

# ESTRUCTURAS DE USO ESPACIAL (MUSE)

Curso 2020-2021

A continuación se presentan los problemas a resolver para optar a la evaluación continua de la asignatura. Téngase en cuenta lo siguiente:

- Es un **ejercicio individual**, por lo que cada estudiante debe entregar un informe razonado que contenga la solución al ejercicio planteado, así como los códigos/ficheros empleados para su resolución. Los ficheros que deben entregarse, así como el nombre identificativo, se indican al final de cada ejercicio.
- La entrega se realizará en Moodle, a través de la tarea creada a tal efecto, **antes del viernes 11 de junio a las 10:00 horas.**

## PARTE 1: Análisis de estructuras a baja frecuencia y reducción modal

Sea un sistema formado por dos vigas elásticas de sección circular vibrando a flexión, tal y como se muestra en la Figura 1. Considere que el amortiguamiento de ambas vigas es nulo. Las propiedades de las vigas se muestran en la Tabla 1.

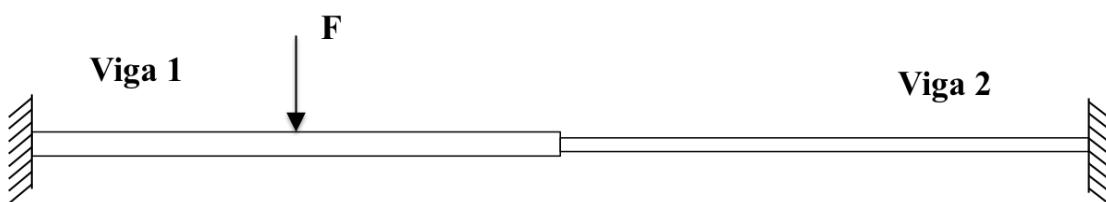


Figura 1: Esquema del sistema formado por dos vigas acopladas mediante unión puntual.

Tabla 1: Propiedades del sistema

Parámetro	Viga 1	Viga 2
Módulo elástico ( $\text{N}/\text{m}^2$ )	$2.4 \times 10^8$	$7 \times 10^{10}$
Coeficiente de Poisson	0.4	0.3
Densidad ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	$1.4 \times 10^3$	$1.1333 \times 10^4$
Longitud (m)	0.5	0.6
Radio de la sección transversal (m)	$1 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-4}$

Se pretende analizar la respuesta del sistema a una carga puntual de 1 N aplicada en el centro de la Viga 1, comparando los desplazamientos obtenidos con un modelo FEM completo y un modelo reducido, empleando para la obtención de este último el Método de la Síntesis Modal de Componentes (Craig-Bampton).

Para aplicar el método de subestructuración modal de Craig-Bampton, realice modelos de MSC.Nastran/Patran de ambas vigas (por separado, en condiciones libre-libre y sin carga aplicada en la viga 1), empleando un tamaño de elemento de 0.01 m en ambos modelos. Extraiga las matrices de inercia y rigidez de ambas vigas en formato \*.pch y emplee el código proporcionado para leer dichas matrices en Matlab.

Para aplicar el método de Craig-Bampton tenga en cuenta que los desplazamiento nodales deben clasificarse (para cada viga) en dos subconjuntos, correspondientes a los nodos de frontera y los nodos interiores:

$$\begin{aligned}\{q_1\} &= \{q_{b,1} \quad q_{i,1}\}^T = \{q_{b1} \quad q_I \quad q_{i,1}\}^T \\ \{q_2\} &= \{q_{b,2} \quad q_{i,2}\}^T = \{q_{b2} \quad q_I \quad q_{i,2}\}^T\end{aligned}$$

donde  $\{q_1\}$  y  $\{q_2\}$  son los desplazamiento a flexión de los nodos de las vigas 1 y 2, respectivamente;  $\{q_{i,1}\}$  y  $\{q_{i,2}\}$  son los nodos interiores; y  $\{q_{b,1}\}$  y  $\{q_{b,2}\}$  son los nodos de frontera. Estos últimos están formados por el nodo de extremo de cada viga,  $\{q_{b1}\}$  y  $\{q_{b2}\}$ , y el nodo de interfaz entre ambas,  $\{q_I\}$ .

Esta clasificación permitirá ensamblar las matrices para obtener las matrices del sistema y aplicar las condiciones de contorno una vez realizada la reducción de Craig Bampton.

- 1) Calcule y represente la velocidad RMS del sistema formado por ambas vigas hasta 2000 Hz en banda fina ( $\Delta f = 1$  Hz), reteniendo la base modal completa del sistema (modelo FEM completo).
- 2) Construya un modelo reducido en el que se retendrán los modos de cada viga hasta la frecuencia superior de la banda de tercios en la que se cumpla que el número de modos por banda es mayor o igual a 5. Calcule y represente la velocidad RMS del sistema formado por ambas vigas hasta 2000 Hz en banda fina ( $\Delta f = 1$  Hz).
- 3) Analice las diferencias entre ambos resultados (apartado 2 y 3) e indique y explique si el modelo reducido analizado permite obtener la respuesta de ambas vigas en el intervalo de frecuencias de análisis.

**Se entregará lo siguiente:**

- Un fichero \*.zip de nombre **APELLIDO\_NOMBRE\_PARTE\_1.zip** que contenga:
  - o Archivos \*.bdf de Nastran para ambas vigas.
  - o Archivos \*.pch de las matrices de inercia y rigidez de ambas vigas.
  - o Código de Matlab en el que se calcula, tanto el modelo FEM completo del sistema como el modelo reducido.
- Informe razonado de la solución propuesta en pdf , nombrado **APELLIDO\_NOMBRE\_PARTE\_1.pdf**

## PARTE 2: Análisis de estructuras a alta frecuencia

Para el estudio frente a cargas de una determinada estructura aeroespacial se ha construido un modelo estructural, formado por tres paneles delgados de  $1.0 \times 1.25 \text{ m}^2$  y espesor de 5 mm, separados entre sí mediante capas delgadas de aire.

Los tres paneles están fabricados de aluminio (densidad  $2700 \text{ kg/m}^3$ , módulo elástico 70 GPa y coeficiente de Poisson 0.3) y separados una distancia de 50 milímetros, formando las dos capas de aire de densidad  $1.225 \text{ Kg/m}^3$  y velocidad del sonido de 343 m/s. Los paneles están acoplados únicamente mediante las capas de aire, sin conexión directa entre ellos, como se muestra en la Figura 2. No se considera el aire circundante.

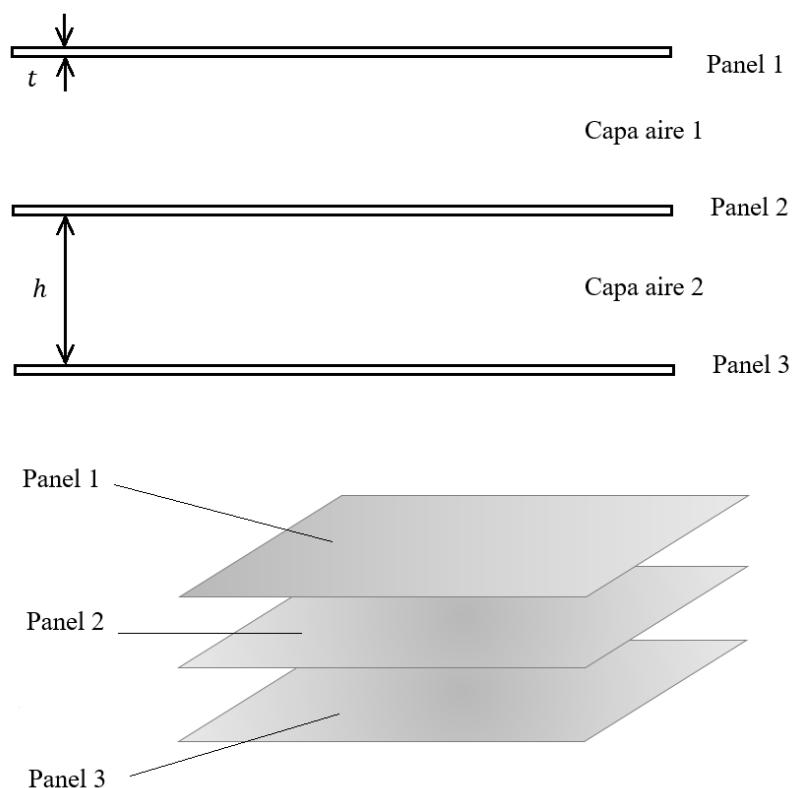


Figura 2: Esquema de los tres paneles y las capas de aire.

Se desea calcular la velocidad media de los paneles y la presión cuadrática media en las capas de aire a alta frecuencia, teniendo en cuenta una excitación externa en los paneles cuya distribución se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2: Perfiles de potencias externas aplicadas en los paneles

Frecuencia (Hz)	Potencia (W)		
	Panel 1	Panel 2	Panel 3
$16 \leq f \leq 1000$	10	4.35	10
1250	20	8.70	20
1600	35	15.20	35
2000	50	21.74	50
2500	80	36.96	80
3150	100	39.13	100
4000	150	45.65	150
$5000 \leq f \leq 10000$	100	43.47	100

Se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

Para un panel de densidad  $\rho$ , rigidez  $D$ , área  $A$  y espesor  $t$ , la densidad modal  $n_p$  tiene la expresión de la ecuación (1):

$$n_p(\omega) = \frac{A}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho t}{D}} \quad (1)$$

Para la definición de la densidad modal de las capas de aire,  $n_a$ , estas se consideran cavidades acústicas, por lo que su expresión se define en base a la ecuación (2).

$$n_a(\omega) = \frac{V}{\pi c_0} \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 + \frac{A'}{4c_0} \left( \frac{\omega}{c_0} \right) + \frac{L'}{8c_0} \quad (2)$$

donde  $V$  es el volumen de la cavidad,  $A'$  el área total de las superficies que conforman la cavidad,  $L'$  el perímetro total de los bordes,  $c_0$  la velocidad del sonido y  $\omega$  la frecuencia angular.

El amortiguamiento interno (ILF) de los paneles es del 1.5%, mientras que el del aire es del 1%. Los factores de pérdidas de acoplamiento (CLFs) del sistema se definen en base a la potencia radiada por los paneles a las capas de aire, teniendo en cuenta la eficiencia de radiación de los paneles, mediante la expresión:

$$n_{pa} = \frac{A \rho_0 c_0 \sigma(\omega)}{M \omega} \quad (3)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad del aire,  $A$  es el área del panel,  $M$  su masa y  $\sigma$  la eficiencia de radiación del panel (que depende de la frecuencia).

Para un panel de dimensiones  $L_1$  y  $L_2$  la eficiencia de radiación se puede expresar en términos de la frecuencia crítica de la placa ( $f_c$ ) y del primer modo superficial de la placa ( $f_{11}$ ), cuyas expresiones se muestran en las ecuaciones (4) y (5), respectivamente.

$$f_c = \left( \frac{c_0^2}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{m}{D}} \quad (4)$$

$$f_{11} = \frac{c_0^2}{4f_c} \left( \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} \right) \quad (5)$$

donde  $m$  es la masa por unidad de superficie del panel. Dependiendo de la relación entre ambas frecuencias, la eficiencia de radiación se puede expresar como:

$$\text{I) } \text{ Si } f_{11} \leq f_c/2 \quad (6)$$

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 4A^2 \left( \frac{f}{c_0} \right)^2 & f < f_{11} \\ \frac{c_0 P}{Af_c} \left( \frac{(1 - \lambda^2) \ln \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} + 2\lambda}{4\pi^2(1 - \lambda^2)^{3/2}} \right) + 2 \left( \frac{2c_0}{f_c \pi^2} \right)^2 \frac{(1 - 2\lambda^2)}{A\lambda\sqrt{1 - \lambda^2}} & f_{11} < f < \frac{f_c}{2} \\ \frac{c_0 P}{Af_c} \left( \frac{(1 - \lambda^2) \ln \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} + 2\lambda}{4\pi^2(1 - \lambda^2)^{3/2}} \right) & \frac{f_c}{2} < f < f_c \\ \frac{1}{\sqrt{1 - f_c/f}} & f \geq f_c \end{cases}$$

$$\text{II) } \text{ Si } f_{11} > f_c/2 \quad (7)$$

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} 4A^2 \left( \frac{f}{c_0} \right)^2 & f < f_c \\ \frac{1}{\sqrt{1 - f_c/f}} & f > f_c \end{cases}$$

donde  $\lambda = \sqrt{f/f_c}$ ,  $A$  el área de la placa y  $P$  su perímetro.

Para el cálculo de la respuesta de los paneles y del aire a la excitación de la Tabla 2, a alta frecuencia, se deberán seguir los siguientes pasos:

- Calcule y represente gráficamente en función de la frecuencia el número de modos por banda ( $N$ ) para los paneles y para el aire. Para ello, el cálculo se realizará en tercios de octava estándar, para frecuencias entre 16 Hz y 10 kHz. Indique la frecuencia (representada como la frecuencia central de la banda de tercios) a partir de la cuál todos los elementos del sistema (los tres paneles y las dos capas de aire) pueden representarse mediante modelos energéticos. Se supondrá que la condición de alta frecuencia se fija en  $N \geq 5$  modos.
- Calcule y represente gráficamente, en función de la frecuencia, el factor de pérdidas de acoplamiento de la estructura al aire,  $\eta_{pa}$ , y el del aire a la estructura,  $\eta_{ap}$ .



- c) Plantee las ecuaciones de balance de potencias del método SEA (*Statistical Energy Analysis*) para un sistema formado por los 5 subsistemas siguientes:
1. Panel 1 (energía de los modos de flexión) – Subsistema 1
  2. Capa aire 1 (presión) – Subsistema 2
  3. Panel 2 (energía de los modos de flexión) – Subsistema 3
  4. Capa aire 2 (presión) – Subsistema 4
  5. Panel 3 (energía de los modos de flexión) – Subsistema 5
- d) Para la distribución de potencias de la Tabla 2, calcule y represente en función de la frecuencia las energías de los cinco subsistemas, para el rango de validez del modelo SEA.
- e) A partir de las energías calculadas, determine la velocidad media de los paneles y la presión cuadrática media en las capas de aire.

**Se entregará lo siguiente:**

- Un archivo .zip con el o los códigos de Matlab empleados para la resolución del ejercicio, nombrado **APELLIDO\_NOMBRE\_PARTE\_2.zip**
- Un informe razonado con los resultados pedidos en formato pdf, nombrado **APELLIDO\_NOMBRE\_PARTE\_2.pdf**