



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID

PRÁCTICA 1

ESTRUCTURAS DE USO ESPACIAL

Andrés Pedraza Rodríguez

MADRID, 26 DE MARZO, 2021

Resumen

El objetivo del presente trabajo es el estudio tanto analítico como numérico (por medio de las herramientas PATRAN-NASTRAN) de dos casos de estudio típicos en lo que a estructuras espaciales se refiere. El primer caso el estudio se centra en las tensiones fruto de la deformación térmica de una varilla y el segundo caso de estudio se centra en las vibraciones de una viga lastrada como resultado de una excitación sinusoidal. Finalmente se compararán los resultados obtenidos con ambos métodos.

Índice

Índice de figuras	I
Índice de tablas	II
1. Introducción	1
2. Metodología	2
3. Carga estática 6	3
3.1. Cálculo teórico	3
3.2. Descripción del modelo FEM	7
3.3. Resultados del modelo FEM	8
3.4. Comparación de resultados	9
4. Vibraciones sinusoidales 6	10
4.1. Cálculo teórico	11
4.2. Descripción del modelo FEM	13
4.3. Resultados del modelo FEM	14
4.4. Comparación de resultados	15
5. Conclusiones	16
Referencias	17

Índice de figuras

1.	Representación gráfica del problema de carga térmica estática y numeración de los desplazamientos.	3
2.	Definición de los desplazamientos de una barra.	4
3.	Deformada de la estructura obtenida analíticamente. El factor de escala de los desplazamientos es de 100.	6
4.	Deformada de la estructura obtenida numéricamente. El factor de escala de los desplazamientos es de 100.	8
5.	Deformadas de la estructura obtenidas analítica (cian) y numéricamente (naranja). El factor de escala de los desplazamientos es de 100.	9
6.	Representación gráfica del problema de carga armónica sobre una viga con una masa puntual en el centro.	10
7.	Sistema de vibraciones de un grado de libertad donde M es la masa efectiva del sistema, K la rigidez y F el amortiguamiento.	11

Índice de tablas

1.	Propiedades de las varillas que conforman la estructura.	3
2.	Fuerzas y desplazamientos sobre cada uno de los nodos de la estructura obtenidos de forma analítica.	5
3.	Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión.	6
4.	Fuerzas y desplazamientos sobre cada uno de los nodos de la estructura obtenidos de forma numérica.	8
5.	Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión obtenidos de forma numérica.	9
6.	Propiedades de los elementos que definen el problema.	10

1. Introducción

En el presente trabajo se estudian dos casos típicos en estructuras espaciales. El primero es la deformación de una estructura articulada como consecuencia del incremento de temperatura de una de las barras que la conforman, algo típico en espacio ya que los vehículos se ven sometidos a grandes gradientes térmicos. El segundo caso es la vibración armónica de una viga simplemente apoyada con una masa puntual en el centro, este caso es característico de las etapas de lanzamiento donde estructuras de pared delgada que portan equipos más pesados se ven sometidas a cargas armónicas durante el despegue.

Para llevar a cabo el análisis de ambos casos primero se planteará la solución analítica (si fuera posible) para disponer así de una referencia para las soluciones calculadas a partir del NASTRAN basadas en el método de los elementos finitos.

2. Metodología

El presente trabajo se ha realizado basándose en los siguientes estándares ECSS de la Agencia Espacial Europea (ESA):

- ECSS-E-ST-32-10C [1].
- ECSS-E-ST-32C [2].

Además se ha hecho uso de los siguientes documentos para el desarrollo práctico de los ejemplos estudiados:

- Manual de Cálculo Estructural, del Instituto Universitario de Microgravedad “Ignacio Da Riva”, por Andrés García *et al.* [3].
- Spacecraft Structures, de Jacob J. Wijker [4].
- Ejemplo de placa, por Andrés García [5].
- Apuntes de las asignaturas *Resistencia de Materiales y elasticidad Estructuras Aeronáuticas*, *Método de los elementos finitos* y *Vibraciones*; impartidas en la facultad ETSIAE-UPM ([6], [7], [8] y [9]).
- Apuntes de las asignaturas *Estructuras de uso espacial* y *Vibraciones y Aeroacústica*; impartidas en el Máster Universitario de Sistemas Espaciales (IDR-UPM) ([10] y [11]).

También se ha recurrido, para el desarrollo práctico a los videotutoriales facilitados por el profesor y en las clases grabadas a través de la plataforma *Microsoft Teams*.

3. Carga estática 6

En este caso de estudio se analiza la respuesta de una estructura articulada a un incremento de temperatura sobre una de las tres varillas que la conforman. En la estructura mostrada en la Figura 1 se muestra la configuración de la estructura cuyas varillas, que unen los puntos 1, 2 y 3, tienen las propiedades mostradas en la Tabla 1. Además la longitud de la varilla 1-3 es de $L = 0.25$ m y la diferencia de temperatura aplicada sobre ella es de $\Delta T = 50$ K.

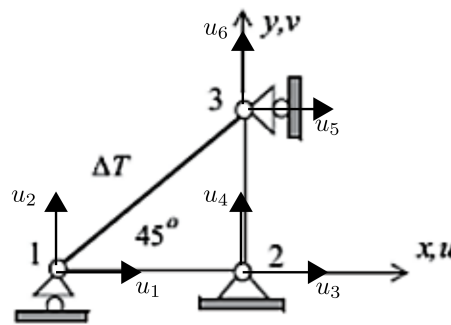


Figura 1: Representación gráfica del problema de carga térmica estática y numeración de los desplazamientos.

Tabla 1: Propiedades de las varillas que conforman la estructura.

Área	$A = 0.0001 \text{ m}^2$
Módulo elástico	$E = 70 \text{ GPa}$
Coefficiente de expansión térmica	$\alpha = 22.5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

3.1. Cálculo teórico

Para analizar esta estructura de forma analítica resulta bastante sencillo aplicar el cálculo matricial. Así, una varilla se comporta como una barra (de forma que solo soporta esfuerzos en su dirección longitudinal). Sean los desplazamientos u_1 y u_2 (y sus proyecciones sobre los ejes locales x e y los correspondientes a los extremos 1 y 2 de la barra tal y como se muestran en la Figura 2,

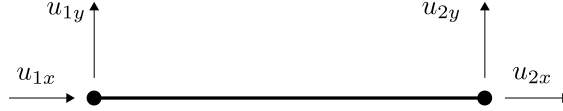


Figura 2: Definición de los desplazamientos de una barra.

de las Ecuaciones Constitutivas de Hooke pueden expresarse los desplazamientos de acuerdo al sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} = [K]^e \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde $[K]$ hace referencia al tensor de elasticidad de la barra:

$$[K]^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Una vez obtenidas las matrices individuales de cada varilla se rotan estas de forma que sean consistentes con el sistema de ejes globales y después se ensamblan unas con otras de acuerdo a los puntos que unen. Se tiene así una matriz $[K] \in M_{6 \times 6}(\mathbb{R})$ ya que los puntos 1, 2 y 3 pueden en principio moverse por todo el plano $x - y$ y tienen por tanto dos grados de libertad. Una vez determinada la matriz de rigidez global se separa esta de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} F_a \\ F_c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ac} \\ K_{ca} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_c \end{pmatrix}, \quad (3)$$

donde el subíndice a hace referencia a las fuerzas y desplazamientos activos (o libres); y el subíndice c hace referencia a las fuerzas y desplazamientos correspondientes a condiciones de contorno. Como las condiciones de contorno son de desplazamiento nulo y no hay cargas externas aplicadas, se tiene una primera ecuación para el sistema determinada por:

$$F_a = K_{aa}u_a = 0. \quad (4)$$

En lo que se refiere a la dilatación térmica, dado el incremento de temperatura, el coeficiente de expansión térmica, se puede determinar el esfuerzo al que se ve sometida la varilla:

$$\sigma_T = E \alpha \Delta T . \quad (5)$$

Lo que, para el problema estudiado supone una fuerza sobre los nodos activos de la forma:

$$F_a = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} , \quad (6)$$

donde la primera componente es F_1 , la fuerza horizontal sobre el punto 1; la segunda componente es F_6 , que es la fuerza vertical sobre el punto 3; y θ es el ángulo que forma la varilla 1-3 con la horizontal tal y como se muestra en la Figura 1.

Resolviendo el sistema matricial se pueden determinar los dos desplazamientos libres y también las fuerzas de reacción.

$$u_a = [K_{aa}]^{-1} F_a , \quad (7)$$

$$F_c = [K_{ca}] u_a . \quad (8)$$

De esta forma se obtienen las fuerzas y desplazamientos sobre cada nodo de las estructura, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Fuerzas y desplazamientos sobre cada uno de los nodos de las estructura obtenidos de forma analítica.

Nodo y dirección	Desplazamiento [m]	Fuerza [kN]
1x	$-8.238 \cdot 10^{-5}$	-5.568
1y	0	-2.306
2x	0	3.262
2y	0	-3.262
3x	0	2.306
3y	$8.236 \cdot 10^{-5}$	5.568

Además, una vez determinados los desplazamientos se pueden obtener también los esfuerzos internos a los que se ve sometida cada barra, los cuales se han recogido en la Tabla 3, donde se indican como positivos aquellos esfuerzos que son de tracción y como negativos aquellos esfuerzos que son de compresión. Además, en este tipo de análisis también hay que añadir el esfuerzo debido a la temperatura sobre la varilla 1-3.

Tabla 3: Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión.

Barra	Esfuerzo [Pa]
1-2	$3.262 \cdot 10^7$
1-3	$-4.613 \cdot 10^7$
2-3	$3.262 \cdot 10^7$

En la Figura 3, se representa gráficamente la deformación de la estructura donde, para que pudiera ser apreciable, se han escalado las deformaciones con un factor de 100.

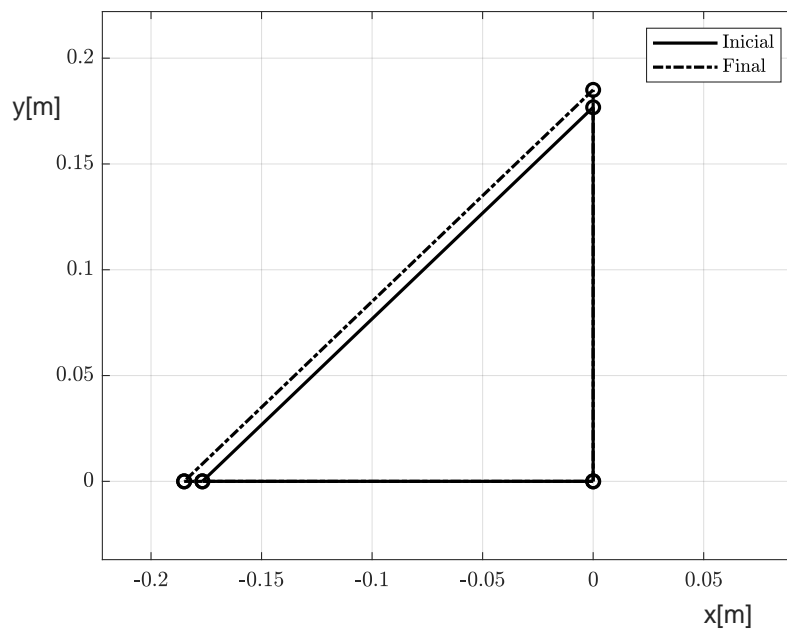


Figura 3: Deformada de la estructura obtenida analíticamente. El factor de escala de los desplazamientos es de 100.

3.2. Descripción del modelo FEM

Una vez determinada la solución analítica se pasa al desarrollo numérico del problema. Como se abordará este mediante el método de los elementos finitos (FEM) es necesario caracterizar correctamente el problema de forma que los resultados del análisis con NASTRAN-PATRAN sean correctos.

En primer lugar se define la geometría del problema, creando puntos y líneas con las dimensiones correspondientes. Una vez hecho esto se definen las propiedades del material, en este caso basta con definir un material isótropo con el módulo elástico y el coeficiente de expansión térmica correspondientes (véase Tabla 1). Ese material se usa a su vez para definir las varillas como propiedad unidimensional que se asigna a las curvas anteriormente creadas. Además del material se establece también el área de la varilla y su temperatura de referencia.

Una vez aplicadas las propiedades a la geometría se pasa a mallar esta. Primero se crea la semilla de malla sobre las curvas que unen los puntos 1, 2 y 3 del problema, en este caso basta con un elemento por cada barra al ser su comportamiento uniforme. Una vez que la semilla de malla ha sido creada se mallan la curvas en sí y se comprueba que efectivamente los elementos coinciden con la geometría. De esta forma se crea un modelo con elementos de tipo CROD.

Después se pasa a definir el caso de carga, en este caso la carga es de tipo térmico así que se modifica la temperatura de la curva 1-3 y en cada punto se establecen las condiciones de contorno correspondientes. Las cargas y las condiciones de contorno se definen sobre la geometría por si se quieren modificar luego el número de elementos.

Por último se crea el archivo que leerá NASTRAN y se hace la llamada a este programa, no sin antes elegir el caso de carga estacionaria y modificar la rigidez, de lineal a lagrangiana, dado que es un problema termoelástico.

3.3. Resultados del modelo FEM

Una vez ejecutado el problema creado en PATRAN desde NASTRAN y habiéndose comprobado la ausencia de errores durante el cálculo se pueden analizar los resultados obtenidos. En este caso se tiene la distribución de desplazamientos que aparece en la Figura 4.

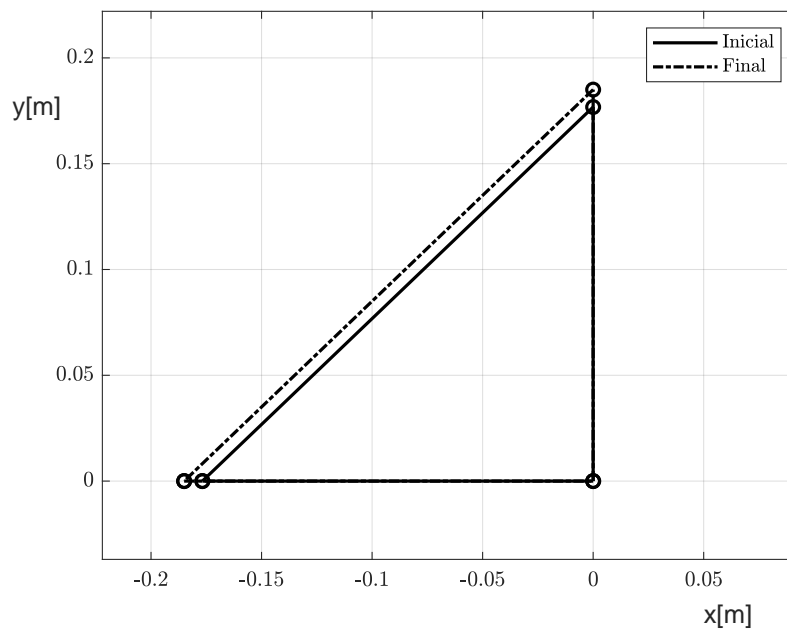


Figura 4: Deformada de la estructura obtenida numéricamente. El factor de escala de los desplazamientos es de 100.

Además en la Tabla 4 se los valores de desplazamiento y fuerza sobre cada uno de los puntos y en la Tabla 5 se recogen los valores de los esfuerzos internos de cada varilla proporcionados por NASTRAN.

Tabla 4: Fuerzas y desplazamientos sobre cada uno de los nodos de las estructura obtenidos de forma numérica.

Nodo y dirección	Desplazamiento [m]	Fuerza [kN]
1x	$-8.238 \cdot 10^{-5}$	-5.568
1y	0	-2.306
2x	0	3.262
2y	0	-3.262
3x	0	2.306
3y	$8.236 \cdot 10^{-5}$	5.568

Tabla 5: Esfuerzos sobre cada una de las tres varillas. En positivo fuerzas axiales de tracción y en negativo de compresión obtenidos de forma numérica.

Barra	Esfuerzo [Pa]
1-2	$3.262 \cdot 10^7$
1-3	$-4.613 \cdot 10^7$
2-3	$3.262 \cdot 10^7$

3.4. Comparación de resultados

Como cabría de esperar los resultados obtenidos por ambos métodos (analítico y numérico) son idénticos. Que no exista ninguna disparidad en los resultados obtenidos se debe en gran parte a la sencillez del problema. En la Figura 5 se muestran las dos soluciones obtenidas y en la Tabla — meter referencia — se recogen los resultados obtenidos por ambos modelos. Tan solo hay una diferencia a la hora de calcular los esfuerzos de

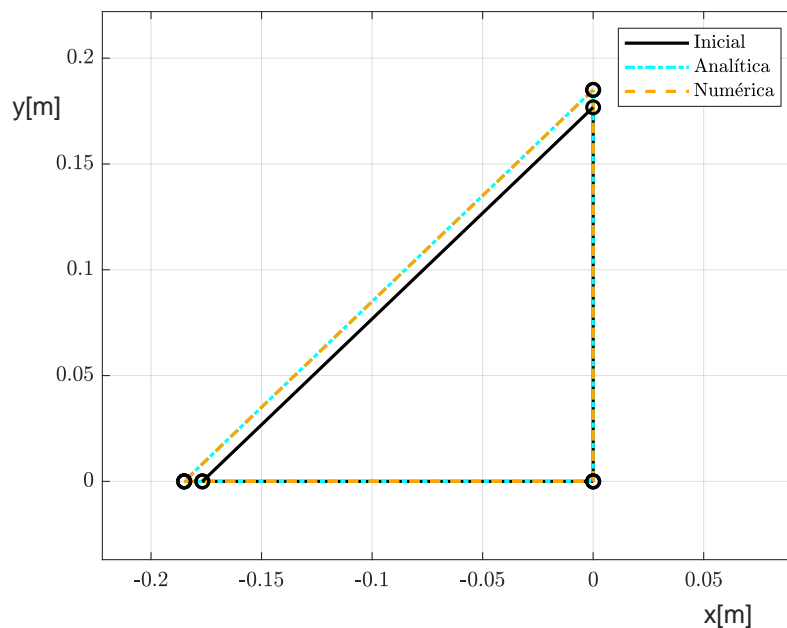


Figura 5: Deformadas de la estructura obtenidas analítica (cian) y numéricamente (naranja). El factor de escala de los desplazamientos es de 100.

— Meter una tabla conjunta de las dos soluciones —

4. Vibraciones sinusoidales 6

En este caso de estudio se analiza la respuesta de una viga simplemente apoyada, en cuyo centro se sitúa una masa puntual, a una carga dinámica armónica. En la Figura 6 se representa gráficamente el problema. Las propiedades de los elementos que definen el problema se recogen en la Tabla 6. Además la carga armónica es de la forma:

$$\ddot{q}(t) = A \sin(2\pi ft) \text{ para } f \in [5, 100] \text{ Hz}, \quad (9)$$

donde $A = 5 \text{ g}$ (donde $1\text{g} = 9.81\text{m/s}^2$), f es la frecuencia de excitación y t es el tiempo.

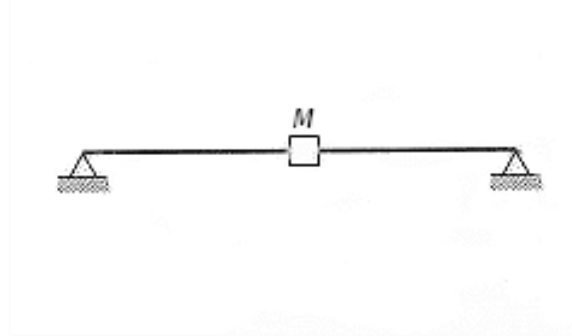


Figura 6: Representación gráfica del problema de carga armónica sobre una viga con una masa puntual en el centro.

Tabla 6: Propiedades de los elementos que definen el problema.

Longitud de la viga	$L = 0.450 \text{ m}$
Sección de la viga	$S = 20 \times 20 \text{ mm}$
Módulo elástico	$E = 200 \text{ GPa}$
Densidad	$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Coefficiente de amortiguamiento	$\xi = 0.02$
Masa puntual	$M_p = 50 \text{ kg}$

4.1. Cálculo teórico

Para el estudio analítico del problema se recurre a un modelo de un grado de libertad como el que aparece en la Figura 7 donde M hace referencia a la masa efectiva del sistema, K a la rigidez y F al amortiguamiento. En este caso el grado de libertad estudiado es la flecha en la mitad de la viga.

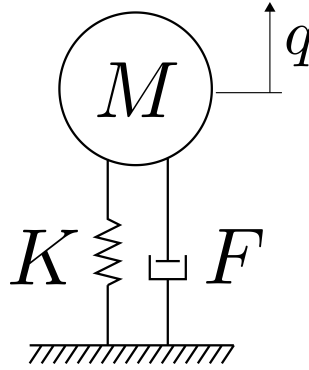


Figura 7: Sistema de vibraciones de un grado de libertad donde M es la masa efectiva del sistema, K la rigidez y F el amortiguamiento.

La energía cinética del sistema puede expresarse como:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2, \quad (10)$$

por lo que la masa total del sistema es $M = m_v + M_p$ (donde $m_v = \rho LS$ es la masa de la viga y M_p es la masa puntual). Por otra parte, la energía potencial del sistema puede expresarse como:

$$U = \frac{1}{2}Kx^2, \quad (11)$$

donde el coeficiente de rigidez puede obtenerse de la respuesta de la viga simplemente apoyada a una carga unitaria sobre el grado de libertad que en este caso resulta ser $K = \frac{48EI}{L^3}$, donde I es el momento de inercia de la viga. Por último, el amortiguamiento viscoso puede expresarse como:

$$D = \frac{1}{2}F\dot{x}^2, \quad (12)$$

donde el coeficiente de amortiguamiento $F = \xi 2\sqrt{KM}$.

Aplicando a este sistema la ecuación de Lagrange, donde p es la fuerza generalizada:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial K}{\partial q} = p, \quad (13)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$M\ddot{q} + F\dot{q} + Kq = p, \quad (14)$$

que debidamente adimensionalizada con $\omega_0 = \sqrt{K/M}$, bajo una carga armónica de frecuencia Ω y módulo A puede expresarse en el dominio de la frecuencia como:

$$Q(\Omega) = \frac{\frac{A}{K}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{-i\theta} \text{ con } \theta = \arctan\left(\frac{2\xi\Omega/\omega_0}{1 - (\Omega/\omega_0)^2}\right), \quad (15)$$

donde $Q(\Omega)$ es el desplazamiento en el dominio de la frecuencia. Por tanto, la aceleración en función de la frecuencia puede obtenerse de:

$$\ddot{Q}(\Omega) = -\Omega^2 Q(\Omega). \quad (16)$$

La Figura —referencia Bode — muestra el diagrama de Bode de la aceleración en el nodo central. El pico se localiza en la frecuencia natural y tiene una altura de — meter valor — m/s^2 .

— Meter figura —

4.2. Descripción del modelo FEM

Una vez determinada la solución analítica se pasa al desarrollo numérico del problema. Como se empleará el método de los elementos finitos (FEM) para determinar la solución numérica del problema es importante caracterizar correctamente el problema para que así los programas encargados del análisis proporcionen resultados correctos.

En primer lugar se define la geometría del problema, en este caso se sitúa un punto en el centro de la viga para poder situar ahí la masa puntual

4.3. Resultados del modelo FEM

4.4. Comparación de resultados

5. Conclusiones

A la vista del desarrollo de este trabajo se han extraído las siguientes conclusiones:

-

Quedaría pendiente

Referencias

- [1] ESA, ECSS-E-ST-32-10C: Space engineering structural factors of safety for spaceflight hardware (2009).
- [2] ESA, ECSS-E-ST-32C: Space engineering structural general requirements (2008).
- [3] A. García, J. J. F. de Toro, Manual de cálculo estructural.
- [4] J. Wijker, Spacecraft Structures.[doi:10.1007/978-3-540-75553-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75553-1).
- [5] A. G. Pérez, Modelización de una placa (2021).
- [6] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Resistencia de materiales y elasticidad (ETSIAE-UPM).
- [7] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Estructuras aeronáuticas (ETSIAE-UPM).
- [8] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Método de elementos finitos (ETSIAE-UPM).
- [9] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Vibraciones (ETSIAE-UPM).
- [10] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Estructuras de uso espacial (MUSE-IDR-UPM).
- [11] A. Pedraza, Apuntes de la asignatura: Vibraciones y aeroacústica (ETSIAE-UPM).