Kapitel PTS:II

II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisräume
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Weiterentwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Ereignisräume

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

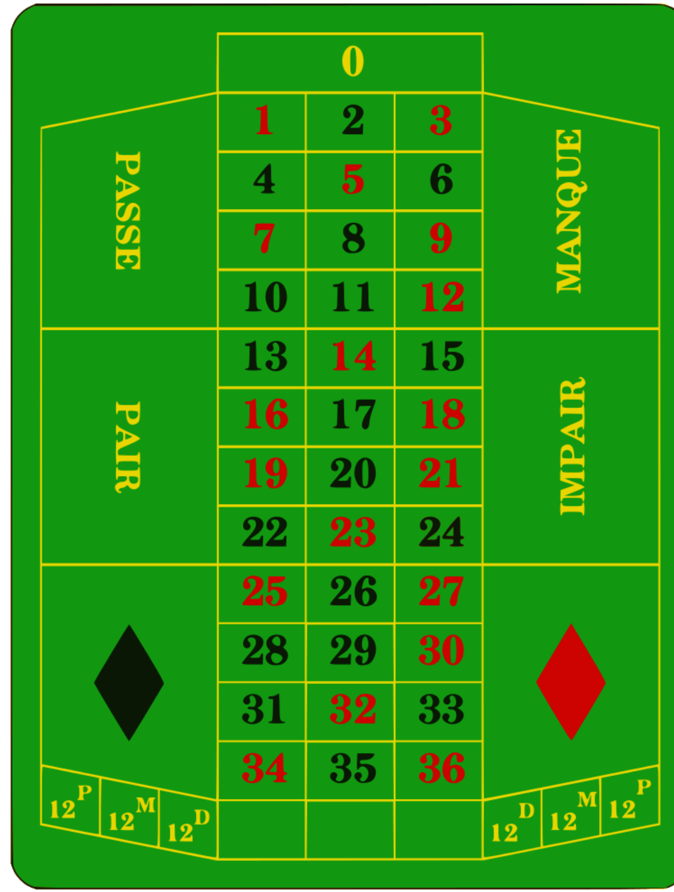
Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

- Aufbau: Urne mit 37 nummerierten Kugeln.
- Experiment: Ziehung einer Kugel.

→ $\Omega = \{0; 1; \ldots ; 36\}$

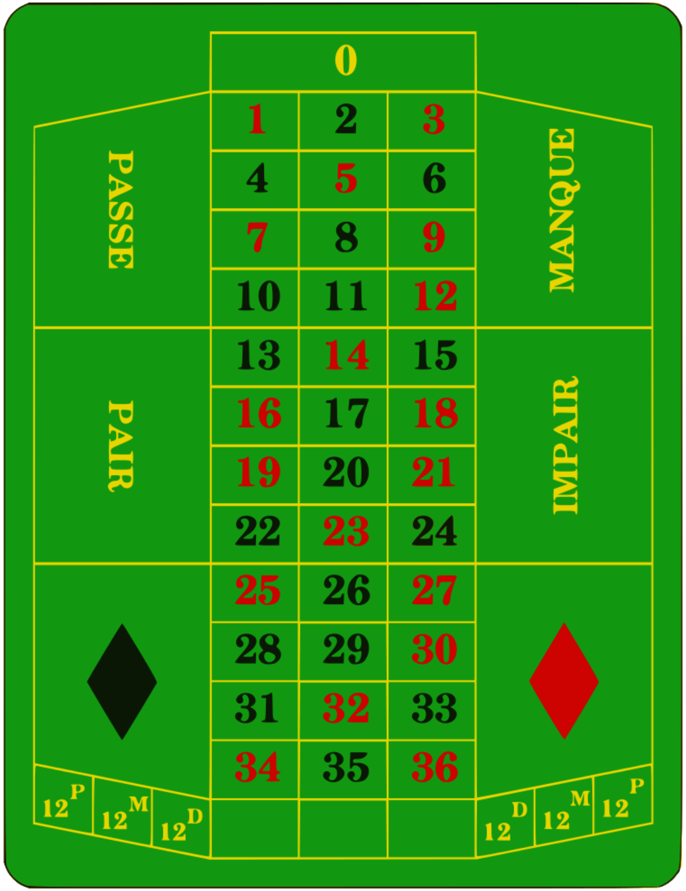
- Glücksspiel: Wette über das Ergebnis.



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

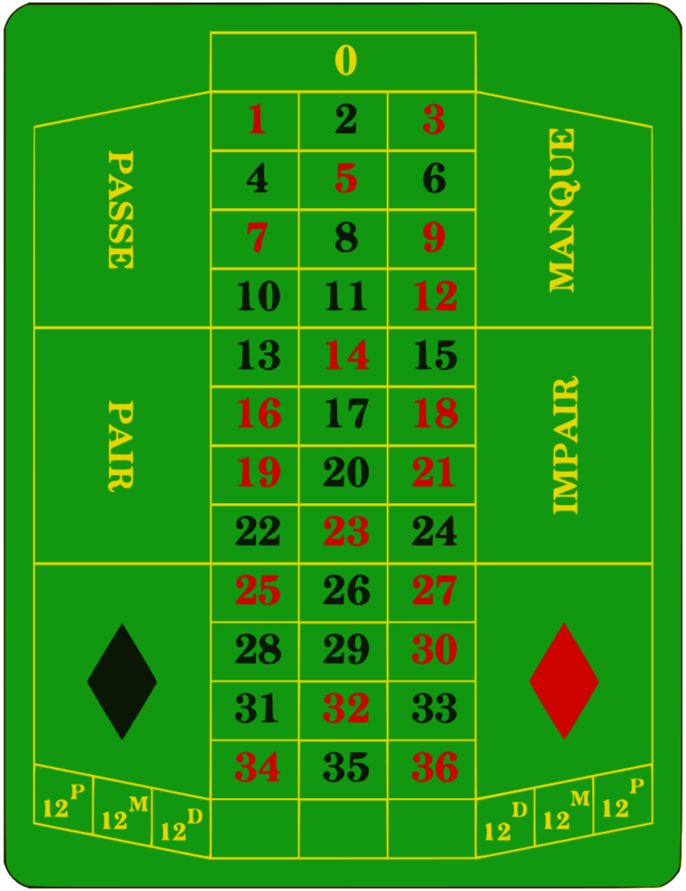
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\}$	Einsatz$\times 36$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

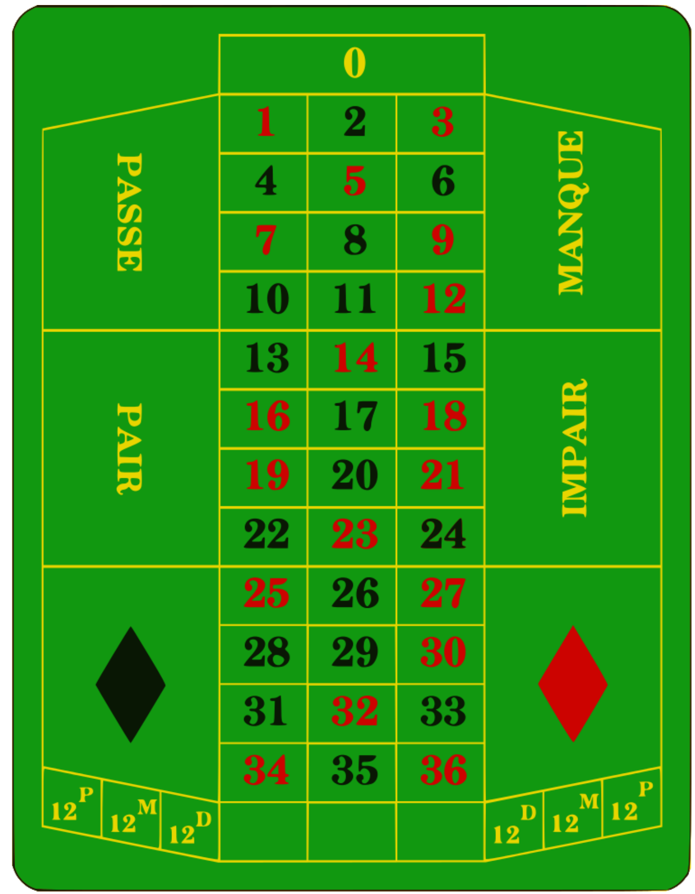
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\}$	Einsatz$\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

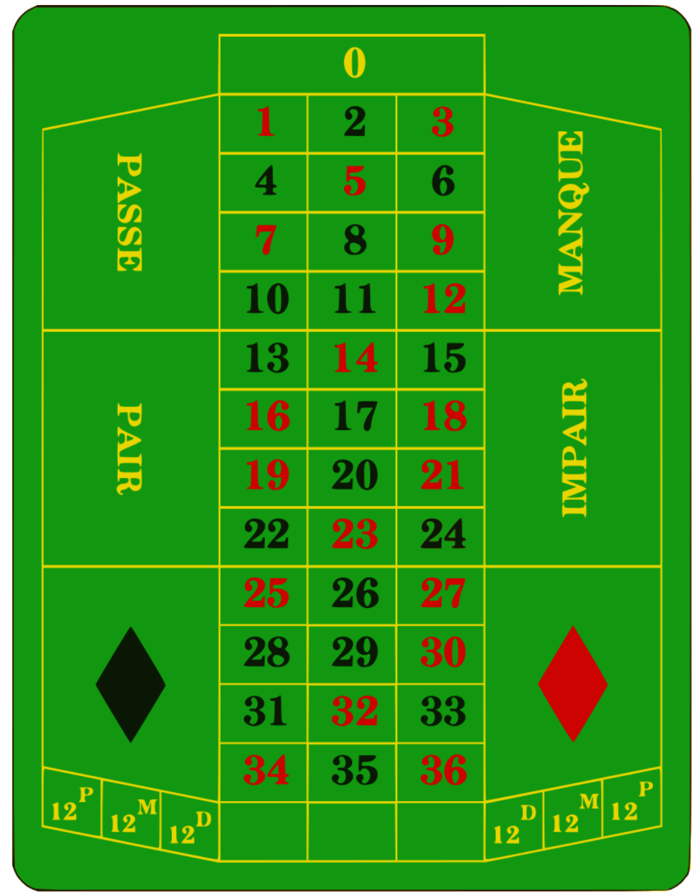
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\}$	Einsatz$\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \ldots; 18\}$	$\times 6$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

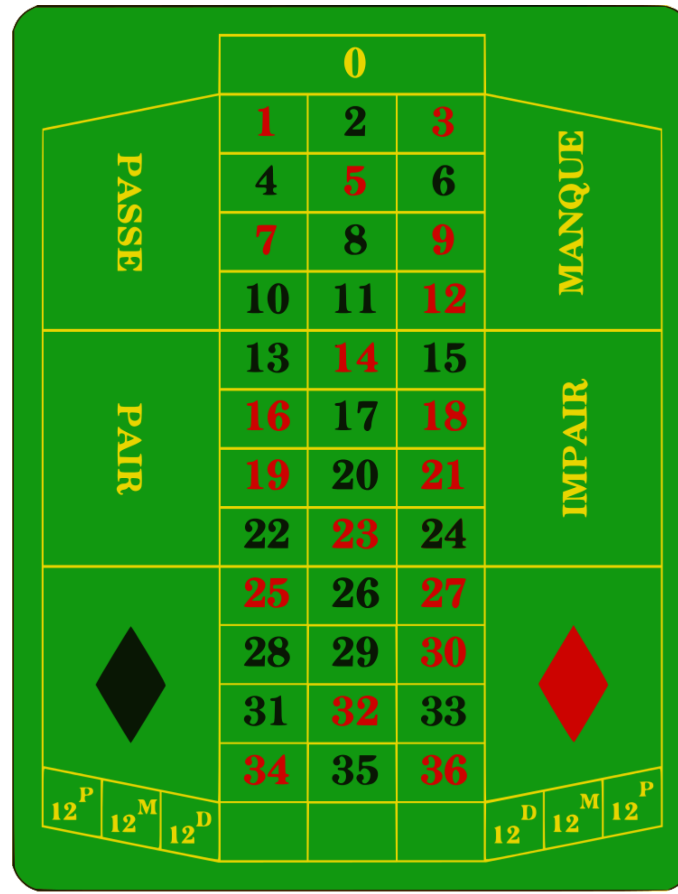
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\}$	Einsatz$\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \ldots ; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \ldots ; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \ldots ; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \ldots ; 36\}$	$\times 3$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \ldots ; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \ldots ; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \ldots ; 36\}$	$\times 3$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

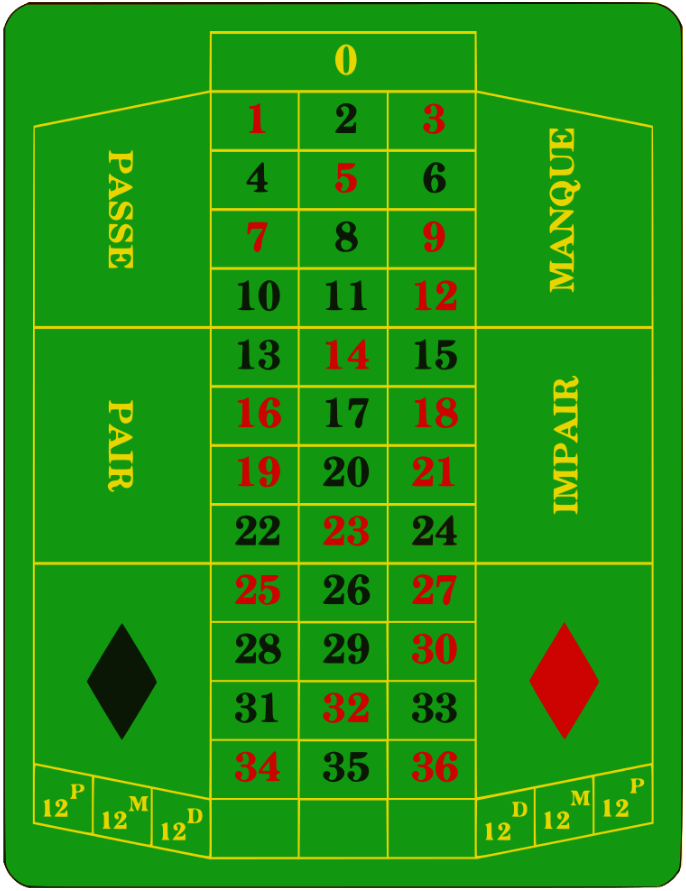
Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\}$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7; 8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10; 11; 12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0; 1; 2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4; 5; 7; 8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13; \ldots; 18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1; \ldots; 12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13; \ldots; 24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25; \ldots; 36\}$	$\times 3$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1; 4; \ldots; 34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2; 5; \ldots; 35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3; 6; \ldots; 36\}$	$\times 3$
pair	gerade	$\{2; 4; \ldots; 36\}$	$\times 2$
impair	ungerade	$\{1; 3; \ldots; 35\}$	$\times 2$
rouge	rote	$\{1; 3; \ldots; 36\}$	$\times 2$
noir	schwarze	$\{2; 4; \ldots; 35\}$	$\times 2$
manque	erste Hälfte	$\{1; \ldots; 18\}$	$\times 2$
passe	zweite Hälfte	$\{19; \ldots; 36\}$	$\times 2$



Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette

Frz. Name	Bedeutung	Teilmenge	Gewinn
plein	eine Zahl	$\{1\}$	Einsatz $\times 36$
cheval	zwei Nachbarn	$\{7;8\}$	$\times 18$
transversale	drei Zahlen		
- pleine	Querreihe	$\{10;11;12\}$	$\times 12$
- du zéro	mit Null	$\{0;1;2\}$	$\times 12$
carré	vier Nachbarn	$\{4;5;7;8\}$	$\times 9$
quatre prem.	erste vier	$\{0;1;2;3\}$	$\times 9$
sixain	zwei Querreihen	$\{13;\ldots;18\}$	$\times 6$
douzaine	ein Dutzend:		
- premier	vorn	$\{1;\ldots;12\}$	$\times 3$
- milieu	mitte	$\{13;\ldots;24\}$	$\times 3$
- dernier	hinten	$\{25;\ldots;36\}$	$\times 3$
- double	zwei Dutzend	$\{1;\ldots;24\}$	$\times 1{,}5$
colonne	Längsreihe:		
- 34	links	$\{1;4;\ldots;34\}$	$\times 3$
- 35	mitte	$\{2;5;\ldots;35\}$	$\times 3$
- 36	rechts	$\{3;6;\ldots;36\}$	$\times 3$
- double	zwei Reihen	$\{1;2;4;\ldots;35\}$	$\times 1{,}5$
pair	gerade	$\{2;4;\ldots;36\}$	$\times 2$
impair	ungerade	$\{1;3;\ldots;35\}$	$\times 2$
rouge	rote	$\{1;3;\ldots;36\}$	$\times 2$
noir	schwarze	$\{2;4;\ldots;35\}$	$\times 2$
manque	erste Hälfte	$\{1;\ldots;18\}$	$\times 2$
passe	zweite Hälfte	$\{19;\ldots;36\}$	$\times 2$



Bemerkungen:

- Roulettespieler haben verschiedene Setzmöglichkeiten, die sich als Teilmengen des Ergebnisraums Ω beschreiben lassen und die im Erfolgsfall unterschiedliche Auszahlungsquoten erzielen.
- Für Roulettespieler interessante Spielereignisse sind also bestimmte Teilmengen des Ergebnisraums.
- Setzt beispielsweise jemand auf „douzaine premiers“ und wird eine 9 ermittelt, so sagt man, das Ereignis „douzaine premiers“ ist eingetreten.
- Es gibt oft verschiedene Sonderregelungen für das Ergebnis 0.

Ereignisräume

Definition 4 (Ereignisraum)

Jede Teilmenge A eines Ergebnisraums Ω heißt Ereignis. Das Ereignis A tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis ω vorliegt, dass in A enthalten ist. Die Menge $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

Ereignisräume

Definition 4 (Ereignisraum)

Jede Teilmenge A eines Ergebnisraums Ω heißt Ereignis. Das Ereignis A tritt genau dann ein, wenn ein Ergebnis ω vorliegt, dass in A enthalten ist. Die Menge $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

Besondere Ereignisse:

- Das unmögliche Ereignis $\emptyset$ enthält kein Ergebnis $\omega \in \Omega$. Es tritt niemals ein.
- Das sichere Ereignis Ω enthält alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$. Es tritt immer ein.
- Das Ereignis $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, heißt Elementarereignis.
  Achtung: Elementarereignis $\{\omega\} \neq$ Ergebnis ω

Mächtigkeit:

- Ist $|\Omega| = m$, so ist $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^m$.

Bemerkungen:

- Wir haben einem Begriff der Umgangssprache einen mathematischen Begriff zugeordnet: „Ereignis“ $\mapsto$ Menge.

Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 1:

- Ein Chip auf „manque“ (erste Hälfte)
- Verlust, wenn „passe“ eintritt

→ Komplementärmenge

Spiel 2:

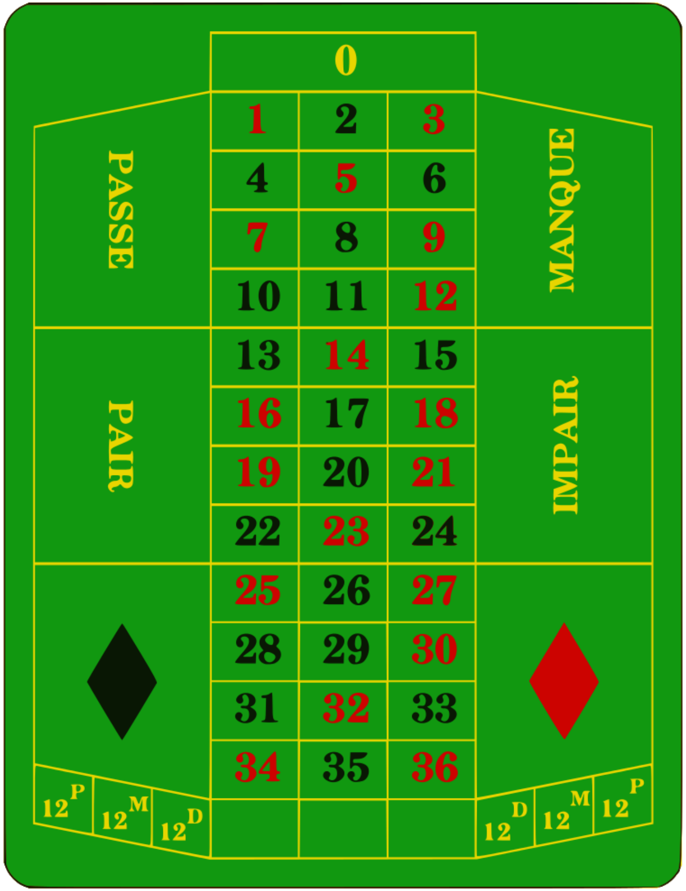
- Ein Chip auf „manque“, einer auf $\{1; 2; 3\}$
- Gewinn wird maximal, wenn $\{1; 2; 3\}$ eintritt

→ Teilmenge

Spiel 3:

- Ein Chip auf „pair“, einer auf $\{1; 2; 3\}$
- Gewinn wird maximal, wenn $\{2\}$ eintritt

→ Schnittmenge



Ereignisräume

Definition 5 (Gegenereignis, Teilereignis, Gleichheit)

Das Ereignis $\bar{A}$ tritt immer genau dann ein, wenn A nicht eintritt und heißt Gegenereignis zu A oder kurz *nicht*-A.

Ist A eine Teilmenge von B (in Zeichen: $A \subseteq B$), so tritt mit dem Ereignis A stets auch das Ereignis B ein: A *zieht* dann B *nach sich* und heißt Teilereignis von B.

Zwei Ereignisse A und B heißen gleich, wenn A ein Teilereignis von B und B ein Teilereignis von A ist:

$$A = B \;\text{ genau dann, wenn }\; A \subseteq B \;\text{ und }\; B \subseteq A$$

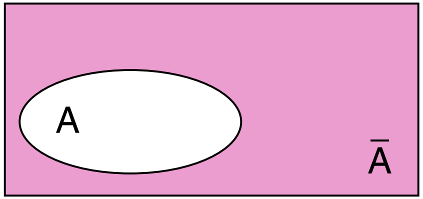
Bemerkungen:

- „Umgangssprachliche“ Setzmöglichkeiten des Roulette lassen sich als Mengenverknüpfungen von Ereignissen ausdrücken.
- Zur Veranschaulichung werden oft Venn-Diagramme verwandt – John Venn (1834–1923) war ein englischer Naturphilosoph.
- In einem Venn-Diagramm (siehe folgende Folien) umfasst eine geschlossene Kurve (Kreis, Ellipse, Viereck, etc.) die Elemente einer Menge, die man als Punkte in der Ebene auffassen kann.

Ereignisräume

Verknüpfung von Ereignissen

$\overline{A}$

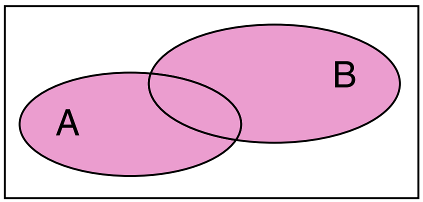


Ω

nicht-A / Gegenereignis

tritt ein, wenn A nicht eintritt

$A \cup B$

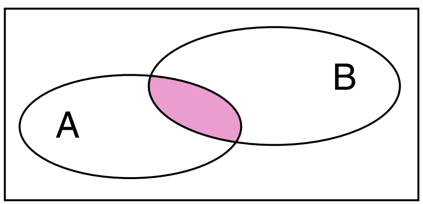


Ω

A oder B

tritt ein, wenn A oder auch B eintritt

$A \cap B$

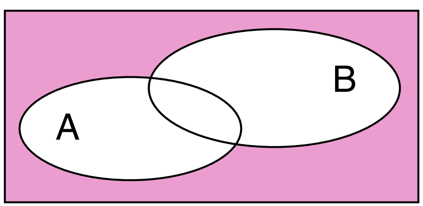


Ω

A und B

tritt ein, wenn A und zugleich B eintritt

$\overline{A} \cap \overline{B}$

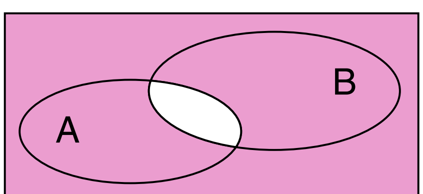


Ω

nicht-A und nicht-B (= $\overline{A \cup B}$)

tritt ein, wenn weder A noch B eintritt

$\overline{A} \cup \overline{B}$



Ω

nicht-A oder nicht-B (= $\overline{A \cap B}$)

tritt ein, wenn höchstens eines der beiden Ereignisse A und B eintritt

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Die Operationen $\cup$ und $\cap$ sind auf mehrere Ereignisse verallgemeinerbar:
  - Ereignis $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ tritt ein, wenn mindestens eines der Ereignisse A_i eintritt
  - Ereignis $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$ tritt ein, wenn alle Ereignisse A_i eintreten

- Wiederholgung Mengenalgebra
  - Kommutativgesetze $A \cup B = B \cup A$
    $A \cap B = B \cap A$
  - Assoziativgesetze $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
    $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - Distributivgesetze $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Neutrale Elemente $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \Omega = A$
  - Dominante Elemente $A \cup \Omega = \Omega$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - Komplementäre Elemente $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$
  - Idempotenzgesetze $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$
  - Absorptionsgesetze $A \cup (A \cap B) = A$
    $A \cap (A \cup B) = A$
  - Gesetze von de Morgan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
    $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Ereignisräume

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Spiel 4:

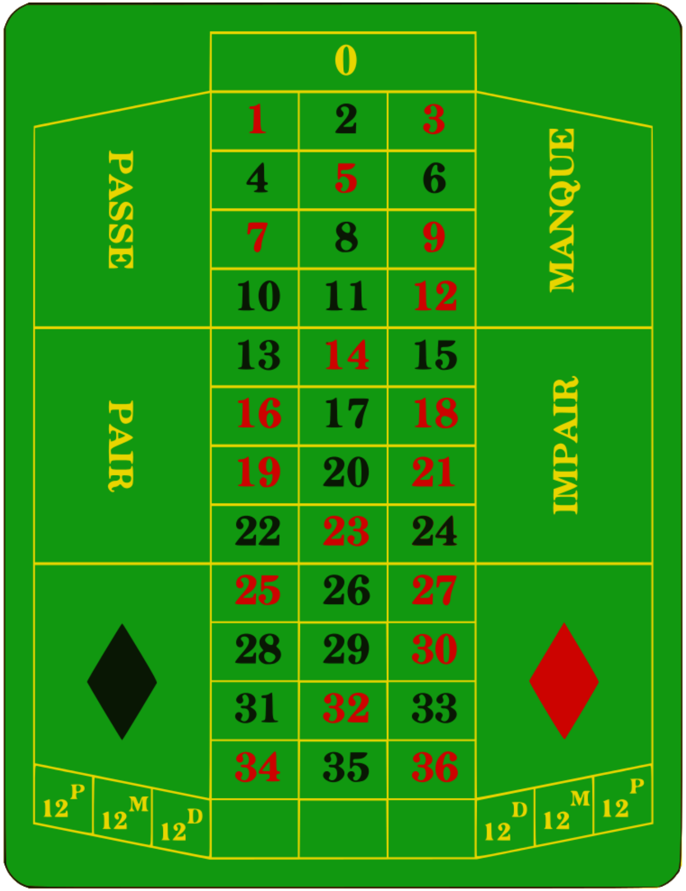
- Ein Chip auf „douzaine premier“
- Ein Chip auf „douzaine dernier“
- Es können nicht beide Ereignisse eintreten

➜ Leere Schnittemenge
Unmögliches Ereignis

Spiel 5:

- Je ein Chip auf $\{1;2;3\}$, $\{4;5;6\}$, $\{7;8;9\}$, und $\{10;11;12\}$
- Gewinn, wenn „douzaine premier“ eintritt
  $\{1;...;12\} = \{1;2;3\} \cup \{4;5;6\} \cup \{7;8;9\} \cup \{10;11;12\}$;
  Gewinn äquivalent zu 4 Chips auf dieses Ereignis.

➜ Zerlegung in disjunkte Teilereignisse



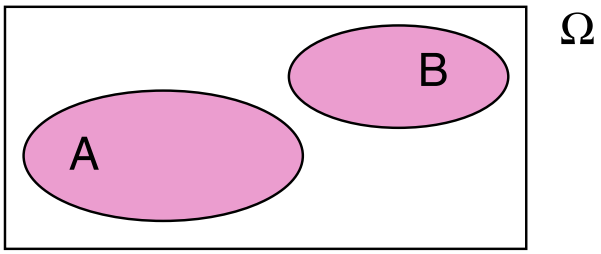
Ereignisräume

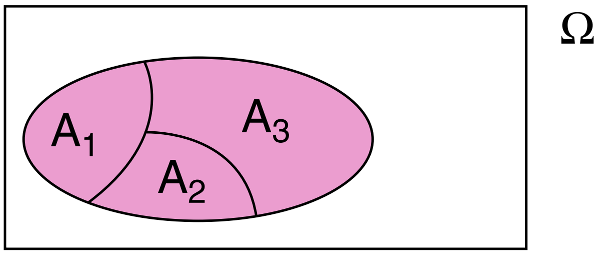
Definition 6 (unvereinbar, vereinbar, Zerlegung)

Zwei Ereignisse A und B mit $A \cap B = \emptyset$ heißen unvereinbar (ansonsten vereinbar).

Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m \geq 2)$ heißen paarweise unvereinbar, wenn jeweils zwei von ihnen unvereinbar sind.

Eine Menge paarweise unvereinbarer Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ mit $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ heißt Zerlegung von A in die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$.





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Mehr als zwei Ereignisse heißen *vollständig unvereinbar*, wenn sie nicht alle zugleich eintreten können.