauteil bei  $n_1 = 100$  Bauteilen
  - Bestückungsfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_2 = 0,01\%$  je Bauteil bei  $n_2 = 100$  Bauteilen
  - Lötstellenfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_3 = 0,03\%$  je Lötstelle bei  $n_3 = 300$  Lötstellen

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Platinen mit elektronischen Bauteilen

- Unabhängige Fehlerereignisse beim Bestücken von Platinen:  
Es besteht kein sachlogischer Zusammenhang für eine Abhängigkeit.
  - Bauteilfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,10\%$  je Bauteil bei  $n_1 = 100$  Bauteilen
  - Bestückungsfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_2 = 0,01\%$  je Bauteil bei  $n_2 = 100$  Bauteilen
  - Lötstellenfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_3 = 0,03\%$  je Lötstelle bei  $n_3 = 300$  Lötstellen

1. Wie wahrscheinlich ist eine Platine fehlerfrei?

$$P(\text{„Platine fehlerfrei“}) = (1 - 0,001)^{100} \cdot (1 - 0,0001)^{100} \cdot (1 - 0,0003)^{300} \approx 0,82$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Platinen mit elektronischen Bauteilen

□ Unabhängige Fehlerereignisse beim Bestücken von Platinen:

Es besteht kein sachlogischer Zusammenhang für eine Abhängigkeit.

- Bauteilfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,10\%$  je Bauteil bei  $n_1 = 100$  Bauteilen
- Bestückungsfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_2 = 0,01\%$  je Bauteil bei  $n_2 = 100$  Bauteilen
- Lötstellenfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_3 = 0,03\%$  je Lötstelle bei  $n_3 = 300$  Lötstellen

1. Wie wahrscheinlich ist eine Platine fehlerfrei?

$$P(\text{„Platine fehlerfrei“}) = (1 - 0,001)^{100} \cdot (1 - 0,0001)^{100} \cdot (1 - 0,0003)^{300} \approx 0,82$$

2. Wie wahrscheinlich tritt ein Bauteil- oder Bestückungsfehler auf?

$$\begin{aligned} P(\text{„Bauteil- oder Bestückungsfehler“}) &= 1 - P(\text{„kein Bauteil- oder Bestückungsfehler“}) \\ &= 1 - (1 - 0,001)^{100} \cdot (1 - 0,0001)^{100} \approx 0,1 \end{aligned}$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Platinen mit elektronischen Bauteilen

□ Unabhängige Fehlerereignisse beim Bestücken von Platinen:

Es besteht kein sachlogischer Zusammenhang für eine Abhängigkeit.

- Bauteilfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,10\%$  je Bauteil bei  $n_1 = 100$  Bauteilen
- Bestückungsfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_2 = 0,01\%$  je Bauteil bei  $n_2 = 100$  Bauteilen
- Lötstellenfehler: Wahrscheinlichkeit  $p_3 = 0,03\%$  je Lötstelle bei  $n_3 = 300$  Lötstellen

1. Wie wahrscheinlich ist eine Platine fehlerfrei?

$$P(\text{„Platine fehlerfrei“}) = (1 - 0,001)^{100} \cdot (1 - 0,0001)^{100} \cdot (1 - 0,0003)^{300} \approx 0,82$$

2. Wie wahrscheinlich tritt ein Bauteil- oder Bestückungsfehler auf?

$$\begin{aligned} P(\text{„Bauteil- oder Bestückungsfehler“}) &= 1 - P(\text{„kein Bauteil- oder Bestückungsfehler“}) \\ &= 1 - (1 - 0,001)^{100} \cdot (1 - 0,0001)^{100} \approx 0,1 \end{aligned}$$

3. Genügt die Verbesserung der Bestückungsqualität, um 95% fehlerfreie Platinen zu produzieren (maximale Bestückungsqualität:  $p_2 = 0$ )?

$$P(\text{„Platine fehlerfrei“}) = (1 - 0,001)^{100} \cdot (1 - 0,0003)^{300} \approx 0,83$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Beispiel: Zwillingsgeburten

- Es gab 13.368 Zwillingsgeburten in 2015: [Statistisches Bundesamt [1](#) [2](#)]
  - 2 Jungen:  $|MM| = 4.262 \rightarrow P(MM) = 0,319$
  - 1 Junge, 1 Mädchen:  $|MW| = 4.868 \rightarrow P(MW) = 0,364$
  - 2 Mchen:  $|WW| = 4.238 \rightarrow P(WW) = 0,317$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

## Beispiel: Zwillingsgeburten

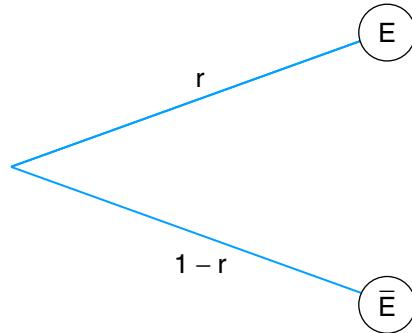
- Es gab 13.368 Zwillingsgeburten in 2015: [Statistisches Bundesamt [1](#) [2](#)]
  - 2 Jungen:  $|MM| = 4.262 \rightarrow P(MM) = 0,319$
  - 1 Junge, 1 Mädchen:  $|MW| = 4.868 \rightarrow P(MW) = 0,364$
  - 2 Mädchen:  $|WW| = 4.238 \rightarrow P(WW) = 0,317$
- Zwillinge können eineiig oder zweieiig sein: Ereignisse  $E$  und  $\bar{E}$ .
- Nur zweieiige Zwillinge können unterschiedlichen Geschlechts sein.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit  $P(E)$  einer eineiigen Zwillingsgeburt?
- Was ist die Wahrscheinlichkeit  $P(M)$ , das ein Zwilling Junge ist?
- Annahmen:
  - Das Geschlechtsverhältnis bei beiden Zwillingsstypen ist gleich.
  - Die Ausbildung der Geschlechter zweieiiger Zwillinge erfolgt unabhängig.

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)



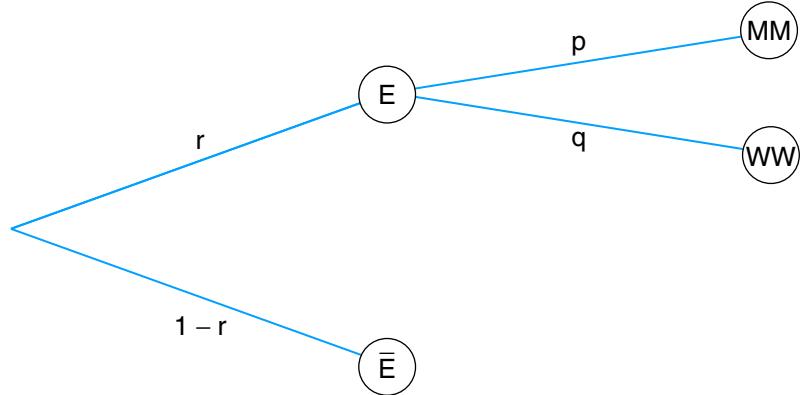
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$



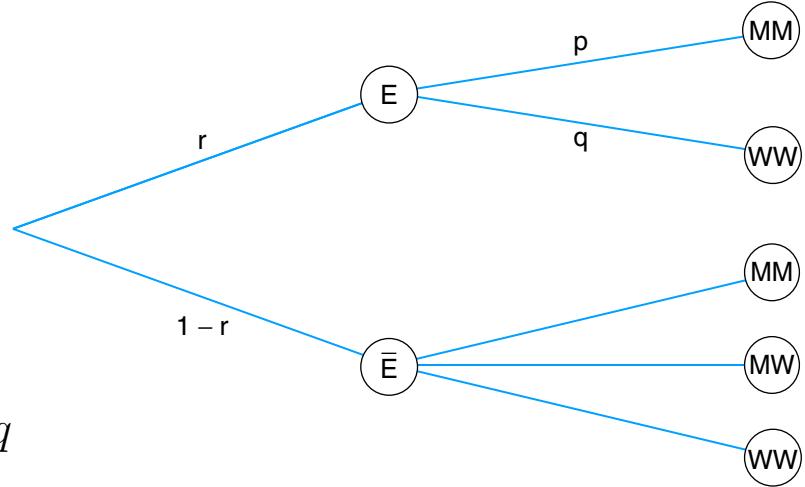
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$



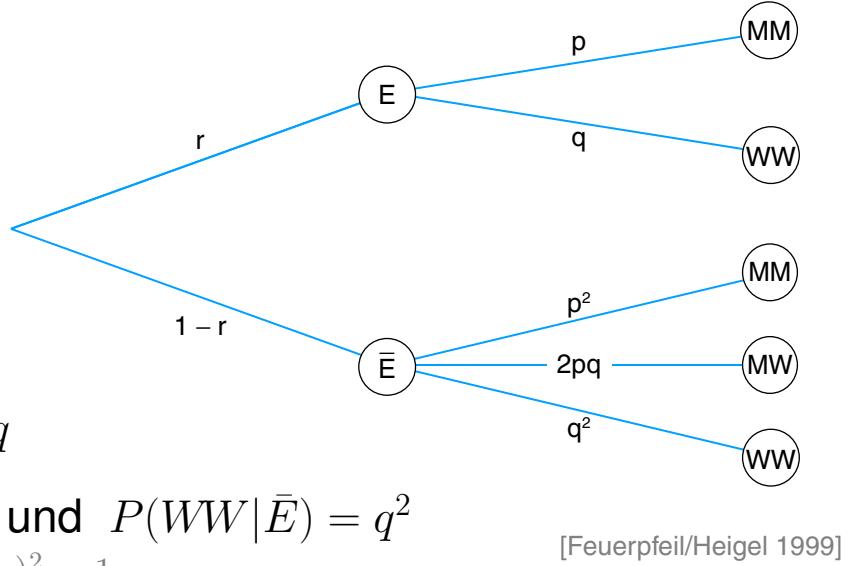
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$
- $P(MM|\bar{E}) = p^2$ ,  $P(MW|\bar{E}) = 2pq$  und  $P(WW|\bar{E}) = q^2$   
Verzweigungsregel:  $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1$



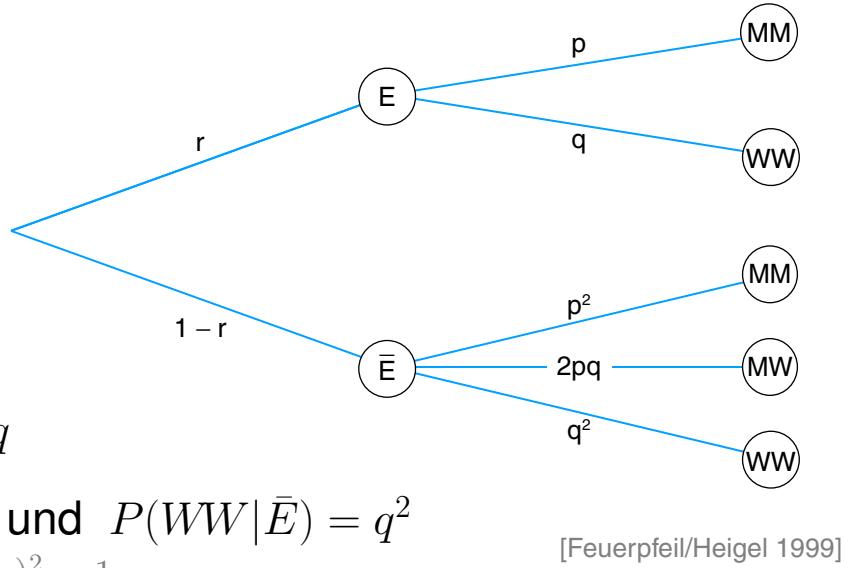
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$
- $P(MM|\bar{E}) = p^2$ ,  $P(MW|\bar{E}) = 2pq$  und  $P(WW|\bar{E}) = q^2$   
Verzweigungsregel:  $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Daraus folgt:

$$P(MM) = rp + (1 - r)p^2$$

$$P(MW) = (1 - r)2pq$$

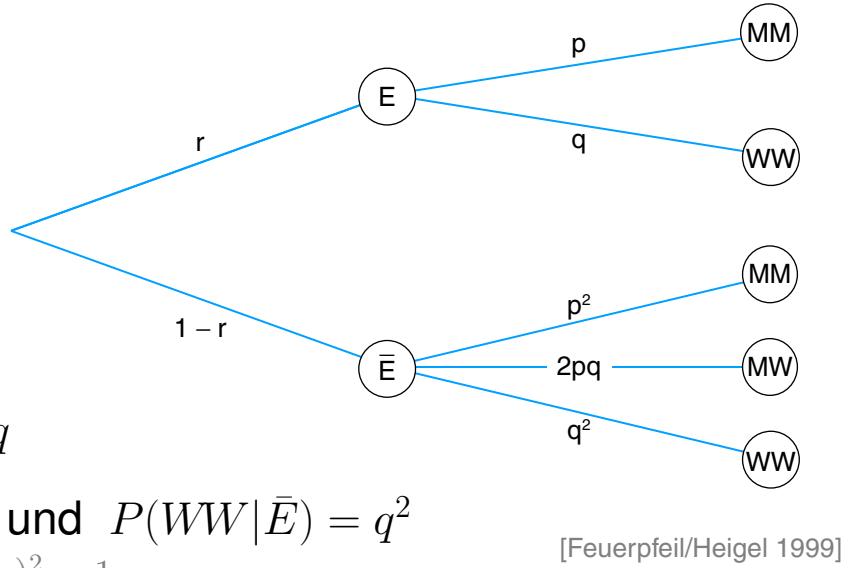
$$P(WW) = rq + (1 - r)q^2$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$
- $P(MM|\bar{E}) = p^2$ ,  $P(MW|\bar{E}) = 2pq$  und  $P(WW|\bar{E}) = q^2$   
Verzweigungsregel:  $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Daraus folgt:

$$P(MM) = rp + (1 - r)p^2$$

$$P(MW) = (1 - r)2pq \quad \leadsto \quad r = 1 - \frac{P(MW)}{2p(1 - p)}$$

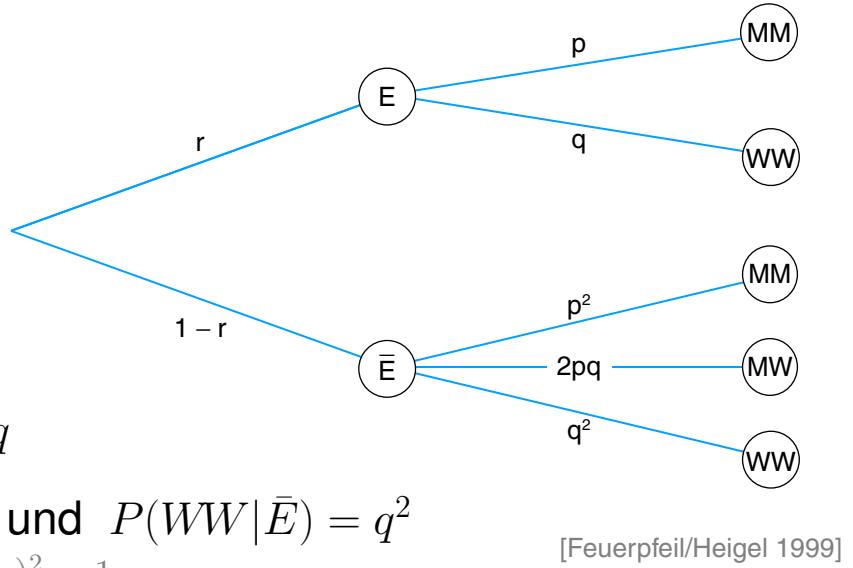
$$P(WW) = rq + (1 - r)q^2$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$
- $P(MM|\bar{E}) = p^2$ ,  $P(MW|\bar{E}) = 2pq$  und  $P(WW|\bar{E}) = q^2$   
Verzweigungsregel:  $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Daraus folgt:

$$P(MM) = rp + (1 - r)p^2 \quad \rightsquigarrow \quad p = P(MM) + \frac{P(MW)}{2}$$

$$P(MW) = (1 - r)2pq \quad \rightsquigarrow \quad r = 1 - \frac{P(MW)}{2p(1 - p)}$$

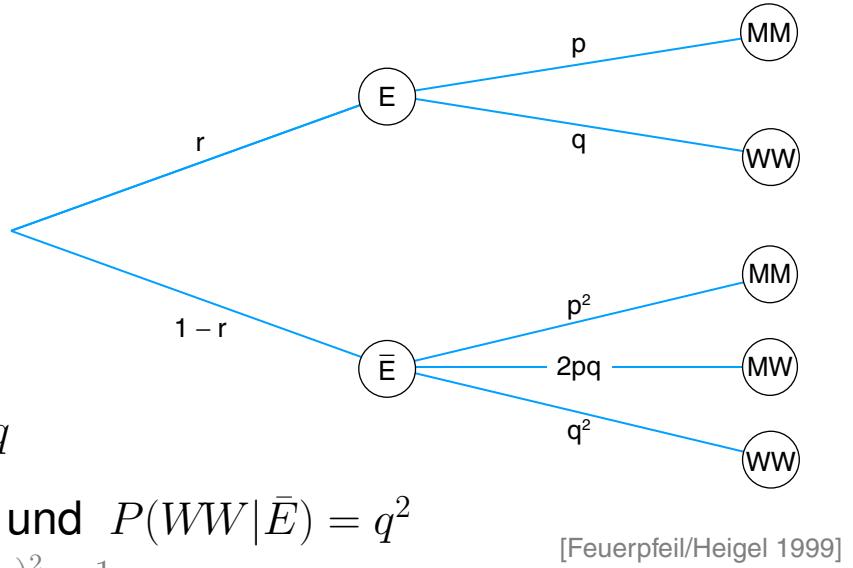
$$P(WW) = rq + (1 - r)q^2$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$
- $P(MM|\bar{E}) = p^2$ ,  $P(MW|\bar{E}) = 2pq$  und  $P(WW|\bar{E}) = q^2$   
Verzweigungsregel:  $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Daraus folgt:

$$P(MM) = rp + (1-r)p^2 \quad \rightsquigarrow \quad p = P(MM) + \frac{P(MW)}{2}$$

$$P(MW) = (1-r)2pq \quad \rightsquigarrow \quad r = 1 - \frac{P(MW)}{2p(1-p)}$$

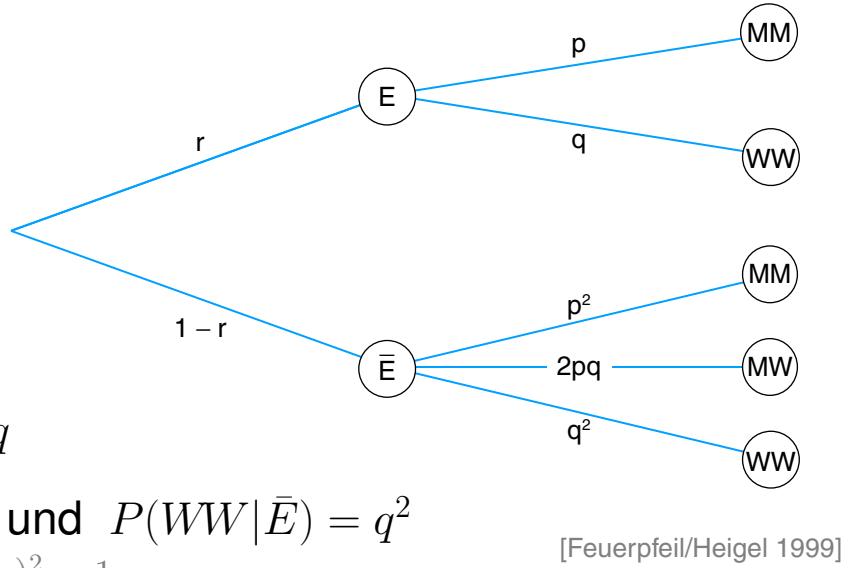
$$P(WW) = rq + (1-r)q^2 \quad \rightsquigarrow \quad 1 = P(MM) + P(MW) + P(WW)$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$
- $P(MM|\bar{E}) = p^2$ ,  $P(MW|\bar{E}) = 2pq$  und  $P(WW|\bar{E}) = q^2$   
Verzweigungsregel:  $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Daraus folgt:

$$P(MM) = rp + (1-r)p^2 \quad \rightsquigarrow \quad p = P(MM) + \frac{P(MW)}{2}$$

$$P(MW) = (1-r)2pq \quad \rightsquigarrow \quad r = 1 - \frac{P(MW)}{2p(1-p)}$$

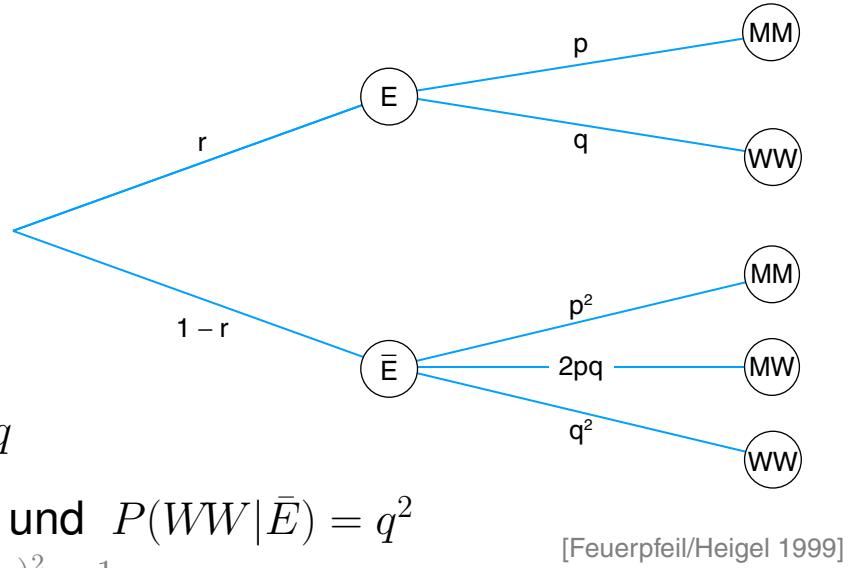
$$P(WW) = rq + (1-r)q^2 \quad \rightsquigarrow \quad 1 = P(MM) + P(MW) + P(WW) \Leftrightarrow 1 = 1$$

# Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

Beispiel: Zwillingsgeburten

Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:

- $r = P(E)$  (eineiige Zwillinge)
- $p = P(M)$  (ein Zwilling Junge)
- $q = 1 - p$  (ein Zwilling Mädchen)
- $P(MM|E) = p$  und  $P(WW|E) = q$
- $P(MM|\bar{E}) = p^2$ ,  $P(MW|\bar{E}) = 2pq$  und  $P(WW|\bar{E}) = q^2$   
Verzweigungsregel:  $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Daraus folgt:

$$P(MM) = rp + (1 - r)p^2 \quad \rightsquigarrow \quad p = P(MM) + \frac{P(MW)}{2} \approx 0,501$$

$$P(MW) = (1 - r)2pq \quad \rightsquigarrow \quad r = 1 - \frac{P(MW)}{2p(1 - p)} \approx 0,272$$

$$P(WW) = rq + (1 - r)q^2 \quad \rightsquigarrow \quad 1 = P(MM) + P(MW) + P(WW) \Leftrightarrow 1 = 1$$

## Bemerkungen:

- Die Verteilung der Geburtenraten eineiiger zu zweieiigen Zwillingen verändert sich signifikant nach Jahr und Region zwischen 1:4 bis 1:1. Die Geburtenrate eineiiger Zwillinge erweist sich über die Jahre und Regionen als nahezu konstant. In den reichen Ländern nehmen zweieiige Mehrlingsgeburten in den letzten Jahren zu. Wichtigste Ursache der Zunahme liegen im steigenden Lebensalter der Gebärenden und den Fertilitätsbehandlungen. [[Wikipedia](#)]
- In der amtlichen Statistik wird zwar nicht erfasst, ob es sich bei der Geburt von Zwillingen um eineiige oder zweieiige Neugeborene handelt, allerdings können deren Anteile berechnet werden. Nach den Mendelschen Vererbungsregeln müsste nämlich dann, wenn es nur zweieiige Zwillinge gäbe, die Hälfte der Zwillinge auf sogenannte Pärchenzwillinge, also ein Mädchen und ein Junge, entfallen. Tatsächlich ist aber der Anteil der Pärchenzwillinge wegen der eineiigen Zwillinge, bei denen beide Kinder immer das gleiche Geschlecht aufweisen, kleiner. Weil bei zweieiigen Zwillingen die Hälfte der Zwillinge auf Pärchenzwillinge entfällt, ergibt deshalb der doppelte Anteil der Pärchenzwillinge den Gesamtanteil der zweieiigen Zwillinge. [[Brachat-Schwarz 2021](#)]