

Ejercicio 2. Calcular la temperatura de un cuerpo negro expuesto al Sol y a la CBR, en función del tamaño, la forma, la posición, y la orientación.

$$\text{Balance energético en el estacionario: } \frac{\partial}{\partial t} [E \cdot A_{\text{front}}] = A_{\text{tot}} \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{\infty}^4) \approx A_{\text{tot}} \sigma T^4$$

→ Del tamaño: No depende mientras sea válida la aproximación de rayos paralelos.

→ De la forma, posición & orientación:

Depende de la relación $\frac{A_{\text{front}}}{A_{\text{tot}}} :$

$$\begin{cases} = 1 \text{ para una placa frontal aislada por detrás.} \\ = \frac{1}{2} \text{ para una placa no aislada} \\ = \frac{1}{4} \text{ para una esfera} \\ = \frac{1}{6} \text{ para un cubo con una cara enfrentada} \\ = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ para un cubo con una arista enfrentada} \\ = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ para un cubo con vértices opuestos alineados con el sol.} \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calcular el calor que recibe una gran superficie plana a $T_0 = 300 \text{ K}$ de otra gran placa paralela a $T_1 = 400 \text{ K}$, y el cambio que supone introducir un fino escudo paralelo entre ambas.

En el estacionario y con el modelo de dos cuerpos negros, $\frac{\dot{Q}_0}{A} = \sigma (T_1^4 - T_0^4) = 5.67 \cdot 10^{-8} (400^4 - 300^4) = 992 \text{ W/m}^2$

Con escudo, dependerá de la temperatura intermedia: $\frac{\dot{Q}_0}{A} = \sigma (T_i^4 - T_0^4)$, que en estacionario debe cumplir:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}_0 + \dot{W}_{\text{dis},i} \rightarrow 0 = \dot{Q}_{i,\perp} - \dot{Q}_{i,0} = \sigma (T_i^4 - T_1^4) - \sigma (T_0^4 - T_i^4) \rightarrow \sigma [T_i^4 + T_0^4 - 2T_1^4] = 0 \rightarrow T_i = \left[\frac{T_1^4 + T_0^4}{2} \right]^{\frac{1}{4}} = 360 \text{ K}$$

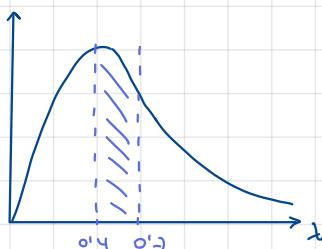
Por tanto: $\frac{\dot{Q}_0}{A} = \sigma \cdot (360^4 - 300^4) = 496 \text{ W/m}^2$.

Ejercicio 4. Calcular la temperatura de un cuerpo negro que tuviera la fracción de radiación visible ($0.4 < \lambda / [\mu\text{m}] < 0.7$) mayor.

$$\underbrace{\lambda_{\text{radio, max}}}_{0.4 + 0.7} = \frac{c}{T} \rightarrow T \approx \frac{c}{\lambda} = 5243 \text{ K}$$

$$\frac{0.4 + 0.7}{2} = 0.55 \mu\text{m}$$

Si tomo $\lambda \approx 0.4 \rightarrow T = 7250 \text{ K} \rightarrow$ mejor así que centrarlo, xq se abarca + área.



P13.21. Para cuerpos negros a diferentes temperaturas:

$T_1 = 5800 \text{ K}$, $T_2 = 2900 \text{ K}$, $T_3 = 1000 \text{ K}$, $T_4 = 300 \text{ K}$. Calcular:

a) La longitud de onda de máxima emisión.

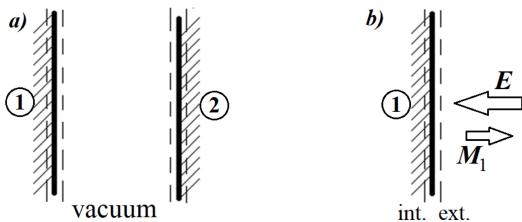
$$\text{Ley de Wien: } \lambda_{\text{max}} = \frac{C}{T} ; \quad C = 0.0029 \text{ m} \cdot \text{K}$$

$$\lambda_1 = \frac{C}{T_1} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \approx 0.5 \mu\text{m}, \quad \lambda_2 = \frac{C}{T_2} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}, \quad \lambda_3 = \frac{C}{T_3} = 9.67 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 10 \mu\text{m}.$$

b) La fracción de energía radiante entre 0.4 y $0.7 \mu\text{m}$ (rango visible).

$$M_{\text{bb,vis}} = \int_{4 \cdot 10^{-7}}^{10^{-6}} \frac{A}{1^5 \cdot [\exp(\frac{B}{\lambda T}) - 1]} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Frac} = \frac{M_{\text{bb,vis}}}{M_{\text{bb,tot}}} \\ M_{\text{bb,tot}} = \sigma T^4 \rightarrow \text{Emitancia} \end{array} \right.$$

Trasmisión de calor entre dos superficies grises opacas plano-paralelas



a) Las dos superficies. b) Detalle de la superficie 1.

$$\text{Lo q. 1 se calienta} \quad \text{intercambio radiativo} \\ \text{Para cuerpos grises, } \dot{Q}_1 = \Phi_{21} - \Phi_{12} = A \cdot (M_2 - M_1)$$

Cuerpos negros:

$$\dot{Q}_1 = \Phi_{21} - \Phi_{12} = M_{2\text{bb}} \cdot A_2 - M_{1\text{bb}} \cdot A_1 = A_1 \sigma (T_2^4 - T_1^4) \quad A_1 = A_2$$

Cuerpos grises:

Hay que distinguir entre.

• **Emitancia**: $M = \epsilon \sigma T^4 = \epsilon M_{\text{bb}}$

• **Exitancia**: $M = \epsilon \sigma T^4 + \rho E$. Con el modelo bibanda, la dividimos:

→ **Reflexión FIR**: $\rho_{\text{FIR}} E_{\text{FIR}} = (1 - \epsilon) \cdot E_{\text{FIR}}$

→ **Reflexión solar**: $\rho_{\text{SW}} E_{\text{SW}} = (1 - \alpha) \cdot E_{\text{SW}}$

En función de las temperaturas.

$$\dot{Q}_1^{\text{int}} = \Phi_{\text{abs}} - \Phi_{\text{emit}} = \frac{\epsilon_1}{\rho_{\text{FIR},1} A_1} A_1 E_1 - \epsilon_1 A_1 M_{1,\text{bb}} = \epsilon_1 A_1 (E_1 - M_{1,\text{bb}}) \rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{\dot{Q}_1^{\text{int}}}{\epsilon_1 A_1} + M_{1,\text{bb}} \quad (1)$$

$$\dot{Q}_1^{\text{ext}} = \Phi_{\text{inc}} - \Phi_{\text{exit}} = A_1 E_1 - A_1 M_1 \rightarrow E_1 = \frac{\dot{Q}_1^{\text{ext}}}{A_1} + M_1 \quad (2)$$

↳ Que claramente coincide con \dot{Q}_1^{int} :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1^{\text{ext}} &= \Phi_{\text{incid}} - \Phi_{\text{exit}} = A_1 E_1 - A_1 M_1 = A_1 E_1 - A_1 (\epsilon_1 M_{1,\text{bb}} + \rho_{\text{FIR},1} E) = \\ &= A_1 E_1 - A_1 (\epsilon_1 M_{1,\text{bb}} + (1 - \rho_{\text{FIR},1}) E) = A_1 E_1 - A_1 (\epsilon_1 M_{1,\text{bb}} + (1 - \epsilon_1) E) = \epsilon_1 A_1 E_1 - \epsilon_1 A_1 M_{1,\text{bb}} \end{aligned}$$

Pero expresada así permite eliminar la variable intermedia E_1 , y llegar a:

$$(1) = (2) : \frac{\dot{Q}_1}{\epsilon_1 A_1} + M_{1,\text{bb}} = \frac{\dot{Q}_1}{A_1} + M_1 \rightarrow \dot{Q}_1 \left(\frac{1}{\epsilon_1 A_1} - \frac{1}{A_1} \right) = M_1 - M_{1,\text{bb}} \rightarrow \dot{Q}_1 = \frac{M_1 - M_{1,\text{bb}}}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}}$$

Si hacemos lo mismo con el cuerpo 2, y consideramos $\dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2$:

$$\dot{Q}_1 = -\dot{Q}_2 = \frac{M_2 - M_1}{\frac{1}{A_1}} = -\frac{M_2 - M_{2,bb}}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} \rightarrow$$

$$\dot{Q}_1 = \frac{M_{2,bb} - M_{2,bb}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}$$

Expresión explícita en las T^4 para cuerpos grises

$$\frac{\dot{Q}_1}{A} = \frac{\sigma (T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}} \neq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

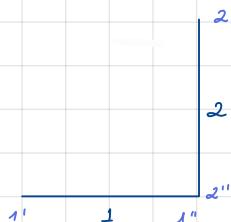
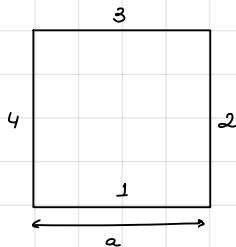
↑ Sólo válido si $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son próximos a 1

Como ejemplo, el calor trasmítido entre dos superficies de aluminio pulido ($\varepsilon=0,05$), una a 300 K y otra a 400 K

$$\frac{\dot{Q}_1}{A} = \frac{\sigma (T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}} = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} (400^4 - 300^4)}{\frac{1 - 0,05}{0,05} + 1 + \frac{1 - 0,05}{0,05}} = 25 \text{ W/m}^2$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,05$

FACTORES DE VISTA



$$F_{12} = \frac{(a+a) - (\sqrt{2}a+0)}{2a} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,293$$

máx 3 cifras significativas

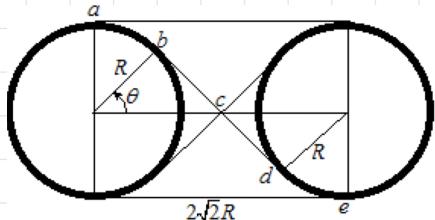
$$F_{13} = \frac{(\sqrt{2}a + \sqrt{2}a) - (a+a)}{2a} = \sqrt{2} - 1 = 0,414$$

$$F_{14} = F_{12} = 0,414$$

$F_m = 0$ por ser superficie plana

$$\sum_i F_{ij} = 2 \cdot 0,414 + 0,293 = 1$$

Ej.3. Calcular el factor de vista entre dos cilindros iguales y paralelos, de radio R y separación entre centros $2\sqrt{2}R$.



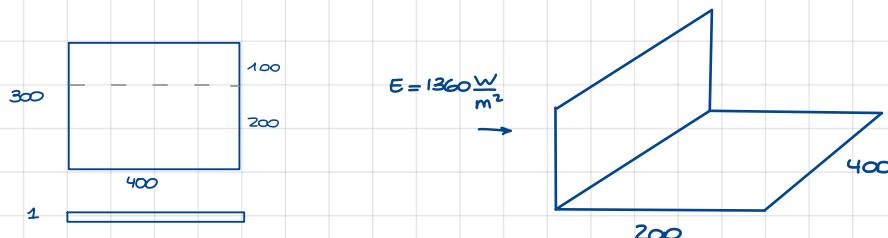
$$L_{gross} = ab + bc + cd = \frac{2\pi R^2}{4} + 2R = \frac{\pi R^2}{2} + 2R$$

$$F_{12} = \frac{\pi R^2 + 4R - 2 \cdot 2\sqrt{2}R}{2 \cdot 2\pi R} = \frac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4\pi} = 0,118.$$

Ejercicio. 1. Placa angular con sol frontal en GEO

Calcular a qué temperatura quedaría una placa de aluminio A7075 anodizado en negro, de $300 \times 400 \times 1 \text{ mm}^3$, doblada en ángulo recto a $1/3$ en la primera dimensión, con la cara externa de $100 \times 400 \text{ mm}^2$ enfrentada al sol en órbita GEO.

1. Hacer esquema. Lo más simple es empezar tomando solo un nodo (toda la placa isotérmica).
2. Identificar la fuente (Sol a 5800 K) y el sumidero (CBR a $2,7 \text{ K}$). Como $R_{\text{GEO}} = 6,6 \cdot R_{\text{T}}$, despreciamos la influencia de la Tierra (en la realidad siempre es $< 10 \text{ W/m}^2$). Consideramos rayos solares paralelos.
3. Lo más simple es empezar approximando las propiedades termo-ópticas por las de cuerpo negro (ideal).
4. Plantear el balance energético, y desarrollarlo analíticamente hasta donde se pueda.
5. Resolver para determinar las temperaturas. Lo más simple es empezar por el estado estacionario.



$$\begin{cases} R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} \\ R_{\text{GEO}} = 6,6 R_T \\ R_S = 0,7 \cdot 10^9 \text{ m} \\ R_{S-T} = 150 \cdot 10^9 \text{ m} \end{cases}$$

• INFLUENCIA DEL SOL

$$\dot{Q}_S = \alpha_i A_i E, \text{ o bien } \dot{W}_{\text{dis}} = \alpha_i A_i E$$

Case	View factor
From a small planar surface facing a sphere of radius R , at a distance H from centres, with $h=H/R$.	$F_{12} = \frac{1}{h^2}$ (e.g. for $h=2$, $F_{12}=1/4$)

Entonces se pone:

$$\dot{Q}_{i,S} = \alpha_i A_i F_{i,S} (m_S - \gamma_i) = \alpha_i A_i \left(\frac{R_S}{R_{S-T}} \right)^2 \sigma (T_S^4 - T_i^4)$$

Lo q. emite el satélite en la banda solar

$$E = \left(\frac{R_S}{R_{S-T}} \right)^2 \sigma T_S^4 = \left(\frac{0,7}{150} \right)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4 = 1360 \text{ W/m}^2$$

podemos despreciar T_i^4

• INFLUENCIA TERRESTRE: \dot{Q}_P , \dot{Q}_a

$$\dot{Q}_{i,P} = \varepsilon_i A_i F_{i,P} \underbrace{\varepsilon_p \sigma_p T_p^4}_{m_p} = \varepsilon_i A_i F_{i,P} m_p$$

$$\frac{\dot{Q}_{i,P}}{A} = \varepsilon_i F_{i,P} m_p \leq 1 \cdot \frac{1}{6,6^2} \cdot 240 = 5,5 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{Q}_a = \alpha_i A_i F_{i,P} f_p E = \alpha_i A_i \underbrace{\frac{1}{6,6^2} \cdot 0,3 \cdot 1360}_{9,5 \text{ W/m}^2}$$

muchos menores que E , los despreciamos

direct. reflej.

$$\underbrace{\dot{Q}_s + \dot{Q}_a}_{\text{Qrad,sun} + \text{Qrad,FIR}} = \sum_j \dot{Q}_{i,j,\text{rad}} = \sum_j (\Phi_{j \rightarrow i} - \Phi_{i \rightarrow j})$$

Entonces, para 1 nodo.

$$\rightarrow \text{Balance energético: } m_i C_i \frac{dT_i}{dt} = \underbrace{\dot{W}_{i,s}}_0 + \underbrace{\dot{Q}_{i,\text{rad}} + \dot{Q}_{i,\text{con}}}_{\text{Q}_p - \dot{Q}_{\infty}} = \underbrace{\dot{W}_{i,s}}_0 + \underbrace{\dot{Q}_{i,a}}_0 + \underbrace{\dot{Q}_{i,\text{rad},\text{FIR}}}_{\text{Q}_p - \dot{Q}_{\infty}}$$

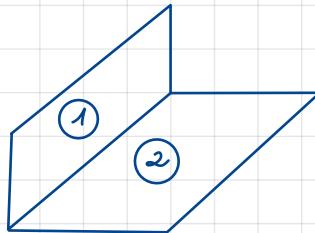
(resuelvo el estacionario)

$$\dot{Q}_{i,\text{rad},\text{FIR}} = \sum_j \dot{Q}_{i,j,\text{rad}} = \sum_j (\Phi_{j \rightarrow i} - \Phi_{i \rightarrow j}) = \sum_j (m_j A_j F_{j,i} - m_i A_i F_{i,j}) = \sum_i A_i F_{i,j} (m_j - m_i)$$

MODELO DE CUERPO NEGRO:

$$O = \sum_i \epsilon E A_{i,\text{ext}} - \sum_i \epsilon A_i \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) \rightarrow E A_{\text{ext}} = A_b \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) \rightarrow \text{Esto está MAL por el efecto abrigo. Al doblar la chapa se cierra una parte.}$$

Para 2 nodos a igual T^a :



$$\alpha E A_{1,\text{ext}} = \epsilon A_{1,\text{ext}} \cdot \sigma (T_1^4 - T_{\infty}^4) + \epsilon A_{1,\text{int}} \cdot F_{1,\infty} \sigma (T_1^4 - T_{\infty}^4) + \epsilon A_{1,\text{int}} \cdot F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$O = \epsilon A_{2,\text{ext}} \cdot \sigma (T_2^4 - T_{\infty}^4) + \epsilon A_{2,\text{int}} \cdot F_{2,\infty} \sigma (T_2^4 - T_{\infty}^4) + \epsilon A_{2,\text{int}} \cdot F_{21} \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

$$\begin{aligned} \alpha E A_{1,\text{ext}} &= \epsilon A_{1,\text{ext}} \cdot \sigma (T_1^4 - T_{\infty}^4) + \epsilon A_{1,\text{int}} \cdot F_{1,\infty} \sigma (T_1^4 - T_{\infty}^4) \\ &+ \epsilon A_{2,\text{ext}} \cdot \sigma (T_2^4 - T_{\infty}^4) + \epsilon A_{2,\text{int}} \cdot F_{2,\infty} \sigma (T_2^4 - T_{\infty}^4) \end{aligned}$$

1^a aprox: Bidimensional.

$$\begin{array}{c} 1'' \\ | \\ 1 \\ | \\ 2 \\ | \\ 2'' \end{array} \quad F_{12} = \frac{(100+200) - 223'61}{2 \cdot 100} = 0'382 \quad \rightarrow F_{1,\infty} = 1 - 0'382 = 0'618$$

$$\begin{array}{c} 100 \\ | \\ \text{Lunc} \\ 200 \end{array} \quad L_{\text{lunc}} = \sqrt{100^2 + 200^2} = 223'61$$

$$A_1 \cdot F_{12} = A_2 \cdot F_{21} \rightarrow F_{21} = \frac{F_{12}}{2} = 0'191 \rightarrow F_{2,\infty} = 0'809$$

La ecuación queda:

$$1360 \cdot 0'1 \cdot 0'4 = [0'1 \cdot 0'4 + 0'1 \cdot 0'4 \cdot 0'618 + 0'2 \cdot 0'4 + 0'2 \cdot 0'4 \cdot 0'809] \sigma T^4$$

↳ Supongo: cuerpo negro, $T_1 = T_2$, T_{∞} despreciable

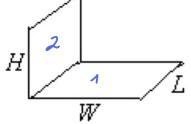
$$T = 260 \text{ K} = -13^\circ \text{C}$$

2º aprox . 30

$F_{21} = 0.167$

$$A_1 F_{12} = A_2 \cdot F_{21} \Rightarrow F_{12} = 2 \cdot F_{21} = 0.334$$

$$\hookrightarrow T = 259 \text{ K} = -14^\circ\text{C}$$

Case	View factor
<p>From a horizontal rectangle of $W \cdot L$ to adjacent vertical rectangle of $H \cdot L$, with $h=H/L$ and $w=W/L$.</p> 	$\underline{F_{12}} = \frac{1}{\pi w} \left[h \arctan\left(\frac{1}{h}\right) + w \arctan\left(\frac{1}{w}\right) \right]$ <p>En mi notación:</p> $F_{21} = -\sqrt{h^2 + w^2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + w^2}}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(ab^{w^2} c^{h^2}\right)$ <p>with $a = \frac{(1+h^2)(1+w^2)}{1+h^2+w^2}$,</p> $b = \frac{w^2(1+h^2+w^2)}{(1+w^2)(h^2+w^2)}, c = \frac{h^2(1+h^2+w^2)}{(1+h^2)(h^2+w^2)}$ <p>(e.g. for $h=w=1$, $F_{12}=0.20004$)</p>

Para 2 nodos a distinta T^α : (Cuerpo negro)

$$m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} = EA_1 - A_1 \sigma T_1^4 - A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_1 F_{1\alpha} \sigma (T_1^4 - T_{\alpha}^4) - k A_c \frac{T_1 - T_2}{L_{12}}$$

$$m_2 C_2 \frac{dT_2}{dt} = -A_2 \sigma T_2^4 + A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_2 F_{2\alpha} \sigma (T_2^4 - T_{\alpha}^4) + k A_c \frac{T_1 - T_2}{L_{12}}$$

no hay sol si consideramos rayos paralelos

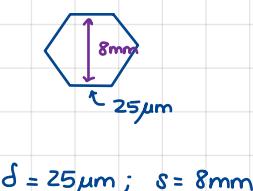
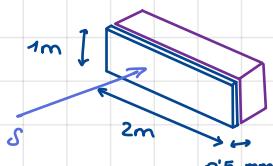
BALANCE ENERGÉTICO de los 2 NODOS
(aparece conducción)

2 ecs con 2 incog : T_1, T_2

SOLAR PANEL WITH HONEYCOMB STRUCTURE

Considérese un panel solar de $1 \times 2 \text{ m}^2$ desplegado en un satélite geoestacionario y orientado al Sol. El panel consta de una lámina de células solares de 30 % de rendimiento eléctrico y 0,5 mm de espesor (incluyendo la capa protectora antirreflectante y el adhesivo), pegada sobre un panel en nido de abeja formado por celdas hexagonales de 8 mm de separación, 25 μm de espesor de lámina de aluminio (Al-5056), y 15 mm de altura entre capas de fibra de carbono (CFRP) de 0,25 mm de espesor. Con los datos de la Tabla adjunta, y despreciando la influencia del resto del satélite, calcular:

Tabla 1. Propiedades.



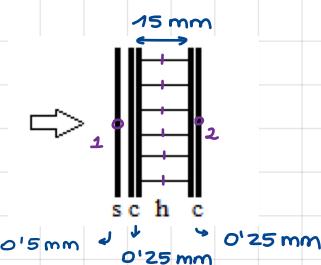
	$\rho [\text{kg/m}^3]$	$c [\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})]$	$k [\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})]$	α	ϵ
Células solares	3500	750	100	0,80	0,80
CFRP	1700	850	30 paral. 1 perp.	0,30	0,80
Al-5056	2700	900	120	0,20	0,20

- a) La temperatura estacionaria considerando dos nodos, despreciando la radiación dentro del panel.

• 1 NODO: $m_c \frac{dT}{dt} = \dot{W} + \dot{Q} = \alpha_{th} EA - A (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \sigma (T^4 - T_{\infty}^4)$
 $\alpha_{th} = \alpha - \eta = 0,8 - 0,3 = 0,5$

$$\alpha_{th} EA = A (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sigma T^4 \rightarrow T = \left(\frac{\alpha_{th} E}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sigma} \right)^{1/4} = \left(\frac{0,5 \cdot 1370}{(0,8 + 0,8) \cdot \sigma} \right)^{1/4} = 294 \text{ K} = 21^\circ\text{C}$$

- 2 NODOS:

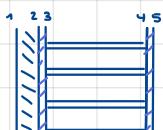


$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = \alpha_{th} EA - \varepsilon_1 A \sigma (T_1^4 - T_{\infty}^4) - K_{12} A \frac{T_1 - T_2}{L_{12}} \quad (1)$$

<< en espacio

$$m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = -\varepsilon_2 A \sigma (T_2^4 - T_{\infty}^4) + K_{12} A \frac{T_1 - T_2}{L_{12}} \quad (2)$$

Entre meter toda la masa del honeycomb en el 2 o mitad y mitad, la diferencia es despreciable xq la masa del honeycomb es muy pequeña. Si fuera de plomo, determinar eso sería importantísimo pero no es el caso.



$$\dot{Q}_{con} = K_s A \frac{T_2 - T_1}{L_s} = K_s \cdot A \cdot \frac{T_3 - T_2}{L_s} = K_{A1} \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{\delta}{s} \cdot A \right) \cdot \frac{T_4 - T_3}{L_h} = K_s A \cdot \frac{T_5 - T_4}{L_c}$$

$$\dot{Q}_{con} = \frac{T_5 - T_1}{\frac{L_s}{K_s A} + \frac{L_c}{K_c A} + \frac{L_h}{K_{A1} \cdot A \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\delta}{s}} + \frac{L_c}{K_c A}} = (T_5 - T_1) \cdot \frac{K_{12} \cdot A}{L_{12}}$$

III
 $1/R_{th}$

Estacionario:

$$\frac{1}{R_{th}} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{\alpha_{th}} = \frac{1}{R_{th}} \cdot \frac{2}{2}$$

$$(1) \quad 0 = 1370 - 9,02 \cdot 10^{-8} \cdot T_1^4 - 125 (T_1 - T_2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

$$(2) \quad 0 = -9,02 \cdot 10^{-8} T_2^4 + 125 (T_1 - T_2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow T_1 = f(T_2)$$

$f(T_2) = 0$

Solución: $T_1 = 298 \text{ K} = 25^\circ\text{C}$

$T_2 = 293 \text{ K} = 20^\circ\text{C}$

Tiene sentido qd 1 nodo debe tener una T^* intermedia entre 2 nodos.

- b) Transmisión de calor por radiación interior en el panel suponiendo que la lámina de aluminio fuese especular, y comparación con la conducción del aluminio.

Lámina de aluminio especular: es como si no estuviera $\Rightarrow \alpha=0, \epsilon=0$

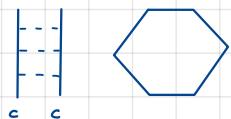
$$Q_{rad} = A \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Cuerpos grises,
admiten solución

$$Q_{rad} = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2}} = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{2(1-\epsilon_1)}{\epsilon_1} + 1} = \frac{2 \cdot 5'67 \cdot 10^{-8} \cdot (298^4 - 293^4)}{\frac{2 \cdot 0'2}{0'8} + 1} = 39 \text{ W}$$

$$Q_{rad} \ll Q_{cond}$$

- c) Para una celdilla del panel, factor geométrico entre las bases approximando el prisma hexagonal por un cilindro.



No hay solución analítica del factor geométrico del hexágono

Aprox. por un cilindro:

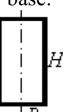


o + preciso: círculo de radio t.q. su área sea igual a la del hexágono

R inscrito

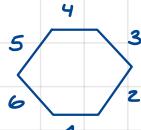
$$r \equiv \frac{R}{H} = \frac{4}{15} = 0'267$$

$$F_{12} = 1 - \frac{\sqrt{4r^2+1} - 1}{2r^2} = 0'063$$

Case	View factor
From base (1) to lateral surface (2) in a cylinder of radius R and height H , with $r=R/H$. Let (3) be the opposite base. 	$F_{12} = \frac{\rho}{2r}, F_{13} = 1 - \frac{\rho}{2r},$ $F_{21} = \frac{\rho}{4}, F_{22} = 1 - \frac{\rho}{2}, F_{23} = \frac{\rho}{4}$ with $\rho = \frac{\sqrt{4r^2+1}-1}{r}$ (e.g. for $R=H$, $F_{12}=0.62$, $F_{21}=0.31$, $F_{13}=0.38$, $F_{22}=0.38$)

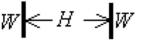
- d) Considerando que el prisma hexagonal fuese suficientemente esbelto para despreciar el efecto de las bases, determinar todos los factores geométricos entre sus caras.

↳ Método de las cuerdas



$$F_{14} = F_{25} = F_{36} :$$

Equal parallel strips

Case	View factor
Between two identical parallel strips of width W and separation H , with $h=H/W$. 	$F_{12} = \sqrt{1+h^2} - h$ (e.g. for $h=1$, $F_{12}=0.414$)

$$H = 8 \text{ mm}; \quad W = \frac{8}{\sqrt{3}} = 4.62; \quad h = \frac{H}{W} = \sqrt{3}$$

$$F_{14} = \sqrt{1+3} - \sqrt{3} = 0.268$$

$$F_{12} = F_{23} = F_{34} = F_{45} = F_{56} = F_{61} :$$

Equal adjacent strips

Case	View factor
Adjacent equal long strips at an angle α . 	$F_{12} = 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ (e.g. $F_{12} _{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.293$)

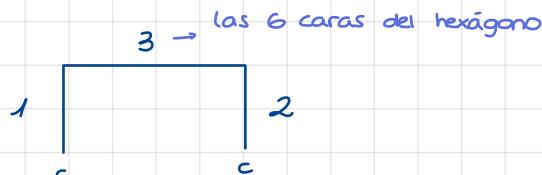
$$F_{12} = 1 - \sin\left(\frac{120^\circ}{2}\right) = 0.134$$

$$F_{13} = F_{24} = F_{35} = F_{46} = F_{15} = F_{46} :$$

Por simetría y completitud:

$$1 = 2 \cdot F_{12} + 2 \cdot F_{13} + F_{14}, \quad F_{13} = \frac{1 - 2 \cdot F_{12} - F_{14}}{2} = 0.232$$

- e) Suponiendo conocidos todos los factores geométricos del prisma real (no infinitamente largo), y las temperaturas de las bases (T_1 y T_2), plantear las ecuaciones que permiten resolver el problema de tres nodos (i.e. base 1, caras laterales 3, y base 2), en el caso general de superficies grises, especificando las incógnitas.



Calculas T_1 y T_2 suponiendo q no existe radiación y luego calculas la radiación suponiendo q T_1 y T_2 son conocidas

Duplico T_1 y T_2 conocidas de la resolución anterior sin radiación.

Por tanto, conozco $m_{1,bb}$ y $m_{2,bb}$, pero no m_1 y m_2 .

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = W_{dis,1} + Q_{1,rad} + Q_{1,cond}$$

$$m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = W_{dis,2} + Q_{2,rad} + Q_{2,cond}$$

$$Q_{1,rad} = \frac{m_1 - m_{1,bb}}{\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1 A_1}}; \quad Q_{2,rad} = \frac{m_2 - m_{2,bb}}{\frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}}; \quad Q_{3,rad} = \frac{m_3 - m_{3,bb}}{\frac{1 - \epsilon_3}{\epsilon_3 A_3}}$$

↑ Cuerpo gris

$$\dot{Q}_{1,rad} = \dot{Q}_{2 \rightarrow 1} + \dot{Q}_{3 \rightarrow 1} = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{m_3 - m_1}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} \\ 0.063 \qquad \qquad \qquad 0.938$$

$$F_{13} = \frac{f}{2r} = \frac{\sqrt{4r^2 - 1} + 1}{2r^2} = 0.938$$

$$\dot{Q}_{2,rad} = \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} + \dot{Q}_{3 \rightarrow 2} = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{m_3 - m_2}{\frac{1}{A_2 F_{23}}}$$

$$\dot{Q}_{3,rad} = \dot{Q}_{1 \rightarrow 3} + \dot{Q}_{2 \rightarrow 3} = \frac{m_1 - m_3}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} + \frac{m_2 - m_3}{\frac{1}{A_2 F_{23}}}$$

Sistema de ecuaciones:

Incógnitas:

$m_1, m_2, m_3, m_{3\text{bb}}$

$$\frac{m_1 - m_{1,\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_1}{E_1 A_1}} = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{m_3 - m_1}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} \quad (1)$$

0'063 0'938

$$\frac{m_2 - m_{2,\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_2}{E_2 A_2}} = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{m_3 - m_2}{\frac{1}{A_2 F_{23}}} \quad (2)$$

$$\frac{m_3 - m_{3\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_3}{E_3 A_3}} = \frac{m_1 - m_3}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} + \frac{m_2 - m_3}{\frac{1}{A_2 F_{23}}} \quad (3)$$

$$m_3 c_3 \frac{dT_3}{dt} = \dot{W}_{3,\text{dis}} + \dot{Q}_{3,\text{rad}} + \dot{Q}_{3,\text{cond}} \rightarrow \dot{Q}_{\text{rad},3} = 0 \quad (4) \rightarrow m_3 = m_{3\text{bb}}$$

que forman un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, M_1, M_2, M_3 , y $M_{3\text{bb}}$; la última de ellas establece la adiabaticidad lateral, y vemos que es equivalente a considerar que las caras laterales se comportan como cuerpo negro ($M_3=M_{3\text{bb}}$).

Si $\dot{Q}_{\text{cond}} \neq 0$, $(T_1 - T_2) \gg 1$, o el espesor del A1 \neq ,

habría que separar el nodo 3 en 2 nodos.

3'	3''
----	-----

$$T_{3'} > T_{3''}$$

la existencia

se aplica cuando hay +2 nodos

y al menos 1 es frío

no hace falta:

cuando todos los cuerpos son regios.

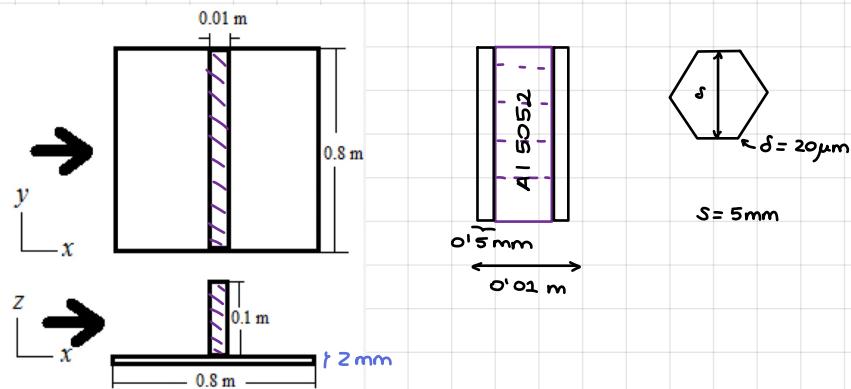
cuando solo hay 2 nodos

* Probar a meter conducción & resolver

ALETA BLANCA SOBRE UNA PLACA BLanca

Para un estudio térmico de un apéndice en un satélite geoestacionario, considérese una placa cuadrada de aluminio anodizado (Al-7075) de 0,8 m de lado y 2 mm de espesor, mantenida a 300 K, y pintada de negro. El apéndice es un panel en nido de abeja, de 1 cm de espesor, 10 cm de altura y 80 cm de anchura, centrada sobre la placa grande, el cual recibe perpendicularmente los rayos del Sol (ver figura). Este panel está formado por dos láminas de fibra de carbono (CFRP) de 0,5 mm de espesor con acabado en negro, unidas por láminas de aluminio (Al-5052) de 20 μm de espesor y 5 mm de anchura de celda. Suponiendo despreciable la conductancia térmica en la unión con la placa grande, se pide:

↳ Al 7075, anodizado negro.



- a) Calcular aproximadamente todos los factores geométricos a partir del valor F_{12} (factor geométrico desde un lado del panel vertical hacia el lado contiguo de la placa base), determinando el valor de este en el límite de placa base infinita.

Es fácil ver que $F_{12}=1/2$ si la placa base fuera infinita, pues, de la radiación emitida por el panel, la mitad iría hacia abajo y la otra mitad hacia arriba, por simetría.

Aquí ya no hay dimensiones infinitas:

$$\hookrightarrow A_1 \cdot F_{12} = A_2 \cdot F_{21} \rightarrow F_{21} = \frac{A_1}{A_2} \cdot F_{12} = \frac{0'1}{0'4} \cdot \frac{1}{2} = 0'125 \quad (\text{sin contar el espesor de la aleta})$$

$$= \frac{0'1}{0'395} \cdot \frac{1}{2} = 0'127 \quad (\text{Contando el espesor de la aleta})$$

$$\text{Y por completitud: } F_{200} = 1 - F_{21} = 0'875 \quad (\text{o } 0'893)$$

$$F_{100} = 1 - F_{12} = 0'5$$

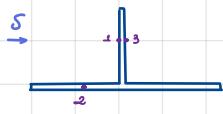
- b) Calcular los factores geométricos verdaderos (sin la aproximación anterior).

Case	View factor
From a horizontal rectangle of $W \cdot L$ to adjacent vertical rectangle of $H \cdot L$, with $h=H/L$ and $w=W/L$.	$F_{12} = \frac{1}{\pi w} \left[h \arctan\left(\frac{1}{h}\right) + w \arctan\left(\frac{1}{w}\right) - \sqrt{h^2 + w^2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + w^2}}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(ab^{w^2}c^{h^2}\right) \right]$ with $a = \frac{(1+h^2)(1+w^2)}{1+h^2+w^2}$, $b = \frac{w^2(1+h^2+w^2)}{(1+w^2)(h^2+w^2)}, \quad c = \frac{h^2(1+h^2+w^2)}{(1+h^2)(h^2+w^2)}$

Teniendo en cuenta el espesor de la aleta:

$$F_{21} = 0'102; \quad F_{12} = \frac{\frac{W}{H}}{0'1} \cdot F_{21} = 0'401$$

- c) Determinar las temperaturas de las caras del panel vertical en estado estacionario, y el valor de cada uno de los términos del balance energético del panel.



Nodo 1:

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = \dot{Q}_{S,1} + \dot{Q}_{rad,1} - \dot{Q}_{conv,1} + \dot{W}_{S,L}$$

O (estac.)

$$\dot{Q}_{rad,1} = \frac{m_1 - m_{1,bb}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}}$$

bb

$$O = \alpha \varepsilon A_1 - A_1 F_{12} (m_1 - m_2) - A_1 F_{1\infty} (m_1 - m_\infty) - K A_1 \cdot \frac{(T_1 - T_3)}{L_{13}}$$

$$O = \varepsilon A_1 - A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_1 F_{1\infty} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4) - \frac{K A_1}{L_{13}} (T_1 - T_3) \quad (1)$$

Nodo 3:

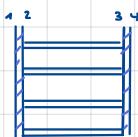
$$m_3 c_3 \frac{dT_3}{dt} = \dot{Q}_{rad,3} + \dot{Q}_{conv,3} + \dot{W}_{S,L}$$

O (estac.)

$$O = \frac{A_3 F_{32} \cdot (m_3 - m_2)}{A_3 F_{300}} + \frac{A_3 F_{300} \cdot (m_3 - m_\infty)}{A_3 F_{300}} + \frac{K A_1}{L_{13}} (T_1 - T_3)$$

bb

$$O = -A_1 F_{12} \sigma (T_3^4 - T_2^4) - A_1 F_{1\infty} \sigma (T_3^4 - T_\infty^4) + \frac{K A_1}{L_{13}} (T_1 - T_3) \quad (2)$$



$$\dot{Q}_{con} = K_c A \frac{T_2 - T_1}{L_c} = K_{A1} \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{\delta}{S} \cdot A \right) \cdot \frac{T_3 - T_2}{L_h} = K_c A \cdot \frac{T_4 - T_3}{L_c}$$

$$\dot{Q}_{con} = \frac{T_4 - T_3}{\frac{L_c}{K_c A} + \frac{L_h}{K_{A1} \cdot A \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\delta}{S}} + \frac{L_c}{K_c A}} \rightarrow K_{ef} = 1406 \frac{W}{m \cdot K}$$

$K_c = 1 \frac{W}{m \cdot K}$

Solución: $T_1 = 354 K = 81^\circ C$

$T_2 = 350 K = 76^\circ C$

$K_h = 138 \frac{W}{m \cdot K}$

Aé 5052

- d) Resolver ahora suponiendo que la cara iluminada está pintada de blanco.

aunque si sólo hay una superficie no-negra y es convexa, basta usar $\dot{Q}_{1,rad} = \sum_i \varepsilon_i A_i F_{i,j} \sigma (T_j^4 - T_i^4) = dE_i/dt - \dot{Q}_{1,cond} - \dot{Q}_{1,conv}$, además de tener en cuenta que solo absorbe una parte de

Como la otra superficie está a T_2 de, lo q yo le refleje no afecta a mi T_1

$$O = \alpha \varepsilon A_1 + \dot{Q}_{1,rad} - K A_1 \cdot \frac{(T_1 - T_3)}{L_{13}}$$

$$\varepsilon_1 = 0.85$$

$$\text{White paint: } \alpha_1 = 0.2$$

$$\dot{Q}_{1,rad} = -\varepsilon_1 A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - \varepsilon_1 A_1 F_{1\infty} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4)$$

$$O = \dot{Q}_{3,rad} + \frac{K A_1}{L_{13}} (T_1 - T_3) \xrightarrow{\text{bb}} O = -A_1 F_{12} \sigma (T_3^4 - T_2^4) - A_1 F_{1\infty} \sigma (T_3^4 - T_\infty^4) + \frac{K A_1}{L_{13}} (T_1 - T_3)$$

Solución: $T_1 = 277 K = 4^\circ C$

$T_2 = 276 K = 3^\circ C$

e) Comparar los resultados anteriores (c y d) con los que se obtendría si no existiese la placa horizontal.

$$0 = \alpha_1 \varepsilon A_1 + Q_{1,rad}^* - k A_1 \cdot \frac{(T_1 - T_3)}{L_{13}}$$

$$Q_{1,rad}^* = -\varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_{\infty 0}^4)$$

$$0 = -A_1 \sigma (T_3^4 - T_{\infty 0}^4) + \frac{k A_1}{L_{13}} (T_1 - T_3)$$

• Para cara negra ($\alpha_1 = \varepsilon_1 = 1$):

$$T_1 = 334 \text{ K}$$

$$T_3 = 320 \text{ K}$$

• Para cara blanca ($\alpha_1 = 0.2$, $\varepsilon_1 = 0.85$)

$$T_1 = 227 \text{ K}$$

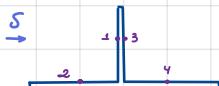
$$T_3 = 226 \text{ K}$$

inferiores

f) Suponiendo que las caras superiores de la placa horizontal se recubren con una manta aislante negra (una MLI pintada de negro), y considerando que sus temperaturas superficiales van a ser diferentes, determinar todas las temperaturas (con la cara iluminada pintada de negro).

Ahora $T_2 \neq T_4 \neq 300 \text{ K}$.

Suponemos cuerpo negro para todos los nodos.



4 ecs.
4 incógnitas

MATLAB

$$0 = \varepsilon A_1 - \alpha_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - \alpha_1 F_{100} \sigma (T_1^4 - T_{\infty 0}^4) - k A_1 \cdot \frac{(T_1 - T_3)}{L_{13}}$$

$$0 = -\alpha_1 F_{12} \sigma (T_3^4 - T_4^4) - \alpha_1 F_{100} \sigma (T_3^4 - T_{\infty 0}^4) + \frac{k A_1}{L_{13}} (T_1 - T_3)$$

$$0 = \alpha_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - \alpha_2 \cdot F_{200} \cdot \sigma (T_2^4 - T_{\infty 0}^4)$$

$$0 = \alpha_2 F_{21} \sigma (T_3^4 - T_4^4) - \alpha_2 \cdot F_{200} \cdot \sigma (T_4^4 - T_{\infty 0}^4)$$

Solución: $T_1 = 337 \text{ K}$, $T_2 = 188 \text{ K}$, $T_3 = 333 \text{ K}$, $T_4 = 191 \text{ K}$

g) Repetir el cálculo anterior pero con la cara iluminada pintada de blanco.

* lo q se añade
por ser el nodo 1
un cuerpo gris

4 ecs. & 4 incógnitas

MATLAB

$$0 = \alpha_1 \varepsilon A_1 - \varepsilon_1 \alpha_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - (\varepsilon_1 \alpha_1 F_{100} \sigma (T_1^4 - T_{\infty 0}^4)) - k A_1 \cdot \frac{(T_1 - T_3)}{L_{13}}$$

$$0 = -\alpha_1 F_{12} \sigma (T_3^4 - T_4^4) - \alpha_1 F_{100} \sigma (T_3^4 - T_{\infty 0}^4) + \frac{k A_1}{L_{13}} (T_1 - T_3)$$

$$0 = \alpha_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - \alpha_2 \cdot F_{200} \cdot \sigma (T_2^4 - T_{\infty 0}^4) + P_1 \varepsilon A_1 F_{12}$$

$\alpha_2 F_{21}$

$$0 = \alpha_2 F_{21} \sigma (T_3^4 - T_4^4) - \alpha_2 \cdot F_{200} \cdot \sigma (T_4^4 - T_{\infty 0}^4)$$

White paint: $\begin{cases} \varepsilon_1 = 0.85 \\ \alpha_1 = 0.2 \end{cases}$

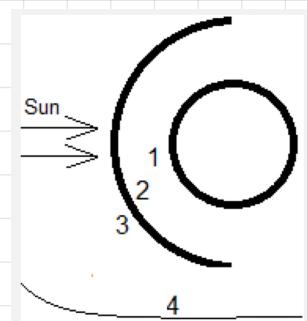
Solución: $T_1 = 237 \text{ K}$
 $T_2 = 219 \text{ K}$
 $T_3 = 235 \text{ K}$
 $T_4 = 134 \text{ K}$

$$P_1 = 1 - \alpha_1$$

↑
Refleja en
la banda solar

ESFERA CON ESCUDO SEMIESFÉRICO GRIS

Una esfera maciza de 0,25 m de diámetro está disipando 30 W en un recinto evacuado cuyas paredes se mantienen a 20 °C. Sobre la esfera incide una radiación solar de 800 W/m², a través de una pequeña ventana. Se va a disponer un escudo semiesférico concéntrico con la esfera y de radio doble del de ésta, centrado en la dirección de la radiación incidente. Las propiedades termo-ópticas de la esfera maciza son $\alpha=0,9$, $\varepsilon=0,8$, y las de la cáscara semiesférica son $\alpha=0,4$, $\varepsilon=0,8$ por el exterior, y $\alpha=0,4$, $\varepsilon=0,4$ por el interior. Considerando las superficies isotermas y difusas, se pide:



$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0.9, \quad \varepsilon_1 = 0.8 \\ \alpha_2 &= 0.4, \quad \varepsilon_2 = 0.4 \\ \alpha_3 &= 0.4, \quad \varepsilon_3 = 0.8\end{aligned}$$

$$\dot{W}_{dis} = 30 \text{ W}$$

$$R = 0.125 \text{ m}$$

- a) Temperatura de la esfera en ausencia del escudo.

$$\begin{aligned}0 &= \dot{\epsilon}_1 A_f \cdot \alpha_1 - \dot{\epsilon}_1 A_i \sigma \cdot (T^4 - T_\infty^4) + \dot{W}_{dis} \\ \left[\frac{\dot{\epsilon}_1 R^2 \cdot \alpha_1 + \dot{W}_{dis}}{\dot{\epsilon}_1 A_i \cdot \sigma} + T_\infty^4 \right]^{1/4} &= T = \left[\frac{800 \cdot \pi \cdot 0.125^2 \cdot 0.9 + 30}{0.8 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 0.125^2 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}} + 293^4 \right]^{1/4} \\ T &= 348 \text{ K}\end{aligned}$$

- b) Plantear las ecuaciones necesarias cuando está el escudo.

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = \dot{Q}_{1,rad} + \dot{W}_{dis}$$

$$\dot{Q}_{1,rad} = \frac{m_1 - m_{1,bb}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\dot{\epsilon}_1 A_1}} \stackrel{(1)}{=} \frac{m_2 - m_1}{F_{12} A_1} + \frac{m_4 - m_1}{F_{14} A_1} \stackrel{(2)}{=} -\dot{W}_{dis}$$

$$m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = \dot{Q}_{2,rad} + \dot{Q}_{2,con}$$

$$\dot{Q}_{2,rad} = \frac{m_2 - m_{2,bb}}{\frac{1-\varepsilon_2}{\dot{\epsilon}_2 A_2}} \stackrel{(3)}{=} \frac{m_1 - m_2}{A_2 F_{21}} + \frac{m_4 - m_2}{A_2 F_{24}} \stackrel{(4)}{=} -\dot{Q}_{2,con}$$

$$m_3 c_3 \frac{dT_3}{dt} = \alpha_3 A_{f,3} \cdot E + \dot{Q}_{3,rad} - \dot{Q}_{3,con}$$

$$\dot{Q}_{3,rad} = \frac{m_3 - m_{3,bb}}{\frac{1-\varepsilon_3}{\dot{\epsilon}_3 A_3}} \stackrel{(5)}{=} \frac{m_4 - m_3}{A_3 F_{34}} \stackrel{(6)}{=} -\alpha_3 A_{f,3} E + \dot{Q}_{3,con}$$

Queremos que la conducción de 2 a 3 sea tan efectiva que iguale las temperaturas (i.e. $T_{2,bb} = T_{3,bb}$)

Sumando (4) y (6) para eliminar \dot{Q}_{con} :

$$\frac{m_2 - m_{2,bb}}{1-\varepsilon_2} + \frac{m_3 - m_{3,bb}}{1-\varepsilon_3} = -\alpha_3 A_{f,3} E$$

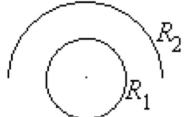
Ahora: 5 ecs, 5 incógnitas

c) Factores geométricos de la superficie interior del escudo.

$$\rho = \frac{r_2}{r_1} = 2$$

Sphere to concentric hemisphere

Case	View factor
From a sphere of radius R_1 to a larger concentric hemisphere of radius $R_2 > R_1$, with $R \equiv R_2/R_1 > 1$. Let the enclosure be '3'.	$F_{12} = 1/2, F_{13} = 1/2, F_{21} = 1/R^2,$ $F_{23} = 1 - F_{21} - F_{22}, F_{22} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-\rho}{R^2} \right)$ with $\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{R^2 - 1} - (R^2 - 2) \arcsin \left(\frac{1}{R} \right) \right]$ (e.g. for $R=2, F_{12}=1/2, F_{21}=1/4, F_{13}=1/2, F_{23}=0.34, F_{22}=0.41$)



$$F_{12} = \frac{1}{2}$$

$$F_{14} = \frac{1}{2}$$

$$F_{21} = \frac{1}{4}$$

$$F_{22} = 0.41$$

$$F_{24} = 1 - 0.41 - 0.25$$

$$F_{24} = 0.34$$

d) Temperaturas del escudo y de la esfera.

Tomando:

$$A_3 = A_2 = 2\pi R_2^2 = 0,39 \text{ m}^2, \quad A_1 = 4\pi R_1^2 = 0,20 \text{ m}^2, \quad A_{3\text{frontal}} = \pi R_2^2 = 0,20 \text{ m}^2$$

$$M_4 = \sigma T_4^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 293^4 = 419 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad M_{3\text{bb}} = M_{2\text{bb}}, \quad E = 800 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Solución:

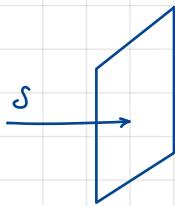
$$T_1 = 330 \text{ K} = 51^\circ \text{C}$$

$$T_2 = T_3 = 319 \text{ K} = 46^\circ \text{C}$$

SUNLIT PLATE IN GEOSTATIONARY ORBIT

Se requiere un análisis térmico de una placa plana delgada, cuadrada y de 0,1 m de lado, que es un apéndice en un satélite geoestacionario. Se pide:

- a) Plantear su balance térmico en un caso general, iluminado por el Sol, pero despreciando el acoplamiento con el resto del satélite. Estimar la posible contribución terrestre.



$$mc \frac{dT}{dt} = \dot{W}_{dis} + \dot{Q}_s + \dot{Q}_p + \dot{Q}_a - \dot{Q}_{\infty}$$

• INFLUENCIA DEL SOL

$$\dot{Q}_s = \alpha A_f E$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_T = 6'4 \cdot 10^6 \text{ m} \\ R_{GEO} = 6'6 R_T \\ R_S = 0'7 \cdot 10^9 \text{ m} \\ R_{S-T} = 150 \cdot 10^9 \text{ m} \end{array} \right.$$

• INFLUENCIA TERRESTRE : \dot{Q}_p, \dot{Q}_a

$$\frac{\dot{Q}_p}{A} = \epsilon_i F_p \underbrace{p_p}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{6,6^2} \cdot 240 = 5,5 \text{ W/m}^2$$

$$\frac{\dot{Q}_a}{A} = \alpha_i F_p p_p E \leq 1 \cdot \frac{1}{6,6^2} \cdot 0,3 \cdot 1360 = 9,5 \text{ W/m}^2$$

$$\left(\frac{R_T}{R_{GEO}} \right)^2$$

muchos menores que E ,
los despreciamos

$$\dot{Q} = \alpha E A \cos \beta - 2 \epsilon A \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) , \text{ con } A = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$E = 1361 \text{ W/m}^2$$

- b) Potencia eléctrica requerida para que la placa no se enfrie por debajo de 50 °C, en función de la inclinación solar, en los casos en que ambas superficies sean negras o que sean blancas.

$$\dot{W}_{dis} = -\alpha E A \cos \beta + 2 \epsilon A \sigma (T_{50}^4 - T_{\infty}^4)$$

Para cuerpo negro ($\epsilon = \alpha = 1$) : $\dot{W}_{dis} = -13'61 \cos \beta + 12'34 \text{ [W]}$

si la placa estuviese de canto (no soleada, $\beta=90^\circ$), habría que calentar con $\dot{W}_{dis} = 12,4 \text{ W}$, pero si la placa está de frente al Sol, sería necesario refrigerarla para mantenerla a 50 °C ($\dot{W}_{dis} = 12,4 - 13,6 = -1,2 \text{ W}$), lo que en la práctica se traduciría en que no se puede mantener por debajo de 50 °C..

Superf. blanca ($\alpha = 0,2, \epsilon = 0,85$) : $\dot{W}_{dis} = -2'72 \cos \beta + 10'49 \text{ [W]}$

si la placa estuviese de canto (no soleada, $\beta=90^\circ$), habría que calentar con $\dot{W}_{dis} = 10,5 \text{ W}$, y si la placa está de frente al Sol, sería necesario calentar con $\dot{W}_{dis} = 10,5 - 2,7 = 7,8 \text{ W}$ para mantenerla a 50 °C..

- c) Potencia eléctrica requerida para mantener la placa a 50 °C con Sol frontal, en función de la relación α/ϵ , suponiendo que la cara posterior está aislada con una MLI.

$$\dot{W}_{dis} = -\alpha E A + \epsilon A \sigma (T_{50}^4 - T_{\infty}^4) = -\frac{\alpha}{\epsilon} EA + A \sigma (273 + 50)^4 = -\frac{\alpha}{\epsilon} 13'61 + 6'17$$

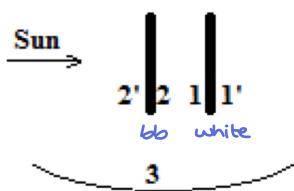
i.e. si la relación α/ϵ es $> 0,45$, entonces la placa (aislada por atrás) se calentaría por encima de 50 °C y habría que refrigerar (poco práctico), mientras que para $\alpha/\epsilon < 0,45$ sí que habrá que calentar, como se ha visto para la pintura blanca, que tenía $\alpha/\epsilon = 0,20/0,85 = 0,24$.

- d) Temperatura que alcanzaría la placa pintada de blanco por delante y aislada por atrás, enfrentada al Sol (sin disipación).

$$0 = \alpha E A - \epsilon A \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) \rightarrow T = \left(\frac{\alpha E}{\epsilon \sigma} \right)^{1/4} = 274 \text{ K}$$

$\alpha = 0.2$
 $\epsilon = 0.85$

- e) Plantear los balances térmicos si se dispone delante de la placa antedicha otra placa igual, toda pintada de negro, separada 10 mm de la anterior, y calcular las temperaturas estacionarias.



Superf. 2 \approx BB \rightarrow 1 nodo.

Superf 1: Se podría aproximar como cuerpo negro, pues al no estar expuesta al Sol, sólo importa la emisividad, que es casi la unidad ($\epsilon = 0.85$).

En este caso, como la placa 1 está aislada, se comporta como un cuerpo negro (no es una aprox.) \Rightarrow en su balance energético:

$$m_1 C_1 \frac{dT_1}{dt} = \dot{W}_{\text{dis}} + \dot{Q}_s + \dot{Q}_{\text{rad}} \rightarrow \dot{Q}_{\text{rad}} = 0 \rightarrow M_1 = M_{\text{bb}}$$

cuero
gris

1º) Calculo factores de vista:

Equal square plates

Case	View factor
Between two identical parallel square plates of side L and separation H , with $w=W/H$.	$F_{12} = \frac{1}{\pi w^2} \left(\ln \frac{x^4}{1+2w^2} + 4wy \right)$ with $x \equiv \sqrt{1+w^2}$ and $y \equiv x \arctan \frac{w}{x} - \arctan w$ (e.g. for $W=H$, $F_{12}=0.1998$)

$$F_{12} = 0.834 ; F_{13} = 1 - F_{12} = 0.166$$

$$F_{21} = 0.834 ; F_{23} = 0.166$$

2º) Sistema ecs. 2 nodos (bb)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = A_1 \cdot F_{12} \cdot \sigma (T_2^4 - T_1^4) - A_1 F_{13} \sigma T_1^4 \\ EA_2 = -A_2 \cdot F_{21} \sigma (T_2^4 - T_1^4) - A_2 \cdot (F_{23} + 1) \sigma T_2^4 \end{array} \right.$$

\hookrightarrow g. emite 2'
 \hookrightarrow g. emite 2

Solución: $T_1 = 352 \text{ K}, T_2 = 368 \text{ K}$

f) Repetir el punto anterior pero con todas las caras pintadas de blanco.

$$\dot{Q}_{1,\text{rad}} = \frac{m_1 - m_{1,\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} \stackrel{(1)}{=} \frac{m_2 - m_1}{F_{12} A_1} + \frac{m_3 - m_1}{F_{13} A_1} \stackrel{(2)}{=} 0$$

$$\dot{Q}_{2,\text{rad}} = \frac{m_2 - m_{2,\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} \stackrel{(3)}{=} \frac{m_1 - m_2}{A_2 F_{21}} + \frac{m_3 - m_2}{A_2 F_{23}} \stackrel{(4)}{=} -\dot{Q}_{2,\text{con}}$$

$$\dot{Q}_{2',\text{rad}} = \frac{m_{2'} - m_{2',\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_{2'}}{\varepsilon_{2'} A_{2'}}} \stackrel{(5)}{=} \frac{m_3 - m_{2'}}{A_{2'}^2} \stackrel{(6)}{=} -\alpha_{2'} A_{2'} \varepsilon + \dot{Q}_{2',\text{con}}$$

} Considero que $m_{2',\text{bb}} = m_{2,\text{bb}}$

Sumando (4) y (6) para eliminar \dot{Q}_{con} :

$$\frac{m_2 - m_{2,\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} + \frac{m_{2'} - m_{2',\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_{2'}}{\varepsilon_{2'} A_{2'}}} = -\alpha_{2'} A_{2'} \varepsilon$$

Ahora: 5 ecs, 5 incógnitas

(ó 6 ecs, 6 incógnitas si añado

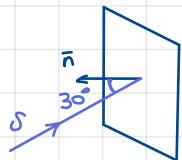
$$m_{2',\text{bb}} = m_{2,\text{bb}}$$

Solución: $T_1 = 240 \text{ K}$; $T_2 = 255 \text{ K}$

TILTED PLATE IN MARTIAN ORBIT

Considérese un panel de $1 \cdot 0.5 \cdot 0.01 \text{ m}^3$ desplegado de un satélite orbitando Marte (a 1.5 ua del Sol), a 300 km de altitud sobre el punto subsolar, con la normal a sus caras formando 30° con los rayos solares. Despreciar el efecto de otras partes del satélite, y suponer que la cara iluminada es blanca y la otra negra. Las propiedades volumétricas del panel son $\rho=50 \text{ kg/m}^3$, $c=1000 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, y $k=0.01 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. Se pide:

- a) La irradiancia solar y la potencia solar absorbida.



$$R_{SM} = 1.5 \text{ ua} = 230 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$\epsilon = F_{IS} \cdot (m_s - m_e) = E_t \cdot \left(\frac{R_{ST}}{R_{SM}} \right)^2 = 1360 \cdot \frac{1}{1.5^2} = 604 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\dot{Q}_s = \alpha \cdot A \cos \beta \cdot \epsilon = 52 \text{ W}$$

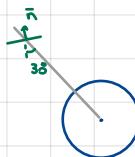
$\begin{matrix} 0.2 & 30^\circ \\ \hline 0.5 & \end{matrix}$

Case	View factor
From a small planar surface facing a sphere of radius R , at a distance H from centres, with $h=H/R$.	$F_{12} = \left(\frac{R}{h} \right)^2$ $F_{12} = \frac{1}{h^2}$ (e.g. for $h=2$, $F_{12}=1/4$)

- b) Las cargas térmicas provenientes del planeta.

$$R_M = 3.4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = R_M + 300 \cdot 10^3 = 7.1 \cdot 10^6 \text{ m}$$



$$\dot{Q}_{1p} = \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot F_{1p} \cdot \epsilon_p \cdot \sigma \cdot T_p^4$$

$\begin{matrix} 0.95 & 217^4 \\ \hline 0.15 & \end{matrix}$

$$\dot{Q}_{1a} = \alpha_1 \cdot A_1 \cdot F_{1p} \cdot \epsilon_p \cdot \epsilon$$

$$\dot{Q}_{1p} = \epsilon_1 \cdot A \cdot F_{1p} \cdot \epsilon_p \cdot \sigma T_p^4 = 0.09 \text{ W}$$

$\begin{matrix} 0.5 & \\ \hline 0.85 & 0.002 \\ & (\beta=15^\circ) \end{matrix}$

$$\dot{Q}_{2p} = \epsilon_2 \cdot A \cdot F_{2p} \cdot \epsilon_p \cdot \sigma T_p^4 = 39 \text{ W}$$

$\begin{matrix} 0.9 & \\ \hline 0.5 & 0.32 \\ & (\beta=30^\circ) \end{matrix}$

$$\dot{Q}_{1a} = 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.002 \cdot 0.15 \cdot 604 = 0.02 \text{ W}$$

$$\dot{Q}_{2a} = 0.9 \cdot 0.5 \cdot 0.32 \cdot 0.15 \cdot 604 = 30 \text{ W}$$

For the facing surface:
-if $|\beta| \leq \arccos(1/h)$ (i.e. plane not cutting the sphere),

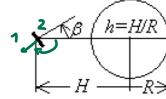
$$F_{12} = \frac{\cos \beta}{h^2}$$

-if $|\beta| > \arccos(1/h)$ (i.e. plane cutting the sphere),

$$F_{12} = \frac{1}{\pi h^2} \left(\cos \beta \arccos y - x \sin \beta \sqrt{1-y^2} \right) + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\sin \beta \sqrt{1-y^2}}{x} \right)$$

with $x \equiv \sqrt{h^2-1}$, $y \equiv -x \cot(\beta)$

From a small planar surface tilted to a sphere of radius R , at a distance H from centres, with $h=H/R$; the tilting angle β is between the normal and the line of centres.



For the whole plate (the two surfaces):
-if $|\beta| \leq \arccos(1/h)$ (i.e. plane not cutting the sphere, hence $F_{12}=0$ for the back side),

$$F_{12} = \frac{\cos \beta}{2h^2}$$

-if $|\beta| > \arccos(1/h)$ (i.e. plane cutting the sphere), F_{12} can be obtained as the semisum of values for the facing surface and for the opposite surface, the latter obtained as the complement angle (i.e. with $\beta \rightarrow \pi - \beta$).

(e.g. for $h=1.5$ and $\beta=\pi/3$ (60°):
 $F_{12}=0.226$ for the facing side,
 $F_{12}=0.004$ for the opposite side, and
 $F_{12}=0.115$ for the two-side plate)

- c) La potencia que emite la placa, suponiendo que está a temperatura uniforme, T_0 , y en el caso de que las caras estén a diferente temperatura, T_1 y T_2 .

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{Caso isotermo: } \dot{Q}_{\text{rad}} &= A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \sigma T_0^4 \\ \dot{Q}_{\text{rad}} &= \underbrace{\dot{Q}_{\text{rad}1}}_{A\varepsilon_1\sigma T_1^4} + \underbrace{\dot{Q}_{\text{rad}2}}_{A\varepsilon_2\sigma T_2^4} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 = 0.85 \text{ (white point)} \\ \varepsilon_2 = 0.9 \text{ (black point)} \end{array} \right\}$$

- d) Los valores de T_0 , T_1 y T_2 si la placa estuviese en estado estacionario.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{Caso isotermo: } 0 &= \underbrace{\dot{Q}_s}_{52\text{W}} + \underbrace{\dot{Q}_p}_{39.09} + \underbrace{\dot{Q}_a}_{30.02} - \dot{Q}_{\text{rad}} \rightarrow \dot{Q}_{\text{rad}} = 123\text{W} = A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sigma T_0^4 \\ &\hookrightarrow T_0 = 223\text{K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{Diferentes } T^{\text{as}}: \quad 0 &= \underbrace{\dot{Q}_{s,1}}_{52\text{W}} + \underbrace{\dot{Q}_{p,1}}_{0.09} + \underbrace{\dot{Q}_{a,1}}_{0.02} - \dot{Q}_{\text{rad},1} - KA \frac{T_1 - T_2}{\delta} \\ 0 &= \underbrace{\dot{Q}_{s,2}}_{(asum. \text{rayos paralelos})} + \underbrace{\dot{Q}_{p,2}}_{39} + \underbrace{\dot{Q}_{a,2}}_{30} - \dot{Q}_{\text{rad},2} + KA \frac{T_1 - T_2}{\delta} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

- e) La evolución de la temperatura al entrar en eclipse (supóngase como estado inicial la T_0 anterior).

$$mc \frac{dT}{dt} = \dot{Q}_p - A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sigma T^4$$

Simplifying to the one-temperature case, the cooling is governed to a first approximation by $mcdT/dt = -2A\varepsilon\sigma T^4$, since solar and albedo inputs are zero, and planet IR is small (39 W against 52+32+39=123 W). This simplification allows a simple solution, $T(t) = T_0 [1/(1+t/\tau)^{1/3}]$, where the relaxation time is $\tau = mc/(6A\varepsilon\sigma T_0^3)$. Substitution of the panel mass, $m = \rho L A = 50 \cdot 0.01 \cdot 0.5 = 0.25 \text{ kg}$, and the rest of the data finally yields $\tau = 150 \text{ s}$; $T(t)$ is plotted in Fig. 2 during a typical eclipse duration of 42 minutes in a 114 minutes' orbit period.

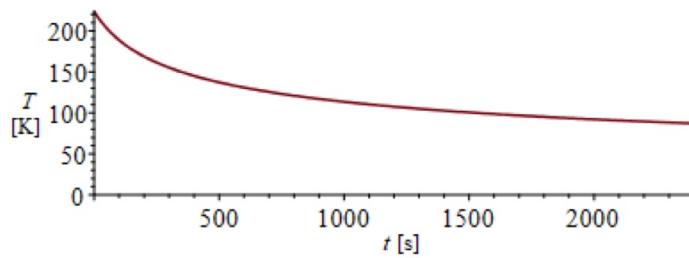


Fig. 2. Temperature evolution (one-node model) after entering into eclipse (until eclipse ends).

We see that the cooling becomes less effective as time passes (at lower temperatures), so that at the end of a 40 min eclipse duration the plate temperature has only dropped from 223 K to 86 K, and this is without accounting for the infrared heating from Mars. Orbit period around Mars depend on altitude, with around 1.9 h for low orbits (Phobos, at 6000 km altitude, has a period of 7.7 h, while Deimos, at 20 000 km, has $T=30$ h and is just outside synchronous orbit).