



UNIVERSIDAD  
POLITÉCNICA  
DE MADRID

---

# PRÁCTICA 1

ESTRUCTURAS DE USO ESPACIAL

---

Andrés Pedraza Rodríguez

MADRID, 26 DE MARZO, 2021



## **Resumen**

El objetivo del presente trabajo es el estudio de dos casos de estudio típicos en lo que a estructuras espaciales se refiere. El primer caso el estudio se centra en las tensiones fruto de la deformación térmica de una varilla y el segundo caso de estudio se centra en las aceleraciones de una viga lastrada como resultado de una excitación sinusoidal. Primero se realizará un estudio analítico y luego uno numérico, por medio de las herramientas PATRAN-NASTRAN. Finalmente, se compararán los resultados obtenidos con ambos métodos.



## Índice

Índice de figuras	I
Índice de tablas	II
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>2</b>
<b>3. Carga estática 6</b>	<b>3</b>
3.1. Cálculo teórico . . . . .	3
3.2. Descripción del modelo FEM . . . . .	7
3.3. Resultados del modelo FEM . . . . .	8
3.4. Comparación de resultados . . . . .	9
<b>4. Vibraciones sinusoidales 6</b>	<b>11</b>
4.1. Cálculo teórico . . . . .	12
4.2. Descripción del modelo FEM . . . . .	15
4.3. Resultados del modelo FEM . . . . .	16
4.4. Comparación de resultados . . . . .	18
<b>5. Conclusiones</b>	<b>19</b>
<b>Referencias</b>	<b>22</b>

## Índice de figuras

1.	Representación gráfica del problema de carga térmica estática y numeración de los desplazamientos. . . . .	3
2.	Definición de los desplazamientos de una barra. . . . .	4
3.	Deformada de la estructura obtenida analíticamente. El factor de escala de los desplazamientos es de 100. . . . .	6
4.	Deformada de la estructura obtenida numéricamente. El factor de escala de los desplazamientos es de 100. . . . .	8
5.	Deformadas de la estructura obtenidas analítica (azul) y numéricamente (naranja). El factor de escala de los desplazamientos es de 100. . . . .	9
6.	Representación gráfica del problema de carga armónica sobre una viga con una masa puntual en el centro. . . . .	11
7.	Sistema de vibraciones de un grado de libertad con movimiento de la base donde $M$ es la masa efectiva del sistema, $K$ la rigidez y $F$ el amortiguamiento. . . . .	12
8.	Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad. . . . .	14
9.	Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad. . . . .	16
10.	Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad obtenidas para una viga con (línea continua) y sin masa (línea discontinua). . . . .	17
11.	Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad obtenidas tanto analítica como numéricamente. . . . .	18
12.	Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad obtenidas tanto analítica como numéricamente. La frecuencia natural es de $\omega_0 = 26.305$ Hz. . . . .	20
13.	Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad obtenidas para una viga con (línea continua) y sin masa (línea discontinua). . . . .	21

## Índice de tablas

1.	Propiedades de las varillas que conforman la estructura. . . . .	3
2.	Fuerzas y desplazamientos sobre cada uno de los nodos de la estructura obtenidos de forma analítica. . . . .	5
3.	Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión. . . . .	6
4.	Fuerzas y desplazamientos sobre cada uno de los nodos de la estructura obtenidos de forma numérica. . . . .	8
5.	Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión obtenidos de forma numérica. . . . .	9
6.	Comparación de resultados de desplazamientos y fuerzas para ambos métodos. . . . .	10
7.	Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas para ambos métodos. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión obtenidos de forma numérica. . . . .	10
8.	Propiedades de los elementos que definen el problema. . . . .	11
9.	Comparación de resultados de desplazamientos y fuerzas para ambos métodos. . . . .	19
10.	Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas para ambos métodos. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión obtenidos de forma numérica. . . . .	19

## 1. Introducción

En el presente trabajo se estudian dos casos típicos en estructuras espaciales. El primero es la deformación de una estructura articulada como consecuencia del incremento de temperatura de una de las barras que la conforman, algo muy importante en espacio ya que las estructuras que portan equipos científicos suelen verse sometidas a grandes gradientes térmicos. El segundo caso es la vibración armónica de una viga simplemente apoyada con una masa puntual en el centro, este caso es característico de las etapas de lanzamiento donde bandejas de pared delgada, que portan equipos más pesados, se ven sometidas a cargas armónicas durante el despegue.

Para llevar a cabo el análisis de ambos casos primero se planteará la solución analítica (si fuera posible) para disponer así de una referencia para las soluciones calculadas a partir de NASTRAN basadas en el método de los elementos finitos especificado a través de PATRAN.



## 2. Metodología

El presente trabajo se ha realizado basándose en los siguientes estándares ECSS de la Agencia Espacial Europea (ESA):

- Space engineering structural factors of safety for spaceflight hardware: ECSS-E-ST-32-10C [1].
- Space engineering structural general requirements: ECSS-E-ST-32C [2].

Además se ha hecho uso de los siguientes documentos para el desarrollo práctico de los ejemplos estudiados:

- Manual de Cálculo Estructural, del Instituto Universitario de Microgravedad “Ignacio Da Riva”, por Andrés García *et al.* [3].
- Spacecraft Structures, de Jacob J. Wijker [4].
- Ejemplo de placa, por Andrés García [5].
- Apuntes de las asignaturas: *Resistencia de Materiales y elasticidad Estructuras Aeronáuticas*, *Método de los elementos finitos* y *Vibraciones*; impartidas en la facultad ETSIAE-UPM ([6], [7], [8] y [9]).
- Apuntes de las asignaturas: *Estructuras de uso espacial* y *Vibraciones y Aeroacústica*; impartidas en el Máster Universitario de Sistemas Espaciales (IDR-UPM) ([10] y [11]).

También se ha recurrido, para el desarrollo práctico a los videotutoriales facilitados por el profesor y en las clases grabadas a través de la plataforma *Microsoft Teams*.

### 3. Carga estática 6

En este caso de estudio se analiza la respuesta de una estructura articulada a un incremento de temperatura sobre una de las tres varillas que la conforman. En la Figura 1 se muestra la configuración de la estructura cuyas varillas, que unen los puntos 1, 2 y 3, tienen las propiedades mostradas en las Tabla 1. Además la longitud de la varilla 1-3 es de  $L = 0.25$  m y la diferencia de temperatura aplicada sobre ella es de  $\Delta T = 50$  K.

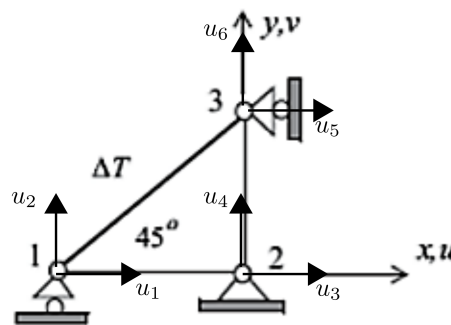


Figura 1: Representación gráfica del problema de carga térmica estática y numeración de los desplazamientos.

Tabla 1: Propiedades de las varillas que conforman la estructura.

Área	$A = 0.0001 \text{ m}^2$
Módulo elástico	$E = 70 \text{ GPa}$
Coefficiente de expansión térmica	$\alpha = 22.5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

#### 3.1. Cálculo teórico

Para analizar esta estructura de forma analítica resulta bastante sencillo aplicar el cálculo matricial. Así, una varilla se comporta como una barra (de forma que solo soporta esfuerzos en su dirección longitudinal). Sean los desplazamientos  $u_1$  y  $u_2$  (y sus proyecciones sobre los ejes locales  $x$  e  $y$  los correspondientes a los extremos 1 y 2 de la barra tal y como se muestran en la Figura 2,

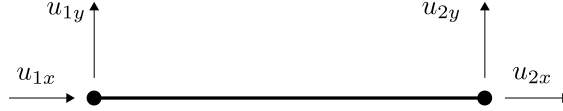


Figura 2: Definición de los desplazamientos de una barra.

de las Ecuaciones Constitutivas de Hooke pueden expresarse los desplazamientos de acuerdo al sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} = [K]^e \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde  $[K]$  hace referencia al tensor de elasticidad de la barra:

$$[K]^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Una vez obtenidas las matrices individuales de cada varilla se rotan estas de forma que sean consistentes con el sistema de ejes globales y después se ensamblan unas con otras de acuerdo a los puntos que unen. Se tiene así una matriz  $[K] \in M_{6 \times 6}(\mathbb{R})$  ya que los puntos 1, 2 y 3 pueden en principio moverse por todo el plano  $x - y$  y tienen por tanto dos grados de libertad. Una vez determinada la matriz de rigidez global se reordena ésta de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} F_a \\ F_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ac} \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_c \end{pmatrix}, \quad (3)$$

donde el subíndice  $a$  hace referencia a las fuerzas y desplazamientos activos (o libres); y el subíndice  $c$  hace referencia a las fuerzas y desplazamientos correspondientes a condiciones de contorno. Como las condiciones de contorno son de desplazamiento nulo y no hay cargas externas aplicadas, se tiene una primera ecuación para el sistema determinada por:

$$F_a = K_{aa}u_a. \quad (4)$$

En lo que se refiere a la dilatación térmica, dado el incremento de temperatura y el coeficiente de expansión térmica, se puede determinar el esfuerzo al que se ve sometida la varilla:

$$\sigma_T = E \alpha \Delta T . \quad (5)$$

Lo que, para el problema estudiado supone una fuerza sobre los nodos activos de la forma:

$$F_a = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ +\sin \theta \end{pmatrix} , \quad (6)$$

donde la primera componente es  $F_1$ , la fuerza horizontal sobre el punto 1; la segunda componente es  $F_6$ , que es la fuerza vertical sobre el punto 3; y  $\theta$  es el ángulo que forma la varilla 1-3 con la horizontal tal y como se muestra en la Figura 1.

Resolviendo el sistema matricial se pueden determinar los dos desplazamientos libres y también las fuerzas de reacción.

$$u_a = [K_{aa}]^{-1} F_a , \quad (7)$$

$$F_c = [K_{ca}] u_a . \quad (8)$$

De esta forma se obtienen las fuerzas y desplazamientos sobre cada nodo de las estructura, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Fuerzas y desplazamientos sobre cada uno de los nodos de las estructura obtenidos de forma analítica.

Nodo y dirección	Desplazamiento [m]	Fuerza [kN]
1x	$-8.238 \cdot 10^{-5}$	-5.568
1y	0	-2.306
2x	0	3.262
2y	0	-3.262
3x	0	2.306
3y	$8.236 \cdot 10^{-5}$	5.568

Además, una vez determinados los desplazamientos se pueden obtener también los esfuerzos internos a los que se ve sometida cada barra, los cuales se han recogido en la Tabla 3, donde se indican como positivos aquellos esfuerzos que son de tracción y como negativos aquellos esfuerzos que son de compresión. Además, en este tipo de análisis también hay que añadir el esfuerzo debido a la temperatura sobre la varilla 1-3.

Tabla 3: Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión.

Varilla	Esfuerzo axial [Pa]
1-2	$3.262 \cdot 10^7$
1-3	$-4.613 \cdot 10^7$
2-3	$3.262 \cdot 10^7$

En la Figura 3, se representa gráficamente la deformación de la estructura donde, para que pudiera ser apreciable, se han escalado las deformaciones con un factor de 100.

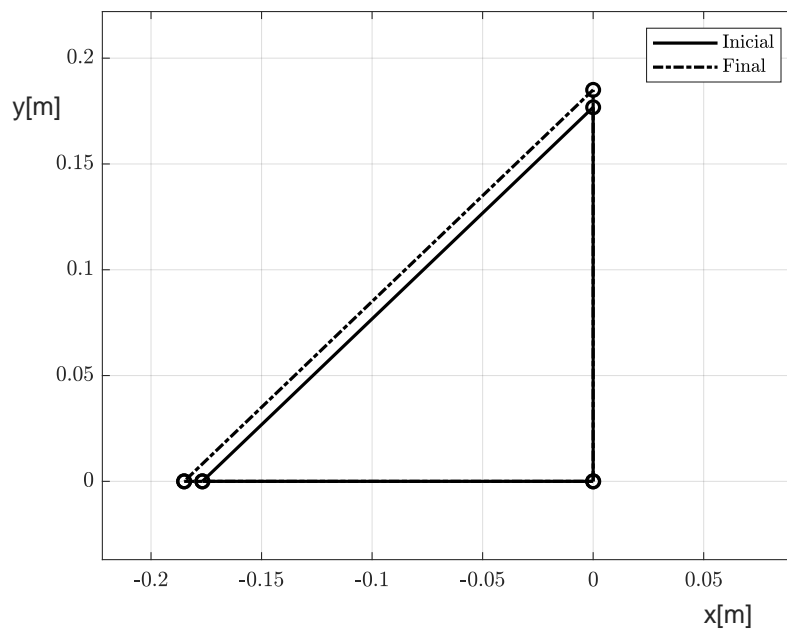


Figura 3: Deformada de la estructura obtenida analíticamente. El factor de escala de los desplazamientos es de 100.

### 3.2. Descripción del modelo FEM

Una vez determinada la solución analítica, se pasa al desarrollo numérico del problema. Como se abordará éste mediante el método de los elementos finitos (FEM) es necesario caracterizar correctamente el problema de forma que los resultados del análisis con NASTRAN-PATRAN sean correctos.

En primer lugar, se define la geometría del problema, creando puntos y líneas con las dimensiones correspondientes. Una vez hecho esto se definen las propiedades del material, en este caso basta con definir un material isótropo con el módulo elástico y el coeficiente de expansión térmica correspondientes (véase Tabla 1). Ese material se usa a su vez para definir las varillas como propiedad unidimensional que se asigna a las curvas anteriormente creadas. Además del material se establece también el área de la varilla y su temperatura de referencia.

Una vez aplicadas las propiedades a la geometría, se pasa a mallar esta. Primero se crea la semilla de malla sobre las curvas que unen los puntos 1, 2 y 3 del problema, en este caso basta con un elemento por cada barra al ser su comportamiento uniforme. Una vez que la semilla de malla ha sido creada se mallan la curvas en sí y se comprueba que efectivamente los elementos coinciden con la geometría. De esta forma se crea un modelo con elementos de tipo CROD.

Después, se pasa a definir el caso de carga, en este caso la carga es de tipo térmico así que se modifica la temperatura de la curva 1-3 y en cada punto se establecen las condiciones de contorno correspondientes. Las cargas y las condiciones de contorno se definen sobre la geometría por si se quieren modificar luego el número de elementos.

Por último, se crea el archivo que leerá NASTRAN y se hace la llamada a este programa, no sin antes elegir el caso de carga estacionaria y modificar la rigidez, de lineal a lagrangiana, dado que es un problema termoelástico.

### 3.3. Resultados del modelo FEM

Una vez analizado el problema creado en PATRAN desde NASTRAN y habiéndose comprobado la ausencia de errores durante el cálculo se pueden analizar los resultados obtenidos. En este caso se tiene la distribución de desplazamientos que aparece en la Figura 4.

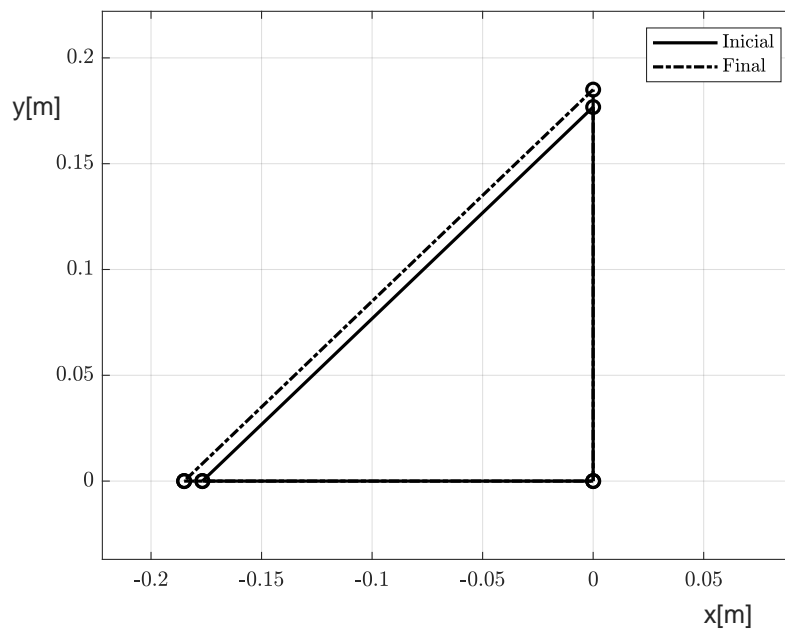


Figura 4: Deformada de la estructura obtenida numéricamente. El factor de escala de los desplazamientos es de 100.

Además en la Tabla 4 se los valores de desplazamiento y fuerza sobre cada uno de los puntos y en la Tabla 5 se recogen los valores de los esfuerzos internos de cada varilla proporcionados por NASTRAN.

Tabla 4: Fuerzas y desplazamientos sobre cada uno de los nodos de las estructura obtenidos de forma numérica.

Nodo y dirección	Desplazamiento [m]	Fuerza [kN]
1x	$-8.238 \cdot 10^{-5}$	-5.568
1y	0	-2.306
2x	0	3.262
2y	0	-3.262
3x	0	2.306
3y	$8.236 \cdot 10^{-5}$	5.568

Tabla 5: Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión obtenidos de forma numérica.

Varilla	Esfuerzo axial [Pa]
1-2	$3.262 \cdot 10^7$
1-3	$-4.613 \cdot 10^7$
2-3	$3.262 \cdot 10^7$

### 3.4. Comparación de resultados

Como cabría de esperar los resultados obtenidos por ambos métodos (analítico y numérico) son idénticos. Que no exista ninguna disparidad en los resultados obtenidos se debe en gran parte a la sencillez del problema. En la Figura 5 se muestran las dos soluciones obtenidas y en las Tablas 6 y 7 se recogen los resultados obtenidos por ambos modelos.

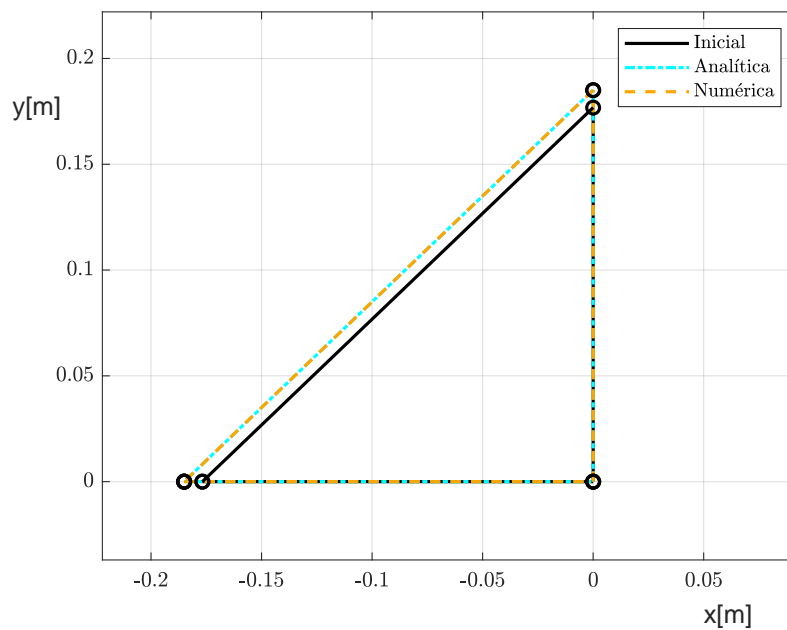


Figura 5: Deformadas de la estructura obtenidas analítica (azul) y numéricamente (naranja). El factor de escala de los desplazamientos es de 100.



Tabla 6: Comparación de resultados de desplazamientos y fuerzas para ambos métodos.

Nodo y dirección	Desplazamiento (analítico) [m]	Desplazamiento (numérico) [m]	Fuerzas (analítico) [kN]	Fuerzas (numérico) [kN]
1x	$8.238 \cdot 10^{-5}$	$8.238 \cdot 10^{-5}$	-5.568	-5.568
1y	0	0	-2.306	-2.306
2x	0	0	3.262	3.262
2y	0	0	-3.262	-3.262
3x	0	0	2.306	2.306
3y	$8.238 \cdot 10^{-5}$	$8.238 \cdot 10^{-5}$	5.568	5.568

Tabla 7: Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas para ambos métodos. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión obtenidos de forma numérica.

Varilla	Esfuerzo axial (analítico) [Pa]	Esfuerzo axial (numérico) [Pa]
1-2	$3.262 \cdot 10^7$	$3.262 \cdot 10^7$
1-3	$-4.613 \cdot 10^7$	$-4.613 \cdot 10^7$
2-3	$3.262 \cdot 10^7$	$3.262 \cdot 10^7$

## 4. Vibraciones sinusoidales 6

En este caso de estudio se analiza la respuesta de una viga en cuyo centro se sitúa una masa puntual la cual está simplemente apoyada en sus extremos los cuales vibran de forma armónica. En la Figura 6 se representa gráficamente el problema. Las propiedades de los elementos que definen el problema se recogen en la Tabla 8. Además la base se ve sometida a una aceleración de la forma:

$$\ddot{z}(t) = A \sin(2\pi ft) \text{ para } f \in [5, 100] \text{ Hz}, \quad (9)$$

donde  $A = 5 \text{ g}$  (donde  $1 \text{ g} = 9.81 \text{ m/s}^2$ ),  $f$  es la frecuencia de excitación y  $t$  es el tiempo.

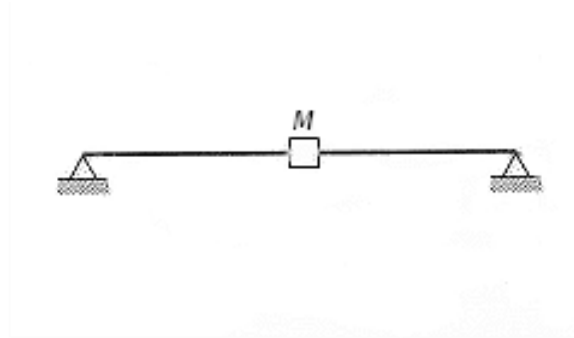


Figura 6: Representación gráfica del problema de carga armónica sobre una viga con una masa puntual en el centro.

Tabla 8: Propiedades de los elementos que definen el problema.

Longitud de la viga	$L = 0.450 \text{ m}$
Sección de la viga	$S = 20 \times 20 \text{ mm}$
Módulo elástico	$E = 200 \text{ GPa}$
Densidad	$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Coefficiente de amortiguamiento	$\xi = 0.02$
Masa puntual	$M_p = 50 \text{ kg}$

#### 4.1. Cálculo teórico

Para el estudio analítico del problema se recurre a un modelo de un grado de libertad con movimiento de la base como el que aparece en la Figura 7 donde  $M$  hace referencia a la masa efectiva del sistema,  $K$  a la rigidez y  $F$  al amortiguamiento. En este caso el grado de libertad estudiado es la flecha en la mitad de la viga representado por la coordenada generalizada  $q$  y el movimiento de la base lo representa la coordenada generalizada  $z$ .

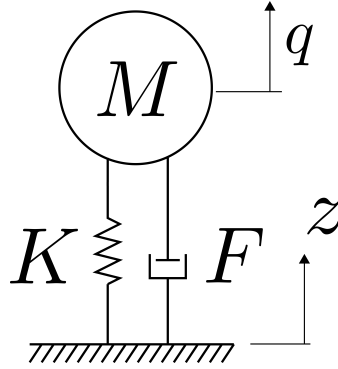


Figura 7: Sistema de vibraciones de un grado de libertad con movimiento de la base donde  $M$  es la masa efectiva del sistema,  $K$  la rigidez y  $F$  el amortiguamiento.

La energía cinética del sistema puede expresarse como:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{q}^2, \quad (10)$$

por lo que la masa total del sistema es  $M = m_v + M_p$  (donde  $m_v = \rho LS$  es la masa de la viga y  $M_p$  es la masa puntual). Por otra parte, la energía potencial del sistema puede expresarse como:

$$U = \frac{1}{2}K(q - z)^2, \quad (11)$$

donde el coeficiente de rigidez puede obtenerse de la respuesta de la viga simplemente apoyada a una carga unitaria sobre el grado de libertad que en este caso resulta ser  $K = \frac{48EI}{L^3}$ , donde  $I$  es el momento de inercia de la viga. Por último, el amortiguamiento viscoso puede expresarse como:

$$D = \frac{1}{2}F(\dot{q} - \dot{z})^2, \quad (12)$$

donde el coeficiente de amortiguamiento  $F = \xi 2\sqrt{KM}$ .

Aplicando a este sistema la ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial K}{\partial q} = 0, \quad (13)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$M\ddot{q} + F(\dot{q} - \dot{z}) + K(q - z) = 0, \quad (14)$$

que debidamente adimensionalizada con  $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ , responde al un movimiento de la base de frecuencia  $\Omega$  y módulo  $A/\Omega$  en el dominio de la frecuencia como:

$$|Q(\Omega)| = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{A}{\Omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_0}\right)^2}} + \frac{A}{\Omega^2}, \quad (15)$$

$$\theta = -\arctan\left(\frac{2\xi\Omega/\omega_0}{1 - (\Omega/\omega_0)^2}\right), \quad (16)$$

donde  $|Q(\Omega)|$  es módulo del desplazamiento en el dominio de la frecuencia y  $\theta$  es su fase. Por tanto, la aceleración en función de la frecuencia puede obtenerse de:

$$\ddot{Q}(\Omega) = -\Omega^2 Q(\Omega). \quad (17)$$

La Figura 8 muestra el diagrama de Bode de la aceleración en el centro de la viga. El pico se localiza en la frecuencia natural ( $\omega_0 = 26.305$  Hz) y tiene una altura de  $1096.4 \text{ m/s}^2$ .

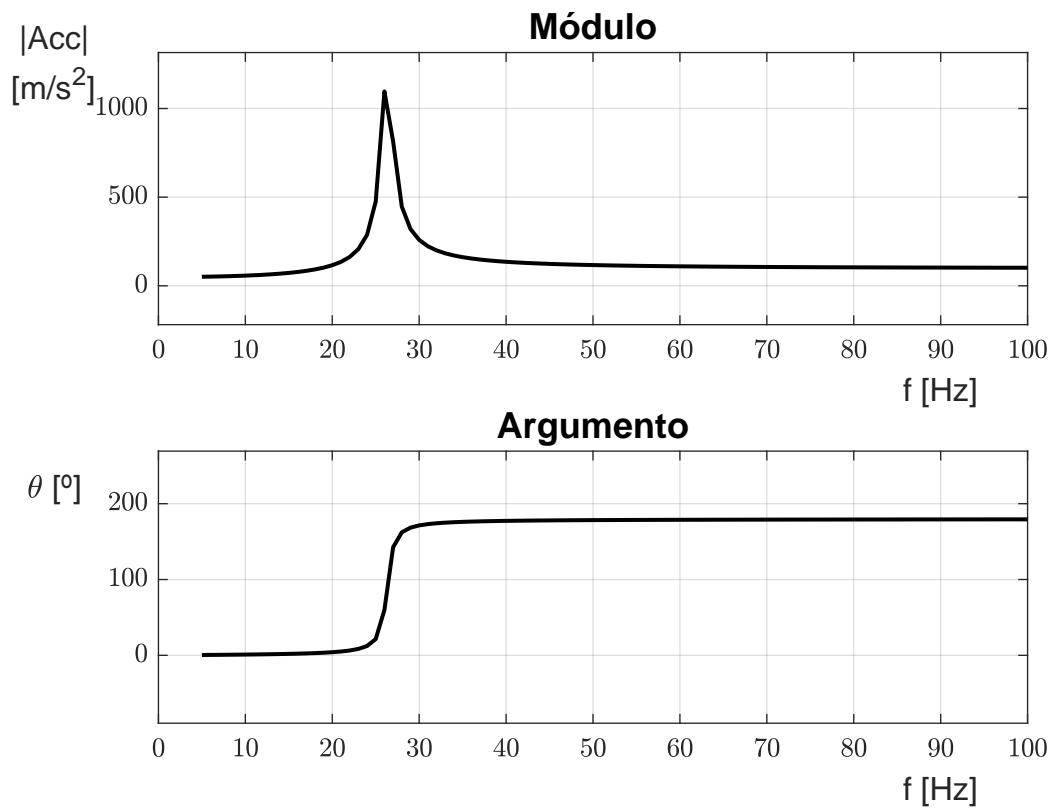


Figura 8: Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad.

## 4.2. Descripción del modelo FEM

Una vez determinada la solución analítica, se pasa al desarrollo numérico del problema. Como se empleará el método de los elementos finitos (FEM) para determinar la solución numérica del problema es importante caracterizar correctamente el problema para que así los programas encargados del análisis proporcionen resultados correctos.

En primer lugar, se define la geometría del problema, en este caso se sitúa un punto en el centro de la viga para poder situar luego la masa puntual. También se crean unas curvas que unen los puntos. Después se crean las propiedades del material con los datos de la Tabla 8 y se crea una viga de sección cuadrada compuesta por este material para asociar esta propiedad a las curvas que unen los puntos.

Luego, se mallan dichas curvas con varios elementos para que pueda realizarse el análisis de frecuencia creándose así una distribución lineal de elementos del tipo CBAR. Además se crea un nodo sobre el punto central y un elemento 0D donde se sitúa la masa puntual y se une este elemento al nodo del mallado de las curvas correspondiente al punto central a través de un elemento del tipo RBE2 con restricciones de traslación.

En este caso el caso de carga se introduce modificando directamente el cabecero de PATRAN y ejecutándolo a través de NASTRAN. Para hacer el ensayo de vibraciones armónicas (y también en el caso de vibraciones aleatorias) se crea un nodo adicional que funciona de vibrador y que se une a los nodos de los extremos (ya que es ahí por donde se transmite la carga) por medio de elementos RBE2 respetando las condiciones de contorno que tendrían los nodos de los extremos de forma natural (*i.e.* simplemente apoyados). Además, en el cabecero, se incluye la tabla que describe el comportamiento de la función de aceleración a lo largo de las frecuencias. Se introduce también el amortiguamiento estructural y se especifica el tipo de solución (111) y el rango de frecuencias a analizar.

Por último, se realiza el análisis modal abriendo el modelo directamente desde NASTRAN.

### 4.3. Resultados del modelo FEM

Una vez analizado correctamente el problema y habiéndose comprobado la ausencia de errores durante el cálculo se pueden analizar los resultados obtenidos. En este caso la evolución de la aceleración del nodo central respecto a la frecuencia se muestra en el diagrama de Bode de la Figura 9.

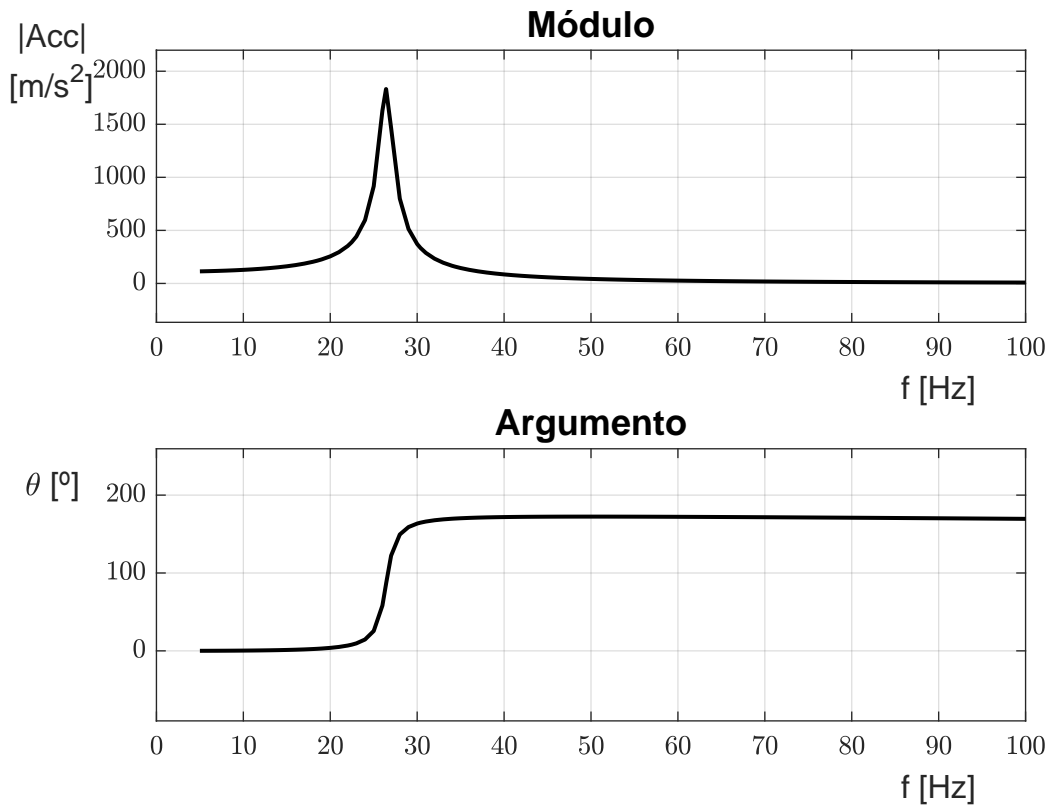


Figura 9: Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad.

En este caso al haberse planteado un modelo con más grados de libertad se produce un cambio de comportamiento tanto en módulo como en argumento, pero la frecuencia dominante sigue estando entorno a la analítica y como en este intervalo no hay más frecuencias naturales el comportamiento es muy similar. En este caso la frecuencia dominante es  $\omega_0 = 26.413$  Hz con una aceleración de  $1831.85 m/s^2$ .

Para reflejar también la influencia del peso de la viga se ha simulado el problema también en una viga sin peso y ambos resultados se muestran en la Figura 10. Como se puede observar la frecuencia natural también se mantiene en torno a la calculada analíticamente  $\omega_0 = 26.594$  Hz pero la aceleración máxima disminuye apreciablemente hasta  $818.97 m/s^2$ .

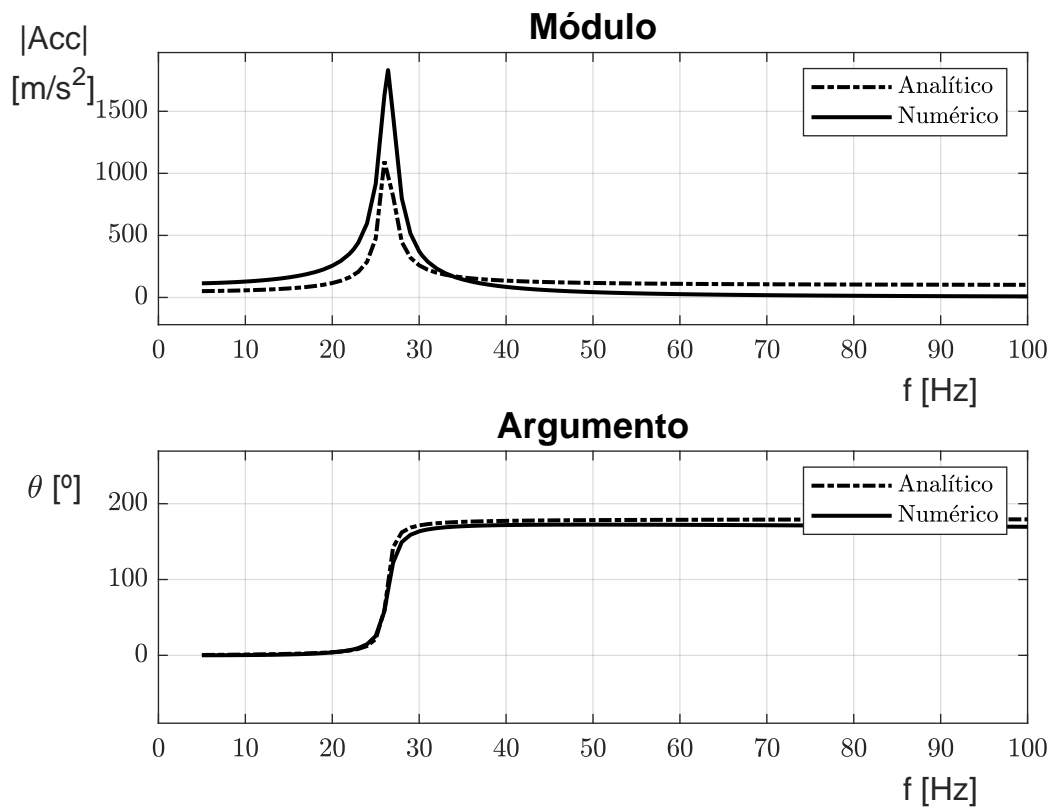


Figura 10: Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad obtenidas para una viga con (línea continua) y sin masa (línea discontinua).



#### 4.4. Comparación de resultados

En este caso sí que existe una disparidad en cuanto a la solución y esto se debe al no haber sido considerados otros modos en el primer análisis del problema. Sin embargo, este primer análisis sí que ha sido de gran utilidad para determinar la frecuencia de resonancia dominante lo cual podría concluir prácticamente el análisis de vibraciones en caso de no estar localizada dentro del rango de frecuencias de trabajo.

En la Figura 11 se superponen ambas soluciones y se puede apreciar la similitud de comportamientos.

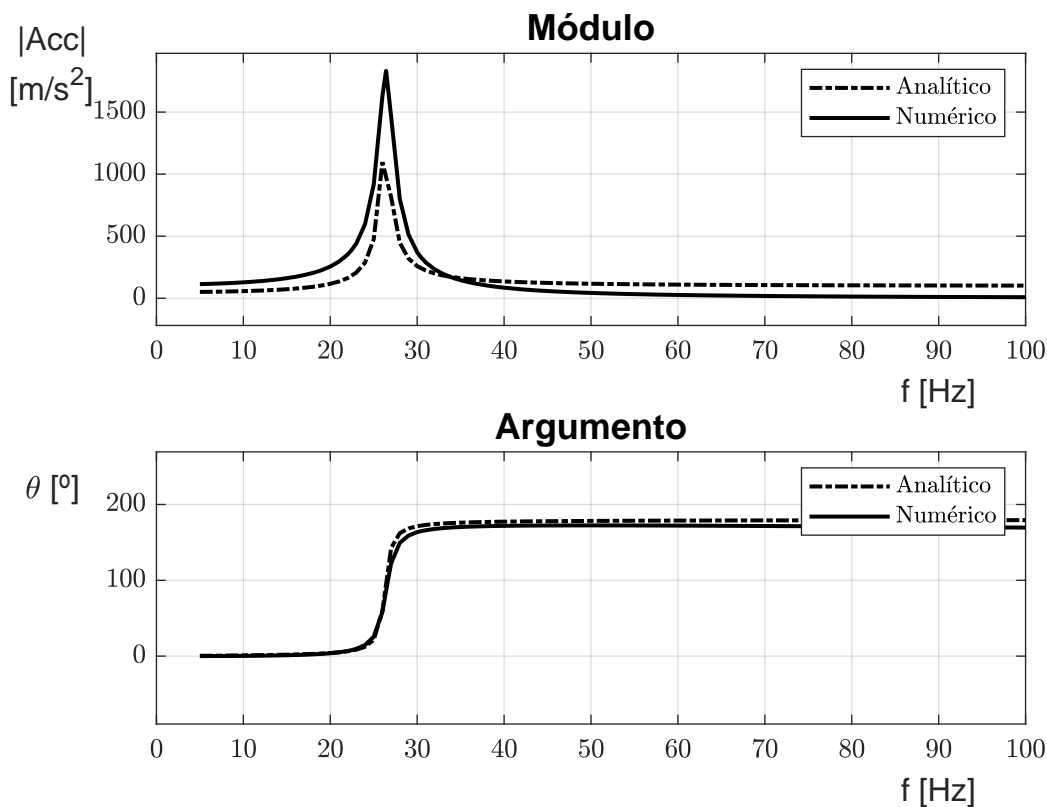


Figura 11: Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad obtenidas tanto analítica como numéricamente.

Cabe decir que, de haberse realizado un planteamiento analítico de un sistema con más grados de libertad sí podrían haberse determinado las otras frecuencias naturales. Sin embargo, eso hubiera supuesto un esfuerzo mayor para calcular una solución que generalmente (sobre todo para problemas con geometrías más complejas) sirve solo como referencia.

## 5. Conclusiones

A la vista del desarrollo de este trabajo se han extraído las siguientes conclusiones:

- Que para modelos simples como el de una estructura articulada sencilla el análisis numérico por PATRAN-NASTRAN conduce a los mismos resultados que el análisis analítico del problema por lo que se pueden aplicar ambos métodos. Cuál de los dos elegir vendrá determinado por otros factores como la rapidez de preprocesado y posprocesado o la necesidad de incluir la estructura en un conjunto mayor. En las Tablas 9 y 10 se muestra la comparativa en lo que se refiere a fuerzas, desplazamientos y esfuerzos axiales de las varillas que conforman la estructura.

Tabla 9: Comparación de resultados de desplazamientos y fuerzas para ambos métodos.

Nodo y dirección	Desplazamiento (analítico) [m]	Desplazamiento (numérico) [m]	Fuerzas (analítico) [kN]	Fuerzas (numérico) [kN]
1x	$8.238 \cdot 10^{-5}$	$8.238 \cdot 10^{-5}$	-5.568	-5.568
1y	0	0	-2.306	-2.306
2x	0	0	3.262	3.262
2y	0	0	-3.262	-3.262
3x	0	0	2.306	2.306
3y	$8.238 \cdot 10^{-5}$	$8.238 \cdot 10^{-5}$	5.568	5.568

Tabla 10: Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas para ambos métodos. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión obtenidos de forma numérica.

Varilla	Esfuerzo axial (analítico) [Pa]	Esfuerzo axial (numérico) [Pa]
1-2	$3.262 \cdot 10^7$	$3.262 \cdot 10^7$
1-3	$-4.613 \cdot 10^7$	$-4.613 \cdot 10^7$
2-3	$3.262 \cdot 10^7$	$3.262 \cdot 10^7$

- Que para modelos de vibraciones es útil un planteamiento sencillo y analítico para una primera aproximación al problema pero que un posterior análisis de elementos finitos permite incluir otros modos de vibración y por tanto el análisis es más complejo. En la Figura 12 se muestran los dos diagramas de Bode superpuestos donde la frecuencia natural es de  $\omega_0 = 26.305 \text{ Hz}$  para el modelo analítico y  $\omega_0 = 26.413 \text{ Hz}$  para el numérico.

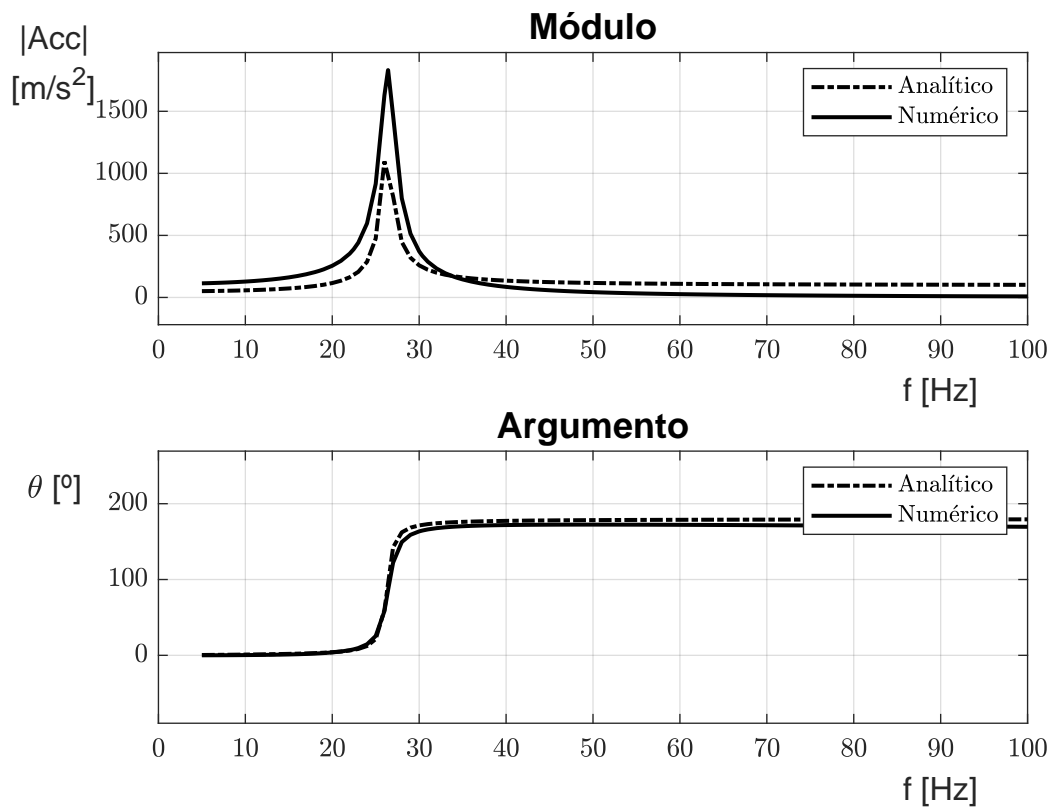


Figura 12: Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad obtenidas tanto analítica como numéricamente. La frecuencia natural es de  $\omega_0 = 26.305$  Hz.

Además, del estudio de la influencia del peso de la viga sobre la respuesta se ha obtenido el diagrama de Bode de la Figura 13, en él se observa cómo la masa de la viga no modifica apreciablemente la frecuencia de resonancia pero sí disminuye la aceleración máxima.

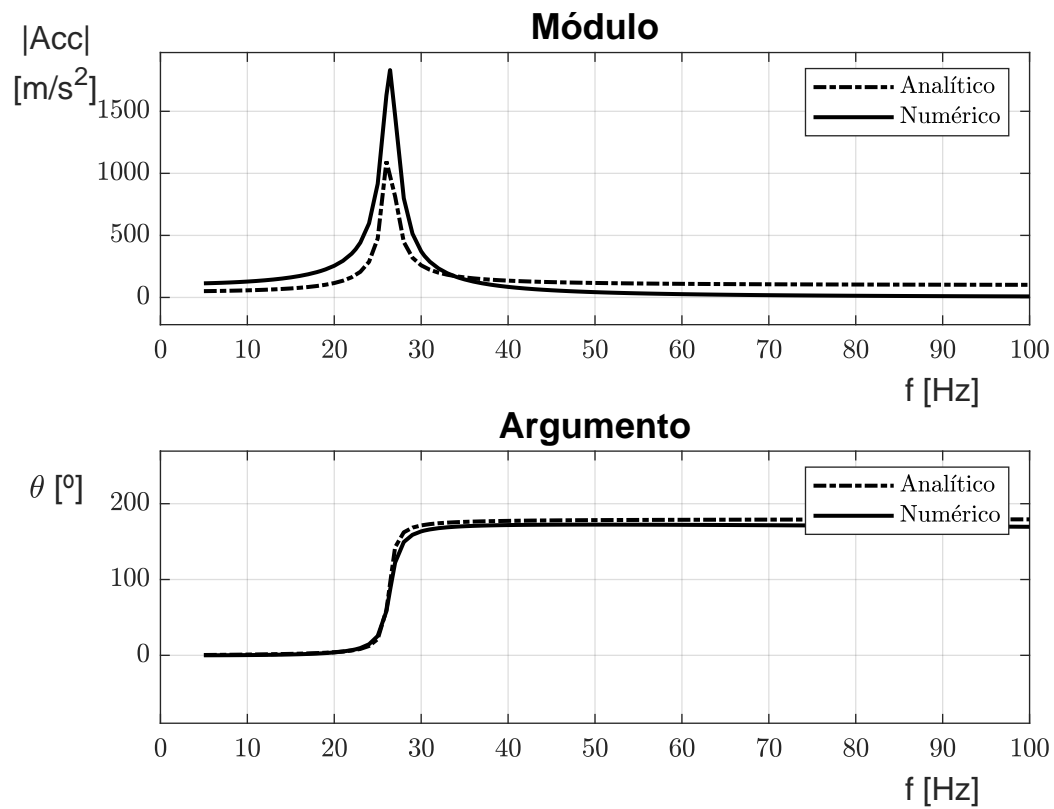


Figura 13: Diagrama de Bode de la aceleración del centro de la viga para el modelo de un grado de libertad obtenidas para una viga con (línea continua) y sin masa (línea discontinua).

## Referencias

- [1] ESA, ECSS-E-ST-32-10C: Space engineering structural factors of safety for spaceflight hardware (2009).
- [2] ESA, ECSS-E-ST-32C: Space engineering structural general requirements (2008).
- [3] A. García, J. J. F. de Toro, Manual de cálculo estructural.
- [4] J. Wijker, Spacecraft Structures.[doi:10.1007/978-3-540-75553-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75553-1).
- [5] A. G. Pérez, Modelización de una placa (2021).
- [6] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Resistencia de materiales y elasticidad (ETSIAE-UPM).
- [7] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Estructuras aeronáuticas (ETSIAE-UPM).
- [8] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Método de elementos finitos (ETSIAE-UPM).
- [9] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Vibraciones (ETSIAE-UPM).
- [10] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Estructuras de uso espacial (MUSE-IDR-UPM).
- [11] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Vibraciones y aeroacústica (ETSIAE-UPM).