Kapitel PTS:III

III. Kombinatorik

- Permutationen und Kombinationen
- Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten
- Urnenmodell

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich haben unter k zufällig gewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?

  Ausgenommen Schaltjahre und Zwillinge; Geburten seien gleichverteilt (Laplace-Annahme).

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich haben unter k zufällig gewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?
  Ausgenommen Schaltjahre und Zwillinge; Geburten seien gleichverteilt (Laplace-Annahme).

- Ergebnisraum $\Omega =$ „Menge aller k-Tupel aus der 365-Menge $\{1; 2; \ldots; 365\}$"

- Ereignis $A =$ „Mindestens zwei Geburtstage fallen zusammen"
  $A =$ „Teilmenge aller k-Tupel aus Ω mit mindestens zwei gleichen Zahlen"

- $|\Omega| = 365^k$ und $|A| =$?.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich haben unter k zufällig gewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?
  Ausgenommen Schaltjahre und Zwillinge; Geburten seien gleichverteilt (Laplace-Annahme).

- Ergebnisraum $\Omega =$ „Menge aller k-Tupel aus der 365-Menge $\{1; 2; \ldots; 365\}$"

- Ereignis $A =$ „Mindestens zwei Geburtstage fallen zusammen"
  $A =$ „Teilmenge aller k-Tupel aus Ω mit mindestens zwei gleichen Zahlen"

- $|\Omega| = 365^k$ und $|A| =$?.

- Gegenereignis $\bar{A} =$ „Alle Geburtstage verschieden"
  $\bar{A} =$ „Teilmenge aller k-Tupel aus Ω mit paarweise verschiedenen Zahlen";
  $\bar{A} =$ „Alle k-Permutationen aus Ω"

- $|\bar{A}| = \dfrac{365!}{(365-k)!} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)$

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Wie wahrscheinlich haben unter k zufällig gewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?
  Ausgenommen Schaltjahre und Zwillinge; Geburten seien gleichverteilt (Laplace-Annahme).

- Ergebnisraum Ω = „Menge aller k-Tupel aus der 365-Menge $\{1; 2; \ldots; 365\}$"

- Ereignis A = „Mindestens zwei Geburtstage fallen zusammen"
  A = „Teilmenge aller k-Tupel aus Ω mit mindestens zwei gleichen Zahlen"

- $|\Omega| = 365^k$ und $|A| =$?.

- Gegenereignis $\bar{A}$ = „Alle Geburtstage verschieden"
  $\bar{A}$ = „Teilmenge aller k-Tupel aus Ω mit paarweise verschiedenen Zahlen";
  $\bar{A}$ = „Alle k-Permutationen aus Ω"

- $|\bar{A}| = \dfrac{365!}{(365-k)!} = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)$

- Daraus folgt für A:

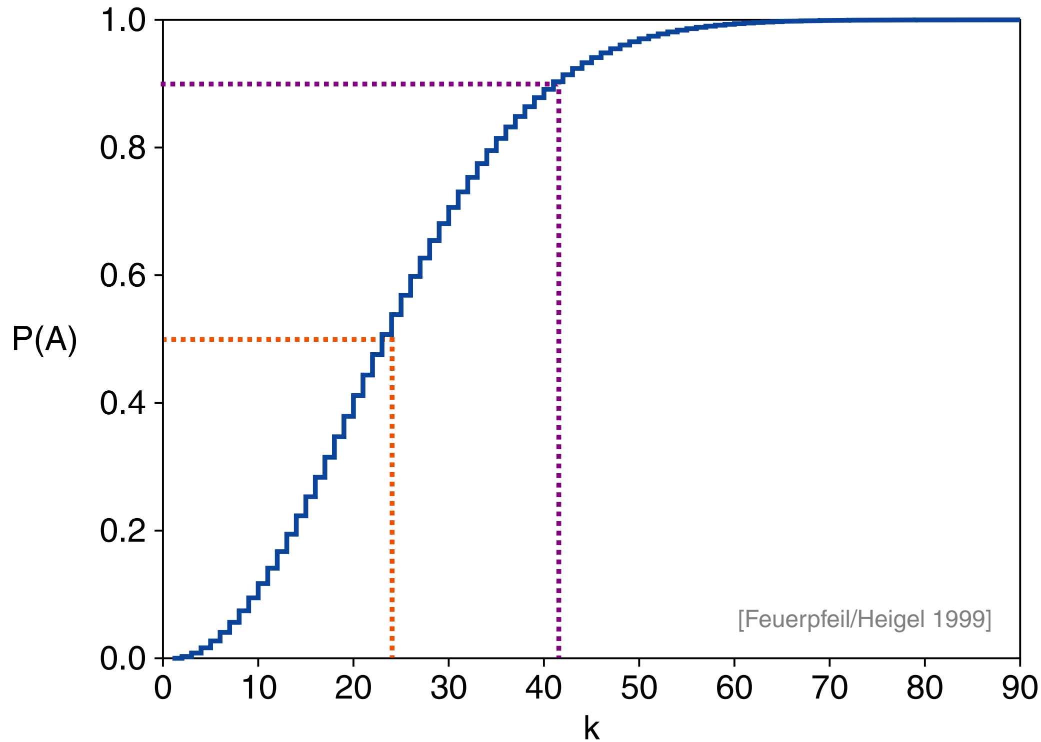
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (366 - k)}{365^k} \quad \text{für } k \leq 365$$

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Geburtstagsparadoxon

- Einige Werte:

k	$P(A)$	k	$P(A)$
2	0,003	35	0,814
3	0,008	40	0,891
5	0,027	41	0,903
10	0,117	45	0,941
15	0,253	50	0,970
20	0,411	55	0,986
22	0,476	60	0,994
23	0,507	65	0,998
25	0,569	70	0,999
30	0,706	75	1,000



- Paradox: Viele sind darüber erstaunt, wie wenige Personen genügen.

- Auflösung: Oft versagt die Intuition bei der Wahrscheinlichkeitschätzung.
  Das Paradox ist bestätigt: Viele denken an eine bestimmte Person (sich selbst). Intuitiver ist, die Zahl $k \cdot (k-1)$ der möglichen Personenpaare zu betrachten: $(23 \cdot 22)/2 = 253 > 365/2$.

Bemerkungen:

- Ein Paradoxon ist ein Befund, eine Aussage oder Erscheinung, die dem allgemein Erwarteten, der herrschenden Meinung oder Ähnlichem auf unerwartete Weise zuwiderläuft oder beim üblichen Verständnis der betroffenen Gegenstände bzw. Begriffe zu einem Widerspruch führt. [Wikipedia]

- Einen Sachverhalt „paradox" zu nennen, ist keine Aussage über die Wirklichkeit, sondern eine Aussage über das eigene Verständnis (die eigene Intuition) der Wirklichkeit.

- Geburtstage sind übers Jahr nicht gleichverteilt [Statistisches Bundesamt] und eine zufällige Auswahl von Personen ist schwer zu realisieren (Herkunft aus derselben Region, etc.).

- Bei $k = 366$ Personen oder haben garantiert zwei am gleich Tag im Jahr Geburtstag. Gemäß Schubfachprinzip können nur höchstens 365 Objekte (hier: Personen) auf 365 Schubfächer (Tage im Jahr) verteilt werden, so dass in jedem Schubfach höchstens ein Objekt ist. Spätestens das 366. Objekt muss in ein Schubfach, in dem schon ein Objekt ist.

- Bei 41 Personen kann man schon „mit großer Sicherheit" ($90{,}32\%$) zwei Personen mit gleichem Geburtstag erwarten, bei 55 Personen mit $98{,}63\%$, und bei 75 Personen mit $99{,}97\%$ kaum noch weniger als 100%. Beachten Sie, dass nur 14 zusätzliche Personen für weitere $8{,}31\%$ Prozentpunkte, aber dann weitere 20 für nur $1{,}34$-Prozentpunkte Wahrscheinlichkeitsdifferenz „benötigt" werden.

- Ab 23 zufällig ausgewählten Personen würde es sich gemäß Laplace-Annahme also lohnen, darauf zu wetten, dass mindestens 2 der Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Warum sind geordnete Stichproben Grundlage des Ergebnisraums und nicht ungeordnete?
- Beispiel: Geburtshalbjahr.

  Wie wahrscheinlich haben zwei Personen a und b im gleichen Halbjahr Geburtstag?

  Seien $\Omega_1 = \{\{1;1\};\{1;2\};\{2;2\}\}$ und $\Omega_2 = \{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$ alternative Vorschläge für Ergebnisräume, wobei Ergebnis $\{i;j\}$ bedeutet, dass eine Person im i-ten und eine andere im j-ten Halbjahr Geburtstag hat, und $(i;j)$, dass Person a im i-ten und Person b im j-ten Halbjahr Geburtstag hat.

  Die Laplace-Annahme ist für Ω_1 unzulässig, da es nur einen Weg gibt, Personen a und b das erste Halbjahr zuzuweisen (Ergebnis $\{1;1\}$), aber zwei Wege, einer Person das erste und der anderen das zweite Halbjahr zuzuweisen (Ergebnis $\{1;2\}$ entspricht Ergebnissen $(1;2)$ und $(2;1)$ aus Ω_2). Das Eintreten von Ergebnis $\{1;1\}$ ist also für Ω_1 weniger wahrscheinlich als das Eintreten von Ergebnis $\{1;2\}$, was die Laplace-Annahme verletzt.

Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Um eine gestellte Frage bezüglich der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu beantworten, sollten die Schritte der Modellierung nachvollziehbar sein:
  - Beschreibung des Zufallsexperiments (z.B. unter Rückgriff auf bekannte Aufbauten)
  - Darstellung eines Experimentausgangs als formelles Ergebnis mit klarer Semantik
  - Definition des Ergebnisraums Ω
  - Ggf. Prüfung der Laplace-Annahme
  - Beschreibung der interessierenden Ereignisse als Teilmengen des Ergebnisraums
  - Berechnung ihrer Mächtigkeiten mit den jeweils geeigneten kombinatorischen Ansätzen
  - Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
  - Rückübertragung auf die Wirklichkeit, um die Frage zu beantworten

- In der Praxis ist es oft hilfreich, zunächst eine äquivalentes kleineres zu betrachten.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1: Gleichzeitiger Wurf zweier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Experiment 2: Gleichzeitiger Wurf dreier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Wieso beobachtet man bei zwei Würfeln die Augensumme 9 häufiger als die 10 und bei drei Würfeln die 10 häufiger als die 9?

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1: Gleichzeitiger Wurf zweier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Experiment 2: Gleichzeitiger Wurf dreier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Wieso beobachtet man bei zwei Würfeln die Augensumme 9 häufiger als die 10 und bei drei Würfeln die 10 häufiger als die 9?
- Je 2 Möglichkeiten in Experiment 1:

$$\begin{aligned} 9 &= 3+6 = 4+5 \\ 10 &= 4+6 = 5+5 \end{aligned}$$

- Je 6 Möglichkeiten in Experiment 2:

$$\begin{aligned} 9 &= 1+2+6 = 1+3+5 = 2+2+5 = 2+3+4 = 1+4+4 = 3+3+3 \\ 10 &= 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4 \end{aligned}$$

- Paradox: In beiden Experimenten gibt es jeweils gleich viele Möglichkeiten.
  Dies steht im scheinbaren Widerspruch zur Laplace-Annahme.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1: Gleichzeitiger Wurf zweier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Experiment 2: Gleichzeitiger Wurf dreier ununterscheidbarer Laplace-Würfel.
- Wieso beobachtet man bei zwei Würfeln die Augensumme 9 häufiger als die 10 und bei drei Würfeln die 10 häufiger als die 9?
- Ergebnisraum 1: $\Omega_1 = \{(1;1);(1;2);(2;1);\ldots;(6;5);(6;6)\}$; A_k: „Augensumme k“

  $$A_9 = \{(3;6)\} \cup \{(4;5)\} \cup \{(5;4)\} \cup \{(6;3)\}$$
  $$A_{10} = \{(4;6)\} \cup \{(5;5)\} \cup \{(6;4)\}$$

- Ergebnisraum 2: $\Omega_2 = \{(1;1;1);(1;1;2);(1;2;1);\ldots;(6;6;5);(6;6;6)\}$

  $$A_9 = \{(1;2;6)\} \cup \ldots \cup \{(3;3;3)\} \cup \ldots \cup \{(5;3;1)\}$$
  $$A_{10} = \{(1;3;6)\} \cup \ldots \cup \{(3;3;4)\} \cup \{(3;4;3)\} \cup \{(4;3;3)\} \cup \ldots \cup \{(5;3;2)\}$$

- Auflösung: Die Berücksichtigung der Reihenfolge ist notwendig.

  Das Paradox ist falsifiziert: Es beruht auf der falschen Anwendung der Laplace-Annahme.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

	Augensumme Wurf 1											**Häufigkeit**
	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

Wurf 2	**Augensumme Wurf 1**					**Häufigkeit**
	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

Wurf 2	**Augensumme Wurf 1** **Häufigkeit**					
	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1	2 1					
2						
3						
4						
5						
6						

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

Wurf 2	Augensumme Wurf 1 Häufigkeit					
	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1	2 1	3 1				
2	3 1					
3						
4						
5						
6						

- In den Diagonalen stehen gleiche Augensummen für Wurfkombinationen.

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

Wurf 2	Augensumme Wurf 1 Häufigkeit					
	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	7 1
2	3 1	4 1	5 1	6 1	7 1	8 1
3	4 1	5 1	6 1	7 1	8 1	9 1
4	5 1	6 1	7 1	8 1	9 1	10 1
5	6 1	7 1	8 1	9 1	10 1	11 1
6	7 1	8 1	9 1	10 1	11 1	12 1

- In den Diagonalen stehen gleiche Augensummen für Wurfkombinationen.
- Die 9 tritt 4-mal, die 10 nur 3-mal auf.
- Mit $|\Omega_1| = 36$ gilt: $P_1(A_9) = \frac{4}{36}$ und $P_1(A_{10}) = \frac{3}{36}$

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 1:

Wurf 2	**Augensumme Wurf 1** Häufigkeit					
	1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1	7 1
2	3 1	4 1	5 1	6 1	7 1	8 1
3	4 1	5 1	6 1	7 1	8 1	9 1
4	5 1	6 1	7 1	8 1	9 1	10 1
5	6 1	7 1	8 1	9 1	10 1	11 1
6	7 1	8 1	9 1	10 1	11 1	12 1

- In den Diagonalen stehen gleiche Augensummen für Wurfkombinationen.
- Die 9 tritt 4-mal, die 10 nur 3-mal auf.
- Mit $|\Omega_1| = 36$ gilt: $P_1(A_9) = \frac{4}{36}$ und $P_1(A_{10}) = \frac{3}{36}$

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Augensummenparadoxon

- Experiment 2:

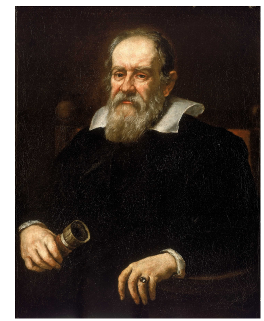
Wurf 3	**Augensumme Wurf 1 + 2** Häufigkeit										
	2 1	3 2	4 3	5 4	6 5	7 6	8 5	9 4	10 3	11 2	12 1
1	3 1	4 2	5 3	6 4	7 5	8 6	9 5	10 4	11 3	12 2	13 1
2	4 1	5 2	6 3	7 4	8 5	9 6	10 5	11 4	12 3	13 2	14 1
3	5 1	6 2	7 3	8 4	9 5	10 6	11 5	12 4	13 3	14 2	15 1
4	6 1	7 2	8 3	9 4	10 5	11 6	12 5	13 4	14 3	15 2	16 1
5	7 1	8 2	9 3	10 4	11 5	12 6	13 5	14 4	15 3	16 2	17 1
6	8 1	9 2	10 3	11 4	12 5	13 6	14 5	15 4	16 3	17 2	18 1

- Die möglichen Augensummen aus Experiment 1 und die Summen ihrer jeweiligen Häufigkeiten sind Ausgangspunkt für Experiment 2.
- Die 9 tritt nur 25-mal, die 10 27-mal auf.
- Mit $|\Omega_2| = 216$ gilt: $P_2(A_9) = \frac{25}{216}$ und $P_1(A_{10}) = \frac{27}{216}$

Bemerkungen:

- Schon 1477 wird in einem Kommentar zu Dantes „Divina Commedia“ an einer Stelle von der ungleichen Häufigkeit der verschiedenen Augensummen geschrieben. Allerdings wird unrichtigerweise beispielsweise der Summe 4 nur eine Entstehungsart $(1;1;2)$ statt drei, der fünf nur die zwei Arten $(1;1;3)$ und $(1;2;2)$ statt der möglichen sechs Arten zugeschrieben.
- Gerolamo Cardano (1501–1576, italienischer Renaissance-Humanist) führte in seinem Buch „De ludo aleae“, dem ersten Buch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, das erst 100 Jahre nach seiner Abfassung erschien, aus, dass das gleichzeitige Werfen zweier nicht unterscheidbarer Würfel dem zweimaligen Werfen eines Würfels unter Beachtung der Reihenfolge gleichzusetzen ist.
- Auch Galileo Galilei (1564–1642, italienischer Universalgelehrter) beschäftigte sich mit dem 3-Würfel-Problem und fertigte eine Tabelle mit den 216 Wurfmustern an, als ihn ein italienischer Edelmann fragte, warum die 9 seltener als die 10 als Augensumme vorkommt.
- Trotz der augenscheinlichen Einfachheit des Problems konnte es auch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716, deutscher Universalgelehrter), der Begründer der Differential- und Integralrechnung, nicht lösen, da er die „Reihenfolge“ der Würfe nicht beachtete. Genau wie auf der vorigen Folie dargestellt, dachte auch Leibniz, dass es bei den gleichmöglichen Fällen (Laplace-Annahme) um 2-Kombinationen aus der 6-Menge $\{1;2;3;4;5;6\}$ geht.


Gerolamo Cardano


Galileo Galilei


Gottfried Wilhelm Leibniz

Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Sei A_k das Ereignis „k Richtige“ beim Lotto.
  $k \in \{0; 1; \ldots; 6\}$
- Wie wahrscheinlich sind „k Richtige“ beim Lotto?

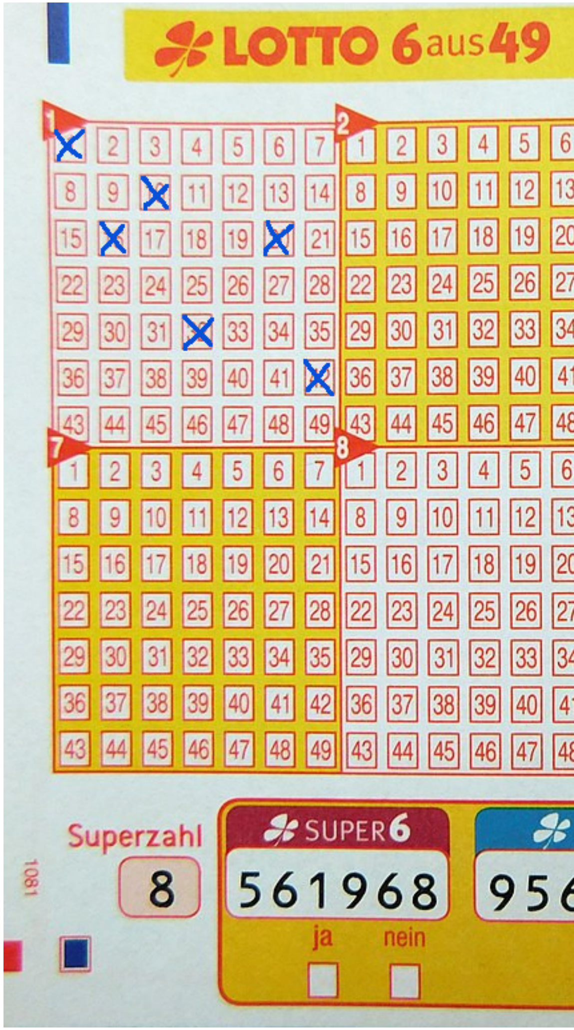
Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Sei A_k das Ereignis „k Richtige“ beim Lotto.
  $k \in \{0; 1; \ldots; 6\}$

- Wie wahrscheinlich sind „k Richtige“ beim Lotto?

- $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13.983.816$ Lottotipps.
  Ein Tipp ist eine 6-Teilmenge der 49-Menge $\{1; \ldots; 49\}$.



Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Sei A_k das Ereignis „k Richtige“ beim Lotto.
  $k \in \{0; 1; \ldots; 6\}$

- Wie wahrscheinlich sind „k Richtige“ beim Lotto?

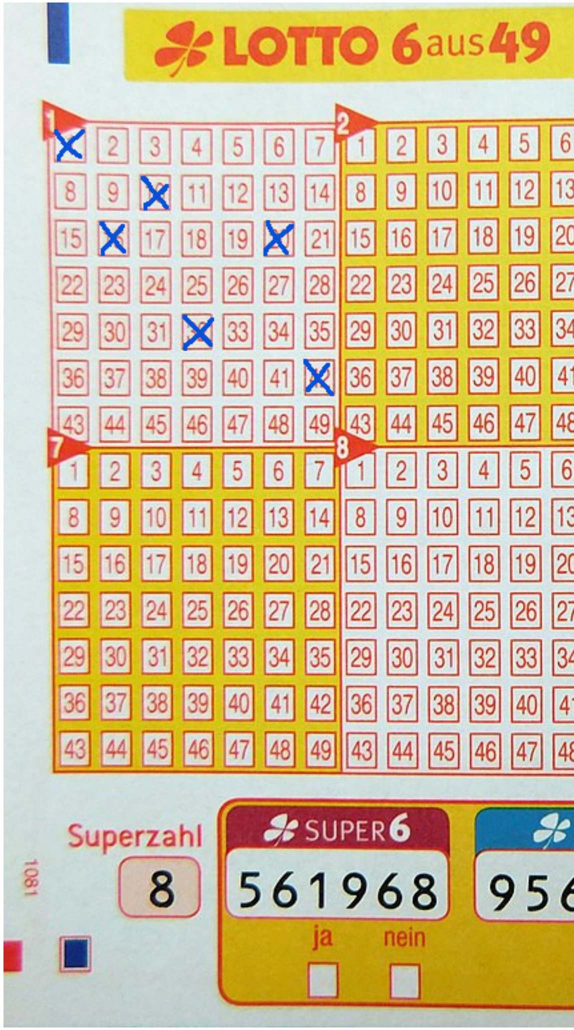
- $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13.983.816$ Lottotipps.
  Ein Tipp ist eine 6-Teilmenge der 49-Menge $\{1; \ldots; 49\}$.

- „k Richtige“ implizieren „$6 - k$ Unrichtige“.

- $|$„k Richtige“$| = \binom{6}{k}$

- $|$„k Unrichtige“$| = \binom{43}{6-k}$

➜ $|A_k| = \binom{6}{k}\binom{43}{6-k}$
Gemäß Zählprinzip.



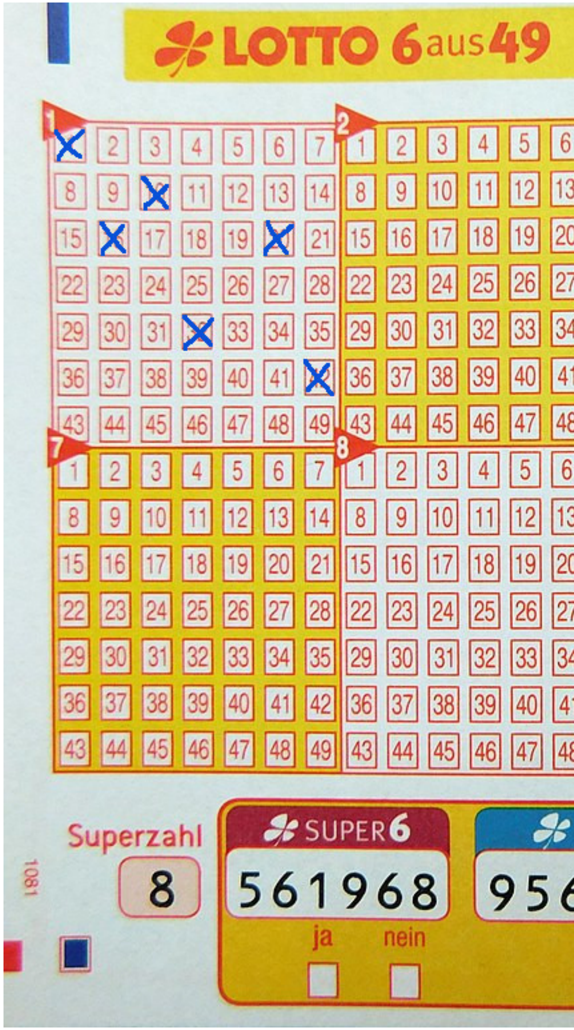
Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Sei A_k das Ereignis „k Richtige“ beim Lotto.
  $k \in \{0; 1; \ldots; 6\}$
- Wie wahrscheinlich sind „k Richtige“ beim Lotto?
- $|\Omega| = \binom{49}{6} = 13.983.816$ Lottotipps.
  Ein Tipp ist eine 6-Teilmenge der 49-Menge $\{1; \ldots; 49\}$.
- „k Richtige“ implizieren „$6-k$ Unrichtige“.
- $|$„k Richtige“$| = \binom{6}{k}$
- $|$„k Unrichtige“$| = \binom{43}{6-k}$

➜ $|A_k| = \binom{6}{k}\binom{43}{6-k}$
Gemäß Zählprinzip.

- $P(A_k) = \dfrac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$ für $k \in \{0; 1; \ldots; 6\}$.
- $P(A_6) = \frac{1}{13.983.816} = 0{,}0000000715$
- $P(A_0) = 0{,}436$



Kombinatorik für Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Die „Superzahl“ aus $\{0; \ldots ; 9\}$ wird zusätzlich gezogen.
- Sei A_k^+ das Ereignis „k Richtige mit Superzahl“ und A_k^- das Ereignis „k Richtige ohne Superzahl“.
- $|\Omega| = \binom{49}{6}\binom{10}{1}$
- $|A_k^+| = \binom{6}{k}\binom{43}{6-k}\binom{1}{1}$ und $|A_k^-| = \binom{6}{k}\binom{43}{6-k}\binom{9}{1}$
- $P(A_6^+) = \frac{1}{13.983.8160} = 0{,}0000000715$
- $P(A_6^-) = \frac{9}{13.983.8160} = 0{,}00000555$
- $P(A_0^-) = \frac{9}{13.983.8160} = 0{,}392$

Bemerkungen:

- In anderen Ländern sind andere Lotto-Formen üblich, etwa „6 aus 45“ in Österreich oder sogar „6 aus 90“ in Italien.