Kapitel PTS:V

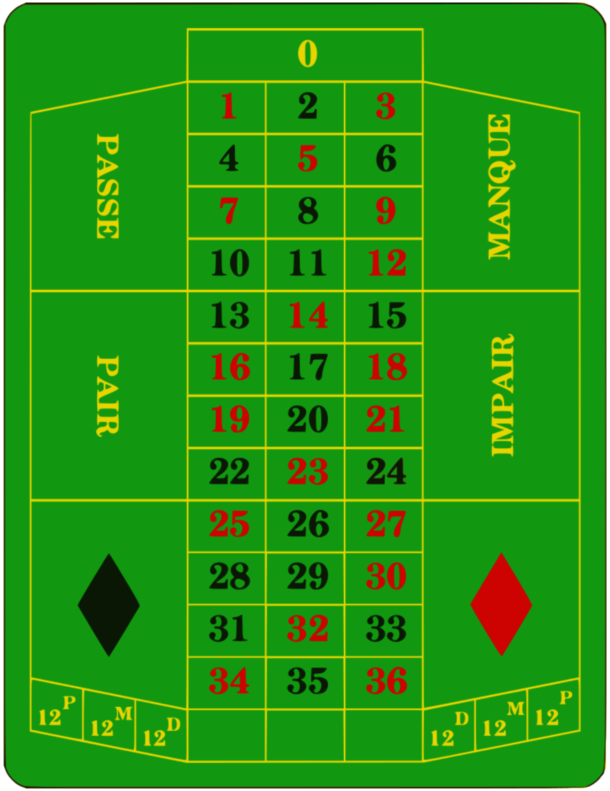
V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- ❑ Zufallsgrößen
- ❑ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ❑ Verteilungsfunktionen
- ❑ Multiple Zufallsgrößen
- ❑ Erwartungswerte
- ❑ Varianz und Standardabweichung
- ❑ Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- ❑ Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Erwartungswerte

Beispiel: Französisches Roulette

- Spielbanken erzielen Gewinne, weil die angebotenen Glücksspiele nicht „fair“ sind.



Erwartungswerte

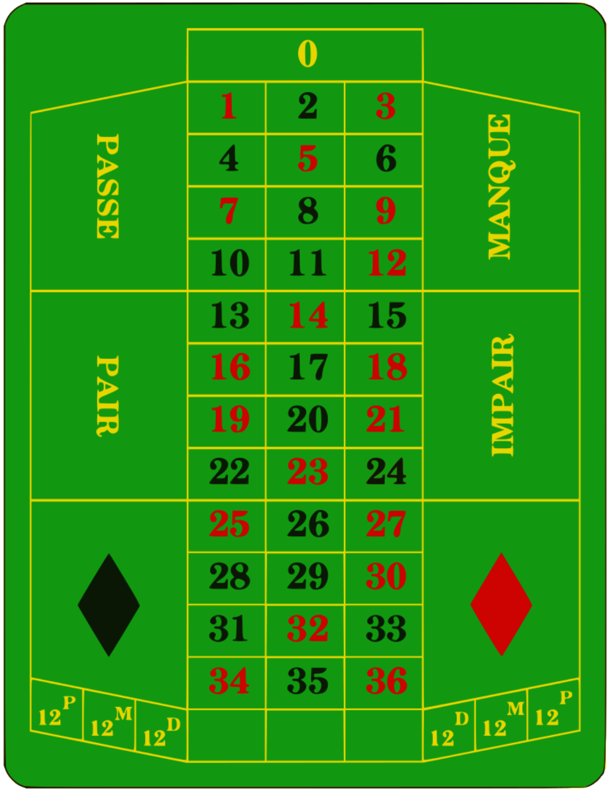
Beispiel: Französisches Roulette

- Spielbanken erzielen Gewinne, weil die angebotenen Glücksspiele nicht „fair“ sind.

- Bankgewinn bei Einsatz 1 Euros auf „Rot“:

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in \{0; 2; \ldots; 35\} \ , \\ -1 & \text{für } \omega \in \{1; 3; \ldots; 36\} \ . \end{cases}$$

- $P(X = 1) = \frac{19}{37} \ > \ P(X = -1) = \frac{18}{37}$



Erwartungswerte

Beispiel: Französisches Roulette

- Spielbanken erzielen Gewinne, weil die angebotenen Glücksspiele nicht „fair“ sind.

- Bankgewinn bei Einsatz 1 Euros auf „Rot“:

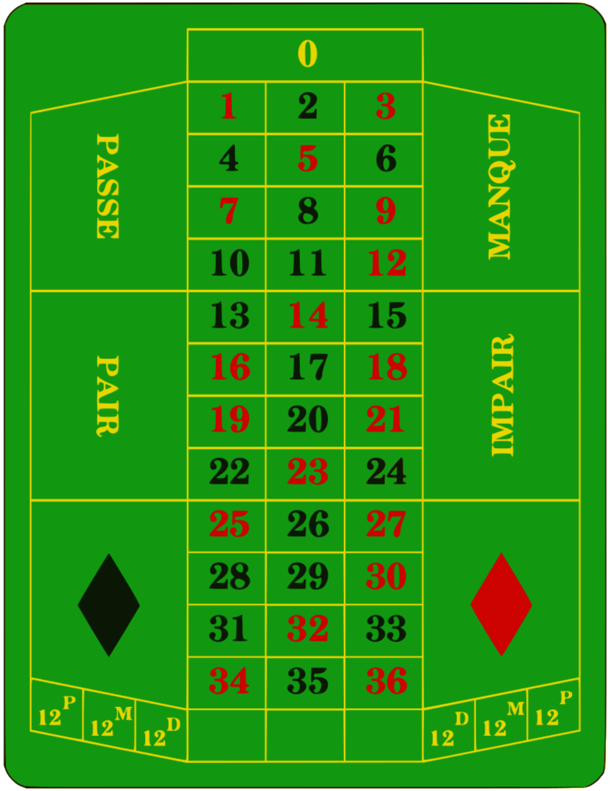
$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in \{0; 2; \ldots; 35\}\ , \\ -1 & \text{für } \omega \in \{1; 3; \ldots; 36\}\ . \end{cases}$$

- $P(X = 1) = \frac{19}{37} \ > \ P(X = -1) = \frac{18}{37}$

- Bei n Spielen gibt es n_1 Bankgewinne und n_2 Bankverluste mit $n = n_1 + n_2$.

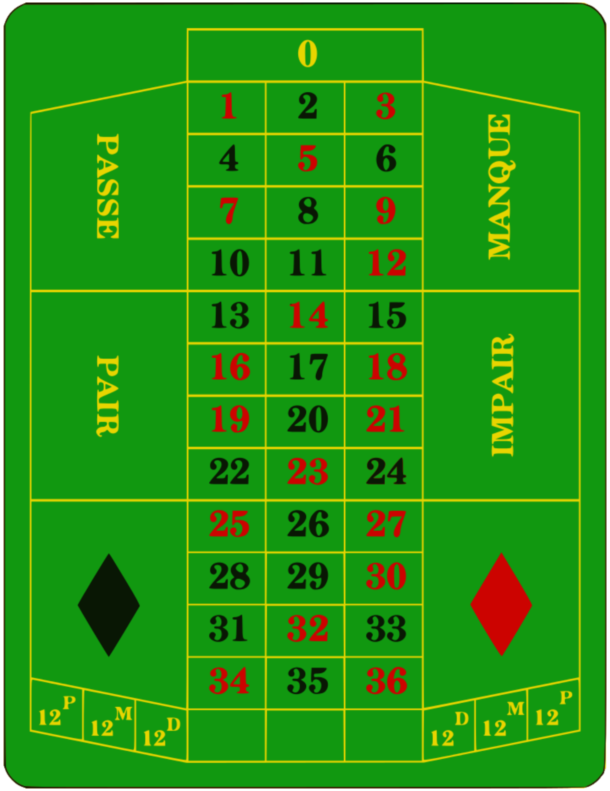
- Mittlerer Bankgewinn $\bar{x}$ pro Spiel:

$$\bar{x} \ = \ \frac{1 \cdot n_1 + (-1) \cdot n_2}{n} \ = \ 1 \cdot \frac{n_1}{n} + (-1) \cdot \frac{n_2}{n}$$



Erwartungswerte

Beispiel: Französisches Roulette



- Spielbanken erzielen Gewinne, weil die angebotenen Glücksspiele nicht „fair“ sind.

- Bankgewinn bei Einsatz 1 Euros auf „Rot“:

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in \{0; 2; \ldots; 35\} , \\ -1 & \text{für } \omega \in \{1; 3; \ldots; 36\} . \end{cases}$$

- $P(X = 1) = \frac{19}{37} \; > \; P(X = -1) = \frac{18}{37}$

- Bei n Spielen gibt es n_1 Bankgewinne und n_2 Bankverluste mit $n = n_1 + n_2$.

- Mittlerer Bankgewinn $\bar{x}$ pro Spiel:

$$\bar{x} \;=\; \frac{1 \cdot n_1 + (-1) \cdot n_2}{n} \;=\; 1 \cdot \frac{n_1}{n} + (-1) \cdot \frac{n_2}{n} \;=\; 1 \cdot \frac{19}{37} + (-1) \cdot \frac{18}{37} = \frac{1}{37} \;\approx\; 2{,}7 \text{ Cent} .$$

- Bei großem n sind die relativen Häufigkeiten $\frac{n_1}{n} \approx \frac{19}{37}$ und $\frac{n_2}{n} \approx \frac{18}{37}$.
  Hinterground: Statistisches Gesetz der großen Zahlen.

Bemerkungen:

- Die Bank erzielt an jedem eingesetzten Euro auf Rot bzw. Schwarz bei ausreichend vielen Spielen einen Gewinn von $2{,}7$ Cent. Analoge Überlegungen gelten auch für andere Setzmöglichkeiten, für andere Spiele in Casinos sowie beim Lotto.

- Das Geschäftsprinzip von Spielbanken und Lottogesellschaften ist folglich, so viele Kunden wie möglich anzulocken – im Schnitt wird die Spielbank bzw. die Lottogesellschaft pro Geschäftsjahr einen erheblichen Gewinn einfahren.

Erwartungswerte

Definition 8 (Erwartungswert einer Zufallsgröße)

Für eine Zufallsgröße X über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ heißt die Funktion

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_k \cdot P(X = x_k)$$

Erwartungswert von X; oft auch kurz geschrieben als

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i)\ .$$

Bemerkungen:

- Statt $E(X)$ schreibt man auch $\mu(X)$ oder kurz μ, wenn man nur eine Zufallsgröße betrachtet; bei mehreren Zufallsgrößen X_i ist auch die Bezeichnung $E(X_i) = \mu_i$ üblich.
- Christiaan Huygens (1629–1695, niederländischer Wissenschaftler) benutzte den Begriff des Erwartungswertes in seinem Buch „De Ratiociniis in Ludo Aleae“.
- Der Begriff *Erwartungswert* stammt aus dem Bereich der Glücksspiele.

  Man möchte wissen, wie die Gewinn- bzw. Verlustchancen für Spielende bzw. die Bank verteilt sind. Ein Spiel heißt *fair*, wenn als Einsatz gerade jener Betrag verlangt wird, der sich als Erwartungswert der Auszahlung Y an Spielende ergibt, also wenn $E(Y) =$ Einsatz gilt bzw. $E(Z) = 0$ für den Nettogewinn $Z = Y -$ Einsatz.

  Ist $E(Z) > 0$, so ist das Spiel für Spielende *günstig*; ist $E(Z) = 0$, so ist das Spiel *fair*; ist $E(Z) < 0$, so ist das Spiel für Spielende *ungünstig*.
- Eine anschauliche Deutung des Erwartungswertes einer Zufallsgröße ist, ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung als Massenverteilung zu interpretieren, also den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ punktförmige Massen m_i zuzuordnen, deren Gesamtmasse 1 ist. Dann gibt $E(X)$ die „Koordinate“ des Schwerpunktes an.

Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Für manche Zwecke ist eine zweite Darstellungsform von $E(X)$ günstiger. Sind die $\{\omega_i\}$ die verschiedenen Elementarereignisse des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega; P)$, über dem die Zufallsgröße X definiert ist, so gilt offensichtlich

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} X(\omega_j) \cdot P(\{\omega_j\}) \ ,$$

  wobei m die Mächtigkeit von Ω und $k \leq m$ ist.

- Der Erwartungswert ist ein Teil einer ganzen „Kette“ von Kenngrößen zur Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße. Allgemein bezeichnet man $E(X^k)$ als Moment der k-ten Ordnung oder k-tes Moment der Zufallsgröße X, wenn $E(X^k)$ existiert. Das k-te absolute Moment ist entsprechend $E(|X|^k)$.

- Der Begriff der Momente stammt von der Betrachtung von Kräftegleichgewichten bei Waagen ab und wurde wohl schon im 16. Jahrhundert dort verwendet.

  Die Existenz der Momente bestimmter Ordnung liefert Informationen zur Verteilung der Wahrscheinlichkeitsmasse: 1-tes Moment als Erwartungswert, 2-tes Moment als Quasi-Anzeichen dafür, wie verschieden/verzerrt die Werte sind, usw.

  Die Varianz ist noch ein Repräsentant sogenannter zentraler Momente.

Erwartungswerte

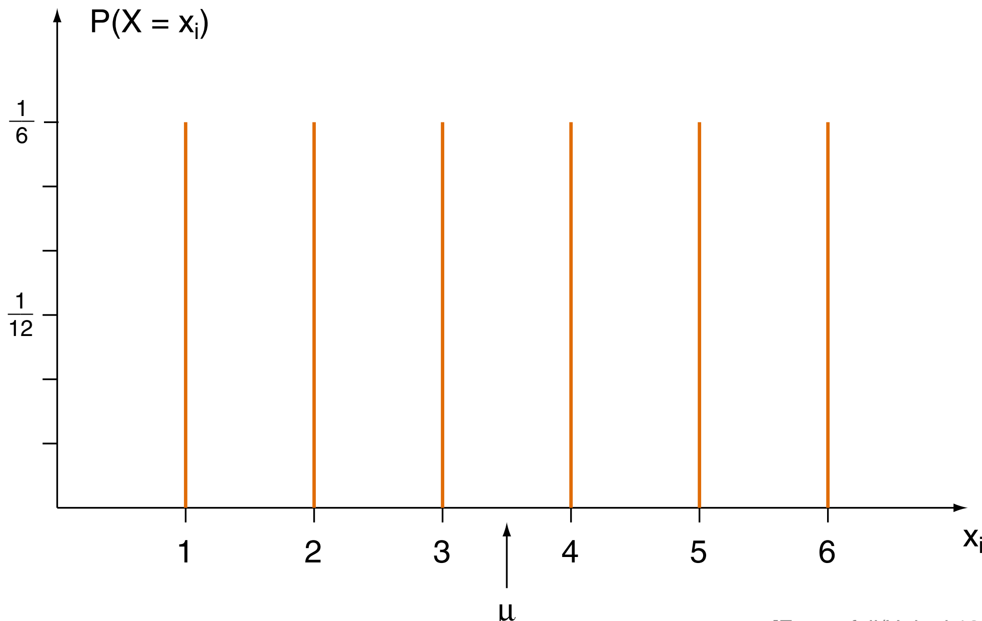
Beispiel: Augenzahl X beim Werfen eines Laplace-Würfels

- Alle sechs Ergebnisse treten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ ein, so dass

$$E(X) \;=\; 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} \;=\; 3{,}5\ .$$

- Der Erwartungswert muss kein ein Element der Wertemenge von X sein, wird aber als Mittelwert längerer Wurfserien näherungsweise erwartet: $E(X) \approx 3{,}5$.

- Veranschaulichung in Analogie zum Schwerpunkt der Massenverteilung:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Erwartungswerte

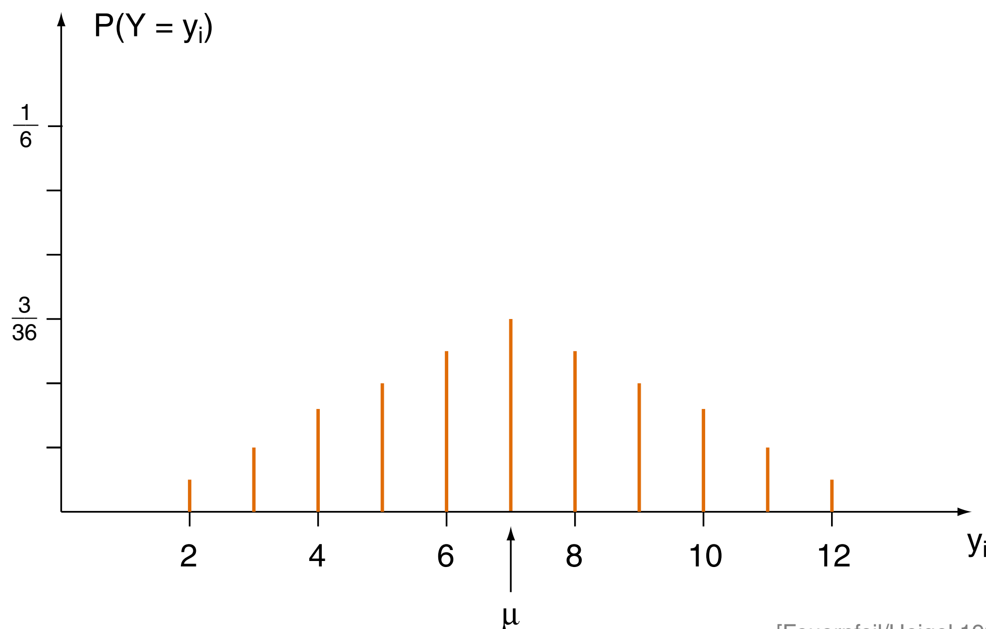
Beispiel: Augensumme Y beim zweimaligen Laplace-Würfelwurf

- Aufgrund der Augensummenverteilung ergibt sich

$$E(Y) \;=\; (2+12)\cdot\frac{1}{36}+(3+11)\cdot\frac{2}{36}+(4+10)\cdot\frac{3}{36}+(5+9)\cdot\frac{4}{36}+(6+8)\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36} \;=\; 7.$$

- Der Erwartungswert der Augensumme Y eines zweimaligen Würfelwurfs ist genau doppelt so groß wie die Augenzahl X eines einmaligen Wurfs.

- Veranschaulichung in Analogie zum Schwerpunkt der Massenverteilung:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Erwartungswerte

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

- Spieler:in A wirft drei Laplace-Münzen, Spieler:in B zwei.
- Die Spieler:in, bei deren Münzen mehr Köpfe fallen, erhält alle fünf, bei gleicher Zahl an Köpfen bekommt sie B.
- Ist das Spiel für A günstig, ungünstig, oder ist es fair?

Erwartungswerte

Beispiel: Münzwurfglücksspiel

- Spieler:in A wirft drei Laplace-Münzen, Spieler:in B zwei.
- Die Spieler:in, bei deren Münzen mehr Köpfe fallen, erhält alle fünf, bei gleicher Zahl an Köpfen bekommt sie B.
- Ist das Spiel für A günstig, ungünstig, oder ist es fair?
- In der entsprechenden Übungsaufgabe wurde gezeigt, dass A mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine größere Zahl an Köpfen wirft als B.
- Die Gegenwahrscheinlichkeit ist somit auch $\frac{1}{2}$ und es ergibt sich für den Nettogewinn Z von A daher

$$E(Z) \;=\; 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \;=\; -\frac{1}{2}\,.$$

- Das Spiel ist für A also nicht günstig.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Konstante

Ist eine Zufallsgröße X derart „degeneriert", dass sie nur einen einzigen Wert $a \in \mathbf{R}$ mit $P(X = a) = 1$ annimmt, gilt

Satz 9 (Erwartungswert einer Konstanten)

Der Erwartungswert einer Konstanten $a \in \mathbf{R}$ ist gleich dieser Konstanten: $E(a) = a$.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Linearität

- Zufallsgrößen können Funktionen anderer Zufallsgrößen sein:
  Y kann als Skalierung der Werte von X interpretiert werden.

$$Y = aX + b \quad \text{für } a, b \in \mathbf{R}$$

- Seien $a = \frac{1}{2}$ und $b = 2$, so dass $Y = \frac{1}{2}X + 2$, dann ergibt sich für eine Zufallsgröße X mit Wertemenge $W_X = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ folgende Zuordnung:

x_i	-4	-2	0	2	4
$\frac{1}{2}x_i + 2$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
y_i	0	1	2	3	4

- Gegeben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für X, wird man erwarten, dass in der neuen Skala $E(Y) = \frac{1}{2}E(X) + 2$.

- Verallgemeinert:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Linearität

Satz 10 (Linearität des Erwartungswertes)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$. Dann gilt für $aX + b$ mit $a,b \in \mathbf{R}$:

$$E(aX + b) = aE(X) + b \, .$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Linearität

Satz 10 (Linearität des Erwartungswertes)

Sei X eine Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$. Dann gilt für $aX + b$ mit $a,b \in \mathbf{R}$:

$$E(aX + b) = aE(X) + b \, .$$

Herleitung:

- Seien X und $Y = aX + b$ für $a, b \in \mathbf{R}$ Zufallsgrößen.
- Es gilt $y_i = ax_i + b$ und $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E(aX + b) \; &= \; E(Y) \; = \; \sum_{i=1}^{k} y_i P(Y = y_i) \; = \; \sum_{i=1}^{k} (ax_i + b) P(X = x_i) \\ &= \; a \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) \; + \; b \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) \\ &= \; aE(X) + b \, , \quad \text{da } b \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = b \cdot 1 \text{ im letzten Schritt.} \end{aligned}$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Was ist der Erwartungswert $E(X + Y)$ der Summe zweier Zufallsgrößen?

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Was ist der Erwartungswert $E(X+Y)$ der Summe zweier Zufallsgrößen?

Fall 1: X und Y sind unabhängig

- Der Erwartungswert der Augensumme beim zweimaligen Würfeln entspricht der Summe der Erwartungswerte jedes Wurfs.

Fall 2: X und Y sind abhängig.

- Sei $Y = X$, dann sind X und Y total abhängig und es gilt:

$$E(X+Y) \;=\; E(X+X) \;=\; E(2X) \;=\; 2 \cdot E(X) \;=\; E(X) + E(X)\;.$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Satz 11 (Addivität des Erwartungswertes / Summenregel)

Der Erwartungswert der Summe zweier abhängiger oder unabhängiger Zufallsgrößen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich der Summe der Erwartungswerte:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \; .$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Satz 11 (Addivität des Erwartungswertes / Summenregel)

Der Erwartungswert der Summe zweier abhängiger oder unabhängiger Zufallsgrößen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich der Summe der Erwartungswerte:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)\ .$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{m} (X(\omega_i) + Y(\omega_i)) \cdot P(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} X(\omega_i) \cdot P(\{\omega_i\}) \ + \ \sum_{i=1}^{m} Y(\omega_i) \cdot P(\{\omega_i\}) \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Dank dieser Summenregel kann man sich manchmal die mühsame Konstruktion der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Summenverteilung ersparen, wenn es nur um den Erwartungswert der Summe geht.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Additivität / Summenregel

Mit den Sätzen 10 und 11 folgt

Satz 12 (Erwartungswert einer Linearkombination von Zufallsgrößen)

Für den Erwartungswert der Linearkombination $a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ ($a_i \in \mathbf{R}$) von n abhängigen oder unabhängigen Zufallsgrößen X_i auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ gilt:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) \;=\; a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \ldots + a_nE(X_n)\ .$$

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen n Personen auf das Vorliegen einer Krankheit getestet werden.
- Um Zeit- und Kosten zu sparen, werden Teile jeder Probe gemischt und der Test auf das Gemisch angewendet.
- Ist der Test für das Gemisch positiv, werden die n Proben einzeln untersucht.
- Wie viele Untersuchungen sind bei festem n im Schnitt durchzuführen, wenn p die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Einzelprobe positiv ist?

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen n Personen auf das Vorliegen einer Krankheit getestet werden.
- Um Zeit- und Kosten zu sparen, werden Teile jeder Probe gemischt und der Test auf das Gemisch angewendet.
- Ist der Test für das Gemisch positiv, werden die n Proben einzeln untersucht.
- Wie viele Untersuchungen sind bei festem n im Schnitt durchzuführen, wenn p die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Einzelprobe positiv ist?

- Sei X die Anzahl der notwendigen Untersuchungen.
- $X = 1$ („alle n Proben sind negativ“): $P(X = 1) = (1 - p)^n$
- $X = n + 1$ („mindestens 1 Probe ist positiv“): $P(X = n + 1) = 1 - (1 - p)^n$
- Daraus folgt:

$$E(X) \;=\; 1 \cdot (1-p)^n + (n+1) \cdot (1 - (1-p)^n) \;=\; n + 1 - n(1-p)^n \,.$$

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen $N > n$ Personen getestet werden.
- Bei welcher Aufteilung der N Proben in m Gruppen zu je n Proben, so dass $N = m \cdot n$, wird die Anzahl an Probenuntersuchungen minimal?

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen $N > n$ Personen getestet werden.
- Bei welcher Aufteilung der N Proben in m Gruppen zu je n Proben, so dass $N = m \cdot n$, wird die Anzahl an Probenuntersuchungen minimal?
- Sei X_i die Anzahl der notwendigen Untersuchungen in Gruppe i.
- Dann ist

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_m) &= m \cdot E(X) = \frac{N}{n} \cdot E(X) \\ &= \frac{N}{n} \cdot (n + 1 - n(1-p)^n) \\ &= N \cdot \left(\frac{1}{n} + 1 - (1-p)^n \right) . \end{aligned}$$

Erwartungswerte

Beispiel: Medizinische Pooling-Tests

- Es sollen $N > n$ Personen getestet werden.
- Bei welcher Aufteilung der N Proben in m Gruppen zu je n Proben, so dass $N = m \cdot n$, wird die Anzahl an Probenuntersuchungen minimal?
- Sei X_i die Anzahl der notwendigen Untersuchungen in Gruppe i.
- Dann ist
$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_m) &= m \cdot E(X) = \frac{N}{n} \cdot E(X) \\ &= \frac{N}{n} \cdot (n + 1 - n(1-p)^n) \\ &= N \cdot \left(\frac{1}{n} + 1 - (1-p)^n \right) . \end{aligned}$$
- Gesucht: Dasjenige n, das die letzte Klammer für ein gegebenes p minimiert.
- Beispiel: $p = 1\%$ (positive Tests sind selten)

n	2	5	10	$\mathbf{11}$	12	20
$1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n$	$0{,}5199$	$0{,}2490$	$0{,}19562$	$\mathbf{0{,}19557}$	$0{,}1969$	$0{,}2321$

Bemerkungen:

- Bestimmung der Extremwerte:
  - Nullstellen der ersten Ableitung zeigen einen oder mehrere Extremwerte an, z.B. n_0.
  - Ist der Wert der zweiten Ableitung beim Extremwert n_0 kleiner als 0, handelt es sich um ein lokales Maximum.
- Plot der ersten Ableitung für das Beispiel $p = 1\%$.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Was ist der Erwartungswert $E(X \cdot Y)$ des Produkts zweier Zufallsgrößen?

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Was ist der Erwartungswert $E(X \cdot Y)$ des Produkts zweier Zufallsgrößen?

Fall 1: X und Y sind unabhängig.

x_i, y_i, z_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(Z_1 = z_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

- Beispiel: Zweifacher Münzwurf.
- X steht für die erste zweier Münzen, wobei $X = 0$ Kopf und $X = 1$ Zahl denotiert.
- Y steht analog für die zweite Münze.
- $Z_1 = X \cdot Y$ ist das Produkt beider.
- Da $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$ und $E(Z_1) = \frac{1}{4} = E(X) \cdot E(Y)$, liegt die Vermutung nahe, dass unabhängige Zufallsvariablen multiplikativ sind.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Was ist der Erwartungswert $E(X \cdot Y)$ des Produkts zweier Zufallsgrößen?

x_i, y_i, z_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P(Z_1 = z_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$P(Z_2 = z_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fall 1: X und Y sind unabhängig.

- Beispiel: Zweifacher Münzwurf.
- X steht für die erste zweier Münzen, wobei $X = 0$ Kopf und $X = 1$ Zahl denotiert.
- Y steht analog für die zweite Münze.
- $Z_1 = X \cdot Y$ ist das Produkt beider.
- Da $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$ und $E(Z_1) = \frac{1}{4} = E(X) \cdot E(Y)$, liegt die Vermutung nahe, dass unabhängige Zufallsvariablen multiplikativ sind.

Fall 2: X und Y sind abhängig.

- Seien die Münzen am Rand zu einer fairen „Doppelmünze“ verschweißt (Z_2).
- Da $X = Y$, ist $E(Z_2) = E(X \cdot X) = E(X^2) = E(X) = \frac{1}{2} \neq E(X) \cdot E(X) = \frac{1}{4}$.
- Das widerlegt, dass die Produktregel allgemein gültig ist.

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Satz 13 (Multiplikativität des Erwartungswertes / Produktregel)

Der Erwartungswert des Produktes zweier unabhängiger Zufallsgrößen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \; .$$

Erwartungswerte

Rechenregeln: Multiplikativität / Produktregel

Satz 13 (Multiplikativität des Erwartungswertes / Produktregel)

Der Erwartungswert des Produktes zweier unabhängiger Zufallsgrößen X, Y auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ ist gleich dem Produkt der Erwartungswerte:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \,.$$

Herleitung:

- Seien $W_X = \{x_1; \ldots ; x_k\}$ und $W_Y = \{y_1; \ldots ; y_l\}$ Wertemenge zweier unabhängiger Zufallsgrößen X und Y mit $p_i = P(X = x_i)$ und $q_j = P(Y = y_j)$:

$$\begin{aligned}
E(X \cdot Y) &= \quad x_1 y_1 p_1 q_1 + x_1 y_2 p_1 q_2 + \ldots + x_1 y_l p_1 q_l \\
&\quad + x_2 y_1 p_2 q_1 + x_2 y_2 p_2 q_2 + \ldots + x_2 y_l p_2 q_l \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + x_k y_1 p_k q_1 + x_k y_2 p_k q_2 + \ldots + x_k y_l p_k q_l \\
&= (x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k) \cdot (y_1 q_1 + y_2 q_2 + \ldots + y_l q_l) \\
&= E(X) \cdot E(Y) \,.
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Umkehrung von Satz 13 gilt nicht (siehe Übungsaufgabe).
- Die Produktregel kann auf beliebig viele unabhängige Zufallsgrößen verallgemeinert werden.