

Kapitel PTS:II

II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisräume
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Weiterentwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Zufallsexperimente

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit → Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Zufallsexperimente

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit → Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Zufallsexperimente

Experimentbegriff

Experiment: Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

Versuch: einmalige Durchführung eines Experiments

Kausalitätsprinzip bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis**(se)

Zufallsexperimente

Experimentbegriff

Experiment: Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

Versuch: einmalige Durchführung eines Experiments



Kausalitätsprinzip bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis(se)**

Beispiel: Münzwurf

Ursache: Gesetz der Schwerkraft

Experiment: Eine Münze in die Luft werfen

Frage: Was geschieht mit der Münze?

Ergebnis: Die Münze fällt auf den Boden

→ Das Experiment läuft **determiniert** ab.



Zufallsexperimente

Experimentbegriff

Experiment: Vorgang, der unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist

Versuch: einmalige Durchführung eines Experiments



Kausalitätsprinzip bei Versuchen:

Ursache(n) → Experiment → Wirkung(en) bzw. **Ergebnis(se)**

Beispiel: Münzwurf

Ursache: **unüberschaubar**

Experiment: Eine Münze in die Luft werfen

Frage: Wird die Münze Kopf oder Zahl zeigen?

Ergebnis: **unvorhersehbar**

→ Das Experiment läuft **zufällig** ab.



Zufallsexperimente

„Definition“

Wir nennen ein Experiment **Zufallsexperiment** wenn

- es nach den Kausalitätsprinzip abläuft,
- Übersicht oder Informationen über die Ursachen fehlen, so dass
- das Ergebnis unvorhersehbar ist – es uns also „zufällig“ erscheint.

Je weniger Information über die Ursachen vorliegen, desto „zufälliger“ ist das Experiment.

Beim Münzwurf ist die Kette der Einzelursachen und ihr Zusammenspiel weder überschaubar noch sind viele von ihnen messbar. Mögliche Ursachen sind

- die Verfassung des Werfers,
- die Luftzusammensetzung,
- die Bodenbeschaffenheit, und
- die Besonderheiten der Münze.

Zufallsexperimente

Arten

Künstliche Zufallsexperimente (Experimentator stößt Durchführung an)

- Beliebig oft mit den gleichen Objekten wiederholbar
Glücksspiele wie Münzwurf, Würfeln, Roulette, ...
- Beliebig oft mit gleichartigen Objekten wiederholbar
Bauteilausfalltests, Medikamententests, Meinungsumfragen, ...

Zufallsexperimente

Arten

Künstliche Zufallsexperimente (Experimentator stößt Durchführung an)

- Beliebig oft mit den gleichen Objekten wiederholbar
Glücksspiele wie Münzwurf, Würfeln, Roulette, ...
- Beliebig oft mit gleichartigen Objekten wiederholbar
Bauteilausfalltests, Medikamententests, Meinungsumfragen, ...

Natürliche Zufallsexperimente (laufen von selbst ab, nur beobachtbar)

- Sich wiederholende Vorgänge in der Natur
Atomzerfall pro Zeiteinheit ermitteln; Registrierung des Geschlechts eines Neugeborenen
- Sich wiederholende Vorgänge in der Gesellschaft
Verkehrsunfälle pro Woche zählen; Tatsächliche Lebensdauer eines Versicherten „bestimmen“

Natürliche Zufallsexperimente werden auch Zufallsbeobachtungen genannt.

Zufallsexperimente

Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen einer Experiments
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

Zufallsexperimente

Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen eines Experiments
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

Ansatz zur Vermessung eines Münzwurfs:

- Werfer:in ganzen Tag komplett verdrahtet (EEG, Muskeltonus, Mageninhalt, etc.)
- Münze direkt vor Wurf vermessen (Gewicht, Temperatur, Unausgewogenheit, etc.)
- Luftraum ständig hochauflöst vermessen (Wind, O₂-Gehalt, Temperatur, etc.)
- Bodenbeschaffenheit mit Messfühlern bestimmt (Härte, Feuchte, Seismik, etc.)
- Hochgeschwindigkeitskameras filmen Münzwurf aus jedem Winkel (Abwurf, Spin, etc.)
- Rechnercluster berechnet nebenbei entsprechende physikalische Gleichungen

Wird das Ergebnis mit diesen Informationen vorhersagbar?

Zufallsexperimente

Ursachen des Zufalls

- Mangelndes Wissen über die Ursachen eines Experiments
Unkenntnis, Unüberschaubarkeit, Verkettung
- Mangelnde Messgenauigkeit der eingesetzten Beobachtungsinstrumente

Ansatz zur Vermessung eines Münzwurfs:

- Werfer:in ganzen Tag komplett verdrahtet (EEG, Muskeltonus, Mageninhalt, etc.)
- Münze direkt vor Wurf vermessen (Gewicht, Temperatur, Unausgewogenheit, etc.)
- Luftraum ständig hochauflöst vermessen (Wind, O₂-Gehalt, Temperatur, etc.)
- Bodenbeschaffenheit mit Messfühlern bestimmt (Härte, Feuchte, Seismik, etc.)
- Hochgeschwindigkeitskameras filmen Münzwurf aus jedem Winkel (Abwurf, Spin, etc.)
- Rechnercluster berechnet nebenbei entsprechende physikalische Gleichungen

Wird das Ergebnis mit diesen Informationen vorhersagbar? **Nein.**

Ursache: Heisenbergsche Unschärferelation

- Die Messgenauigkeit ist spätestens im atomaren Bereich begrenzt.
- Der Ort und der Impuls eines Teilchens kann nicht zugleich beliebig genau bestimmt werden.

Bemerkungen:

- Mehr Wissen und ggf. eine höhere Messgenauigkeit „schwächen den Zufall ab.“