

# Kapitel PTS:II

## II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisse
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

# Ereignisräume

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum  $\Omega$

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit → Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette



0			PAIR	IMPAIR	MANGUE		
1	2	3					
4	5	6					
7	8	9					
10	11	12					
13	14	15					
16	17	18					
19	20	21					
22	23	24					
25	26	27					
28	29	30					
31	32	33					
34	35	36					
12 <sup>P</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>D</sup>					
12 <sup>D</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>P</sup>					

# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette



Verallgemeinert:

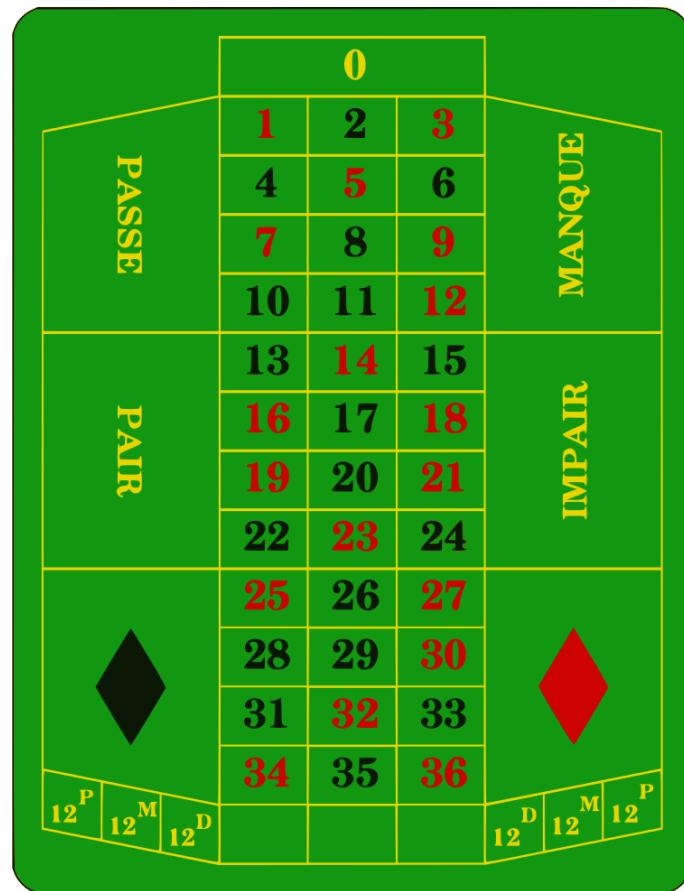
- Aufbau: Urne mit 37 nummerierten Kugeln.
- Experiment: Ziehung einer Kugel.
- Ergebnisraum:  $\Omega = \{0; 1; \dots; 36\}$
- Glücksspiel: Wette über das Ergebnis.

PASSE			0	MANQUE		
	1	2	3			
	4	5	6			
	7	8	9			
	10	11	12			
PAIR	13	14	15			
	16	17	18			
	19	20	21			
	22	23	24			
	25	26	27			
	28	29	30			
	31	32	33			
	34	35	36			
12 <sup>P</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>D</sup>				12 <sup>D</sup> 12 <sup>M</sup> 12 <sup>P</sup>

# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

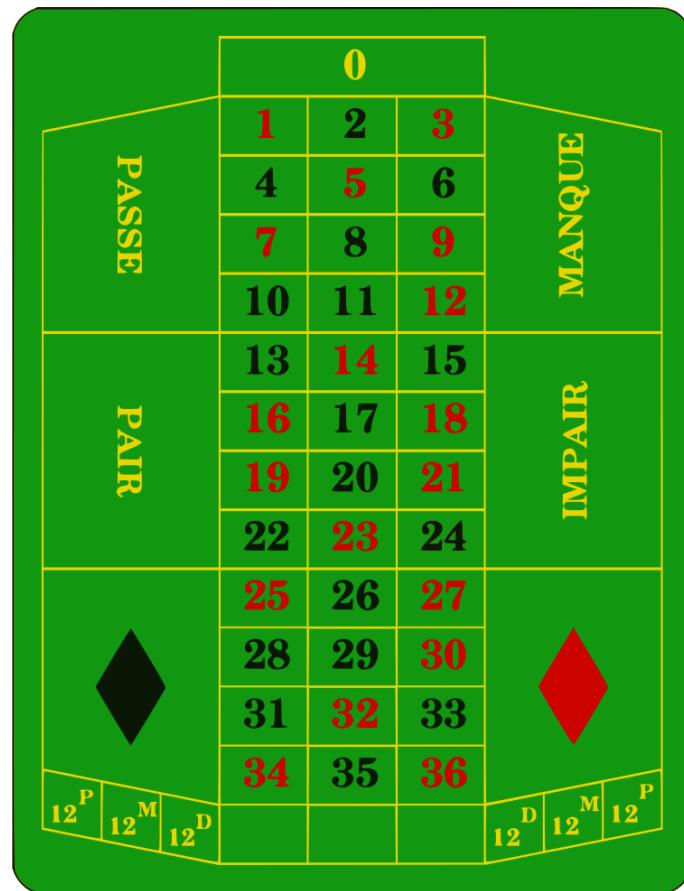
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$



# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

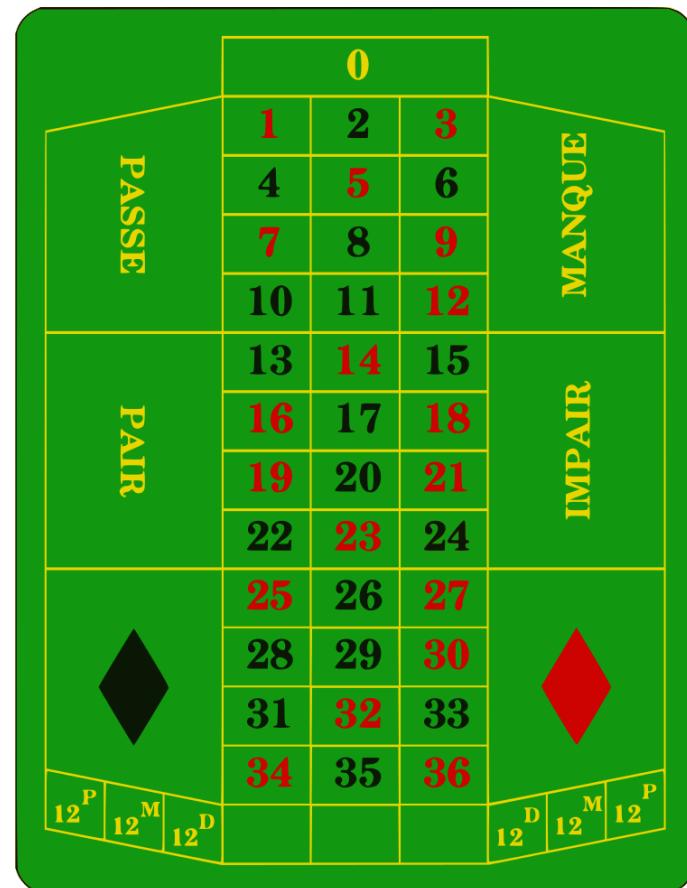
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plain	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$



# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

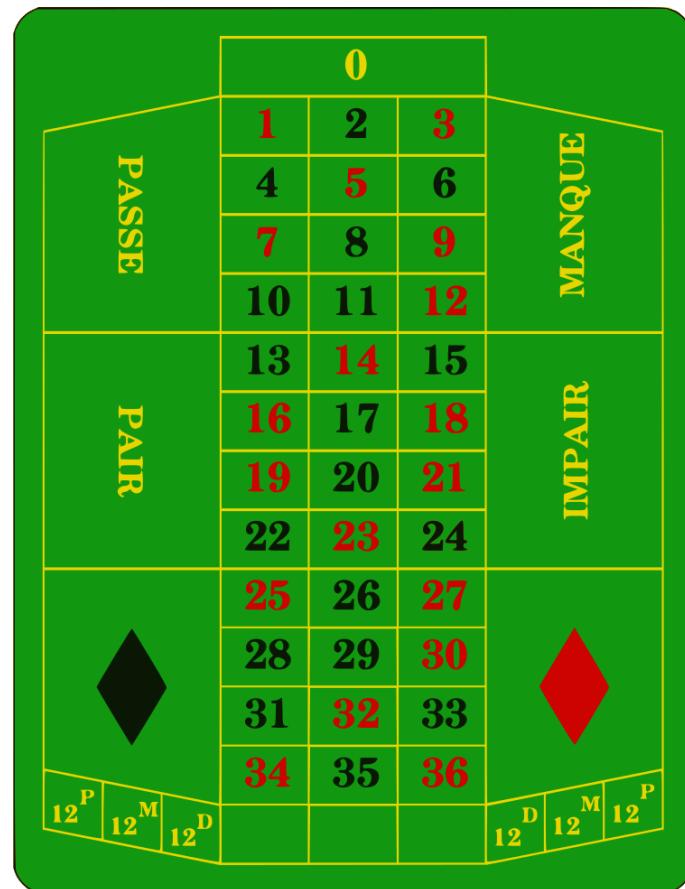
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plain	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \dots; 18\}$	$\times 6$



# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

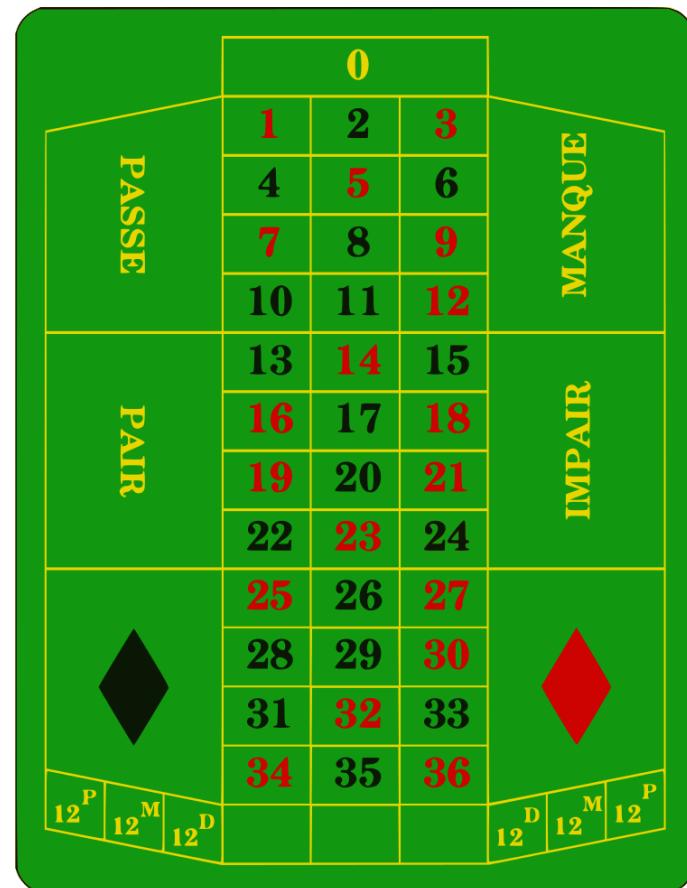
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plain	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \dots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \dots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \dots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \dots; 36\}$	$\times 3$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \dots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \dots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \dots; 36\}$	$\times 3$



# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

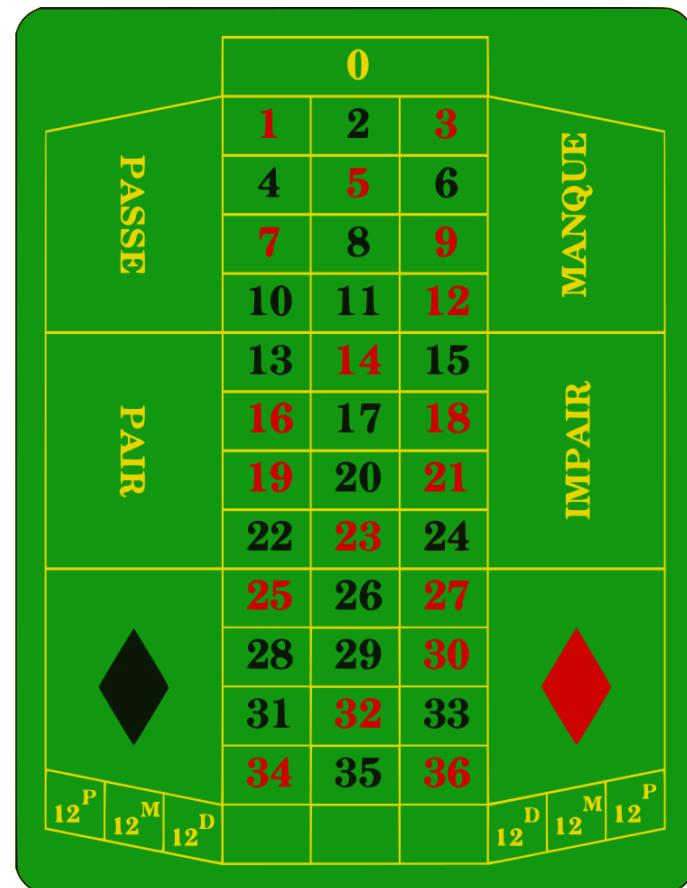
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plain	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \dots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \dots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \dots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \dots; 36\}$	$\times 3$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \dots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \dots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \dots; 36\}$	$\times 3$
pair	gerade	$\{2; 4; \dots; 36\}$	$\times 2$
impair	ungerade	$\{1; 3; \dots; 35\}$	$\times 2$
rouge	rote	$\{1; 3; \dots; 36\}$	$\times 2$
noir	schwarze	$\{2; 4; \dots; 35\}$	$\times 2$
manque	erste Hälfte	$\{1; \dots; 18\}$	$\times 2$
passe	zweite Hälfte	$\{19; \dots; 36\}$	$\times 2$



# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plain	eine Zahl	$\{1\} \subset \Omega$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \dots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \dots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \dots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \dots; 36\}$	$\times 3$
- double	zwei Dutzend	$\{1; \dots; 24\}$	$\times 1,5$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \dots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \dots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \dots; 36\}$	$\times 3$
- double	zwei Reihen	$\{1; 2; 4; \dots; 35\}$	$\times 1,5$
pair	gerade	$\{2; 4; \dots; 36\}$	$\times 2$
impair	ungerade	$\{1; 3; \dots; 35\}$	$\times 2$
rouge	rote	$\{1; 3; \dots; 36\}$	$\times 2$
noir	schwarze	$\{2; 4; \dots; 35\}$	$\times 2$
manque	erste Hälfte	$\{1; \dots; 18\}$	$\times 2$
passe	zweite Hälfte	$\{19; \dots; 36\}$	$\times 2$



## Bemerkungen:

- Roulettespieler haben verschiedene Setzmöglichkeiten, die sich als Teilmengen des Ergebnisraums  $\Omega$  beschreiben lassen und die im Erfolgsfall unterschiedliche Auszahlungsquoten erzielen.
- Für Roulettespieler interessante Spielereignisse sind also bestimmte Teilmengen des Ergebnisraums.
- Setzt beispielsweise jemand auf „douzaine premiers“ und wird eine 9 ermittelt, so sagt man, das Ereignis „douzaine premiers“ ist eingetreten.
- Es gibt oft verschiedene Sonderregelungen für das Ergebnis 0; dieses Ergebnis ist aus den meisten Ereignissen ausgeschlossen.
- Der Gewinn wird abhängig vom eingetretenen Ereignis als Vielfaches des Einsatzes ermittelt. Der maximale Gewinn ist das 36fache des Einsatzes. Beachten Sie, dass dies nicht der Mächtigkeit des Ergebnisraums entspricht.

# Ereignisräume

## Definition 4 (Ereignisraum)

Jede Teilmenge  $A$  eines Ergebnisraums  $\Omega$  heißt **Ereignis**. Das Ereignis  $A$  tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis  $\omega$  vorliegt, dass in  $A$  enthalten ist.

Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  aller Ereignisse heißt **Ereignisraum**.

# Ereignisräume

## Definition 4 (Ereignisraum)

Jede Teilmenge  $A$  eines Ergebnisraums  $\Omega$  heißt **Ereignis**. Das Ereignis  $A$  tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis  $\omega$  vorliegt, dass in  $A$  enthalten ist.

Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  aller Ereignisse heißt **Ereignisraum**.

Besondere Ereignisse:

- Das **unmögliche Ereignis**  $\emptyset$  enthält kein Ergebnis  $\omega \in \Omega$ . Es tritt niemals ein.
- Das **sichere Ereignis**  $\Omega$  enthält alle Ergebnisse  $\omega \in \Omega$ . Es tritt immer ein.
- Das Ereignis  $\{\omega\}$ ,  $\omega \in \Omega$ , heißt **Elementarereignis**.  
Achtung: Elementarereignis  $\{\omega\}$  ≠ Ergebnis  $\omega$

Mächtigkeit:

- Ist  $|\Omega| = m$ , so ist  $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^m$ .

## Bemerkungen:

- Wir haben einem Begriff der Umgangssprache einen mathematischen Begriff zugeordnet:  
 „Ereignis“  $\mapsto$  Menge.

# Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 1:

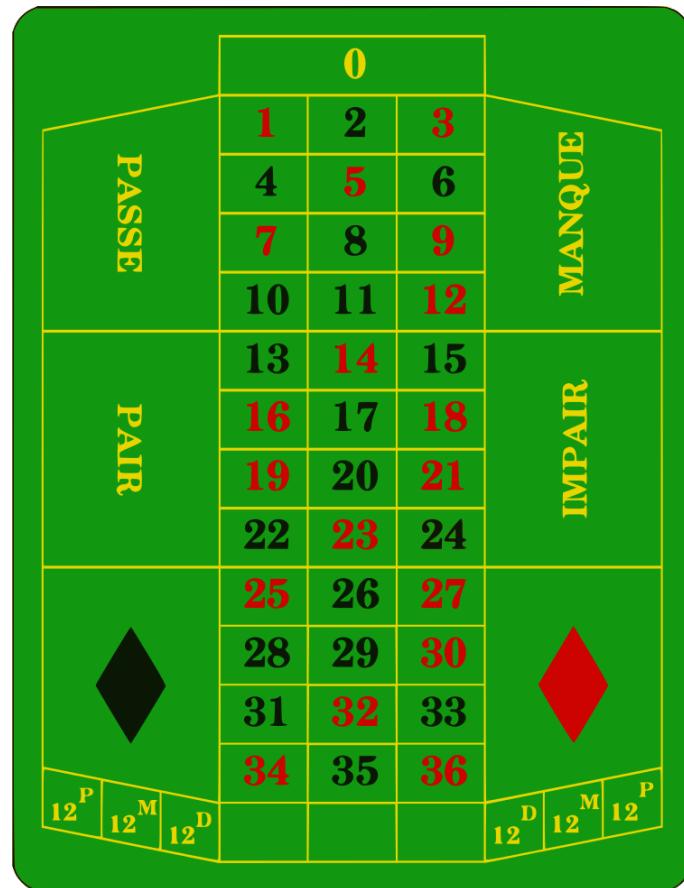
- Ein Chip auf „manque“ (erste Hälfte)
- Verlust, wenn „passe“ eintritt
- Komplementärmenge

Spiel 2:

- Ein Chip auf „manque“, einer auf {1; 2; 3}
- Gewinn wird maximal, wenn {1; 2; 3} eintritt
- Teilmenge

Spiel 3:

- Ein Chip auf „pair“, einer auf {1; 2; 3}
- Gewinn wird maximal, wenn {2} eintritt
- Schnittmenge



# Ereignisräume

## Definition 5 (Gegenereignis, Teilereignis, Gleichheit)

Das Ereignis  $\bar{A}$  tritt immer genau dann ein, wenn  $A$  nicht eintritt und heißt **Gegenereignis** zu  $A$  oder kurz *nicht-A*.

Ist  $A$  eine Teilmenge von  $B$  (in Zeichen:  $A \subseteq B$ ), so tritt mit dem Ereignis  $A$  stets auch das Ereignis  $B$  ein:  $A$  zieht dann  $B$  nach sich und heißt **Teilereignis** von  $B$ .

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen **gleich**, wenn  $A$  ein Teilereignis von  $B$  und  $B$  ein Teilereignis von  $A$  ist:

$$A = B \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$

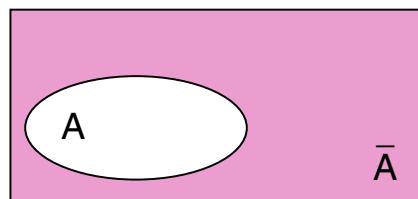
## Bemerkungen:

- „Umgangssprachliche“ Setzmöglichkeiten des Roulette lassen sich als Mengenverknüpfungen von Ereignissen ausdrücken.
- Zur Veranschaulichung werden oft Venn-Diagramme verwendet – John Venn (1834–1923) war ein englischer Naturphilosoph.
- In einem Venn-Diagramm (siehe folgende Folien) umfasst eine geschlossene Kurve (Kreis, Ellipse, Viereck, etc.) die Elemente einer Menge, die man als Punkte in der Ebene auffassen kann.

# Ereignisräume

## Verknüpfung von Ereignissen

$\bar{A}$

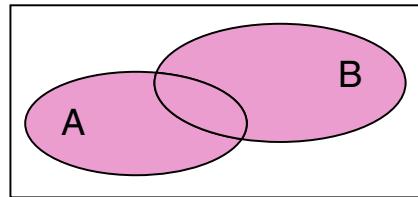


$\Omega$

nicht- $A$  /  
Gegenereignis

tritt ein, wenn  
 $A$  nicht eintritt

$A \cup B$

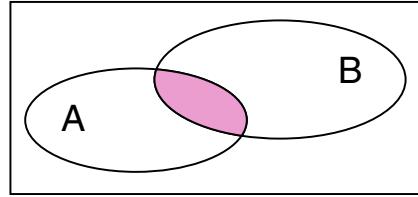


$\Omega$

$A$  oder  $B$

tritt ein, wenn  
 $A$  oder auch  
 $B$  eintritt

$A \cap B$

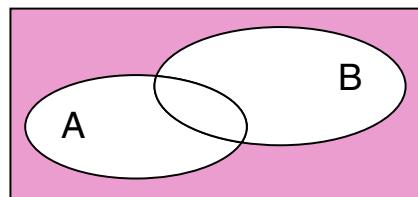


$\Omega$

$A$  und  $B$

tritt ein, wenn  
 $A$  und zugleich  
 $B$  eintritt

$\bar{A} \cap \bar{B}$

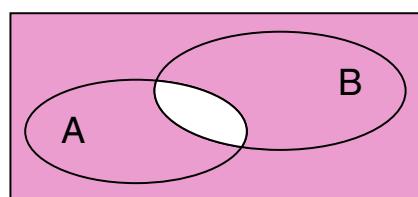


$\Omega$

nicht- $A$  und nicht- $B$   
(=  $\bar{A} \cup \bar{B}$ )

tritt ein, wenn  
weder  $A$  noch  
 $B$  eintritt

$\bar{A} \cup \bar{B}$



$\Omega$

nicht- $A$  oder nicht- $B$   
(=  $\bar{A} \cap \bar{B}$ )

tritt ein, wenn  
höchstens eines der  
beiden Ereignisse  
 $A$  und  $B$  eintritt

[Feuerfeil/Heigel 1999]

## Bemerkungen:

- Die Operationen  $\cup$  und  $\cap$  sind auf mehrere Ereignisse verallgemeinerbar:
  - Ereignis  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse  $A_i$  eintritt
  - Ereignis  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$  tritt ein, wenn alle Ereignisse  $A_i$  eintreten
- Wiederholung Mengenalgebra
  - Kommutativgesetze 
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
  - Assoziativgesetze 
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
  - Distributivgesetze 
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
  - Neutrale Elemente 
$$A \cup \emptyset = A \quad \text{und} \quad A \cap \Omega = A$$
  - Dominante Elemente 
$$A \cup \Omega = \Omega \quad \text{und} \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$
  - Komplementäre Elemente 
$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad \text{und} \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$
  - Idempotenzgesetze 
$$A \cup A = A \quad \text{und} \quad A \cap A = A$$
  - Absorptionsgesetze 
$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$
  - Gesetze von de Morgan 
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

# Ereignisräume

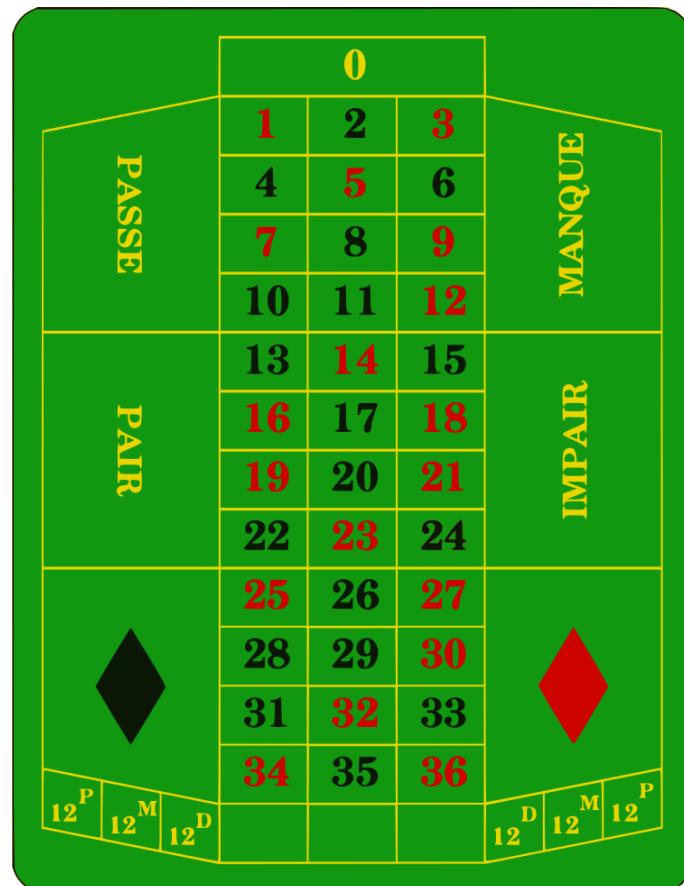
Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 4:

- Ein Chip auf „douzaine premier“
  - Ein Chip auf „douzaine dernier“
  - Es können nicht beide Ereignisse eintreten
- Leere Schnittmenge  
Unmögliches Ereignis

Spiel 5:

- Je ein Chip auf  $\{1; 2; 3\}$ ,  $\{4; 5; 6\}$ ,  $\{7; 8; 9\}$ , und  $\{10; 11; 12\}$
  - Gewinn, wenn „douzaine premier“ eintritt  $\{1; \dots; 12\} = \{1; 2; 3\} \cup \{4; 5; 6\} \cup \{7; 8; 9\} \cup \{10; 11; 12\}$ ; Gewinn äquivalent zu 4 Chips auf dieses Ereignis.
- Zerlegung in disjunkte Teilereignisse



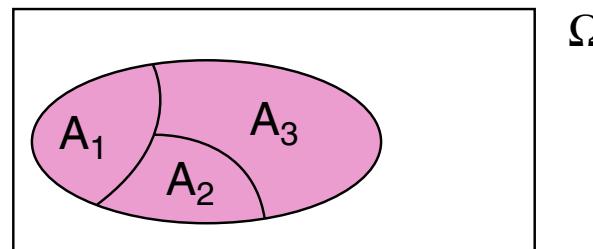
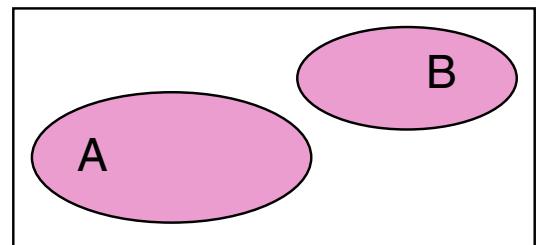
# Ereignisräume

## Definition 6 (unvereinbar, vereinbar, Zerlegung)

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  mit  $A \cap B = \emptyset$  heißen **unvereinbar** (ansonsten **vereinbar**).

Die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_m$  ( $m \geq 2$ ) heißen **paarweise unvereinbar**, wenn jeweils zwei von ihnen unvereinbar sind.

Eine Menge paarweise unvereinbarer Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_m$  mit  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  heißt **Zerlegung** von  $A$  in die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_m$ .



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

## Bemerkungen:

- Mehr als zwei Ereignisse heißen **vollständig unvereinbar**, wenn sie nicht alle zugleich eintreten können.