

實作能力加強

temmie

1. 位元運算
2. 字元轉換
3. 陣列運用
4. 常用 STL 函式
5. 包裝元素
6. 區間問題

位元運算

為什麼要學這個？

- 因為電腦的機制，位元運算會比一般運算更快一些
- 在**枚舉**這堂課上，我們會用到很多

進位制

- n 進位代表只用 n 以內的數字組成（如果超過 10 就用英文）
- 二進位的數字代表只用 0 和 1 組成

進位制

- n 進位代表只用 n 以內的數字組成（如果超過 10 就用英文）
- 二進位的數字代表只用 0 和 1 組成
- 如果一個式子有不同進位制的數字，則會用括弧備註在右下角
- 例如： $17_{(10)} = 10001_{(2)}$

二進位轉十進位

- 以 $10001_{(2)}$ 舉例
- 我們可以把所有 2 的冪次列出來： 2^4 、 2^3 、 2^2 、 2^1 、 2^0

二進位轉十進位

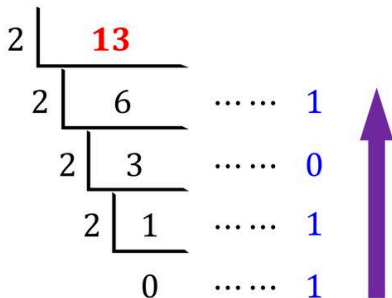
- 以 $10001_{(2)}$ 舉例
- 我們可以把所有 2 的冪次列出來： 2^4 、 2^3 、 2^2 、 2^1 、 2^0
- 和原本的二進位字串一一對應後相乘 1×2^4 、 0×2^3 、 0×2^2 、 0×2^1 、 1×2^0

二進位轉十進位

- 以 $10001_{(2)}$ 舉例
- 我們可以把所有 2 的冪次列出來： 2^4 、 2^3 、 2^2 、 2^1 、 2^0
- 和原本的二進位字串一一對應後相乘 1×2^4 、 0×2^3 、 0×2^2 、 0×2^1 、 1×2^0
- 將所有數字相加 $1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 17$

十進位轉二進位

- 詳細作法如下圖



即： $(13)_{10} = (1101)_2$

头条 @算法集市

例題

二進位制轉換

題目連結

給你一個十進位的正整數 n ，輸出 n 的二進位

位元運算的類別

- 主要有 OR、AND、XOR、NOT
- 和一般的 or、and、not 不同的是，可以對數字做運算，而不是限制在布林

位元運算的類別

- 主要有 OR、AND、XOR、NOT
- 和一般的 or、and、not 不同的是，可以對數字做運算，而不是限制在布林
- *AND*：「&」表示，如果兩個 bit **都是** 1 就是 1，否則為 0
- *OR*：「|」表示，如果兩個 bit **至少**有一個 1 就是 1，否則為 0
- *XOR*：「^」表示，如果兩個 bit **恰有**一個為 1，否則為 0
- *NOT*：「~」表示，將 1 變成 0，0 變成 1

使用位元運算

- 難道用位元運算還要手動轉進位制？@@

使用位元運算

- 難道用位元運算還要手動轉進位制？@@
- 在 C++ 中，直接對兩個十進位的數字做就可以了
- $17_{(10)} \mid 5_{(10)} = 10001_{(2)} \mid 00101_{(2)} = 10101_{(2)} = 21_{(10)}$

例題

位元運算的大雜燴

題目連結

給你三個參數 x 、 y 、 z ，找到 $(x \oplus (y | z)) \oplus (x + y)$ 的最小值

其中 \oplus 是 XOR 的意思， $|$ 是 OR 的意思

例題

位元運算的大雜燴

題目連結

給你三個參數 x 、 y 、 z ，找到 $(x \oplus (y | z)) \oplus (x + y)$ 的最小值

其中 \oplus 是 XOR 的意思， $|$ 是 OR 的意思

- 參數數量是固定的，那就列出所有情況吧！
- 把六種組合各試一遍就可以了

更多位元運算

- 另外常用的位元運算有左移和右移

更多位元運算

- 另外常用的位元運算有左移和右移
- 左移：「 \ll 」表示，代表將所有 bit 左移 n 位
- 右移：「 \gg 」表示，代表將所有 bit 右移 n 位

更多位元運算

- 另外常用的位元運算有左移和右移
- 左移：「 \ll 」表示，代表將所有 bit 左移 n 位
- 右移：「 \gg 」表示，代表將所有 bit 右移 n 位
- 例如： $17_{(10)} \ll 1 = 10001_{(2)} \ll 1 = 100010_{(2)} = 34_{(10)}$
- 你知道嗎？實際上左移就是乘上 2^n （右移則相反）

字元轉換

- 我們都知道電腦是儲存 0 跟 1，並不能儲存字元
- 那要怎麼儲存字元呢？

- 我們都知道電腦是儲存 0 跟 1，並不能儲存字元
- 那要怎麼儲存字元呢？
- 只要把所有字母編碼就可以啦！
- 實際上我們用的字元都有一個編碼，稱為 Ascii 編碼

Ascii

- $[0 - 9] = 48 \sim 57$
- $[A - Z] = 65 \sim 90$
- $[a - z] = 97 \sim 122$
- 利用編碼的連續性，就有很多功能可以應用

例題

數字總和

題目連結

你有一個數字 n ，請你求出所有位數的總和，保證 n 的位數 $\leq 10^5$

例題

數字總和

題目連結

你有一個數字 n ，請你求出所有位數的總和，保證 n 的位數 $\leq 10^5$

- 字串很大，看起來沒辦法用 `int` 儲存，所以只能用 `string` 儲存
- 我們可以用 `for` 得到每個字元，並且**減去**'0'，就可以轉換成數字
- $'0'(48) - '0'(48) = 0$ ， $'1'(49) - '0'(48) = 1$
- $'5'(53) - '0'(48) = 5$ ， $'9'(57) - '0'(48) = 9$

例題

凱撒密碼

題目連結

給你一個字串 s ，把每個字母向後移 3 位，例如 $A \rightarrow D$ ， $Z \rightarrow C$

例題

凱撒密碼

題目連結

給你一個字串 s ，把每個字母向後移 3 位，例如 $A \rightarrow D$ ， $Z \rightarrow C$

- 我們可以將每個字母的值都加上 3
- 如果該字母超過 'Z' 的話就減去 26

陣列運用

陣列運用

- 陣列的用途很廣，巧妙的使用陣列可以讓時間複雜度更好
- 用陣列也可以實做很多好用的資料結構，並提供額外的性質

- vector 可以說是更好的陣列，**可以動態的分配空間**
- 陣列做的事 vector 做的到，陣列不能做的事 vector 也可以做的到
- 缺點：可能比陣列慢一點點、大量宣告可能會吃到 MLE

vector 的宣告和使用

`vector<type> name(size, value);`

- type 是放 vector 裡面東西的型別
- name 則是 vector 的名稱（接下來的介紹都用 vec 表示）
- （可選）size 可以放初始的陣列大小
- （可選）value 可以放初始值

`name.method(value1, value2...)`

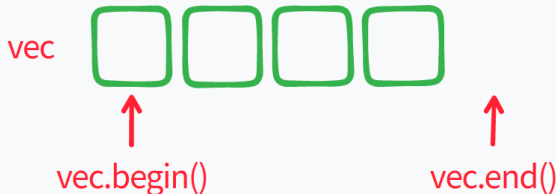
- 以上為 vector 如何使用的模板

vector 的資料位置

- `.begin()` 代表 vector 裡第一個資料位置
- `.end()` 代表 vector 裡最後一個資料的**後一位**位置
- `vec[i]` 代表 vector 裡的第 i 個資料

vector 的資料位置

- `.begin()` 代表 vector 裡第一個資料位置
- `.end()` 代表 vector 裡最後一個資料的後一位位置
- `vec[i]` 代表 vector 裡的第 i 個資料



- 要對整個 vector 操作丟 `.begin()` 跟 `.end()` 就好了

vector 的使用

- 以後介紹的函式，除非有特別標注，否則都為以下的方法
- 開始都是包含，結束則不包含
- 書寫的形式為 $[L, R)$



vector 的輸入方式

- 分配好空間，並且用 `cin >> [i]`
- 不分配空間，用 `vec.push_back(value)` 將元素放入最後一位
- 要用哪一個？如果後續沒有要操作就用第一個，否則用另一個

vector 的各種常用操作

- $O(1)$, `.size()` , 取得 vector 的大小
- $O(1)$, `.empty()` , 回傳 vector 是否為空
- $O(|size - n|)$, `.resize(n, [val])`
重設 vector 的大小，並設為 val (可選)
- $O(1)$, `.pop_back()` , 清除 vector 最後面的元素
- $O(1)$, `.clear()` , 清空 vector
- $O(1)$, `.front()` , 回傳最前面的元素
- $O(1)$, `.back()` , 回傳最後面的元素

vector 的遍歷

```
for (auto x : v){  
    cout << x << " ";  
}
```

-
- 其中 x 就會是 vector 裡的所有元素
- 想要改值？回想前一節講的吧！

例題

圖書館

題目連結

給你 n 本書，每本書都有編號 a_i 和借閱日期 b_i

如果借閱日期超過 100 天就代表逾期，每超過 1 天就要罰 5 元罰金

請求出所有逾期的書的編號，以及總罰金

例題

圖書館

題目連結

給你 n 本書，每本書都有編號 a_i 和借閱日期 b_i

如果借閱日期超過 100 天就代表逾期，每超過 1 天就要罰 5 元罰金

請求出所有逾期的書的編號，以及總罰金

- 我們可以把所有逾期的書都裝進 vector 裡，是不是簡單又方便呢？

二維 vector 的宣告和使用

`vector<vector<type>> name(size1, vector<int>(size2, value))`

- 以上如同 `int[][]`
- 不過實在是太長了，通常我還是會用 `int[][]`

`vector<type> name[size]`

- 這也是二維陣列，不過每一項都可以是不同大小
- 在圖論這個單元我們會很常用到

該學哪個？一如往常的，兩個都要學

二維 vector 的比較

`vector<int>[]`

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

`vector<vector<int>>`

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

例題

vector 練習

題目連結

給你 n 個人，並且有 k 組朋友關係，由小到大輸出每個人的朋友有哪些

每組朋友關係有兩個整數 a 、 b ，代表 a 和 b **互相為**朋友
(記得 IO 加速)

例題

vector 練習

題目連結

給你 n 個人，並且有 k 組朋友關係，由小到大輸出每個人的朋友有哪些

每組朋友關係有兩個整數 a 、 b ，代表 a 和 b **互相為**朋友
(記得 IO 加速)

- 這題其實就是圖的儲存！我們留到圖論在說

常用 STL 函式

STL 是什麼？

- STL 全名為 Standard Template Library
- 是由 C++ 提供的一個標準模板庫
- 我們比較常使用到 STL 中「函式」、「容器」、「迭代器」等部份
- STL 容器等到**資料結構**的課再介紹

常用 STL 函式

- fill
- reverse
- swap
- min / max
- min_element / max_element
- sort

- 時間複雜度： $O(n)$
- `fill(L, R, val)`
- 把 $[L, R)$ 之間的元素都改成 `val`
- 主要用來對容器做初始化
- 要注意時間複雜度，不要使用太多次

reverse

- 時間複雜度： $O(n)$
- `reverse(L, R)`
- 把 $[L, R)$ 之間的元素反轉

swap

- 時間複雜度： $O(n)$
- `swap(A, B)`
- 把 A 跟 B 裡面的內容對調

- 時間複雜度： $O(1)$
- $\min(\textcolor{red}{A}, \textcolor{red}{B})$
- 回傳 A 跟 B 哪個比較大 / 小

min / max (多個元素)

- 最大值跟最小值都有結合律
- 寫法一： $\min(A, \min(B, C))$
- 寫法二： $\min(\{A, B, C\})$ (只支援 C14 以上)

min_elementm / max_element

- 時間複雜度： $O(n)$
- min_elementm(L, R, val)
- 回傳 [L, R) 區間的最大值 / 最小值的**位置**
- 如果想要取得實際的值要在前面加上「*」，如下
- *min_element(v.begin(), v.end())

- 時間複雜度： $O(n \log (n))$
- `sort(L, R, val)`
- 把 $[L, R)$ 之間元素由小到大排序
- 對區間做排序，這個函式非常常用到！
- 通常排序後的東西會有特殊的性質，這個我們以後再講

- 上面提到 sort 是從小到大排，不過我們有沒有辦法從大到小呢？
- 實際上，只要告訴程式一個定義好的比較方式就可以了！
- 例如：如果 a 元素比較大，就放在前面，否則放在後面

sort 自訂排序

- 實作方式如下

```
// compare function
bool cmp(int a, int b){
    return a>b;
}

void solve(){
    v={4, 8, 7, 6, 3};
    sort(v.begin(), v.end(), cmp);
    debug(v); // output: 8 7 6 4 3
```


包裝元素

為什麼要包裝元素

- 讓我們假想一個問題，教室裡有很多學生，要分別紀錄他們的「名稱」、「座號」跟「各科成績」，該怎麼做？

為什麼要包裝元素

- 讓我們假想一個問題，教室裡有很多學生，要分別紀錄他們的「名稱」、「座號」跟「各科成績」，該怎麼做？
- 聽起來很簡單，用三個陣列存資訊就好

為什麼要包裝元素

- 讓我們假想一個問題，教室裡有很多學生，要分別紀錄他們的「名稱」、「座號」跟「各科成績」，該怎麼做？
- 聽起來很簡單，用三個陣列存資訊就好
- 如果我需要變動一位學生的順序呢？三個陣列都要修改，好麻煩

為什麼要包裝元素

- 讓我們假想一個問題，教室裡有很多學生，要分別紀錄他們的「名稱」、「座號」跟「各科成績」，該怎麼做？
- 聽起來很簡單，用三個陣列存資訊就好
- 如果我需要變動一位學生的順序呢？三個陣列都要修改，好麻煩
- 把他們打包吧！放在一起就很方便了

struct

- struct 是一個可以打包元素並創建一個自訂的型別
- 讓我們看看下面的語法範例：

```
struct student{ // 這個型別叫做 student  
  
    string name; // 名稱  
    int id;      // 座號  
    int score[5]; // 各科成績  
  
} students[50];  
// 開一個學生的陣列，每一格都可以儲存學生的資訊
```

struct

- struct 是一個可以打包元素並創建一個自訂的型別
- 讓我們看看下面的語法範例：

```
struct student{ // 這個型別叫做 student  
  
    string name; // 名稱  
    int id;      // 座號  
    int score[5]; // 各科成績  
  
} students[50];  
// 開一個學生的陣列，每一格都可以儲存學生的資訊
```

- 我們宣告了一個型別叫做「student」，並且可以紀錄他的名稱，座號跟各科成績
- 此外還宣告了一個陣列儲存多個學生的資訊。

- 好耶，我們現在有一個自己的型別了，不過有那麼多資料，要怎麼存取呢？
- 可以使用「`.`」存取資料

- 好耶，我們現在有一個自己的型別了，不過有那麼多資料，要怎麼存取呢？
- 可以使用「`.`」存取資料
- 例如：「`students[26]`」代表「陣列索引值為 26 的同學的所有資訊」
- 「`students[17].id`」代表「陣列索引值為 17 的同學的座號」

例題

圖書館小志工

題目連結

目前書架上有 n 本書，分別叫做 $a_1, a_2 \cdots a_n$

每本書紀錄著「書名」、「分類」、「編號」

.

現在給你 m 個操作，每次操作會把 a_x 跟 a_y 交換

請求出書架最後的狀態

區間問題

區間問題概述

- 在競程裡面，我們有相當多的問題是有關於「區間」的
- 通常會有兩個功能「修改」跟「查詢」
- 這次我們會介紹兩個非常常見且基礎的方法

例題

接下來我們用幾個問題來暖身

- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3$

例題

接下來我們用幾個問題來暖身

- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5$

例題

接下來我們用幾個問題來暖身

- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5+3$

例題

接下來我們用幾個問題來暖身

- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5+3$
- $4+1+3+1+3+3+4+3+1+2+1+2+1$

例題

接下來我們用幾個問題來暖身

- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5+3$

- $4+1+3+1+3+3+4+3+1+2+1+2+1$
- $4+1+3+1+3+3+4+3+1+2+1+2+1$

例題

接下來我們用幾個問題來暖身

- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5$
- $1+3+2+1+3+2+1+3+3+2+1+2+3+5+3$

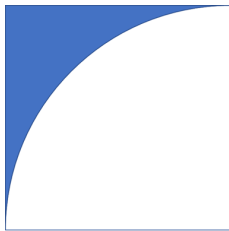
- $4+1+3+1+3+3+4+3+1+2+1+2+1$
- $4+1+3+1+3+3+4+3+1+2+1+2+1$

- 如果一個一個計算是不是很慢呢？讓我們透過一些技巧加速

前綴和概念

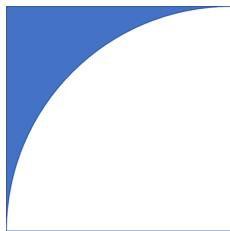
- 前綴和可以處理**沒有修改**，**區間查詢**的問題
- 其中每個查詢都可以在 $O(1)$ 完成
- 非常非常非常重要的技巧，很常出現

前綴和概念



-
- 上圖的藍色區域怎麼算呢？

前綴和概念



- 上圖的藍色區域怎麼算呢？
- 只要算出正方形的面積，並且減去扇形，即可求解
- 讓我們看看這個概念放到陣列上會變成怎樣

前綴和概念



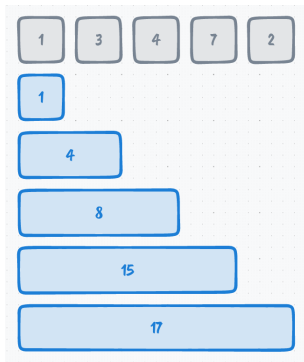
- 我們可以算出所有數字的總和，然後扣除灰色的部份

前綴和概念



- 我們可以算出所有數字的總和，然後扣除灰色的部份
- 嗯？這樣應該算的數字更多，因此更慢不是嗎？
- 實際上，我們可以儲存這些數字，要用時再扣除，這樣就很快啦！

前綴和概念



- 試著把上面的藍色數值兩兩相減看看，然後觀察他們的性質吧
- 如果我想要獲得一個區間的和，該怎麼求得呢？
- 所有藍色的值需要一個一個計算嗎？還是有更快的方法？

前綴和概念

- 稍微整理一下，要找到一個區間 $[L, R]$ 的和
- 則將 $[0, R] - [0, L-1]$ 即可
- 而 $[0, n]$ 的值可以從 $[0, n-1] + a_n$ 得到

前綴和實做

```
// declare
int n, tmp;
vector<int> v(1); // 預先開一個空間，防止 [0, L-1] 變成負數
vector<int> pre(1); // 預先開一個空間，防止 [0, n-1] 變成負數

// input
cin >> n;
for (int i=1 ; i<=n ; i++){ // start from 1
    cin >> tmp;
    v.push_back(tmp);

    // get prefix sum
    pre.push_back(pre[i-1]+v[i]);
}
```

- 上面這個過程叫做預處理，可以看出時間複雜度為 $O(n)$

- 我們定義 pre_i 為 $\sum_{j=0}^i a_j$

例題

前綴和陣列實作

題目連結

如題，試著實作出我們剛剛介紹的前綴和陣列

前綴和實做

```
// queries
cin >> q;
for (int i=0 ; i<q ; i++){
    // 尋找 [l, r] 的區間和
    cin >> l >> r;
    cout << pre[r]-pre[l-1] << endl;
}
```

- 每次查詢都直接拿陣列裡面的值，時間複雜度為 $O(q)$

例題

一維區間和問題

題目連結

給你一個有 n 個正整數的陣列 arr

給予 q 個查詢，每個查詢都有兩個正整數 L_i, R_i

對於每個查詢求出 $[L_i, R_i]$ 的總和

保證 $1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5$

例題

二維區間和問題

題目連結

給你一個 $n \times n$ 大小的森林，森林的每一個座標都是空地或是樹
給予 q 個查詢，每個查詢包含 y_{1_i} 、 x_{1_i} 、 y_{2_i} 、 x_{2_i} 對於每個查詢輸出該範圍有多少顆樹

- 請你想想看，如何運用同樣的概念做二維的區間查詢呢？

例題

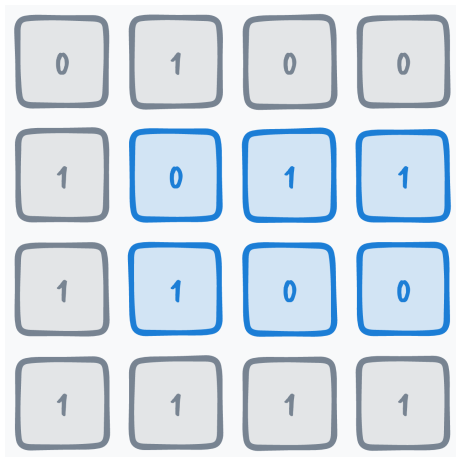
二維區間和問題

題目連結

給你一個 $n \times n$ 大小的森林，森林的每一個座標都是空地或是樹
給予 q 個查詢，每個查詢包含 y_{1_i} 、 x_{1_i} 、 y_{2_i} 、 x_{2_i} 對於每個查詢輸出該範圍有多少顆樹

- 請你想想看，如何運用同樣的概念做二維的區間查詢呢？
- 我們一樣儲存 $(0, 0)$ 到 (x, y) 的區間和
- 並用相同的**扣除不需要的範圍**的概念

例題



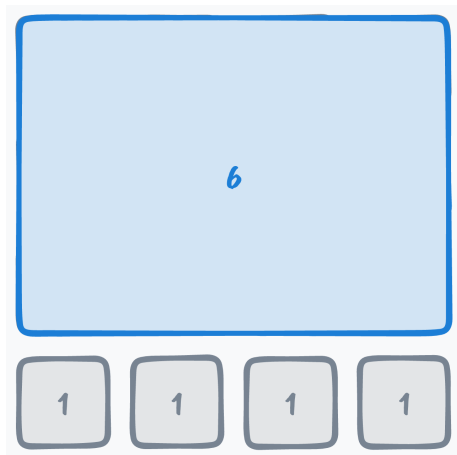
A 4x4 grid of binary values (0s and 1s) is shown. The grid is composed of 16 cells. The values are as follows:

0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

The 3x3 subgrid in the center (rows 2-4, columns 2-4) is highlighted with a blue border. This subgrid contains the following values:

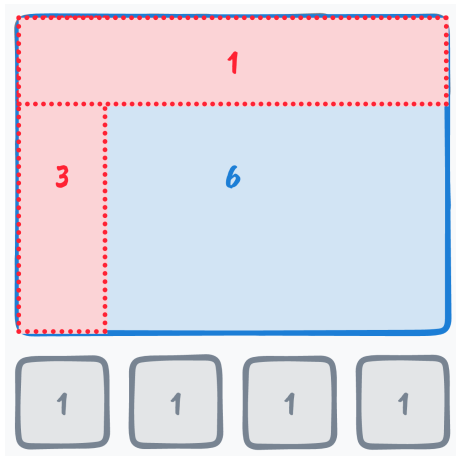
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例題



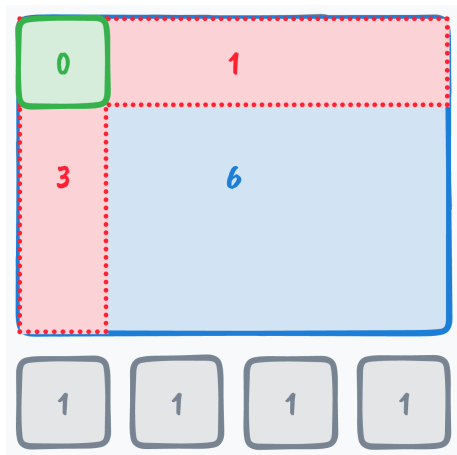
- 先把最大的問題加起來

例題



- 將不需要的範圍刪除

例題



- 把多刪除的範圍加回去

例題

區間 xor 問題

題目連結

給你一個有 n 個正整數的陣列 arr

給予 q 個查詢，每個查詢都有兩個正整數 L_i, R_i

對於每個查詢求出 $[L_i, R_i]$ 所有值做 xor 後的值

保證 $1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5$

- 仍然是使用相同的概念，不過 xor 的值要怎麼消除呢？
- tip: $A \oplus A = 0$

例題

區間 xor 問題

題目連結

給你一個有 n 個正整數的陣列 arr

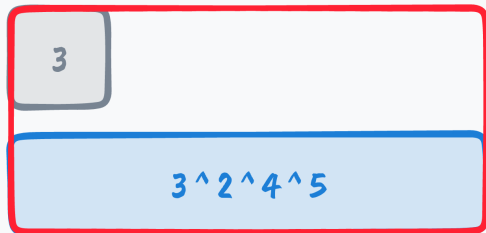
給予 q 個查詢，每個查詢都有兩個正整數 L_i, R_i

對於每個查詢求出 $[L_i, R_i]$ 所有值做 xor 後的值

保證 $1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5$

- 仍然是使用相同的概念，不過 xor 的值要怎麼消除呢？
- tip: $A \oplus A = 0$
- 我們可以做出類似前綴和陣列的東西，不過加的功能變成 xor
- 在查詢時，也使用 xor 消除

例題

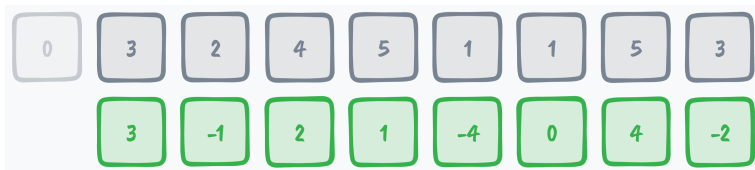


$$(3) ^ (3^2^4^5) = (3^3) ^ (2^4^5) = 2^4^5$$

差分概念

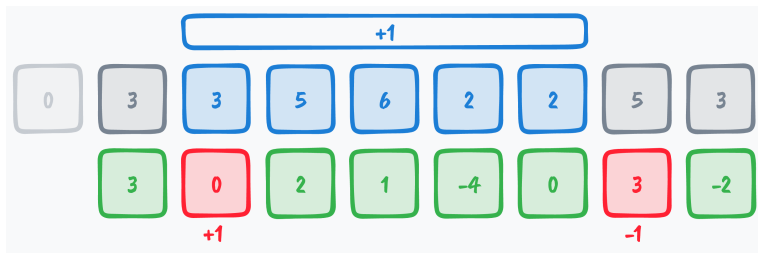
- 還記得我們說過前綴和的使用時機嗎？
- 讓我們把問題倒過來，有沒有辦法做到**區間修改**，**沒有查詢**
- 比起前綴和，差分的概念較為抽象

差分概念



- 在差分裡，我們會儲存跟前面數字的差，以方便修改

差分概念



- 可以透過圖示發現，修改區間的值實際上只會動到兩格
- 因為區間內的值的變化量一樣，所以差一樣

$$(a - b = (a + x) - (b + x))$$

差分概念

- 稍微整理一下，我們會有初始的差分序列
- 每次修改就是對 L 加上 $value$ ，而 $R+1$ 加上 $-value$
- 如果需要尋找一個點的值，則要從左到又加上所有變化量

例題

差分陣列實作

題目連結

如題，試著實做出我們剛剛介紹的前綴和陣列

例題

疊鬆餅

題目連結

你有 n 個鬆餅需要從底層疊到頂層，每個鬆餅都有一個溼潤度 a_i ，代表將該鬆餅放置頂層後，會讓底下 a_i 個（包含自己）鬆餅都沾上奶油請你輸出疊完這 n 個鬆餅後哪些鬆餅沾上了奶油

保證 $1 \leq n \leq 2 \times 10^5$ 且 $0 \leq a_i \leq n$