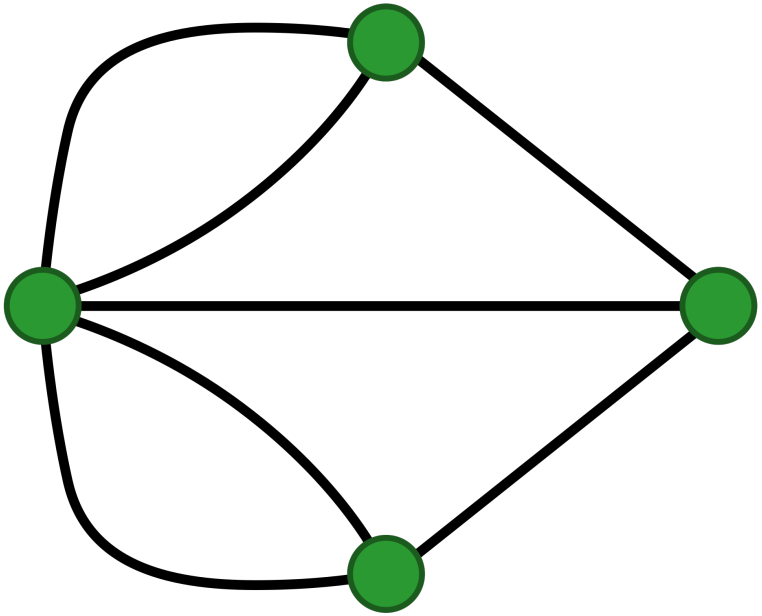
圖論

temmie

1. 前言、名詞解釋
2. 圖的儲存
3. DFS
4. BFS
5. 回朔解

前言、名詞解釋

七橋問題



- 有辦法經過所有的橋嗎？
- 上面的「圖」是怎麼構成的呢？

名詞解釋

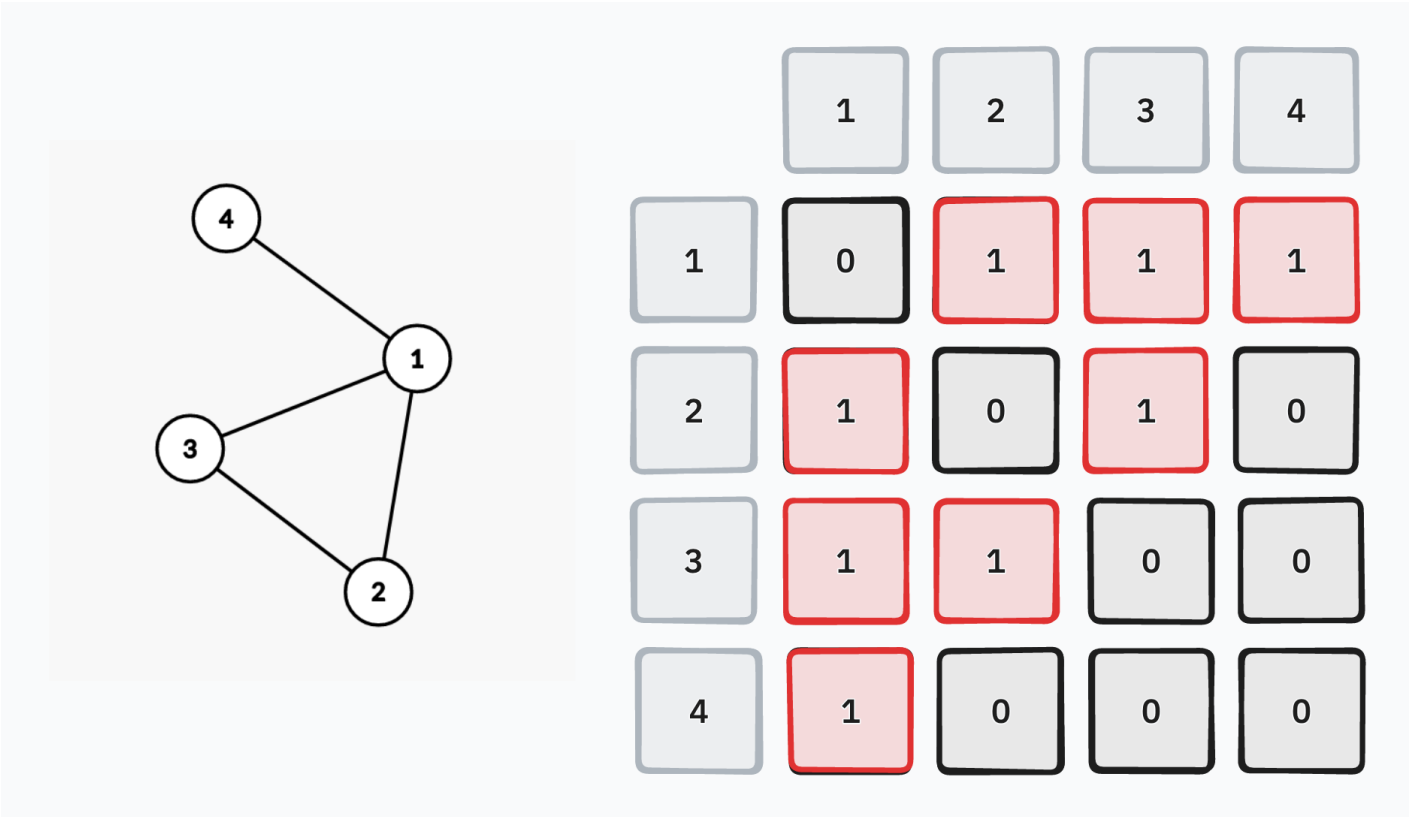
- 節點（Vertex，V）
- 邊（Edge，E）：邊會將兩個節點相連
- 圖（Graph，G）：由很多邊和節點組成
- 有向圖（Directed Graph）：邊只能讓 u 節點走向 v 節點
- 無向圖（Undirected Graph）：邊可以讓 u 節點和 v 節點互通

名詞解釋

- 入度（In-degree，$deg^-(u)$）：在有向圖中指向該節點的數量
- 出度（Out-degree，$deg^+(u)$）：在有向圖中節點向外走的數量
- 度數（Degree，$deg(u)$）：入度 $+$ 出度
- 路徑（Path）：從 u 節點走向 v 節點所經歷的邊
- 環（Cycle）：從 u 節點走向 u 節點所經歷的邊

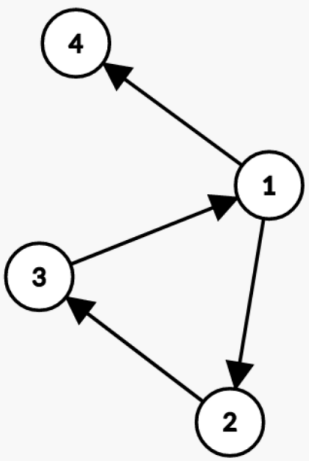
圖的儲存

相鄰矩陣



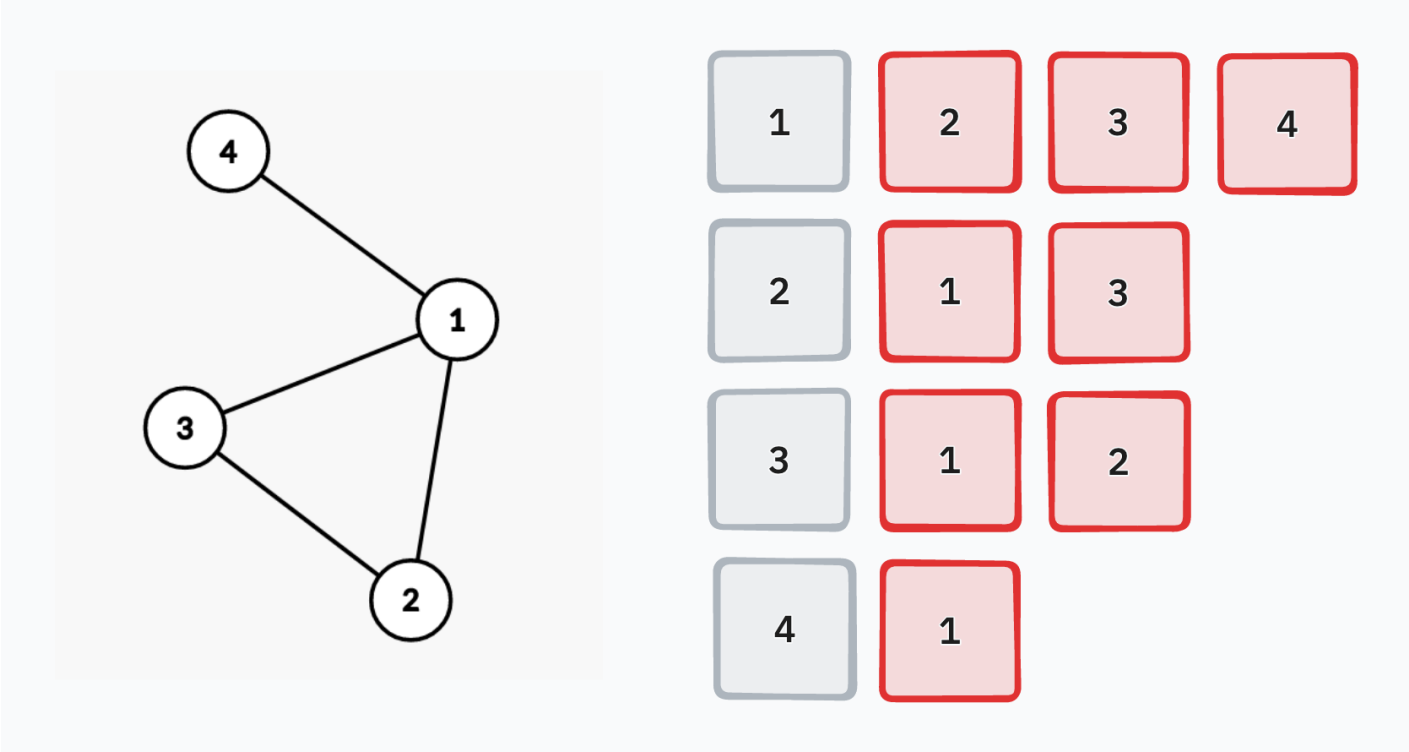
- 尋找 u 節點的所有相鄰節點：$O(V)$
- 遍歷整張圖：$O(V^2)$
- 空間複雜度：$O(V^2)$

相鄰矩陣



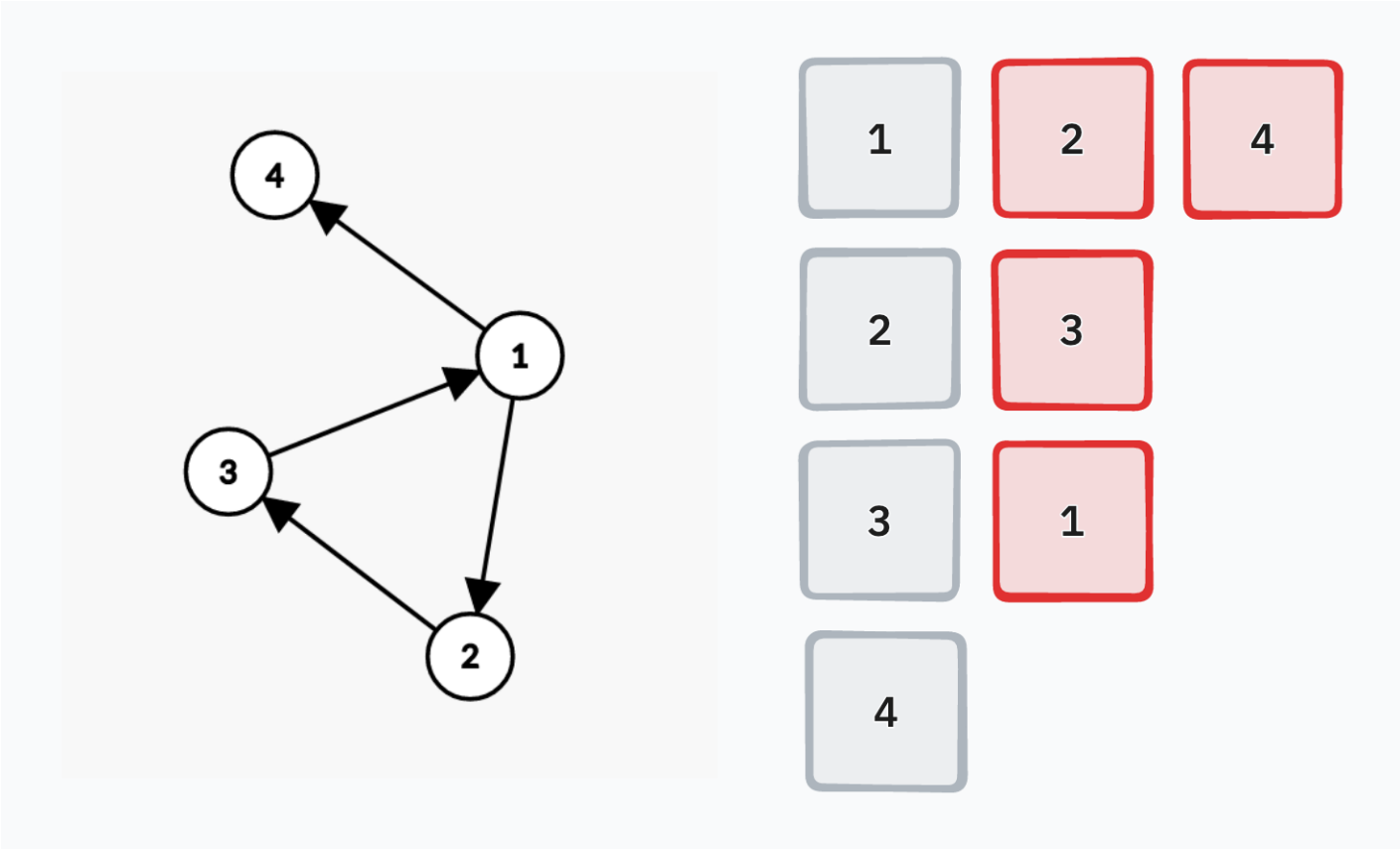
	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	0
3	1	1	0	0
4	0	0	0	0

相臨串列



- 尋找 u 節點的所有相鄰節點：$O(deg^+)$
- 遍歷整張圖：$O(E)$
- 空間複雜度：$O(E)$

相臨串列



實作：相鄰矩陣

```cpp
int n, m; // 有 n 個節點，m 條邊
int u, v;
int G[500][500]; // 相鄰矩陣

for (int i=0 ; i<m ; i++){
    cin >> u >> v;
    G[u][v]=1;
    // G[v][u]=1; // 如果是無向圖的話就加上此行
}

```

實作：相鄰串列

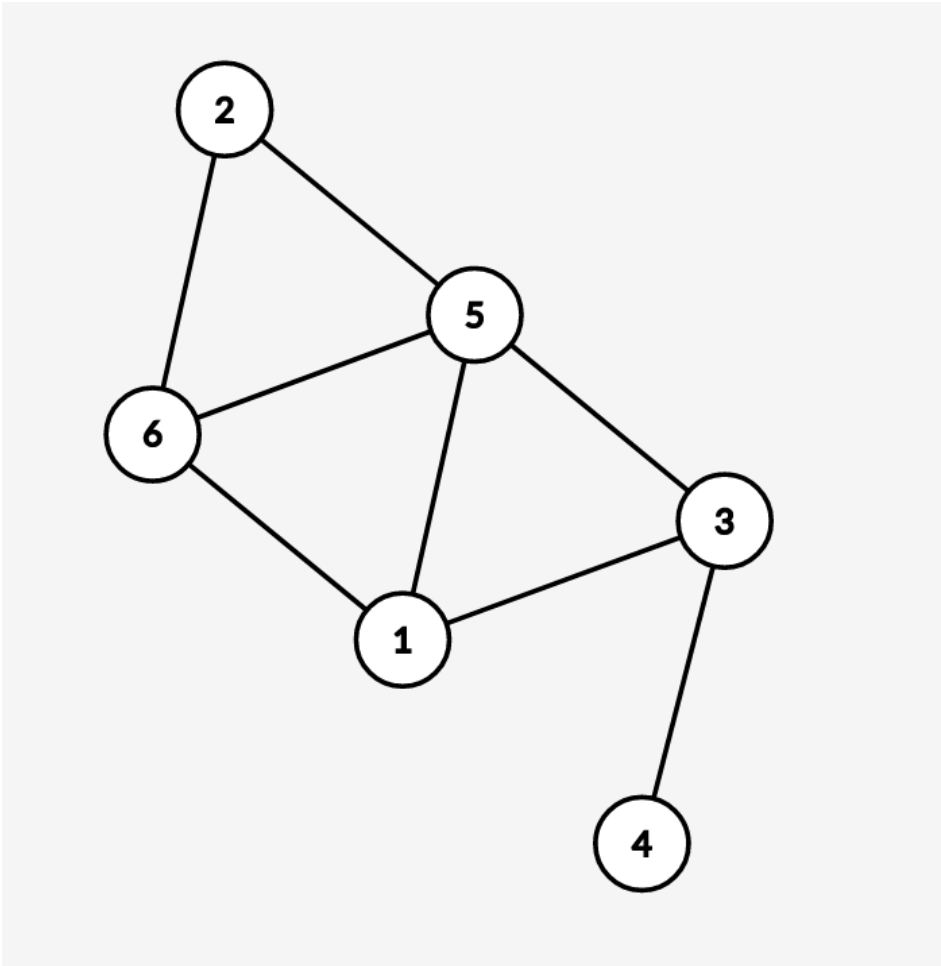
```cpp
int n, m; // 有 n 個節點，m 條邊
int u, v;
vector<vector<int>> G(500); // 相鄰串列

for (int i=0 ; i<m ; i++){
    cin >> u >> v;
    G[u].push_back(v);
    // G[v].push_back(u); // 如果是無向圖的話就加上此行
}
```

DFS

DFS

- 深度優先搜尋（Depth-First-Search，DFS），一種遍歷圖的方法
- 顧名思義：我們會將**深度作為最先搜尋的對象**
- 步驟如下
  1. 選擇起點當作**目前的節點**
  2. 紀錄目前的節點走過
  3. 前往其中一個沒走過的相鄰節點當作目前的節點
  4. 如果全部的相鄰節點都走完就將目前的節點設為父節點
  5. 如果所有節點都走過就結束

DFS

- 讓我們以這張圖做個例子
- 

實作：DFS

```cpp
vector<vector<int>> G(500); // 相鄰串列
bitset<500> vis; // 紀錄是否走過第 i 點

void dfs(int now){
    vis[now]=1; // 2. 紀錄目前的節點走過
    for (auto x : G[now]){
        if (vis[x]==0){ // 3. 前往沒走過的相鄰節點
            dfs(x);
        }
    }
    return; // 4. 全部的相鄰節點都走完就將目前節點設為父節點
}

dfs(1); // 1. 選擇起點當作目前節點
```

例題

Building Roads

題目連結

有 n 個城市 m 條道路，請問需要新增幾條道路才能讓所有城市連通。

請輸出數量以及新增的道路。

例題

Building Roads

題目連結

有 n 個城市 m 條道路，請問需要新增幾條道路才能讓所有城市連通。

請輸出數量以及新增的道路。

- Tip1：已經有連通的城市還需要新增道路嗎？

例題

Building Roads

題目連結

有 n 個城市 m 條道路，請問需要新增幾條道路才能讓所有城市連通。

請輸出數量以及新增的道路。

- Tip1：已經有連通的城市還需要新增道路嗎？
- Tip2：兩個不連通的程式要新增幾條道路才能連通？

例題

```
vector<int> ans;

for (int i=1 ; i<=n ; i++){
    // 一個城市還沒被遍歷，就記錄他並且走過所有跟他連通的城市
    if (vis[i]==0){
        ans.push_back(i);
        dfs(i);
    }
}

cout << ans.size()-1 << "\n";
for (int i=0 ; i<ans.size()-1 ; i++){
    cout << ans[i] << " " << ans[i+1] << "\n";
}
```

例題

Counting Rooms

題目連結

給你一個大小為 $n \times m$ 的房間，@代表為地板，#代表為牆壁，在一個地板上可以上下左右走向另一個地板，並視為在同一個房間。

請問房間的數量？

例題

Counting Rooms

題目連結

給你一個大小為 $n \times m$ 的房間，@代表為地板，#代表為牆壁，在一個地板上可以上下左右走向另一個地板，並視為在同一個房間。

請問房間的數量？

- Tip1：請先想想看，這要怎麼轉換成一張圖呢？

例題

Counting Rooms

題目連結

給你一個大小為 $n \times m$ 的房間，@代表為地板，#代表為牆壁，在一個地板上可以上下左右走向另一個地板，並視為在同一個房間。

請問房間的數量？

- Tip1：請先想想看，這要怎麼轉換成一張圖呢？
- Tip2：這是一個二維的平面，請問該如何表示目前的節點？

例題

```
1  bool vis[1005][1005];
2
3  bool out(int x, int y){ // 檢查下一個座標是否出界
4      return x<0 || x>n || y<0 || y>m;
5  }
6
7  void dfs(int x, int y){
8      vis[x][y]=1;
9      if (out(x+1, y)==0 && v[x+1][y]=='.') dfs(x+1, y);
10     if (out(x-1, y)==0 && v[x-1][y]=='.') dfs(x-1, y);
11     if (out(x, y+1)==0 && v[x][y+1]=='.') dfs(x, y+1);
12     if (out(x, y-1)==0 && v[x][y-1]=='.') dfs(x, y-1);
13     return;
14 }
```

例題

```
1  bool vis[1005][1005];
2  const int mx[4]={1, 0, -1, 0};
3  const int my[4]={0, 1, 0, -1};
4
5  bool out(int x, int y){ // 檢查下一個座標是否出界
6      return x<0 || x>n || y<0 || y>m;
7  }
8
9  void dfs(int x, int y){
10     vis[x][y]=1;
11     for (int i=0 ; i<4 ; i++){
12         if (out(x+mx[i], y+my[i])==0 &&
13         v[x+mx[i]][y+my[i]]=='.') dfs(x+mx[i], y+my[i]);
14     }
15     return;
16 }
```

BFS

BFS

- 深度優先搜尋（Breadth-First-Search，BFS），一種遍歷圖的方法
- 同樣地，會以廣度為最優先的順序。
- 步驟如下
  1. 選擇起點當作目前的節點，**紀錄走過**後將處理順序設為 1
  2. 紀錄目前的節點走過
  3. 將所有相鄰節點依序紀錄處理順序後，**並直接紀錄走過**
  4. 尋找下一個處理順序的節點
  5. 如果所有節點都走過就結束，否則重複第二步驟

實作：BFS

```
queue<int> qq; // 記錄現在的順序

qq.push(1); // 將第一個點先丟進 queue 裡面
vis[1];
while (qq.size()){ // 如果還有待處理的點就繼續
    int now=qq.front(); // 取得目前要處理的點
    qq.pop();

    for (auto x : G[now]){
        if (vis[x]==0){
            vis[x]=1; // 請務必先紀錄走過
            qq.push(x);
        }
    }
}
```

比較

- DFS 跟 BFS 都可以遍歷整張圖
- DFS 相對更好實作，也比較方便一些動態規劃的題目
- BFS 比較難實作一些，不過擁有了**最短路**的性質

回朔解

回朔解

- 在一些問題中，題目將會要求構造出一種解法。
- 這個問題我們可以透過**逆推**達成。
- 也就是紀錄**這個結果是由誰推過來的**

例題

Message Route

題目連結

給你 n 台電腦以及 m 條網路，請判斷第 1 和 n 台電腦是否有連接。

是的話請輸出兩台電腦之間的最短路徑，並構造出一組解，否則輸出 `IMPOSSIBLE`。

例題

Message Route

題目連結

給你 n 台電腦以及 m 條網路，請判斷第 1 和 n 台電腦是否有連接。

是的話請輸出兩台電腦之間的最短路徑，並構造出一組解，否則輸出 `IMPOSSIBLE`。

- Tip1：怎麼知道是否有辦法從起點走到終點？

例題

Message Route

題目連結

給你 n 台電腦以及 m 條網路，請判斷第 1 和 n 台電腦是否有連接。

是的話請輸出兩台電腦之間的最短路徑，並構造出一組解，否則輸出 `IMPOSSIBLE`。

- Tip1：怎麼知道是否有辦法從起點走到終點？
- Tip2：如果是最短路徑，那們要用 DFS 還是 BFS ？

例題

Message Route

題目連結

給你 n 台電腦以及 m 條網路，請判斷第 1 和 n 台電腦是否有連接。

是的話請輸出兩台電腦之間的最短路徑，並構造出一組解，否則輸出 `IMPOSSIBLE`。

- Tip1：怎麼知道是否有辦法從起點走到終點？
- Tip2：如果是最短路徑，那們要用 DFS 還是 BFS ？
- Tip3：如果知道 A 是從 B 轉移的話，要怎麼紀錄資訊進行反推？

例題

```cpp
int parent[100000+5]; // 紀錄第 i 點是由誰轉移而來

int now=n;
vector<int> ans;

while (now!=1){
    ans.push_back(now);
    now=parent[now]; // 將目前的點設成他的父節點
}
ans.push_back(1);
reverse(ans.begin(), ans.end());
// 答案是 "逆推" 獲得，因此最後要反轉
```

例題

CLabyrinth

題目連結

給你一個大小為 $n \times m$ 的房間，@代表為地板，#代表為牆壁，在一個地板上可以上下左右走向另一個地板，並且給予一個點 **A** 代表起點，**B** 代表終點。

請判斷是否有辦法從起點走向終點，如果可以，則輸出 **"Yes"**，並且輸出**最短路徑長度**以及用 **LRUD** 代表**左右上下**構造一任意一組解。