



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID



ESTRUCTURAS DE USO ESPACIAL PRÁCTICA 3

GONZALO AZAÑA CARO

Sábado, 13 de junio de 2020

Profesor/es:

Elena Roibás Millán

Andrés García Pérez

Alejandro Manuel Gómez San Juan

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE CONTENIDOS.....	I
ÍNDICE DE FIGURAS.....	II
ÍNDICE DE TABLAS	II
1. Introducción.....	1
2. Diseño de los muelles del adaptador.....	2
3. Estudio de una estructura a altas frecuencias.....	7
3.a. Cálculo del número de modos	8
3.b. Cálculo del factor de pérdidas de acoplamiento.....	12
3.c. Ecuaciones de balance de potencia (SEA)	14
3.d. Cálculo de la energía.....	16
3.e. Cálculo de la presión del aire y la velocidad de las placas	17
BIBLIOGRAFÍA.....	III

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Representación del sistema de anclaje al adaptador formado por los muelles.	4
Figura 3.1: Esquema del modelo de la estructura.	7
Figura 3.2: Modos propios para placa y aire en función de la frecuencia.	11
Figura 3.3: Factor de pérdidas de acoplamiento de la estructura al aire (η_{pa}) y del aire a la estructura (η_{ap}) en función de la frecuencia.	13
Figura 3.4: Planteamiento del balance de potencias para un ejemplo con 3 subsistemas [2].	14
Figura 3.5: Evolución de la energía de los diferentes subsistemas en función de la frecuencia.	16
Figura 3.6: Variación de la velocidad de las placas en función de la frecuencia.	17
Figura 3.7: Variación de la presión del aire en función de la frecuencia.	18

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Dimensiones generales del sistema.	2
Tabla 2.2: Posicionamiento de los muelles.	2
Tabla 2.3: Posición del centro de gravedad del satélite.	2
Tabla 2.4: Posición del centro del centroide.	3
Tabla 2.5: Distribución de fuerzas axiales sobre los diferentes muelles.	5
Tabla 2.6: Valores de diseño para cada uno de los muelles, imponiendo la condición de desplazamiento y los valores límite para los muelles más restrictivos (en amarillo).	6
Tabla 3.1: Propiedades de las placas.	7
Tabla 3.2: Propiedades de la cavidad de aire.	7
Tabla 3.3: Lista de frecuencias en tercios de octava entre 16 Hz y 10 kHz.	9
Tabla 3.4: Cálculo de los modos propios del aire en función de la frecuencia.	10
Tabla 3.5: Modos propios para placa y aire.	10
Tabla 3.6: Perfiles de potencias externas aplicadas en los paneles.	15

1. Introducción

El objetivo de este informe es resolver mediante los procedimientos aprendidos en clase de “Estructuras de uso espacial” de 1º de MUSE dos ejercicios propuestos.

El primero de ellos será el dimensionado de los muelles de un sistema adaptador de un satélite, mientras que el segundo ejercicio consistirá en el estudio de una energía mediante un modelo energético.

En los dos apartados siguientes, se resumirá primero el enunciado del ejercicio a resolver y posteriormente se detallará su solución.

2. Diseño de los muelles del adaptador

Se quiere diseñar los muelles del sistema de separación del UPMSat-2. Para ello, se conoce, además de la geometría y las propiedades del satélite, que éste debe soportar una aceleración de 1 g en dirección Z y una fuerza centrífuga en dirección Y, con una velocidad de rotación de 1.2 r.p.m.

Tabla 2.1: Dimensiones generales del sistema.

Propiedad	Valor
Masa del satélite [kg]	44.53
Aceleración [g]	1
Velocidad angular [r.p.m.]	1.2
Distancia del eje de giro [m]	1
Elongación de los muelles [mm]	33.5 – 34.5

Se conoce además las posiciones de los diferentes muelles del sistema de separación (Tabla 2.2) y la posición del centro de gravedad del satélite (Tabla 2.3).

Tabla 2.2: Posicionamiento de los muelles.

Muelle	X [m]	Y [m]	Z [m]
1	-0,0927	0,1527	-0,0145
2	-0,1648	0,069	-0,0145
3	-0,041	-0,1739	-0,0145
4	0,041	-0,1739	-0,0145
5	0,1739	-0,041	-0,0145
6	0,069	0,1648	-0,0145

Tabla 2.3: Posición del centro de gravedad del satélite.

X_g [mm]	Y_g [mm]	Z_g [mm]
-1.96	0.016	306.7

Con los datos proporcionados, se debe imponer que los muelles sufran una elongación que cumpla con el rango establecido, para así diseñar los muelles, es decir, obtener la k del muelle.

Para ello, se va a suponer que todos los muelles son iguales, por lo que tendrán una rigidez k y área resistente A_i .

En el muelle aparecerá una componente de la fuerza axial y otra a cortadura. Se estudia solo el efecto axial que será el que deba soportar la rigidez k del muelle.

De esta forma, el problema se reduce a calcular las reacciones de las fuerzas axiales sobre cada uno de los tornillos e imponer el rango de elongaciones en los mismos. Mediante la Ley de Hooke, se tiene:

$$N_i = -k \cdot \Delta x , \quad (2.1)$$

donde la fuerza axial sobre el tornillo está compuesta por una componente de la fuerza axial y la contribución de los momentos que se producen por tener una carga desplazada del eje del tornillo. Así, la fuerza en cada tornillo será tal que:

$$N_i = N_{F_z,i} + N_{M_x,i} + N_{M_y,i} . \quad (2.2)$$

Para calcular la fuerza sobre los muelles, primero se debe calcular la fuerza y los momentos en el centroide para obtener de ellos las fuerzas en los muelles.

Para el cálculo de dichas fuerzas, se deberán seguir los siguientes pasos:

1. Cálculo del área total de los muelles: se tienen 6 muelles de área A_i , por lo que $A_T = 6 \cdot A_i$.
2. Cálculo del centroide de los tornillos:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i \cdot A_i}{A_T} = \frac{1}{6} \cdot \sum_i x_i = -0.002433 \text{ m}, \quad (2.3)$$

$$y_c = \frac{\sum_i y_i \cdot A_i}{A_T} = \frac{1}{6} \cdot \sum_i y_i = -0.0003833 \text{ m}, \quad (2.4)$$

$$z_c = \frac{\sum_i z_i \cdot A_i}{A_T} = \frac{6}{6} \cdot z_i = -0.0145 \text{ m}. \quad (2.5)$$

Tabla 2.4: Posición del centro del centroide.

x_c [m]	y_c [m]	z_c [m]
-0,00243333	-0,00038333	-0,0145

Como se puede observar, el centroide (Tabla 2.4) está desviado del centro de aplicación de las cargas, el centro de gravedad (Tabla 2.3), por lo que al trasladar las fuerzas al centro de cortadura, aparecen momentos en los ejes X e Y .

De hecho, al representar el sistema en el plano (ver Figura 2.1), se observa como el centro de cortadura está ligeramente desviado del centro de masas.

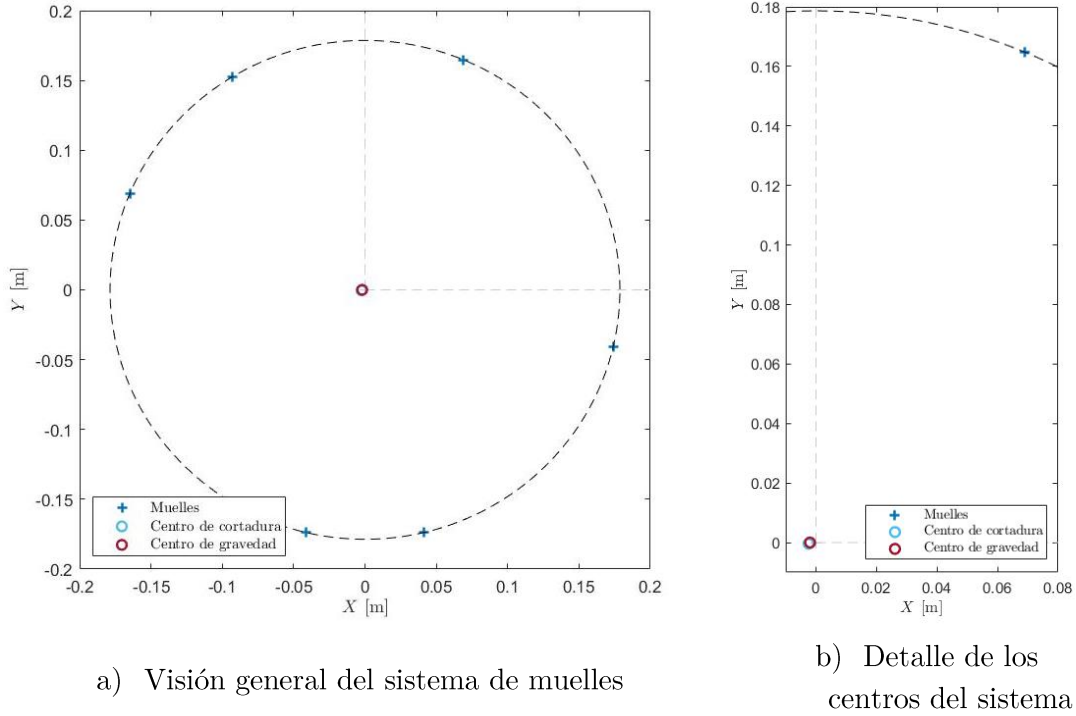


Figura 2.1: Representación del sistema de anclaje al adaptador formado por los muelles.

3. Cálculo de los momentos de inercia:

$$I_{c,x} = \sum_i y_{c,i}^2 \cdot A_i = 0.1174 \cdot A_i \text{ m}^4, \quad (2.6)$$

$$I_{c,y} = \sum_i x_{c,i}^2 \cdot A_i = 0.0741 \cdot A_i \text{ m}^4, \quad (2.7)$$

$$I_{c,xy} = \sum_i (x_{c,i}^2 + y_{c,i}^2) \cdot A_i = I_{c,x} + I_{c,y} = 0.1915 \cdot A_i \text{ m}^4. \quad (2.8)$$

4. Se aplican las fuerzas sobre el centroide:

$$\vec{F}_c = \sum_j \vec{F}_j, \quad (2.9)$$

$$\vec{M}_c = \sum_k \vec{M}_k + \sum_j (\vec{R}_{c,j} \times \vec{F}_j), \quad (2.10)$$

donde la fuerza tiene dos componentes, una en dirección axial, y otra en la dirección de la aceleración normal, en sentido opuesto, es decir, en $-Y$. Adicionalmente, no existe momento aplicado sobre el sistema. Así, la fuerza queda:

$$F_x = 0 \text{ N}, \quad (2.11)$$

$$F_y = -M \cdot \omega^2 \cdot r = -44.53 \cdot 0.126^2 \cdot 1 = -0.70 \text{ N}, \quad (2.12)$$

$$F_z = M \cdot a = 44.53 \cdot (1 \cdot 9.81) = 436.84 \text{ N}. \quad (2.13)$$

Al desplazar la fuerza al centroide, la fuerza es la misma que la calculada en (2.11)-(2.13), pero se genera un momento en el centroide debido a que la fuerza no se aplica sobre el mismo:

$$\vec{M}_c = \vec{R}_c \times \vec{F} = \begin{bmatrix} 0.0004733 \\ 0.000399 \\ 0.3212 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0.703 \\ 436.84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4003 \\ -0.2067 \\ -0.0003 \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}, \quad (2.14)$$

siendo \vec{R}_c el radiovector entre el centroide y el punto de aplicación de la carga.

5. Se obtiene las fuerzas axiales sobre cada muelle:

$$N_{F_z,i} = \frac{-F_z \cdot A_i}{A_T} = \frac{1}{6} \cdot F_z, \quad (2.15)$$

$$N_{M_x,i} = -\frac{M_{F_x,i} \cdot y_{c,i} \cdot A_i}{I_{c,x}}, \quad (2.16)$$

$$N_{M_y,i} = \frac{M_{F_y,i} \cdot x_{c,i} \cdot A_i}{I_{c,y}}. \quad (2.17)$$

De esta forma, se obtiene, sobre cada muelle, las fuerzas axiales mostradas en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5: Distribución de fuerzas axiales sobre los diferentes muelles.

	Fuerzas axiales sobre el muelle			
	$N_{F_z,i}$ [N]	$N_{M_{F_x},i}$ [N]	$N_{M_{F_y},i}$ [N]	N_i [N]
1	-72.81	-0.521	0.259	-73.07
2	-72.81	-0.235	0.460	-72.58
3	-72.81	0.593	0.114	-72.10
4	-72.81	0.593	-0.114	-72.33
5	-72.81	0.140	-0.485	-73.15
6	-72.81	-0.562	-0.192	-73.56

Por último, se debe imponer que para cada una de las fuerzas axiales sobre los muelles calculadas (N_i), se debe tener una elongación:

$$\Delta x \div [33.5, 34.5] \text{ mm.} \quad (2.18)$$

Para cada muelle, se debe imponer una elongación mínima de 33.5 mm y una máxima de 34.5 mm, para obtener los valores de k (con el uso de la Ecuación (2.19)) del muelle más restrictivo, e imponer un rango de diseño del muelle.

$$k = \frac{N_i}{\Delta x}. \quad (2.19)$$

Tabla 2.6: Valores de diseño para cada uno de los muelles, imponiendo la condición de desplazamiento y los valores límite para los muelles más restrictivos (en amarillo).

		($\Delta x = 34.5 \text{ mm}$)	($\Delta x = 33.5 \text{ mm}$)
	$N_i \text{ [N]}$	$k_{\min} \text{ [N/m]}$	$k_{\max} \text{ [N/m]}$
1	-73.07	2117.93	2181.15
2	-72.58	2103.83	2166.63
3	-72.10	2089.83	2152.22
4	-72.33	2096.46	2159.04
5	-73.15	2120.34	2183.64
6	-73.56	2132.20	2195.85

Finalmente, se obtiene que el rango de diseño es tal que $k \div [2132.20, 2152.22] \text{ N/m}$, con lo que un valor válido para el diseño de los muelles es:

$$k = 2150 \text{ N/m.} \quad (2.20)$$

Como se observa, el valor seleccionado está más cercano al límite superior establecido, de esta forma, se asegura que el desplazamiento de los muelles, aún dentro del rango establecido, está más cercano al valor mínimo establecido, ya que, por lo general, en el diseño de estructuras se quiere que los desplazamientos en las estructuras sean pequeños.

3. Estudio de una estructura a altas frecuencias

Para este apartado, se quiere calcular la velocidad media de los paneles y la presión cuadrática media en las capas de aire del modelo de una estructura como la representada en la Figura 3.1.

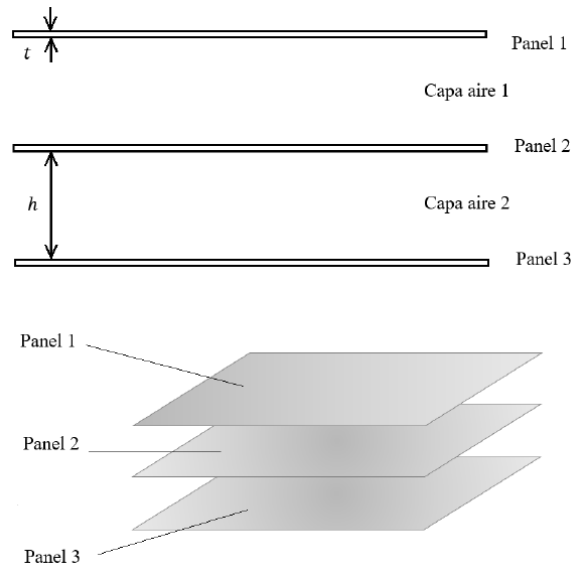


Figura 3.1: Esquema del modelo de la estructura.

Para el estudio de los diferentes sistemas del modelo, se tienen las propiedades descritas en la Tabla 3.1 y la Tabla 3.2.

Tabla 3.1: Propiedades de las placas.

Parámetro	Valor
Dimensiones [m ³]	$1 \times 1.25 \times 0.005$
Material	Aluminio
Densidad [kg/m ³]	2700
Módulo elástico (E) [GPa]	70
Coefficiente de Poisson (ν) [-]	0.3

Tabla 3.2: Propiedades de la cavidad de aire.

Parámetro	Valor
Dimensiones [m ³]	$1 \times 1.25 \times 0.05$
Densidad [kg/m ³]	1.225
Velocidad del sonido (c_0) [m/s ²]	343

Con los valores aquí presentes junto con un conjunto de ecuaciones que definen el método, se pide:

- Calcule y represente gráficamente en función de la frecuencia el número de modos por banda (N) para los paneles y para el aire, realizando el cálculo en tercios de octava para frecuencias entre 16 Hz y 10 kHz. Además, se pide indicar cuál es la frecuencia a partir de la cual todos los elementos del sistema pueden representarse mediante modelos energéticos.
- Calcule y represente gráficamente el factor de pérdidas de acoplamiento de la estructura al aire, η_{pa} , y del aire a la estructura, η_{ap} .
- Plantee las ecuaciones de balance de potencia del método SEA para el sistema.
- Para una distribución de potencias dada, calcule y represente las energías de los cinco subsistemas.
- A partir de las energías calculadas, determine la velocidad media de los paneles y la presión cuadrática media en las capas de aire.

En lo que sigue, se van a desarrollar los diferentes subapartados, explicándolos en mayor detalle.

3.a. Cálculo del número de modos

Como se indica en el enunciado del ejercicio [1], la densidad modal para los diferentes subsistemas se puede obtener como:

$$n_p(\omega) = \frac{A}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot t}{D}}, \quad (3.1)$$

$$n_a(\omega) = \frac{V}{\pi \cdot c_0} \cdot \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 + \frac{A'}{4c_0} \cdot \left(\frac{\omega}{c_0}\right) + \frac{L'}{8 \cdot c_0}, \quad (3.2)$$

para la placa (p) y para el aire (a) respectivamente, siendo ω la frecuencia¹, L' y A' el perímetro de los bordes y el área de las superficies de la cavidad de aire, respectivamente, y D la rigidez flexional de la placa, calculada según la teoría para placas delgadas:

¹ La frecuencia puede ser expresada en rad/s o Hz, se hará una distinción por tanto entre ω [rad/s] y f [Hz], siendo la relación entre ambas: $\omega = 2\pi f$.

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}, \quad (3.3)$$

Como se puede ver en las ecuaciones, la densidad modal de la placa es constante mientras que la del aire varía en función de la frecuencia. De esta forma, se calcula la densidad modal de la placa:

$$n_p(\omega) = 0.013 \text{ modos/rad/s} \cdot \quad (3.4)$$

Por el contrario, para definir la densidad modal del aire hace falta definir las frecuencias para el cálculo (ver Tabla 3.3).

Tabla 3.3: Lista de frecuencias en tercios de octava entre 16 Hz y 10 kHz.

Lower [Hz]	Center [Hz]	Upper [Hz]	Δf [Hz]
14,1	16	17,8	3,7
17,8	20	22,4	4,6
22,4	25	28,2	5,8
28,2	31,5	35,5	7,3
35,5	40	44,7	9,2
44,7	50	56,2	11,5
56,2	63	70,8	14,6
70,8	80	89,1	18,3
89,1	100	112	22,9
112	125	141	29
141	160	178	37
178	200	224	46
224	250	282	58
282	315	355	73
355	400	447	92
447	500	562	115
562	630	708	146
708	800	891	183
891	1000	1122	231
1122	1250	1413	291
1413	1600	1778	365
1778	2000	2239	461
2239	2500	2818	579
2818	3150	3548	730
3548	4000	4467	919
4467	5000	5623	1156
5623	6300	7079	1456
7079	8000	8913	1834
8913	10000	11220	2307

Con la Tabla 3.3 y la Ecuación (3.2), se obtienen las densidades modales del aire en función de la frecuencia (ver Tabla 3.4).

Tabla 3.4: Cálculo de los modos propios del aire en función de la frecuencia.

f [Hz]	n_a [modos/(rad/s)]	f [Hz]	n_a [modos/(rad/s)]
16	0.0039	500	0.0264
20	0.0041	630	0.0340
25	0.0043	800	0.0449
31.5	0.0045	1000	0.0592
40	0.0048	1250	0.0792
50	0.0052	1600	0.1114
63	0.0057	2000	0.1540
80	0.0064	2500	0.2160
100	0.0072	3150	0.3111
125	0.0082	4000	0.4603
160	0.0097	5000	0.6718
200	0.0114	6300	1.0050
250	0.0137	8000	1.5400
315	0.0167	10000	2.3135
400	0.0210		

Finalmente, se obtiene el número de modos por banda como:

$$n = \frac{N}{\Delta\omega} \rightarrow N = 2\pi \cdot \Delta f \cdot n . \quad (3.5)$$

Tabla 3.5: Modos propios para placa y aire.

Δf [Hz]	n [modos/(rad/s)]		N	
	Placa	Aire	Placa	Aire
3.7	0.0129	0.0039	0.30	0.09
4.6		0.0041	0.37	0.12
5.8		0.0043	0.47	0.16
7.3		0.0045	0.59	0.21
9.2		0.0048	0.75	0.28
11.5		0.0052	0.93	0.38
14.6		0.0057	1.18	0.52
18.3		0.0064	1.48	0.73
22.9		0.0072	1.86	1.03
29		0.0082	2.35	1.50
37		0.0097	3.00	2.25
46		0.0114	3.73	3.30
58		0.0137	4.71	4.98

73		0.0167	5.92	7.68
92		0.0210	7.46	12.15
115		0.0264	9.33	19.08
146		0.0340	11.84	31.19
183		0.0449	14.85	51.64
231		0.0592	18.74	85.92
291		0.0792	23.61	144.89
365		0.1114	29.61	255.46
461		0.1540	37.40	445.98
579		0.2160	46.97	785.63
730		0.3111	59.22	1426.84
919		0.4603	74.55	2657.83
1156		0.6718	93.78	4879.82
1456		1.0050	118.12	9194.50
1834		1.5400	148.78	17746.46
2307		2.3135	187.16	33534.50

Por inspección de la Tabla 3.5 junto con la Tabla 3.3, se observa que a partir de la frecuencia $f = 315$ Hz tanto el aire como la placa tienen un número de modos $N \geq 5$, por lo que a partir de dicha frecuencia (las celdas marcadas en amarillo en la Tabla 3.5) se puede suponer la condición de alta frecuencia, y por lo tanto es válido el método SEA.

Al representar los modos en función de la frecuencia, se obtiene la Figura 3.2.

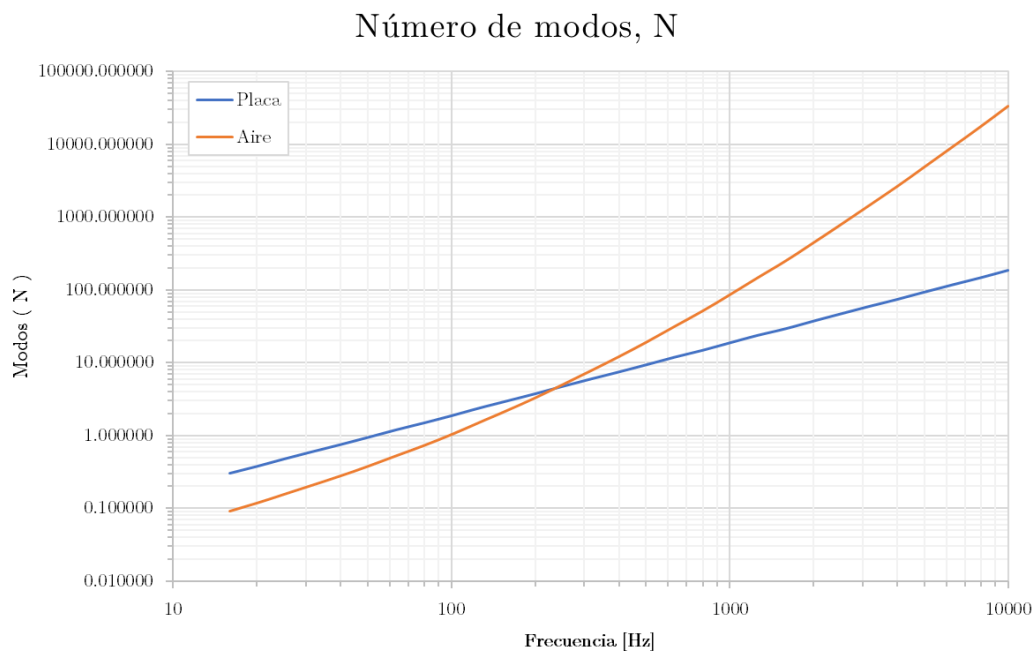


Figura 3.2: Modos propios para placa y aire en función de la frecuencia.

3.b. Cálculo del factor de pérdidas de acoplamiento

Para el cálculo del factor de pérdidas, se puede obtener el factor de pérdidas de acoplamiento de la estructura al aire, η_{pa} a partir de [1]:

$$\eta_{pa} = \frac{A \cdot \rho_0 \cdot c_0 \cdot \sigma(\omega)}{M \cdot \omega}, \quad (3.6)$$

siendo ρ_0 la densidad del aire y estando $\sigma(\omega)$ definida a trozos según:

I) Si $f_{11} \leq f_c/2$:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 4 \cdot A \cdot \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 & f < f_{11} \\ \frac{c_0 \cdot P}{A \cdot f_c} \cdot \left(\frac{(1-\lambda^2) \cdot \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda} + 2\lambda}{4\pi^2 \cdot (1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot c_0}{f_c \cdot \pi^2}\right)^2 \cdot \frac{1-2 \cdot \lambda^2}{A \cdot \lambda \cdot \sqrt{1-\lambda^2}} & f_{11} < f < \frac{f_c}{2} \\ \frac{c_0 \cdot P}{A \cdot f_c} \cdot \left(\frac{(1-\lambda^2) \cdot \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda} + 2\lambda}{4\pi^2 \cdot (1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\right) & \frac{f_c}{2} < f < f_c \\ \frac{1}{\sqrt{1-f_c/f}} & f \geq f_c \end{cases}, \quad (3.7)$$

II) Si $f_{11} > f_c/2$:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 4 \cdot A \cdot \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 & f < f_c \\ \frac{1}{\sqrt{1-f_c/f}} & f > f_c \end{cases}, \quad (3.8)$$

donde $\lambda = \sqrt{f/f_c}$ y P es el perímetro de la placa, es decir, $P = L_1 \cdot L_2$. El resto de los parámetros ya han sido mencionados anteriormente, salvo las frecuencias f_c y f_{11} , que son la frecuencia crítica de la placa y del primer modo superficial de la placa, respectivamente. Éstas se definen según las Ecuaciones (3.9) - (3.10).

$$f_c = \left(\frac{c_0^2}{2\pi}\right) \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}, \quad (3.9)$$

con m la masa por unidad de superficie de la placa, es decir, $m = \frac{M}{A} = \rho \cdot t$. De esta forma, se obtiene:

$$f_c = 2430.43 \text{ Hz.} \quad (3.10)$$

Por su parte, la frecuencia del primer modo superficial de la placa es:

$$f_{11} = \frac{c_0^2}{4 \cdot f_c} \cdot \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right) = 19.85 \text{ Hz.} \quad (3.11)$$

Por comparación entre la Ecuación (3.10) y la (3.11), se observa que $f_{11} < f_c/2$, con lo que, para calcular σ se usa únicamente la Ecuación (3.7). Con esto, se aplican los criterios para el cálculo de la eficiencia de radiación, σ , de las placas. Con dicha eficiencia se calcula el factor de acoplamiento η_{pa} a través de la Ecuación (3.6).

Por su parte, el factor de acoplamiento del aire a la estructura se calcula mediante la relación de reciprocidad:

$$\eta_{pa} \cdot n_p = \eta_{ap} \cdot n_a \rightarrow \eta_{ap} = \eta_{pa} \cdot \frac{n_a}{n_p}. \quad (3.12)$$

Obteniendo así la tendencia representada en la Figura 3.3.

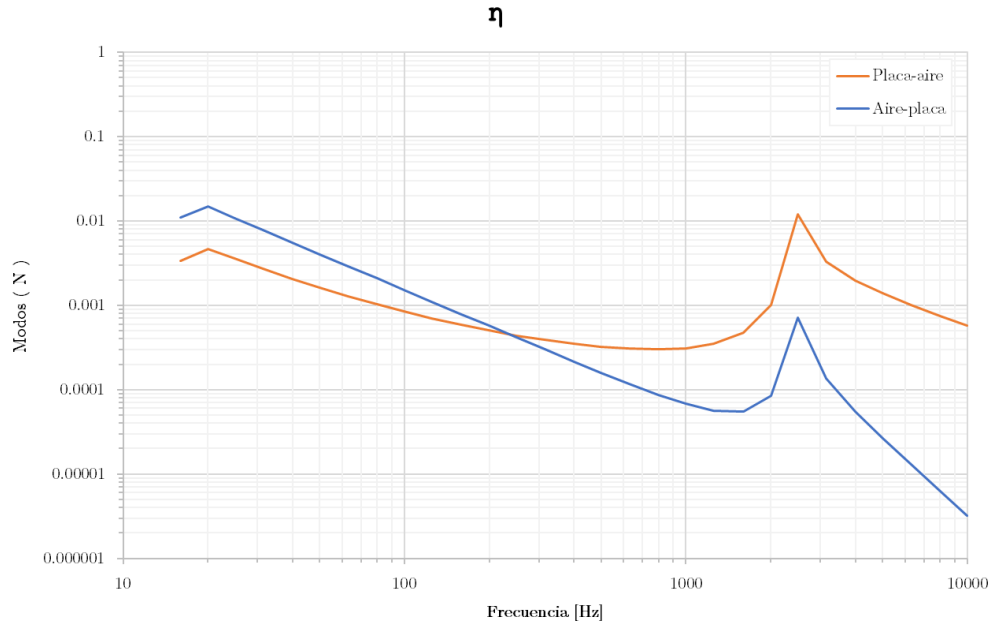


Figura 3.3: Factor de pérdidas de acoplamiento de la estructura al aire (η_{pa}) y del aire a la estructura (η_{ap}) en función de la frecuencia.

3.c. Ecuaciones de balance de potencia (SEA)

Para aplicar el método SEA al sistema en cuestión, se divide éste en 5 subsistemas:

1. Panel 1 – subsistema 1.
2. Capa de aire 1 – subsistema 2.
3. Panel 2 – subsistema 3.
4. Capa de aire 2 – subsistema 3.
5. Panel 3 – subsistema 5.

Se quiere plantear el balance de potencias. Para ello, se estudia tanto la potencia que recibe cada subsistema, como las que disipa y la interacción con otros subsistemas, de forma análoga al ejemplo de la Figura 3.4.

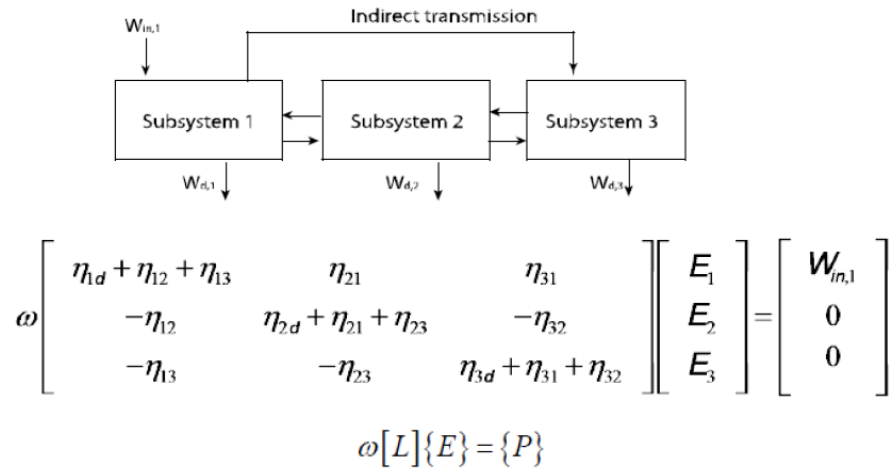


Figura 3.4: Planteamiento del balance de potencias para un ejemplo con 3 subsistemas [2].

Para el sistema en estudio, no se considera la transmisión indirecta entre subsistemas no consecutivos, ya que únicamente se considera el sistema formado por las 3 placas y las 2 capas de aire intermedias, con lo que no hay transmisión alguna que no sea de las placas a la cavidad de aire contigua y viceversa.

La ecuación en forma matricial queda:

$$\omega \cdot [L] \cdot \{E\} = \{P\}, \quad (3.13)$$

donde $[L]$ es la matriz de los factores de pérdidas, $\{E\}$ el vector de energías, a determinar, y $\{P\}$ las potencias generadas en cada sistema, detallado en la Tabla 3.6.

Realizando el estudio para este caso, se tiene:

$$[L] = \begin{bmatrix} \eta_{1,d} + \eta_{12} & -\eta_{21} & 0 & 0 & 0 \\ -\eta_{12} & \eta_{2,d} + \eta_{21} + \eta_{23} & -\eta_{32} & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{23} & \eta_{3,d} + \eta_{32} + \eta_{34} & -\eta_{43} & 0 \\ 0 & 0 & -\eta_{34} & \eta_{4,d} + \eta_{43} + \eta_{45} & -\eta_{54} \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_{45} & \eta_{5,d} + \eta_{54} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

donde cabe destacar que los subsistemas 1, 3 y 5 son placas equivalentes, mientras que los subsistemas 2 y 4 son aire, con las mismas propiedades. De esta forma, se pueden transformar los subíndices “1”, “3” y “5” por “p”, mientras que se sustituye “2” y “4” por “a”. Por su parte, $\eta_{i,d}$ es el amortiguamiento interno para las placas y para las capas de aire. Éste toma los valores:

$$\eta_{p,d} = 0.015, \quad (3.15)$$

$$\eta_{a,d} = 0.01. \quad (3.16)$$

Por otro lado, el vector $\{P\}$ de la Ecuación (3.13) se define en función de la frecuencia f y el panel como se muestra en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6: Perfiles de potencias externas aplicadas en los paneles.

Frecuencia [Hz]	Potencia [W]	
	Panel 1 y 3	Panel 2
$16 \leq f \leq 1000$	10	4.35
1250	20	8.7
1600	35	15.2
2000	50	21.74
2500	80	39.96
3150	100	39.13
4000	150	45.65
$5000 \leq f \leq 10000$	100	43.47

En la Tabla 3.6 se observa que la potencia del panel 1 es la misma que la del panel 3 y el problema es simétrico en cuanto a geometría, por lo tanto, el resultado obtenido de aplicar el método SEA será también simétrico, tanto para las placas 1 y 3 (subsistemas 1 y 5) como para las capas de aire (subsistemas 2 y 4).

3.d. Cálculo de la energía

Para realizar el cálculo de las energías de los diferentes subsistemas, se debe obtener, a partir de la Ecuación (3.13), el valor de la $\{E\}$. El cálculo de la energía depende de la frecuencia de estudio, ya que tanto ω como la potencia $\{P\}$ dependen de ella.

Mediante el cálculo numérico (con el uso de la herramienta MATLAB®) se puede obtener la energía en función de la frecuencia, resultando en la Figura 3.5.

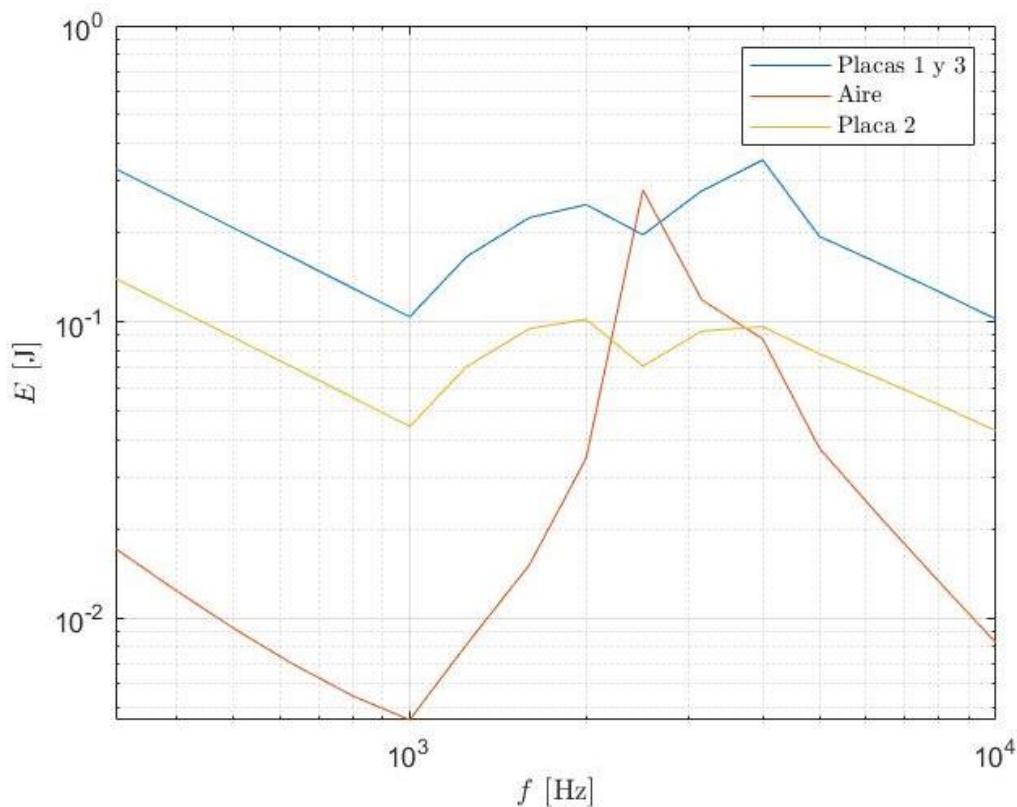


Figura 3.5: Evolución de la energía de los diferentes subsistemas en función de la frecuencia.

3.e. Cálculo de la presión del aire y la velocidad de las placas

Una vez obtenida la energía de cada uno de los subsistemas, se puede conocer la velocidad media de cada placa y la presión cuadrática media del aire entre las placas.

Para el cálculo de la velocidad media de las placas, se utiliza la relación de [3] a partir de la energía de un sistema resonante:

$$E = M \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{\rho \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot t}}. \quad (3.17)$$

Por su parte, la energía del aire se relaciona con la presión cuadrática media del medio a través de [4]:

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{P_{rms}^2}{\rho_0 \cdot c_0^2} \rightarrow P_{rms} = \sqrt{\frac{E \cdot \rho_0 \cdot c_0^2}{V}}. \quad (3.18)$$

Mediante el uso de las Ecuaciones (3.17) - (3.18) se obtienen las evoluciones con la frecuencia de velocidad y presión para el rango de frecuencias aplicable al método SEA ($315 < f < 10000$ Hz) de la Figura 3.6 y la Figura 3.7.

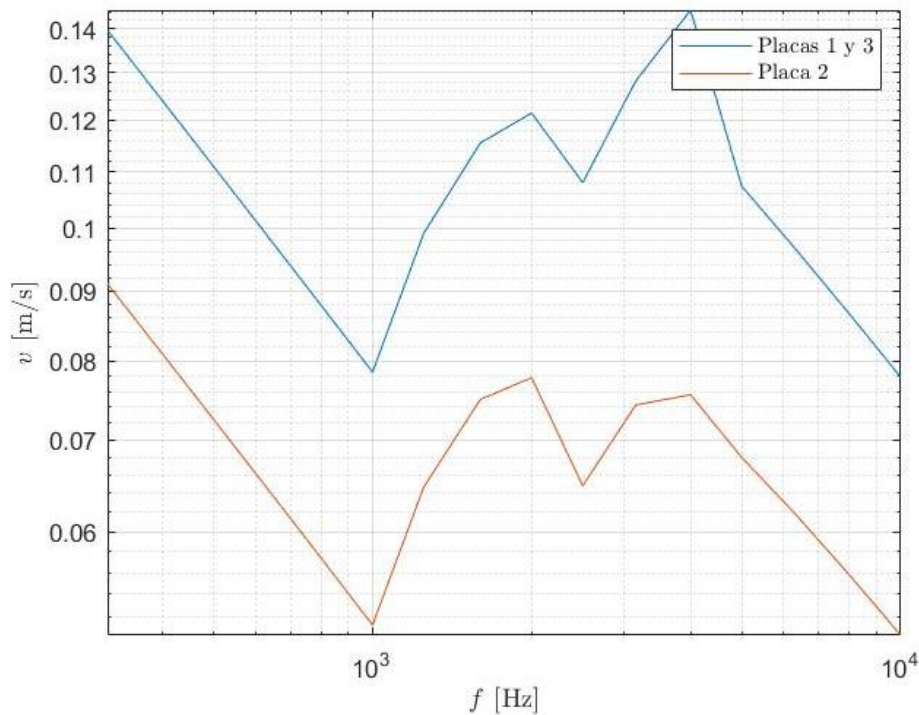


Figura 3.6: Variación de la velocidad de las placas en función de la frecuencia.

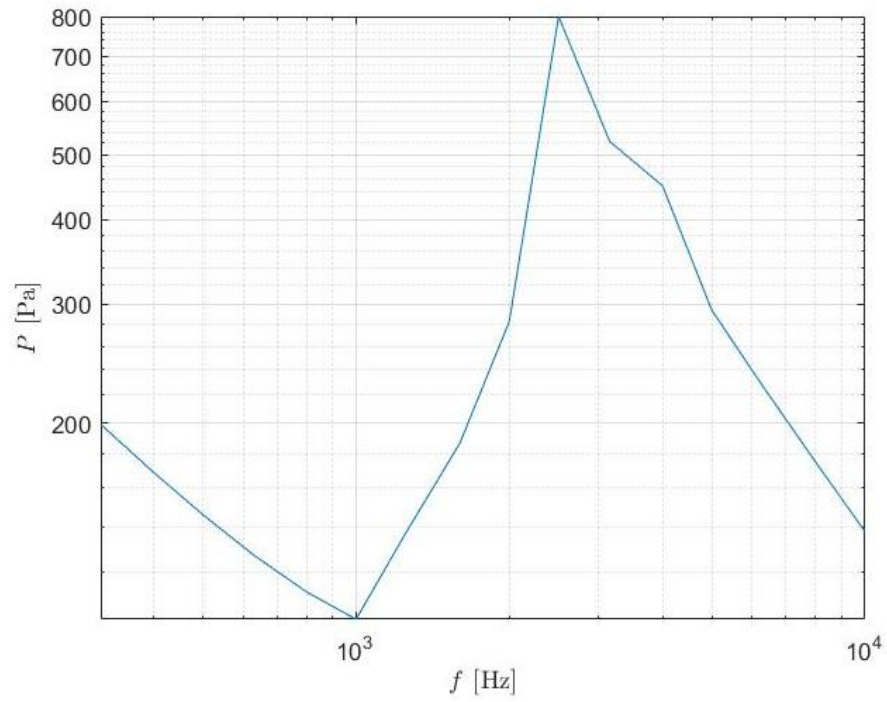


Figura 3.7: Variación de la presión del aire en función de la frecuencia.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Roibás Millán and A. Gómez San Juan, “Trabajo sustitutivo del examen ordinario de enero,” 2018.
- [2] E. Roibás Millán, “Vibro-acústica en estructuras espaciales (Parte 1),” *Estructuras uso Espac.*, 2020.
- [3] E. Roibás Millán, “Ejemplo aplicación SEA,” *Estructuras uso Espac.*, 2020.
- [4] M. Chimeno Manguan, “Acústica,” *Vib. y Aeroacústica*.