Kapitel PTS:II

II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisräume
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiel: Würfelspiel „Vier Mal keine Sechs“

- Experiment: Ein Würfel wird viermal geworfen.
- Glücksspiel: Wette, dass keine Sechs fällt.
- Frage: Ist dieses Glücksspiel für die „Bank“ interessant?
  Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnereignis?

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiel: Würfelspiel „Vier Mal keine Sechs“

- Experiment: Ein Würfel wird viermal geworfen.
- Glücksspiel: Wette, dass keine Sechs fällt.
- Frage: Ist dieses Glücksspiel für die „Bank“ interessant?
  Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnereignis?

Ereignis im Experiment	Ergebnisse	„Erwartung“
Keine 6 bei einem Wurf	5 von 6 Ergebnissen	

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiel: Würfelspiel „Vier Mal keine Sechs“

- Experiment: Ein Würfel wird viermal geworfen.
- Glücksspiel: Wette, dass keine Sechs fällt.
- Frage: Ist dieses Glücksspiel für die „Bank“ interessant?
  Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnereignis?

Ereignis im Experiment	Ergebnisse	„Erwartung“
Keine 6 bei einem Wurf	5 von 6 Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \frac{5}{6}$
Keine 6 bei zwei Würfen		

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiel: Würfelspiel „Vier Mal keine Sechs“

- Experiment: Ein Würfel wird viermal geworfen.
- Glücksspiel: Wette, dass keine Sechs fällt.
- Frage: Ist dieses Glücksspiel für die „Bank“ interessant?
  Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnereignis?

Ereignis im Experiment	**Ergebnisse**	**„Erwartung“**
Keine 6 bei einem Wurf	5 von 6 Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \frac{5}{6}$
Keine 6 bei zwei Würfen	$5 \cdot 5$ von $6 \cdot 6$ Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \frac{25}{36}$
Keine 6 bei drei Würfen		

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiel: Würfelspiel „Vier Mal keine Sechs“

- Experiment: Ein Würfel wird viermal geworfen.
- Glücksspiel: Wette, dass keine Sechs fällt.
- Frage: Ist dieses Glücksspiel für die „Bank“ interessant?
  Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnereignis?

Ereignis im Experiment	Ergebnisse	„Erwartung“
Keine 6 bei einem Wurf	5 von 6 Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \frac{5}{6}$
Keine 6 bei zwei Würfen	$5 \cdot 5$ von $6 \cdot 6$ Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \frac{25}{36}$
Keine 6 bei drei Würfen	5^3 von 6^3 Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$
Keine 6 bei vier Würfen	5^4 von 6^4 Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiel: Würfelspiel „Vier Mal keine Sechs“

- Experiment: Ein Würfel wird viermal geworfen.
- Glücksspiel: Wette, dass keine Sechs fällt.
- Frage: Ist dieses Glücksspiel für die „Bank“ interessant?
  Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Gewinnereignis?

Ereignis im Experiment	**Ergebnisse**	**„Erwartung“**	
Keine 6 bei einem Wurf	5 von 6 Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \frac{5}{6}$	$\approx 0{,}833$
Keine 6 bei zwei Würfen	$5 \cdot 5$ von $6 \cdot 6$ Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \frac{25}{36}$	$\approx 0{,}694$
Keine 6 bei drei Würfen	5^3 von 6^3 Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$	$\approx 0{,}579$
Keine 6 bei vier Würfen	5^4 von 6^4 Ergebnissen	$h_n(\overline{\{6\}}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$	$\approx 0{,}482$

➜ Die „Erwartung“ entspricht der statistischen Wahrscheinlichkeit.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Anteilsregel

Die Chance für das Eintreten eines Ereignisses ist der Anteil der für das Ereignis günstigen Fälle an den möglichen Fällen.

Pierre de Fermat

Blaise Pascal

Bemerkungen:

- Pierre de Fermat (1601–1665, französischer Parlamentsrat) und Blaise Pascal (1623–1662, autodikatisch gebildeter französischer Mathematiker) aber auch andere Mathematiker berechneten bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts immer nur spezielle Chancenverhältnisse bei Glücksspielproblemen, ohne jedoch den Begriff der Wahrscheinlichkeit einzuführen.
- Mitte des 17. Jahrhunderts wurde dann langsam das Nachdenken über Chancenverhältnisse in der Glücksspielrechnung durch den Begriff der Wahrscheinlichkeit abgelöst.
- Glücksspielinteressierte suchten bei Mathematikern nach Rat zu Gewinnstrategien bzw. -aussichten und gaben damit den Anstoß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Antoine Gombaud, selbsternannter „Chevalier de Mére“ (1607–1684), gab Pascal den Anlass, mit Fermat über Glücksspiele zu korrespondieren.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit

„Die Wahrscheinlichkeit ist ein *Grad der Sicherheit* und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen. Sei zum Beispiel angenommen, die gesamte und absolute Sicherheit, die ich mit dem Buchstaben a oder mit der Einheit 1 bezeichne, bestehe aus fünf Wahrscheinlichkeiten oder Teilen, von denen drei für die gegenwärtige oder die zukünftige Existenz irgendeines Ereignisses stehen, die restlichen dagegen, so soll dieses Ereignis $\frac{3}{5}a$ oder $\frac{3}{5}$ der Sicherheit besitzen." [Ars Conjectandi 1713]

Jakob Bernoulli

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Definition 8 (Laplace-Wahrscheinlichkeit oder Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff)
Wird jedem Elementarereignis eines endlichen Ergebnisraums Ω die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet, so gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Elementarereignisse}} \, .$$

Pierre Simon de Laplace

Bemerkungen:

- Der Begriff der Wahrscheinlichkeit nach Bernoulli noch sehr „verschwommen“.
- Pierre Simon de Laplace (1749–1827, französischer Mathematiker) präzisierte die Begriffsfindung im Jahr 1812 und gab als Erster eine formale Definition für Wahrscheinlichkeit an. Dieser Definition liegt explizit die *Gleichmöglichkeit* oder *Gleichwahrscheinlichkeit* der Ergebnisse aus dem Ergebnisraum zugrunde.
- Bei einem geeichten Casino-Würfel (geometrisch symmetrisch, homogenes Material, usw.) wird jede Seite gleich möglich sein, also mit der gleichen Wahrscheinlichkeit oben liegen. Dabei ist *gleich möglich* einfach ein anderer Ausdruck für *gleich wahrscheinlich*. Speziell gibt es keinen Grund zur Annahme, dass irgendeine Augenzahl auf lange Sicht häufiger als eine andere auftritt. Bei Laplace heißt diese Annahme Prinzip des unzureichenden Grundes.
- Wenn „Zufallsgeräte“ ohne erkennbare Unsymmetrien genutzt werden, neigen wir auch dann oft zur Annahme, dass bei häufiger Wiederholung alle Ergebnisse gleich häufig vorkommen (vergleiche mit dem statistischen Gesetz der großen Zahlen). Mischen wir beispielsweise die Kugeln in einer nicht einsehbaren Urne vor dem Ziehen gut durch, so wird eine zufällige Anordnung erzeugt, so dass wir nicht erwarten würden, ein bestimmte Kugel bevorzugt zu ziehen.

Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Vergleich mit der Anteilsregel von Fermat und Pascal: Auch sie berechneten schon im Prinzip solche Wahrscheinlichkeiten, mussten sich wegen der fest vorgegebenen Glücksspielszenarien, bei denen die eingesetzten „Zufallsgeräte" immer als „fair" angenommen werden, aber noch nicht damit beschäftigen, ob und wann kein Grund für eine Abweichung vom Prinzip des unzureichenden Grundes vorliegt.

- P kommt vom lateinischen Wort *probabilitas* (Wahrscheinlichkeit).

- Originaldefinition von Laplace in etwa: „Die Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines Ereignisses ist also nichts anderes als das Verhältnis der Anzahl der *günstigen* Fälle zu der aller *möglichen* Fälle, wenn wir außerdem keinen Grund sehen, weswegen einer dieser Fälle leichter einträte als ein anderer."

- Von der Glücksspielrechnung sind wir also zur Quantifizierung des Wahrscheinlichen in besonderen Situationen gekommen.

- Eigentlich ist es aber auch keine streng mathematische Definition. Es wird ja der Begriff der *Wahrscheinlichkeit* unter Rückgriff auf die *Gleichwahrscheinlichkeit* definiert. Eigentlich also eine nicht so gelungene „Zirkelschluss"definition.

- Die Definition ist letztlich nur in speziellen Situationen anwendbar. Bei einem inhomogenen Würfel oder bei Jungen- vs. Mädchengeburten ist die Gleichwahrscheinlichkeit nicht gegeben.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit

- Zufallsexperimente, bei denen alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich auftreten, werden heute Laplace-Experimente genannt.
- Wahrscheinlichkeiten, die sich unter Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit von Elementarereignissen berechnen, heißen Laplace-Wahrscheinlichkeiten.
- „Zufallsgeräte“, mit denen ein Laplace-Experiment durchgeführt werden kann, erhalten das Präfix „Laplace-“ (Laplace-Würfel, Laplace-Münze, usw.); umgangsprachlich werden sie als „fair“, „echt“, oder „einwandfrei“ bezeichnet.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit

- Zufallsexperimente, bei denen alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich auftreten, werden heute Laplace-Experimente genannt.
- Wahrscheinlichkeiten, die sich unter Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit von Elementarereignissen berechnen, heißen Laplace-Wahrscheinlichkeiten.
- „Zufallsgeräte“, mit denen ein Laplace-Experiment durchgeführt werden kann, erhalten das Präfix „Laplace-“ (Laplace-Würfel, Laplace-Münze, usw.); umgangsprachlich werden sie als „fair“, „echt“, oder „einwandfrei“ bezeichnet.
- Ob ein Zufallsexperiment ein Laplace-Experiment ist, kann nicht mit den Mitteln der Mathematik entschieden werden; es handelt sich vielmehr um eine physikalische Eigenschaft, die mit Hilfe der Laplace-Annahme formuliert wird.
- Die durch die Laplace-Annahme erhaltenen Wahrscheinlichkeiten sind dann Richtwerte für die relativen Häufigkeiten bei sehr vielen Versuchen.
- Solche Richtwerte sind Wahrscheinlichkeiten, die a priori bestimmt werden können, falls das Experiment keine offensichtlichen Asymmetrien aufweist.
  „a priori“ bedeutet bevor viele Versuche durchgeführt werden.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Folgerungen

Satz 9

Die klassische Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A mit Ergebnisraum Ω ist eine rationale Zahl, die die Ungleichung $0 \leq P(A) \leq 1$ erfüllt. Insbesondere ist $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Folgerungen

Satz 9

Die klassische Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A mit Ergebnisraum Ω ist eine rationale Zahl, die die Ungleichung $0 \leq P(A) \leq 1$ erfüllt. Insbesondere ist $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$.

Aus der Beziehung $|\Omega| = |A| + |\bar{A}|$ erhält man nach Division durch $|\Omega|$:

Satz 10

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A und des Gegenereignisses $\bar{A}$ ergänzen sich zu $1 = P(A) + P(\bar{A})$.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Folgerungen

Satz 9

Die klassische Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A mit Ergebnisraum Ω ist eine rationale Zahl, die die Ungleichung $0 \leq P(A) \leq 1$ erfüllt. Insbesondere ist $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$.

Aus der Beziehung $|\Omega| = |A| + |\bar{A}|$ erhält man nach Division durch $|\Omega|$:

Satz 10

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A und des Gegenereignisses $\bar{A}$ ergänzen sich zu $1 = P(A) + P(\bar{A})$.

Zerlegt man ein Ereignis A in die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$, so ist $|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$.
Nach Division durch $|\Omega|$ erhält man:

Satz 11

Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ eine Zerlegung des Ereignisses A, so gilt die Additionsregel $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m)$.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

- Unter der Laplace-Annahme lässt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A „berechnen“.

- Voraussetzungen:
  - Kenntnis der Mächtigkeit $|\Omega|$ des Ergebnisraums Ω.
  - Kenntnis der Mächtigkeit $|A|$ des fraglichen Ereignisses A.

- In einfachen Fällen genügt manuelles Aufschreiben und Abzählen.
  Bei umfangreichen oder variabel mächtigen Ergebnisräumen benötigt man die Kombinatorik.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

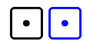
- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

- Ergebnisraum: 

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

- Ergebnisraum: 

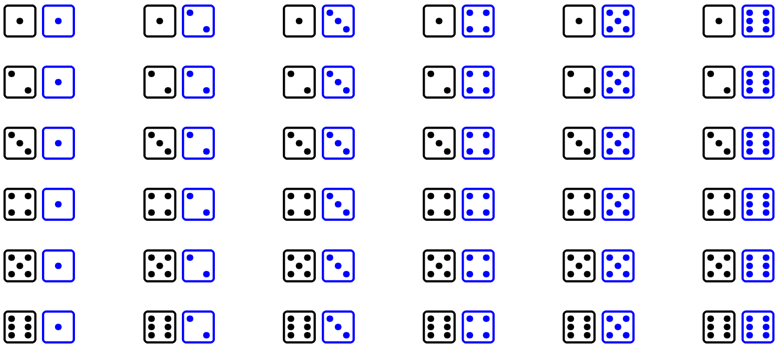
Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

- Ergebnisraum:



Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

- Ergebnisraum:

$$\begin{array}{lllllll}\Omega = \{ & (1;1); & (1;2); & (1;3); & (1;4); & (1;5); & (1;6); \\ & (2;1); & (2;2); & (2;3); & (2;4); & (2;5); & (2;6); \\ & (3;1); & (3;2); & (3;3); & (3;4); & (3;5); & (3;6); \\ & (4;1); & (4;2); & (4;3); & (4;4); & (4;5); & (4;6); \\ & (5;1); & (5;2); & (5;3); & (5;4); & (5;5); & (5;6); \\ & (6;1); & (6;2); & (6;3); & (6;4); & (6;5); & (6;6) \quad \}\end{array}$$

$$|\Omega| = 36$$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

- Ergebnisraum:

$$\begin{aligned}\Omega = \{ \; & (1;1); \; (1;2); \; (1;3); \; (1;4); \; (1;5); \; (1;6); \\ & (2;1); \; (2;2); \; (2;3); \; (2;4); \; (2;5); \; (2;6); \\ & (3;1); \; (3;2); \; (3;3); \; (3;4); \; (3;5); \; (3;6); \\ & (4;1); \; (4;2); \; (4;3); \; (4;4); \; (4;5); \; (4;6); \\ & (5;1); \; (5;2); \; (5;3); \; (5;4); \; (5;5); \; (5;6); \\ & (6;1); \; (6;2); \; (6;3); \; (6;4); \; (6;5); \; (6;6) \; \}\end{aligned}$$

$$|\Omega| = 36$$

- $A =$ „Mindestens eine Sechs“

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

- Ergebnisraum:

$$\Omega = \{ \begin{array}{llllll} (1;1); & (1;2); & (1;3); & (1;4); & (1;5); & (1;6); \\ (2;1); & (2;2); & (2;3); & (2;4); & (2;5); & (2;6); \\ (3;1); & (3;2); & (3;3); & (3;4); & (3;5); & (3;6); \\ (4;1); & (4;2); & (4;3); & (4;4); & (4;5); & (4;6); \\ (5;1); & (5;2); & (5;3); & (5;4); & (5;5); & (5;6); \\ (6;1); & (6;2); & (6;3); & (6;4); & (6;5); & (6;6) \end{array} \}$$

$$|\Omega| = 36$$

- $A =$ „Mindestens eine Sechs“ ➜ $|A| = 11$ ➜ $P(A) = \frac{11}{36}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

- Ergebnisraum:
$$\Omega = \{ \begin{array}{cccccc} (1;1); & (1;2); & (1;3); & (1;4); & (1;5); & (1;6); \\ (2;1); & (2;2); & (2;3); & (2;4); & (2;5); & (2;6); \\ (3;1); & (3;2); & (3;3); & (3;4); & (3;5); & (3;6); \\ (4;1); & (4;2); & (4;3); & (4;4); & (4;5); & (4;6); \\ (5;1); & (5;2); & (5;3); & (5;4); & (5;5); & (5;6); \\ (6;1); & (6;2); & (6;3); & (6;4); & (6;5); & (6;6) \end{array} \}$$
$$|\Omega| = 36$$

- $A =$ „Mindestens eine Sechs“ ➜ $|A| = 11$ ➜ $P(A) = \frac{11}{36}$

- $B =$ „Höchstens eine Sechs“

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel

- Ergebnisraum:

$$\Omega = \{ \begin{array}{llllll} (1;1); & (1;2); & (1;3); & (1;4); & (1;5); & (1;6); \\ (2;1); & (2;2); & (2;3); & (2;4); & (2;5); & (2;6); \\ (3;1); & (3;2); & (3;3); & (3;4); & (3;5); & (3;6); \\ (4;1); & (4;2); & (4;3); & (4;4); & (4;5); & (4;6); \\ (5;1); & (5;2); & (5;3); & (5;4); & (5;5); & (5;6); \\ (6;1); & (6;2); & (6;3); & (6;4); & (6;5); & (6;6) \end{array} \}$$

$$|\Omega| = 36$$

- $A =$ „Mindestens eine Sechs" $\rightarrow$ $|A| = 11$ $\rightarrow$ $P(A) = \frac{11}{36}$

- $B =$ „Höchstens eine Sechs"

  $\bar{B} = \{(6;6)\}$ $\rightarrow$ $P(\bar{B}) = \frac{1}{36}$ $\rightarrow$ $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{35}{36}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln

- Experiment: Werfen zweier unterscheidbarer Laplace-Würfel
- Ergebnisraum:

$$\Omega = \{ \begin{array}{llllll} (1;1); & (1;2); & (1;3); & (1;4); & (1;5); & (1;6); \\ (2;1); & (2;2); & (2;3); & (2;4); & (2;5); & (2;6); \\ (3;1); & (3;2); & (3;3); & (3;4); & (3;5); & (3;6); \\ (4;1); & (4;2); & (4;3); & (4;4); & (4;5); & (4;6); \\ (5;1); & (5;2); & (5;3); & (5;4); & (5;5); & (5;6); \\ (6;1); & (6;2); & (6;3); & (6;4); & (6;5); & (6;6) \end{array} \}$$

$$|\Omega| = 36$$

- $A =$ „Mindestens eine Sechs“ ➜ $|A| = 11$ ➜ $P(A) = \frac{11}{36}$
- $B =$ „Höchstens eine Sechs“

  $\bar{B} = \{(6;6)\}$ ➜ $P(\bar{B}) = \frac{1}{36}$ ➜ $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{35}{36}$
- $C =$ „Augensumme mindestens 10“ ➜ $|C| = 6$ ➜ $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

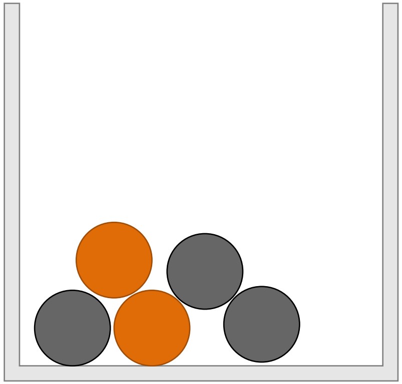
Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Urnenmodell

- Aufbau: Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln.
  Die Kugeln sind sonst ununterscheidbar.

- Ereignis A: „Ziehung zweier schwarzer Kugeln."

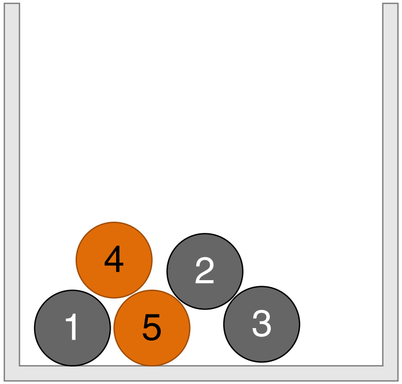


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Urnenmodell



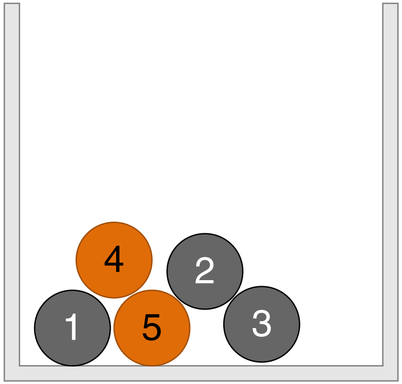
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aufbau: Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln.
  O.B.d.A.: Die Kugeln sind zur abkürzenden Schreibweise nummeriert.
- Ereignis A: „Ziehung zweier schwarzer Kugeln."
- Experiment 1: Gleichzeitige Ziehung zweier Kugeln.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{\{1;2\};\{1;3\};\{1;4\};\{1;5\};\{2;3\};\{2;4\};\{2;5\};\{3;4\};\{3;5\};\{4;5\}\}$
- $A_1 = \{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\}\}$ ➜ $P(A_1) = \dfrac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Urnenmodell



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aufbau: Urne mit zwei roten und drei schwarzen Kugeln.
  O.B.d.A.: Die Kugeln sind zur abkürzenden Schreibweise nummeriert.
- Ereignis A: „Ziehung zweier schwarzer Kugeln."
- Experiment 1: Gleichzeitige Ziehung zweier Kugeln.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{\{1;2\};\{1;3\};\{1;4\};\{1;5\};\{2;3\};\{2;4\};\{2;5\};\{3;4\};\{3;5\};\{4;5\}\}$
- $A_1 = \{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\}\}$ ➜ $P(A_1) = \dfrac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$
- Experiment 2: Ziehung zweier Kugeln nacheinander, ohne Zurücklegen.
- Ergebnisraum: $\Omega_2 = \{(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(2;1);(2;3);(2;4);(2;5);(3;1);(3;2);(3;4);(3;5);(4;1);(4;2);(4;3);(4;5);(5;1);(5;2);(5;3);(5;4)\}$
- $A_2 = \{(1;2);(1;3);(2;1);(2;3);(3;1);(3;2)\}$ ➜ $P(A_2) = \dfrac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \dfrac{6}{20} = 0{,}3$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Urnenmodell (Fortsetzung)

- Experiment 3: Ziehung zweier Kugeln nacheinander, mit Zurücklegen.
- Ergebnisraum:

$$\begin{aligned}\Omega_3 = \{\; & (1;1);\; (1;2);\; (1;3);\; (1;4);\; (1;5);\\ & (2;1);\; (2;2);\; (2;3);\; (2;4);\; (2;5);\\ & (3;1);\; (3;2);\; (3;3);\; (3;4);\; (3;5);\\ & (4;1);\; (4;2);\; (4;3);\; (4;4);\; (4;5);\\ & (5;1);\; (5;2);\; (5;3);\; (5;4);\; (5;5);\; \}\end{aligned}$$

- $A_3 = \{(1;1);(1;2);(1;3);(2;1);(2;2);(2;3);(3;1);(3;2);(3;3)\}$

  ➜ $$P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega_3|} = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

Bemerkungen:

- Das gleichzeitige Ziehen unterscheidet sich bezüglich der Laplace-Wahrscheinlichkeit nicht vom Ziehen nacheinander. Im Beispiel wird lediglich jedes Ergebnis verdoppelt, was für die Laplace-Annahme keine Rolle spielt.

- Das Ziehen ohne Zurücklegen unterscheidet sich bezüglich der Laplace-Annahme hingegen vom Ziehen mit Zurücklegen, da bei letzterem Ergebnisse gibt, die bei ersterem unmöglich sind.

- Die Abkürzung „O.B.d.A.“ steht für „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“: Mit dieser Formulierung wird zum Ausdruck gebracht, dass eine Einschränkung nur zur Vereinfachung der Beweisführung vorausgesetzt wird (insbesondere zur Verringerung der Schreibarbeit), ohne dass die Gültigkeit der im Anschluss getroffenen Aussagen in Bezug auf die Allgemeinheit darunter leidet. [Wikipedia]

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln (Glücksspiel Passe-dix)

- Experiment: Wurf dreier sechsseitiger Laplace-Würfel.
- Ergebnisraum: $\Omega = \{\{1;1;1\};\{1;1;2\};\ldots;\{6;6;5\};\{6;6;6\}\}$
- Ereignis A: „Die Augensumme S ist größer als 10.“

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln (Glücksspiel Passe-dix)

- Experiment: Wurf dreier sechsseitiger Laplace-Würfel.
- Ergebnisraum: $\Omega = \{\{1;1;1\};\{1;1;2\};\ldots;\{6;6;5\};\{6;6;6\}\}$
- Ereignis A: „Die Augensumme S ist größer als 10."
- $|\Omega| = ?$ $|A| = ?$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln (Glücksspiel Passe-dix)

- Experiment: Wurf dreier sechsseitiger Laplace-Würfel.
- Ergebnisraum: $\Omega = \{\{1;1;1\};\{1;1;2\};\ldots;\{6;6;5\};\{6;6;6\}\}$
- Ereignis A: „Die Augensumme S ist größer als 10."
- $|\Omega| = ?$ $|A| = ?$ (Kombinatorik)

Alternative Herleitung von $P(A)$:

1. $A = \{\ \omega \in \Omega \mid S > 10\ \}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln (Glücksspiel Passe-dix)

- Experiment: Wurf dreier sechsseitiger Laplace-Würfel.
- Ergebnisraum: $\Omega = \{\{1;1;1\};\{1;1;2\};\ldots;\{6;6;5\};\{6;6;6\}\}$
- Ereignis A: „Die Augensumme S ist größer als 10."
- $|\Omega| = ?$ $|A| = ?$ (Kombinatorik)

Alternative Herleitung von $P(A)$:

1. $A = \{\ \omega \in \Omega \mid S > 10\ \}$
2. Gegenüberliegende Seiten heutiger Würfel haben die Augensumme 7.
   $1+6$, $2+5$, und $3+4$.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Beispiel: Würfeln (Glücksspiel Passe-dix)

- Experiment: Wurf dreier sechsseitiger Laplace-Würfel.
- Ergebnisraum: $\Omega = \{\{1;1;1\};\{1;1;2\};\ldots;\{6;6;5\};\{6;6;6\}\}$
- Ereignis A: „Die Augensumme S ist größer als 10.“
- $|\Omega| = ?$ $|A| = ?$ (Kombinatorik)

Alternative Herleitung von $P(A)$:

1. $A = \{\, \omega \in \Omega \mid S > 10 \,\}$
2. Gegenüberliegende Seiten heutiger Würfel haben die Augensumme 7.
   $1 + 6$, $2 + 5$, und $3 + 4$.
3. Für jede mögliche Augensumme $S = k$ mit $k \in \{3; 4; \ldots; 18\}$ ist die gegenüberliegende Augensumme $21 - k$.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Alternative Herleitung von $P(A)$: (Fortsetzung)

4. Jedem Ereignis $\{w \mid S = k\}$ kann umkehrbar eindeutig das Ereignis $\{w \mid S = 21 - k\}$ zugeordnet werden.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Alternative Herleitung von $P(A)$: (Fortsetzung)

4. Jedem Ereignis $\{w \mid S = k\}$ kann umkehrbar eindeutig das Ereignis $\{w \mid S = 21 - k\}$ zugeordnet werden.

5. Wenn es sich um Laplace-Würfel handelt, gilt $P(\{\omega \in \Omega \mid S = k\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid S = 21 - k\})$ für $k = 3,4,\ldots,18$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Alternative Herleitung von $P(A)$: (Fortsetzung)

4. Jedem Ereignis $\{w \mid S = k\}$ kann umkehrbar eindeutig das Ereignis $\{w \mid S = 21 - k\}$ zugeordnet werden.

5. Wenn es sich um Laplace-Würfel handelt, gilt $P(\{\omega \in \Omega \mid S = k\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid S = 21 - k\})$ für $k = 3{,}4, \ldots{,}18$

6. A und $\bar{A}$ lassen sich zerlegen in
$$A = \{\omega \in \Omega \mid S = 11\} \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 12\} \cup \ldots \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 18\}$$
$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid S = 10\} \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 9\} \cup \ldots \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 3\}$$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Alternative Herleitung von $P(A)$: (Fortsetzung)

4. Jedem Ereignis $\{w \mid S = k\}$ kann umkehrbar eindeutig das Ereignis $\{w \mid S = 21 - k\}$ zugeordnet werden.

5. Wenn es sich um Laplace-Würfel handelt, gilt
   $P(\{\omega \in \Omega \mid S = k\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid S = 21 - k\})$ für $k = 3{,}4, \ldots ,18$

6. A und $\bar{A}$ lassen sich zerlegen in
   $$A = \{\omega \in \Omega \mid S = 11\} \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 12\} \cup \ldots \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 18\}$$
   $$\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid S = 10\} \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 9\} \cup \ldots \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 3\}$$

7. Mit Satz 11 (Zerlegung von Ereignissen) gilt: $P(A) = P(\bar{A})$.

8. Mit Satz 10 (Vollständigkeit) gilt: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Wahrscheinlichkeit: Beispiele

Alternative Herleitung von $P(A)$: (Fortsetzung)

4. Jedem Ereignis $\{w \mid S = k\}$ kann umkehrbar eindeutig das Ereignis $\{w \mid S = 21 - k\}$ zugeordnet werden.

5. Wenn es sich um Laplace-Würfel handelt, gilt
   $P(\{\omega \in \Omega \mid S = k\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid S = 21 - k\})$ für $k = 3,4,\ldots,18$

6. A und $\bar{A}$ lassen sich zerlegen in
   $$A = \{\omega \in \Omega \mid S = 11\} \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 12\} \cup \ldots \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 18\}$$
   $$\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid S = 10\} \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 9\} \cup \ldots \cup \{\omega \in \Omega \mid S = 3\}$$

7. Mit Satz 11 (Zerlegung von Ereignissen) gilt: $P(A) = P(\bar{A})$.

8. Mit Satz 10 (Vollständigkeit) gilt: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

➜ $P(A) = \dfrac{1}{2}$ $\leadsto$ Passe-dix ist ein faires Glücksspiel.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

- Erinnerung: Ein Zufallsexperiment kann verschiedene Ergebnisräume haben.
- Manchmal ist für einen dieser Räume die Laplace-Annahme sinnvoll.
- Manchmal muss der Ergebnisraum hierfür verfeinert werden.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

- Erinnerung: Ein Zufallsexperiment kann verschiedene Ergebnisräume haben.
- Manchmal ist für einen dieser Räume die Laplace-Annahme sinnvoll.
- Manchmal muss der Ergebnisraum hierfür verfeinert werden.

Beispiel: Münzwurf

- Experiment 1: Zwei ununterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{$ 2-mal Kopf; Kopf und Zahl; 2-mal Zahl $\}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

- Erinnerung: Ein Zufallsexperiment kann verschiedene Ergebnisräume haben.
- Manchmal ist für einen dieser Räume die Laplace-Annahme sinnvoll.
- Manchmal muss der Ergebnisraum hierfür verfeinert werden.

Beispiel: Münzwurf

- Experiment 1: Zwei ununterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{$ 2-mal Kopf; Kopf und Zahl; 2-mal Zahl $\}$
- Experiment 2: Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen.
- Ergebnisraum: $\Omega_2 = \{(\text{Kopf}; \text{Kopf}); (\text{Kopf}; \text{Zahl}); (\text{Zahl}; \text{Kopf}); (\text{Zahl}; \text{Zahl})\}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

- Erinnerung: Ein Zufallsexperiment kann verschiedene Ergebnisräume haben.
- Manchmal ist für einen dieser Räume die Laplace-Annahme sinnvoll.
- Manchmal muss der Ergebnisraum hierfür verfeinert werden.

Beispiel: Münzwurf

- Experiment 1: Zwei ununterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{$ 2-mal Kopf; Kopf und Zahl; 2-mal Zahl $\}$
- Experiment 2: Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen.
- Ergebnisraum: $\Omega_2 = \{(\text{Kopf}; \text{Kopf}); (\text{Kopf}; \text{Zahl}); (\text{Zahl}; \text{Kopf}); (\text{Zahl}; \text{Zahl})\}$
- Widerspruch: $P_1(\{\text{Kopf und Zahl}\}) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P_2(\{(\text{Kopf};\text{Zahl}); (\text{Zahl};\text{Kopf})\})$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

- Erinnerung: Ein Zufallsexperiment kann verschiedene Ergebnisräume haben.
- Manchmal ist für einen dieser Räume die Laplace-Annahme sinnvoll.
- Manchmal muss der Ergebnisraum hierfür verfeinert werden.

Beispiel: Münzwurf

- Experiment 1: Zwei ununterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{ \text{2-mal Kopf; Kopf und Zahl; 2-mal Zahl} \}$
- Experiment 2: Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen.
- Ergebnisraum: $\Omega_2 = \{(\text{Kopf}; \text{Kopf}); (\text{Kopf}; \text{Zahl}); (\text{Zahl}; \text{Kopf}); (\text{Zahl}; \text{Zahl})\}$
- Widerspruch: $P_1(\{\text{Kopf und Zahl}\}) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P_2(\{(\text{Kopf};\text{Zahl}); (\text{Zahl};\text{Kopf})\})$

→ Auflösung: Erst die Verfeinerung von Ω_1 zu Ω_2 erlaubt die Laplace-Annahme.
Reale Objekte sind immer unterscheidbar. Einzige Ausnahme: Elementarteilchen.

Bemerkungen:

- Jean le Rond d'Alembert (1717–1783, französischer Mathematiker) wurde einmal nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit einer Münze in zwei Würfen mindestens einmal Kopf zu werfen.

  Er argumentierte: Sofern beim ersten Wurf Kopf oben liegt, ist das Ereignis ja schon eingetreten und der zweite Wurf ist nicht nötig. Ferner kann beim ersten Wurf Zahl und beim zweiten Wurf Kopf oder zweimal Zahl fallen. Von den drei Mustern „Kopf", „ZahlKopf" und „ZahlZahl" sind zwei für das Eintreten des Ereignisses „mindestens einmal Kopf" günstig. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

- Dem wurde widersprochen und d'Alembert schwankte zwischen der Ansicht, die drei Möglichkeiten seien gleichwahrscheinlich und der, sie seien es nicht. Er schreibt an einer Stelle: „Gleichwohl möchte ich diese drei Fälle nicht in aller Strenge als gleich möglich ansehen.", aber 1754 in einem Artikel einer französischen Enzyklopädie: „Je mehr ich darüber nachdenke, desto mehr erscheint es mir, dass diese drei Fälle gleich möglich sind."

- Nach heutigem Verständnis ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ (und nicht $\frac{2}{3}$), da man den von d'Alembert als ersten angegebenen Fall von Kopf im ersten Wurf in „KopfZahl" und „KopfKopf" zerlegen kann, wodurch es vier gleichwahrscheinliche Elementarereignisse im Ergebnisraum sind.

- Die Laplace-Annahme gilt nur, wenn sie empirisch nachzuweisen ist. Oder allgemeiner: Das verwendete Modell muss die Wirklichkeit abbilden, um korrekte Vorhersagen zu ermöglichen.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Bertrand'sches Kästchenproblem

- Aufbau: Drei Schubladen A, B, C enthalten je 2 Kästchen 1 und 2.
  Drei Kästchen enthalten je eine Goldmünze, drei je eine Silbermünze.
  O.B.d.A: $A1$, $A2$ und $C1$ enthalten die Goldmünzen.

- Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit, die gemischte Schublade zu finden?

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Bertrand'sches Kästchenproblem

- Aufbau: Drei Schubladen A, B, C enthalten je 2 Kästchen 1 und 2.
  Drei Kästchen enthalten je eine Goldmünze, drei je eine Silbermünze.
  O.B.d.A: $A1$, $A2$ und $C1$ enthalten die Goldmünzen.

- Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit, die gemischte Schublade zu finden?

- Experiment 1: Wahl einer Schublade.

- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{A; B; C\}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Bertrand'sches Kästchenproblem

- Aufbau: Drei Schubladen A, B, C enthalten je 2 Kästchen 1 und 2.
  Drei Kästchen enthalten je eine Goldmünze, drei je eine Silbermünze.
  O.B.d.A: $A1$, $A2$ und $C1$ enthalten die Goldmünzen.

- Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit, die gemischte Schublade zu finden?

- Experiment 1: Wahl einer Schublade.

- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{A; B; C\}$

- Experiment 2: Öffnung eines Kästchens, die o.B.d.A. eine Goldmünze enthält.

- Ergebnisraum: Anderes Kästchen enthält $\Omega_2 = \{$ Silbermünze, Goldmünze $\}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Bertrand'sches Kästchenproblem

- Aufbau: Drei Schubladen A, B, C enthalten je 2 Kästchen 1 und 2.
  Drei Kästchen enthalten je eine Goldmünze, drei je eine Silbermünze.
  O.B.d.A: $A1$, $A2$ und $C1$ enthalten die Goldmünzen.

- Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit, die gemischte Schublade zu finden?

- Experiment 1: Wahl einer Schublade.

- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{A; B; C\}$

- Experiment 2: Öffnung eines Kästchens, die o.B.d.A. eine Goldmünze enthält.

- Ergebnisraum: Anderes Kästchen enthält $\Omega_2 = \{$ Silbermünze, Goldmünze $\}$

- Widerspruch: $P_1(\{C\}) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P_2(\{$ Silbermünze $\})$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Bertrand'sches Kästchenproblem

- Aufbau: Drei Schubladen A, B, C enthalten je 2 Kästchen 1 und 2.
  Drei Kästchen enthalten je eine Goldmünze, drei je eine Silbermünze.
  O.B.d.A: $A1$, $A2$ und $C1$ enthalten die Goldmünzen.

- Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit, die gemischte Schublade zu finden?

- Experiment 1: Wahl einer Schublade.

- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{A; B; C\}$

- Experiment 2: Öffnung eines Kästchens, die o.B.d.A. eine Goldmünze enthält.

- Ergebnisraum: Anderes Kästchen enthält $\Omega_2 = \{$ Silbermünze, Goldmünze $\}$

- Widerspruch: $P_1(\{C\}) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P_2(\{$ Silbermünze $\})$

→ Auflösung: Ein Kästchen mit Goldmünze aus A zu öffnen ist wahrscheinlicher.
Es ist auch möglich, mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten zu argumentieren.

Bemerkungen:

- Das Problem wurde von Joseph Bertrand (1822–1900, französischer Mathematiker, linkes Bild) im seinem Buch „Calcul des Probabilités“ aufgeworfen und (ohne Begründung) korrekt beantwortet.
- Emanuel Czuber (1851–1925, östereichischer Mathematiker und Verfasser weit verbreiteter Lehrbücher zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, rechts Bild) vertrat die Meinung, dass $\frac{1}{2}$ die Antwort ist.

- Czuber war zuerst der Auffassung, dass es nur zwei gleichberechtigte Möglichkeiten gibt, von denen eine günstig sei. Später sah er ein, dass es nicht zwei, sondern drei mögliche Fälle gibt. Davon ist nur der letzte der günstige, so dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ ist.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Restaurant-Reservierung

- Aufbau: Ein Restaurant mit 5 Tischen A, B, C, D, E á 4 Plätzen $\{1; \ldots ; 20\}$.
- Frage: Wie wahrscheinlich sitzt bei zufälliger Reservierung der zweite Gast am Tisch des ersten?

  O.B.d.A.: Für den ersten Gast wird Tisch A bzw. Platz 4 reserviert.

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Restaurant-Reservierung

- Aufbau: Ein Restaurant mit 5 Tischen A, B, C, D, E á 4 Plätzen $\{1; \ldots ; 20\}$.
- Frage: Wie wahrscheinlich sitzt bei zufälliger Reservierung der zweite Gast am Tisch des ersten?
  O.B.d.A.: Für den ersten Gast wird Tisch A bzw. Platz 4 reserviert.

- Experiment 1: Wahl eines Tisches.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{A; B; C; D; E\}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Restaurant-Reservierung

- Aufbau: Ein Restaurant mit 5 Tischen A, B, C, D, E á 4 Plätzen $\{1; \ldots; 20\}$.
- Frage: Wie wahrscheinlich sitzt bei zufälliger Reservierung der zweite Gast am Tisch des ersten?
  O.B.d.A.: Für den ersten Gast wird Tisch A bzw. Platz 4 reserviert.
- Experiment 1: Wahl eines Tisches.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{A; B; C; D; E\}$
- Experiment 2: Wahl eines Platzes.
- Ergebnisraum: $\Omega_2 = \{1; \ldots; 20\}$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Restaurant-Reservierung

- Aufbau: Ein Restaurant mit 5 Tischen A, B, C, D, E á 4 Plätzen $\{1; \ldots; 20\}$.
- Frage: Wie wahrscheinlich sitzt bei zufälliger Reservierung der zweite Gast am Tisch des ersten?
  O.B.d.A.: Für den ersten Gast wird Tisch A bzw. Platz 4 reserviert.
- Experiment 1: Wahl eines Tisches.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{A; B; C; D; E\}$
- Experiment 2: Wahl eines Platzes.
- Ergebnisraum: $\Omega_2 = \{1; \ldots; 20\}$
- Widerspruch: $P_1(\{A\}) = \frac{1}{5} \neq \frac{3}{19} = P_2(\{1; 2; 3\})$

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Falsche oder nicht eindeutige Laplace-Annahmen

Beispiel: Restaurant-Reservierung

- Aufbau: Ein Restaurant mit 5 Tischen A, B, C, D, E á 4 Plätzen $\{1; \ldots; 20\}$.
- Frage: Wie wahrscheinlich sitzt bei zufälliger Reservierung der zweite Gast am Tisch des ersten?
  O.B.d.A.: Für den ersten Gast wird Tisch A bzw. Platz 4 reserviert.

- Experiment 1: Wahl eines Tisches.
- Ergebnisraum: $\Omega_1 = \{A; B; C; D; E\}$

- Experiment 2: Wahl eines Platzes.
- Ergebnisraum: $\Omega_2 = \{1; \ldots; 20\}$

- Widerspruch: $P_1(\{A\}) = \frac{1}{5} \neq \frac{3}{19} = P_2(\{1; 2; 3\})$

→ Auflösung: Die Frage ist mehrdeutig; beide können ggf. richtig sein.
Es ist nicht klar, was das Restaurant-Personal bei zufälliger Reservierung macht.

Bemerkungen:

- Manche Probleme lassen mehrere gleichberechtige Wahrscheinlichkeitsbewertungen zu. So etwa, wenn die Beschreibung des zufälligen Geschehens nicht präzise genug ist. Je nach Interpretation des Begriffs „zufällig“ können sich dann verschiedene Wahrscheinlichkeiten für ein bestimmtes Ereignis ergeben.

- Irrtümer passieren immer wieder: Bei der ersten Ausspielung der Glücksspirale 1971 („Olympia-Lotterie“) wurden siebenstellige Zahlen auf die Art ermittelt, dass aus einer Trommel, die je sieben gleichartige Kugeln mit den Ziffern 0 bis 9 enthielt, nach dem Mischen sieben Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen entnommen und deren Ziffern zu einer Zahl angeordnet wurden. Es wurde fälschlicherweise angenommen, dass alle möglichen siebenstelligen Zahlen von 0000000 bis 9999999 gleich wahrscheinlich sind. Das ist aber nicht der Fall, weil nach dem Entnehmen einer Kugel, um die i-te Ziffer der Gewinnzahl zu bestimmen, sich die Wahrscheinlichkeiten für die $(i+1)$-te Ziffer ändert. Wie kann man das Problem lösen?

- Moral: Auf kaum einem anderen Gebiet ist es so leicht, einen Ausrutscher zu machen, wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Selbst berühmten Mathematikern blieben Irrtümer nicht erspart. Aber gerade dadurch wurde die Theorie immer wieder neu befruchtet und vorangetrieben.