# Kapitel PTS:II

## II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisräume
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

# Ereignisräume

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum $\Omega$

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

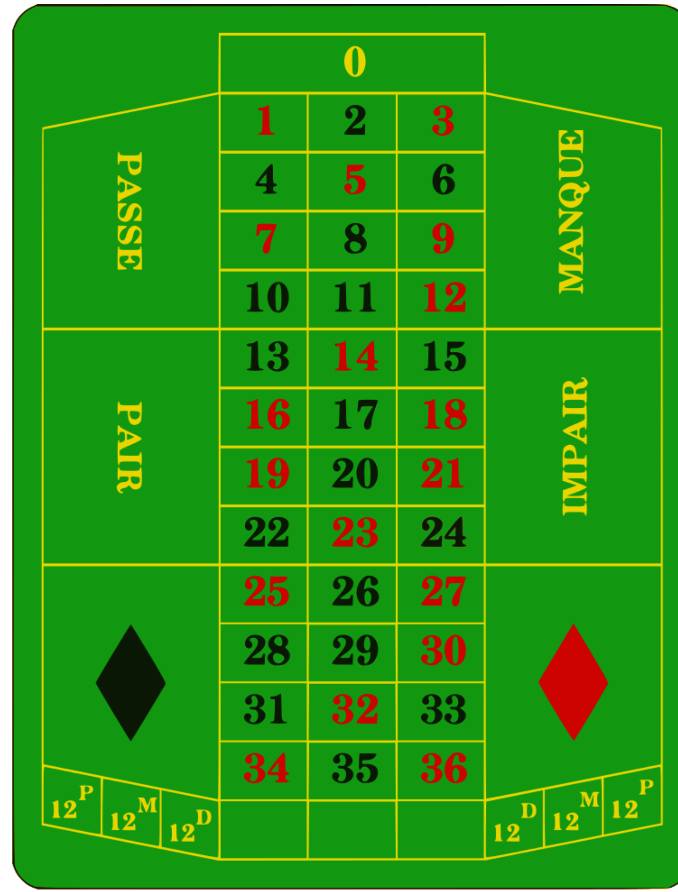
Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

# Ereignisräume

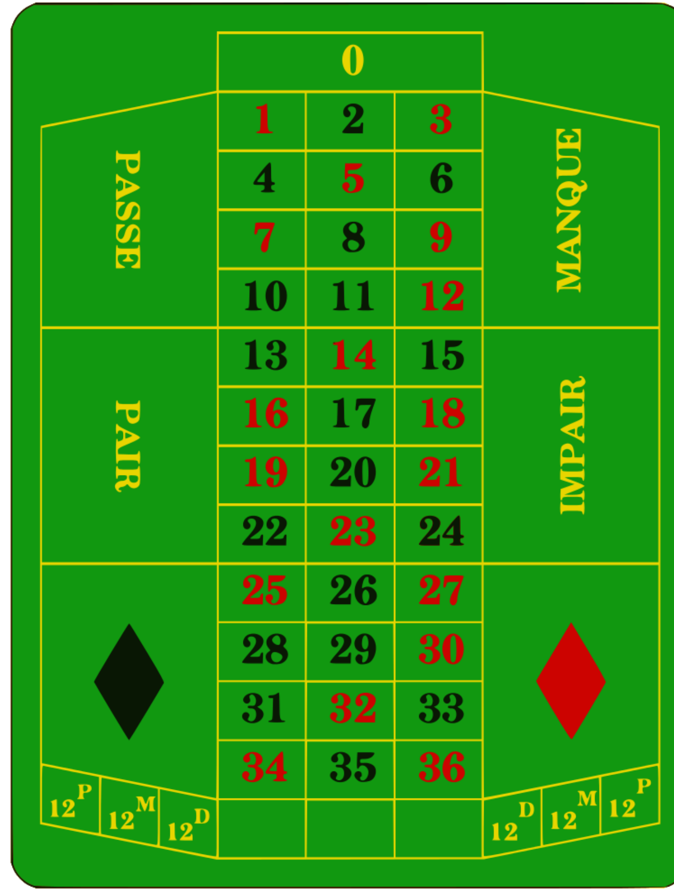
## Beispiel: Französisches Roulette

# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette


Verallgemeinert:

- Aufbau: Urne mit 37 nummerierten Kugeln.
- Experiment: Ziehung einer Kugel.

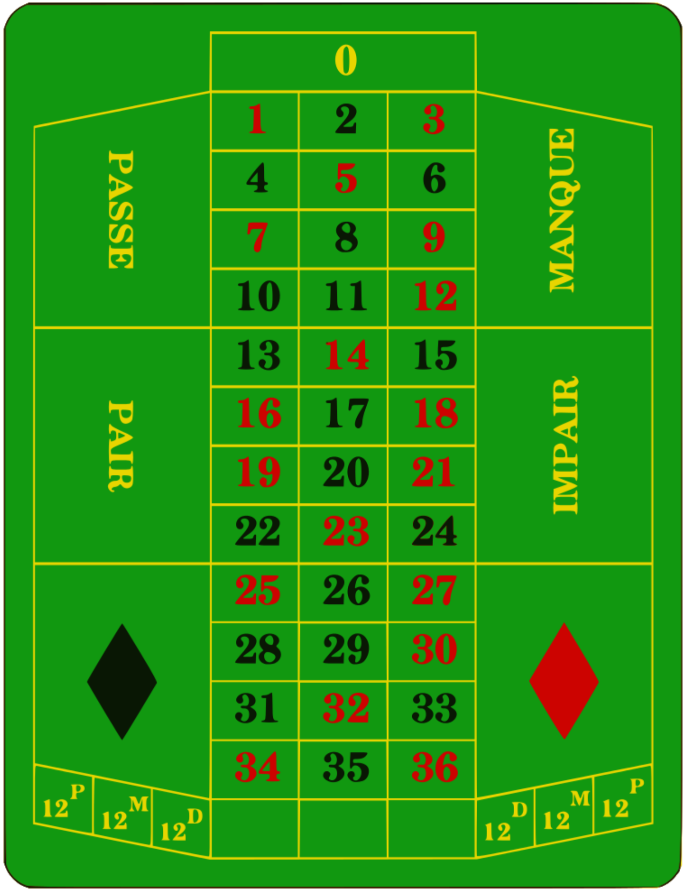
→ $\Omega = \{0; 1; \ldots; 36\}$

- Glücksspiel: Wette über das Ergebnis.

# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

| Frz. Name | Bedeutung | Teilmenge | Gewinn |
|---|---|---|---|
| plein | eine Zahl | $\{1\}$ | Einsatz$\times 36$ |

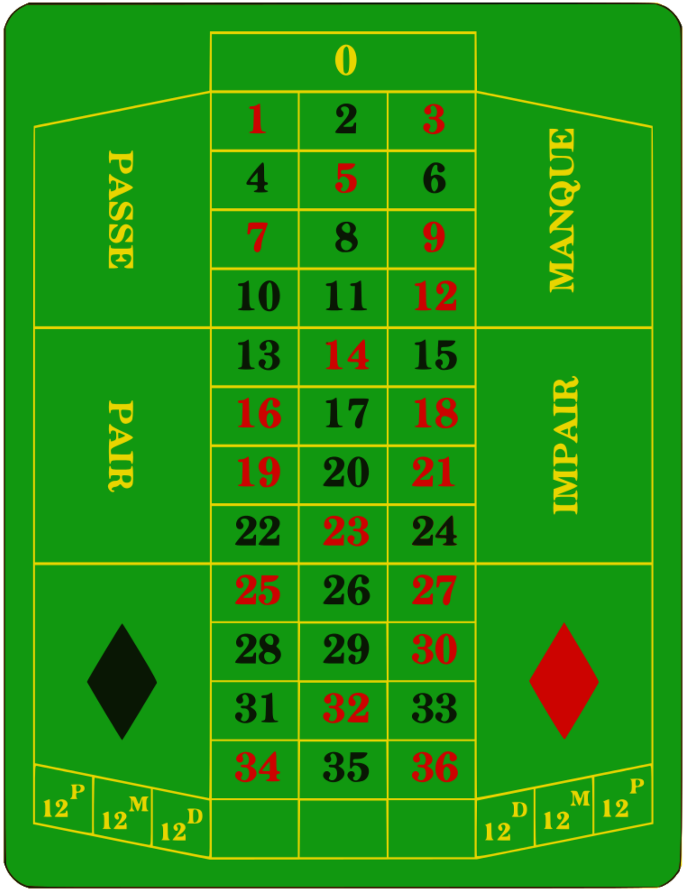


# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

| Frz. Name | Bedeutung | Teilmenge | Gewinn |
|---|---|---|---|
| plein | eine Zahl | $\{1\}$ | Einsatz$\times 36$ |
| cheval | zwei Nachbarn | $\{7; 8\}$ | $\times 18$ |

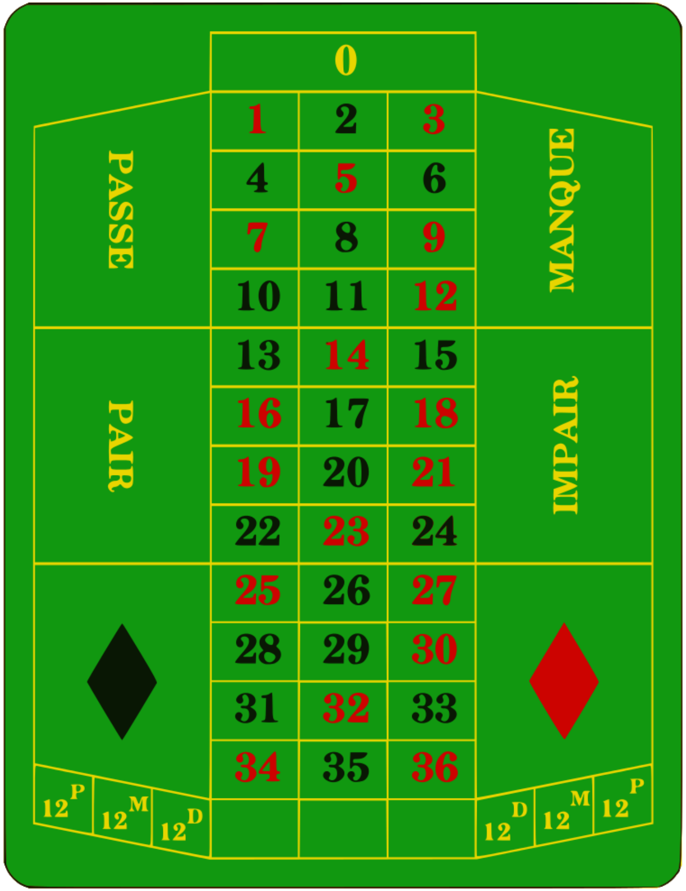


# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

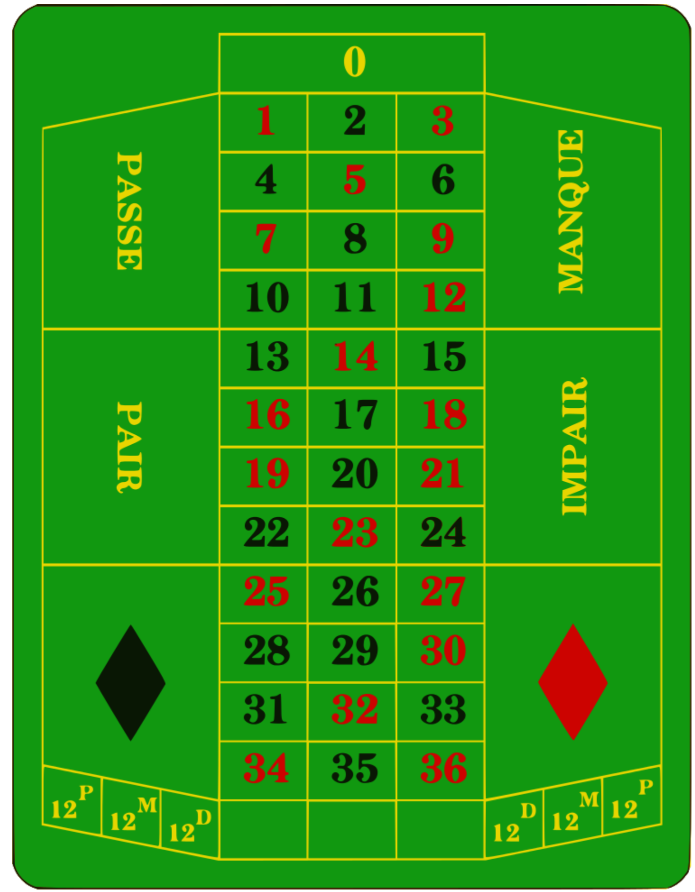
| Frz. Name | Bedeutung | Teilmenge | Gewinn |
|---|---|---|---|
| plein | eine Zahl | $\{1\}$ | Einsatz$\times 36$ |
| cheval | zwei Nachbarn | $\{7; 8\}$ | $\times 18$ |
| transversale | drei Zahlen | | |
| - pleine | Querreihe | $\{10; 11; 12\}$ | $\times 12$ |
| - du zéro | mit Null | $\{0; 1; 2\}$ | $\times 12$ |
| carré | vier Nachbarn | $\{4; 5; 7; 8\}$ | $\times 9$ |
| quatre prem. | erste vier | $\{0; 1; 2; 3\}$ | $\times 9$ |
| sixain | zwei Querreihen | $\{13; \ldots; 18\}$ | $\times 6$ |



# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

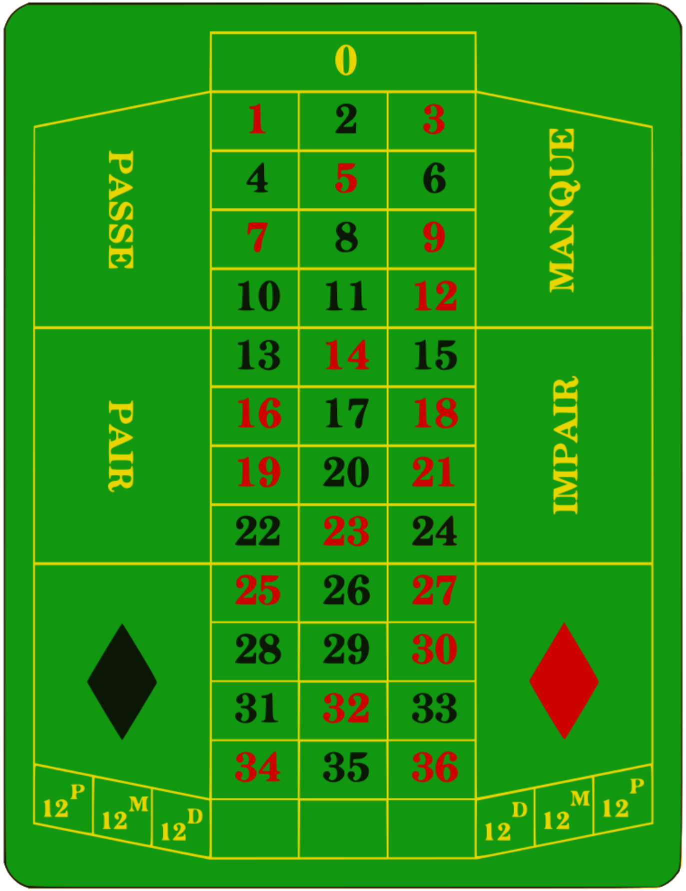
| Frz. Name | Bedeutung | Teilmenge | Gewinn |
|---|---|---|---|
| plein | eine Zahl | $\{1\}$ | Einsatz$\times 36$ |
| cheval | zwei Nachbarn | $\{7; 8\}$ | $\times 18$ |
| transversale | drei Zahlen | | |
| - pleine | Querreihe | $\{10; 11; 12\}$ | $\times 12$ |
| - du zéro | mit Null | $\{0; 1; 2\}$ | $\times 12$ |
| carré | vier Nachbarn | $\{4; 5; 7; 8\}$ | $\times 9$ |
| quatre prem. | erste vier | $\{0; 1; 2; 3\}$ | $\times 9$ |
| sixain | zwei Querreihen | $\{13; \ldots; 18\}$ | $\times 6$ |
| douzaine | ein Dutzend: | | |
| - premier | vorn | $\{1; \ldots; 12\}$ | $\times 3$ |
| - milieu | mitte | $\{13; \ldots; 24\}$ | $\times 3$ |
| - dernier | hinten | $\{25; \ldots; 36\}$ | $\times 3$ |
| | | | |
| colonne | Längsreihe: | | |
| - 34 | links | $\{1; 4; \ldots; 34\}$ | $\times 3$ |
| - 35 | mitte | $\{2; 5; \ldots; 35\}$ | $\times 3$ |
| - 36 | rechts | $\{3; 6; \ldots; 36\}$ | $\times 3$ |



# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

| Frz. Name | Bedeutung | Teilmenge | Gewinn |
|---|---|---|---|
| plein | eine Zahl | $\{1\}$ | Einsatz$\times 36$ |
| cheval | zwei Nachbarn | $\{7; 8\}$ | $\times 18$ |
| transversale | drei Zahlen | | |
| - pleine | Querreihe | $\{10; 11; 12\}$ | $\times 12$ |
| - du zéro | mit Null | $\{0; 1; 2\}$ | $\times 12$ |
| carré | vier Nachbarn | $\{4; 5; 7; 8\}$ | $\times 9$ |
| quatre prem. | erste vier | $\{0; 1; 2; 3\}$ | $\times 9$ |
| sixain | zwei Querreihen | $\{13; \ldots; 18\}$ | $\times 6$ |
| douzaine | ein Dutzend: | | |
| - premier | vorn | $\{1; \ldots; 12\}$ | $\times 3$ |
| - milieu | mitte | $\{13; \ldots; 24\}$ | $\times 3$ |
| - dernier | hinten | $\{25; \ldots; 36\}$ | $\times 3$ |
| colonne | Längsreihe: | | |
| - 34 | links | $\{1; 4; \ldots; 34\}$ | $\times 3$ |
| - 35 | mitte | $\{2; 5; \ldots; 35\}$ | $\times 3$ |
| - 36 | rechts | $\{3; 6; \ldots; 36\}$ | $\times 3$ |
| pair | gerade | $\{2; 4; \ldots; 36\}$ | $\times 2$ |
| impair | ungerade | $\{1; 3; \ldots; 35\}$ | $\times 2$ |
| rouge | rote | $\{1; 3; \ldots; 36\}$ | $\times 2$ |
| noir | schwarze | $\{2; 4; \ldots; 35\}$ | $\times 2$ |
| manque | erste Hälfte | $\{1; \ldots; 18\}$ | $\times 2$ |
| passe | zweite Hälfte | $\{19; \ldots; 36\}$ | $\times 2$ |

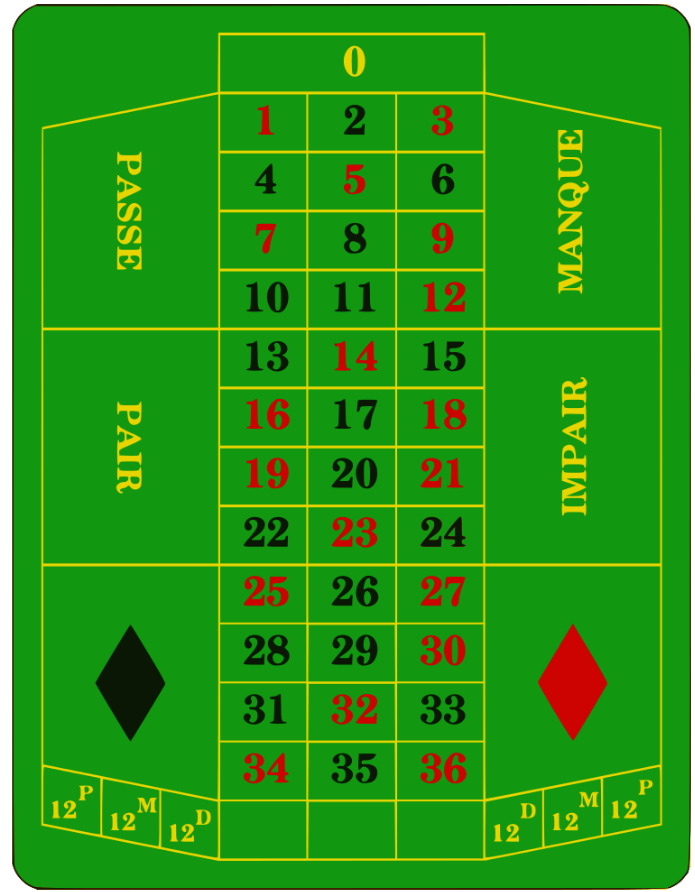


# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette

| Frz. Name | Bedeutung | Teilmenge | Gewinn |
|---|---|---|---|
| plein | eine Zahl | $\{1\}$ | Einsatz$\times 36$ |
| cheval | zwei Nachbarn | $\{7;8\}$ | $\times 18$ |
| transversale | drei Zahlen | | |
| - pleine | Querreihe | $\{10;11;12\}$ | $\times 12$ |
| - du zéro | mit Null | $\{0;1;2\}$ | $\times 12$ |
| carré | vier Nachbarn | $\{4;5;7;8\}$ | $\times 9$ |
| quatre prem. | erste vier | $\{0;1;2;3\}$ | $\times 9$ |
| sixain | zwei Querreihen | $\{13;\ldots;18\}$ | $\times 6$ |
| douzaine | ein Dutzend: | | |
| - premier | vorn | $\{1;\ldots;12\}$ | $\times 3$ |
| - milieu | mitte | $\{13;\ldots;24\}$ | $\times 3$ |
| - dernier | hinten | $\{25;\ldots;36\}$ | $\times 3$ |
| - double | zwei Dutzend | $\{1;\ldots;24\}$ | $\times 1{,}5$ |
| colonne | Längsreihe: | | |
| - 34 | links | $\{1;4;\ldots;34\}$ | $\times 3$ |
| - 35 | mitte | $\{2;5;\ldots;35\}$ | $\times 3$ |
| - 36 | rechts | $\{3;6;\ldots;36\}$ | $\times 3$ |
| - double | zwei Reihen | $\{1;2;4;\ldots;35\}$ | $\times 1{,}5$ |
| pair | gerade | $\{2;4;\ldots;36\}$ | $\times 2$ |
| impair | ungerade | $\{1;3;\ldots;35\}$ | $\times 2$ |
| rouge | rote | $\{1;3;\ldots;36\}$ | $\times 2$ |
| noir | schwarze | $\{2;4;\ldots;35\}$ | $\times 2$ |
| manque | erste Hälfte | $\{1;\ldots;18\}$ | $\times 2$ |
| passe | zweite Hälfte | $\{19;\ldots;36\}$ | $\times 2$ |



Bemerkungen:

- Roulettespieler haben verschiedene Setzmöglichkeiten, die sich als Teilmengen des Ergebnisraums $\Omega$ beschreiben lassen und die im Erfolgsfall unterschiedliche Auszahlungsquoten erzielen.
- Für Roulettespieler interessante Spielereignisse sind also bestimmte Teilmengen des Ergebnisraums.
- Setzt beispielsweise jemand auf „douzaine premiers“ und wird eine $9$ ermittelt, so sagt man, das Ereignis „douzaine premiers“ ist eingetreten.
- Es gibt oft verschiedene Sonderregelungen für das Ergebnis $0$; dieses Ergebnis ist aus den meisten Ereignissen ausgeschlossen.
- Der Gewinn wird abhängig vom eingetretenen Ereignis als Vielfaches des Einsatzes ermittelt. Der maximale Gewinn ist das 36fache des Einsatzes. Beachten Sie, dass dies nicht der Mächtigkeit des Ergebnisraums entspricht.

# Ereignisräume

**Definition 4 (Ereignisraum)**

Jede Teilmenge $A$ eines Ergebnisraums $\Omega$ heißt Ereignis. Das Ereignis $A$ tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis $\omega$ vorliegt, dass in $A$ enthalten ist.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

# Ereignisräume

**Definition 4 (Ereignisraum)**

Jede Teilmenge $A$ eines Ergebnisraums $\Omega$ heißt Ereignis. Das Ereignis $A$ tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis $\omega$ vorliegt, dass in $A$ enthalten ist.

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

Besondere Ereignisse:

- Das unmögliche Ereignis $\emptyset$ enthält kein Ergebnis $\omega \in \Omega$. Es tritt niemals ein.
- Das sichere Ereignis $\Omega$ enthält alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$. Es tritt immer ein.
- Das Ereignis $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, heißt Elementarereignis.
  Achtung: Elementarereignis $\{\omega\} \neq$ Ergebnis $\omega$

Mächtigkeit:

- Ist $|\Omega| = m$, so ist $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^m$.

Bemerkungen:

- Wir haben einem Begriff der Umgangssprache einen mathematischen Begriff zugeordnet: „Ereignis“ $\mapsto$ Menge.

# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 1:

- Ein Chip auf „manque“ (erste Hälfte)
- Verlust, wenn „passe“ eintritt

➜ Komplementärmenge

Spiel 2:

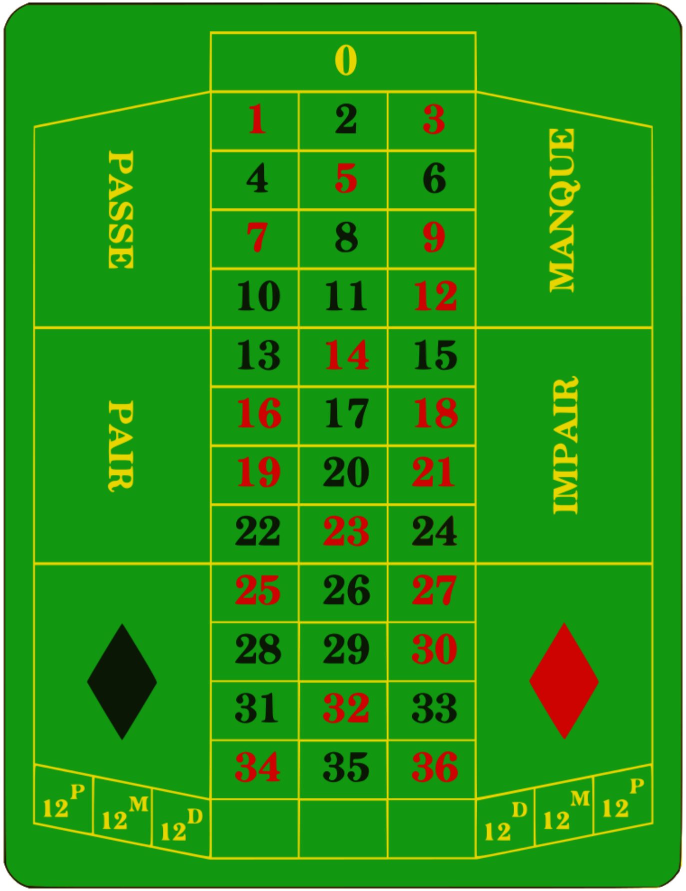
- Ein Chip auf „manque“, einer auf $\{1; 2; 3\}$
- Gewinn wird maximal, wenn $\{1; 2; 3\}$ eintritt

➜ Teilmenge

Spiel 3:

- Ein Chip auf „pair“, einer auf $\{1; 2; 3\}$
- Gewinn wird maximal, wenn $\{2\}$ eintritt

➜ Schnittmenge



# Ereignisräume

**Definition 5 (Gegenereignis, Teilereignis, Gleichheit)**

Das Ereignis $\bar{A}$ tritt immer genau dann ein, wenn $A$ nicht eintritt und heißt Gegenereignis zu $A$ oder kurz *nicht*-$A$.

Ist $A$ eine Teilmenge von $B$ (in Zeichen: $A \subseteq B$), so tritt mit dem Ereignis $A$ stets auch das Ereignis $B$ ein: $A$ *zieht* dann $B$ *nach sich* und heißt Teilereignis von $B$.

Zwei Ereignisse $A$ und $B$ heißen gleich, wenn $A$ ein Teilereignis von $B$ und $B$ ein Teilereignis von $A$ ist:

$$A = B \;\text{ genau dann, wenn }\; A \subseteq B \;\text{ und }\; B \subseteq A$$

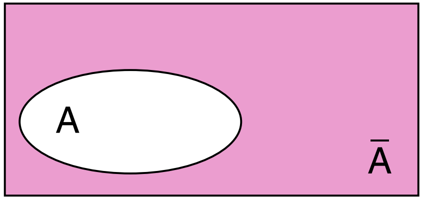
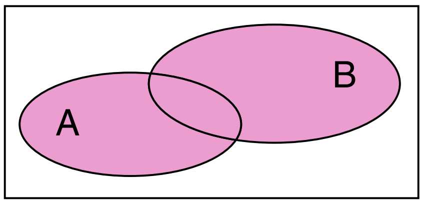
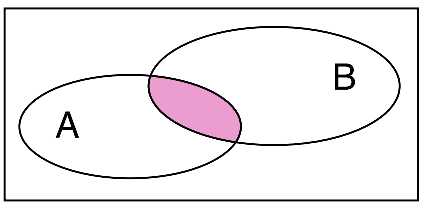
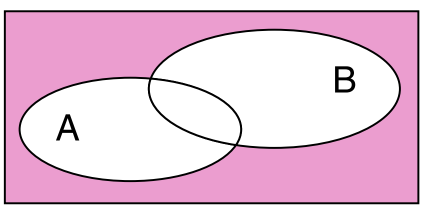
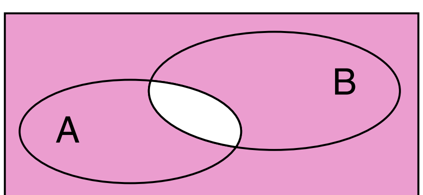
Bemerkungen:

- „Umgangssprachliche“ Setzmöglichkeiten des Roulette lassen sich als Mengenverknüpfungen von Ereignissen ausdrücken.
- Zur Veranschaulichung werden oft Venn-Diagramme verwandt – John Venn (1834–1923) war ein englischer Naturphilosoph.
- In einem Venn-Diagramm (siehe folgende Folien) umfasst eine geschlossene Kurve (Kreis, Ellipse, Viereck, etc.) die Elemente einer Menge, die man als Punkte in der Ebene auffassen kann.

# Ereignisräume

## Verknüpfung von Ereignissen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{A}$ |  | $\Omega$ | nicht-A / Gegenereignis | tritt ein, wenn A nicht eintritt |
| $A \cup B$ |  | $\Omega$ | A oder B | tritt ein, wenn A oder auch B eintritt |
| $A \cap B$ |  | $\Omega$ | A und B | tritt ein, wenn A und zugleich B eintritt |
| $\bar{A} \cap \bar{B}$ |  | $\Omega$ | nicht-A und nicht-B (= $\overline{A \cup B}$) | tritt ein, wenn weder A noch B eintritt |
| $\bar{A} \cup \bar{B}$ |  | $\Omega$ | nicht-A oder nicht-B (= $\overline{A \cap B}$) | tritt ein, wenn höchstens eines der beiden Ereignisse A und B eintritt |

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Die Operationen $\cup$ und $\cap$ sind auf mehrere Ereignisse verallgemeinerbar:
  - Ereignis $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse $A_i$ eintritt
  - Ereignis $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$ tritt ein, wenn alle Ereignisse $A_i$ eintreten

- Wiederholung Mengenalgebra
  - Kommutativgesetze $$A \cup B = B \cup A$$ $$A \cap B = B \cap A$$
  - Assoziativgesetze $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$ $$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
  - Distributivgesetze $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$ $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
  - Neutrale Elemente $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \Omega = A$
  - Dominante Elemente $A \cup \Omega = \Omega$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - Komplementäre Elemente $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$
  - Idempotenzgesetze $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$
  - Absorptionsgesetze $$A \cup (A \cap B) = A$$ $$A \cap (A \cup B) = A$$
  - Gesetze von de Morgan $$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$ $$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

# Ereignisräume

## Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 4:

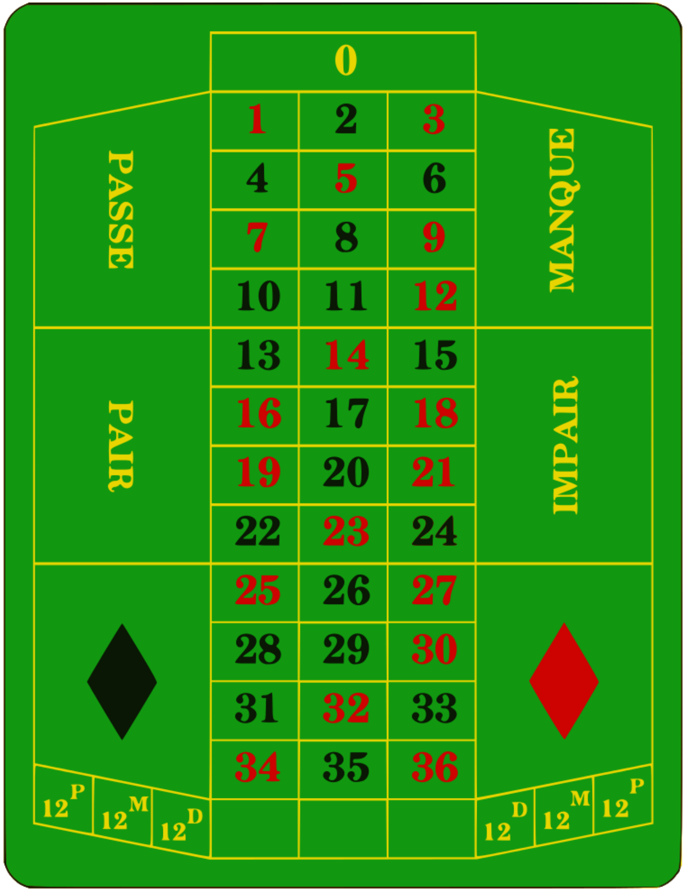
- Ein Chip auf „douzaine premier“
- Ein Chip auf „douzaine dernier“
- Es können nicht beide Ereignisse eintreten

→ Leere Schnittemenge
Unmögliches Ereignis

Spiel 5:

- Je ein Chip auf $\{1;2;3\}$, $\{4;5;6\}$, $\{7;8;9\}$, und $\{10;11;12\}$
- Gewinn, wenn „douzaine premier“ eintritt
  $\{1;\ldots;12\} = \{1;2;3\} \cup \{4;5;6\} \cup \{7;8;9\} \cup \{10;11;12\}$;
  Gewinn äquivalent zu 4 Chips auf dieses Ereignis.

→ Zerlegung in disjunkte Teilereignisse

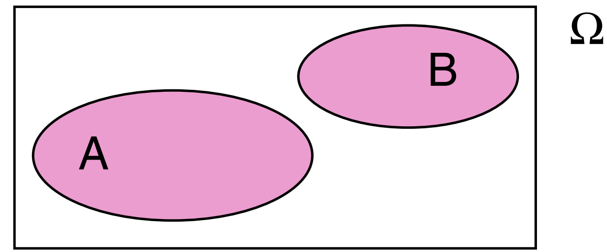


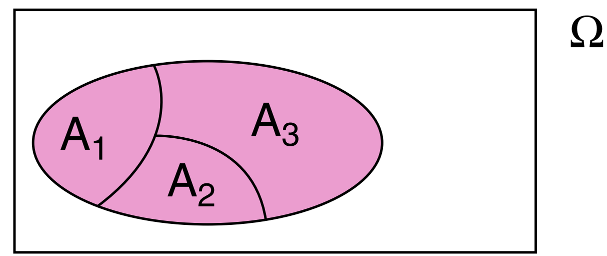
# Ereignisräume

**Definition 6 (unvereinbar, vereinbar, Zerlegung)**

Zwei Ereignisse $A$ und $B$ mit $A \cap B = \emptyset$ heißen unvereinbar (ansonsten vereinbar).




Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m \geq 2)$ heißen paarweise unvereinbar, wenn jeweils zwei von ihnen unvereinbar sind.




Eine Menge paarweise unvereinbarer Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ mit $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ heißt Zerlegung von $A$ in die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Mehr als zwei Ereignisse heißen vollständig unvereinbar, wenn sie nicht alle zugleich eintreten können.