Ecuaciones lineales diofantinas aplicadas a programas lineales enteros

Iñaki Sebastián Liendo Infante

3 de julio de 2025

Índice general

Capítulo 1

Aspectos Teóricos

En este capítulo cimentamos las bases teóricas necesarias para resolver instancias particulares de programas lineales enteros. En primer lugar, la sección de Prerrequisitos recopila resultados básicos de teoría de números y de programación lineal para refrescar la memoria del lector. En segundo lugar, la sección de Fundamentos comienza con definiciones y enunciados obtenidos de [BH09], los cuales utilizaremos para obtener resultados que, en pleno conocimiento del autor, son originales. El problema fundamental que permitirá construir incrementalmente nuestro algoritmo es

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n} \quad & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}, && \text{(1.1a)} \\ \text{s.a.} \quad & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} \leq u, && \text{(1.1b)} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Por ello mismo, es razonable suponer que $\boldsymbol{p}_i \neq 0$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$. En la sección de Fundamentos analizaremos a profundidad este problema, cuyo punto de culminación será el Teorema 1.14. Veremos que es recomendable separar en dos partes el análisis de este problema: el caso $p_i < 0$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$; y el caso $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$. Los siguientes dos capítulos examinarán respectivamente estos casos. Por el momento, cabe destacar que el segundo caso será de mayor interés y tendrá mayor aplicabilidad en problemas reales, pues es una instancia particular del Problema de la Mochila. No obstante, el caso $\boldsymbol{p}_i < 0$ también será de utilidad para exhibir casos particulares en donde el algoritmo de Ramificación y Acotamiento obtiene un rendimiento deficiente.

1.1. Prerrequisitos

En los siguientes capítulos usaremos extensivamente resultados básicos de teoría de números y de programación lineal, por lo que es provechoso recopilarlos en esta primera sección. En particular, destaca la importancia de las ecuaciones lineales diofantinas para la construcción de nuestro algoritmo. En esta sección el autor consideró pertinente no incluir demostraciones, pues los enunciados son mostrados en cualquier clase de álgebra superior, programación lineal, o investigación de operaciones, por ejemplo. La referencia principal para la parte de teoría de números es [Lav14], mientras que la de programación lineal es [Sch98].

1.1.1. Teoría de Números

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

En primer lugar, introducimos el símbolo de relación "|" para indicar divisibilidad. Dados dos enteros a, b, decimos que b divide a a (y escribimos $b \mid a$) si y solo si existe un entero k tal que $a = k \cdot b$. Así también, denotamos el conjunto de divisores de a como

$$D(a) \coloneqq \{b \in \mathbb{Z} : b \mid a\}.$$

Si a es distinto de cero, encontramos que $D(a)$ es finito, puesto que si $b \mid a$, entonces $|b| \leq |a|$, lo cual implica que $|D(a)| \leq 2|a|$. En caso de que a sea nulo, obtenemos $D(a) = \mathbb{Z}$. Observemos también que $\{-1, 1\} \subseteq D(a)$ para todo entero a.

Definición 1.1. *Sean $a_1, \ldots, a_n$ enteros no todos iguales a cero, entonces definimos su máximo común divisor d como el elemento maximal del conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} D(a_i)$, y escribimos $d = \operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Si $d = 1$, entonces decimos que $a_1, \ldots, a_n$ son coprimos.*

Puesto que $a_i \neq 0$ para alguna i en la definición anterior, encontramos que el conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} D(a_i)$ es finito y, como también es no vacío, en efecto existe un elemento maximal. Es decir, el máximo común divisor d siempre está bien definido.

Observación. No porque una colección de enteros sea coprima ($\operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\} = 1$) se sigue que estos enteros sean coprimos a pares ($\operatorname{mcd}\{a_i, a_j\} = 1$ para todo i, j). Por ejemplo, los enteros 1, 3 y 3 son coprimos pero evidentemente 3 y 3 no lo son.

Definición 1.2. *Decimos que $c \in \mathbb{Z}$ es una combinación lineal entera de un conjunto de enteros $a_1, \ldots, a_n$ si existen enteros $x_1, \ldots, x_n$ tales que $c = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.*

El siguiente teorema, a pesar de su simpleza, es central para los resultados obtenidos en esta tesis.

Teorema 1.3. *Sea d un entero y sean $a_1, \ldots, a_n$ una colección de enteros no todos iguales a cero. Entonces $d = \operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\}$ si y solo si d es la mínima combinación lineal entera positiva de $a_1, \ldots, a_n$.*

Corolario 1.4. *Si $d = \operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces $\operatorname{mcd}\left\{\frac{a_1}{d}, \ldots, \frac{a_n}{d}\right\} = 1$.*

Además del máximo común divisor, requeriremos al mínimo común múltiplo, empero en menor medida. Sea a un entero y denotamos el conjunto de sus múltiplos como

$$M(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{Z} : a \mid x\}.$$

Si a es nulo, entonces $M(a) = \{0\}$. En caso contrario encontramos que $M(a)$ es un conjunto infinito. Ánalogamente a la Definición 1.1, definimos el mínimo común múltiplo m de una colección de enteros $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ como el elemento minimal de $\mathbb{N} \cap \bigcap_{i=1}^{n} M(a_i)$. Escribimos $m = \operatorname{mcm}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Para observar que está bien definido, basta mencionar que el producto $|a_1 \cdots a_n|$ es un elemento de la intersección y por lo tanto esta es no vacía.

Ecuaciones lineales diofantinas

Sea $c \in \mathbb{Z}$ y sean $a_1, \ldots, a_n$ enteros. Una ecuación lineal diofantina es una ecuación donde queremos encontrar enteros $x_1, \ldots, x_n$ que satisfagan

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = c.$$

Será de nuestro interés en las siguientes secciones resolver iterativamente este tipo de ecuaciones. Por el momento basta mencionar que podemos enfocarnos en el caso $n = 2$ sin ninguna pérdida de generalidad. No obstante, los resultados se mantienen para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Los siguientes enunciados abordan el problema de determinar existencia y unicidad para las ecuaciones lineales diofantinas, así como la construcción de sus soluciones.

Teorema 1.5 (Existencia)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos cero. La ecuación $ax + by = c$ tiene solución si y solo si* $\mathrm{mcd}\{a, b\} \mid c$.

Para construir el conjunto de soluciones a una ecuación lineal diofantina, encontramos primero una solución particular.

Definición 1.6. *Sea $d \coloneqq \mathrm{mcd}\{a, b\}$ y sean x', y' enteros tales que $ax' + by' = d$ (c.f. 1.3). Decimos entonces que x', y' son coeficientes de Bézout asociados a a, b, respectivamente.*

Observación. Los coeficientes de Bézout asociados a un par de enteros no son únicos. En efecto, si x', y' son coeficientes de Bézout de a, b, entonces $x' + b$, $y' - a$ también lo son:

$$a(x' + b) + b(y' - a) = ax' + by' + ab - ab = ax' + by' = d.$$

Para fines de esta tesis basta la existencia de estos coeficientes, por lo que decimos de manera indistinta "los coeficientes de Bézout" y "una elección de coeficientes de Bézout".

Definamos $d \coloneqq \mathrm{mcd}\{a, b\}$ y supongamos que la ecuación $ax + by = c$ tiene solución. Entonces $d \mid c$, por lo que existe $c' \in \mathbb{Z}$ tal que $c = c' \cdot d$. Sean x', y' los coeficientes de Bézout asociados a a, b respectivamente. Así,

$$a(c' \cdot x') + b(c' \cdot y') = c'(ax' + by') = c'd = c,$$

por lo que $(c' \cdot x', c' \cdot y')$ es una solución particular de la ecuación $ax + by = c$.

Teorema 1.7 (Construcción)**.** *Sea (x_0, y_0) una solución particular de la ecuación lineal diofantina $ax + by = c$. Entonces todas las soluciones de la ecuación están dadas por*

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t, \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t, \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $d \coloneqq \mathrm{mcd}\{a, b\}$ y $t \in \mathbb{Z}$.

1.1.2. Programación lineal

1.2. Fundamentos

Esta sección constituye el primer paso para la construcción de nuestro algoritmo. Se divide en dos partes. Primeramente damos a conocer las definiciones y enunciados provistos por [BH09], al mismo tiempo que hacemos un par de observaciones. Esta primera parte puede darse por concluida una vez citado el Teorema 1.12. Así también, es importante aclarar que el autor tradujo libremente algunos términos a falta de encontrar fuentes en español que hicieran uso de ellos. A saber, el autor decidió nombrar "vectores esencialmente enteros" a los *projectively rational vectors* y "capas enteras" a los *c-layers* en las Definiciones 1.8 y 1.10, respectivamente.

En la segunda parte de esta sección comenzamos con nuestro análisis del problema (1.1). La razón de considerarlo fundamental para esta tesis fue mencionado en el capítulo de Motivación, pero lo repetimos una vez más: en esta clase de problemas el vector es ortogonal a la única restricción, y esto implica que el problema relajado tenga una infinidad de soluciones. Hemos observado que, en presencia de este fenómeno, el algoritmo de Ramificación y Acotamiento no divide la región factible de manera óptima. Por ello investigamos formas alternativas para atacar este problema antes de hacer la separación de casos $\boldsymbol{p}_i < 0$ o $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$.

Definición 1.8. *Decimos que un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es esencialmente entero si existe un vector $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n$ y un escalar $k \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$. Además, decimos que $\boldsymbol{w}$ es el múltiplo coprimo de $\boldsymbol{v}$ si sus entradas son coprimas (c.f. Definición 1.1) y si su primera entrada $\boldsymbol{v}_1$ es no negativa.*

En otras palabras, decimos que $\boldsymbol{v}$ es esencialmente entero si es un múltiplo real de un vector entero.

Ejemplo 1.9. *El vector $\left(-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)^T = \sqrt{2}(-1, 1/2)^T$ es esencialmente entero y $(2, -1)^T$ es su múltiplo coprimo. Contrariamente, el vector $(\sqrt{2}, \sqrt{3})^T$ no es esencialmente entero.*

Observación. Todo vector $\boldsymbol{v}$ cuyas entradas son racionales ($\boldsymbol{v} \in \mathbb{Q}^n$) es esencialmente entero. En efecto, $\boldsymbol{v}_i = \frac{p_i}{q_i}$ para algunos enteros p_i y q_i con q_i distinto de cero. Si definimos $q \coloneqq \text{mcm}\{q_1, \ldots, q_n\} \neq 0$ y $\boldsymbol{w} \coloneqq q\boldsymbol{v}$, se sigue que $\boldsymbol{v} = \frac{1}{q}\boldsymbol{w}$ y también $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n$.

Observación. Todo vector $\boldsymbol{v}$ esencialmente entero tiene a lo más dos vectores coprimos asociados. Sean $k \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n$ tales que $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$. Entonces

$$\pm \frac{1}{\text{mcd}\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}} \boldsymbol{w}$$

son dos vectores cuyas entradas son coprimas, de acuerdo al Corolario 1.4. Si $\boldsymbol{w}_1 = 0$, estos representan el mismo vector, y si $\boldsymbol{w}_1 \neq 0$ entonces solo uno de estos dos vectores es el múltiplo coprimo de $\boldsymbol{v}$. Independientemente del caso, el múltiplo coprimo de todo vector esencialmente entero es único.

Porque todo número representable en cualquier sistema de aritmética finita es necesariamente racional, decidimos enfocar nuestro análisis en vectores esencialmente enteros. Desde

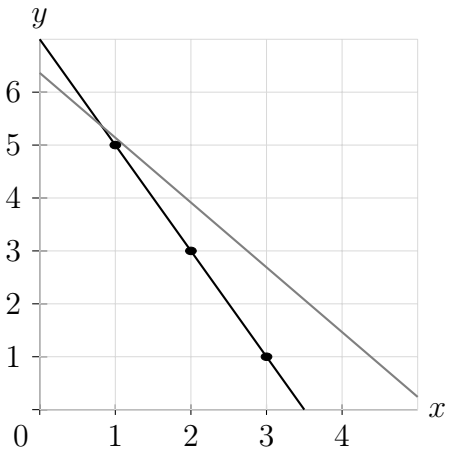

Figura 1.1: Representación de una capa entera (en negro) junto a un hiperplano afino que no es capa entera (en gris). La capa entera tiene como parámetros $\boldsymbol{v} = (2,1)^T$ y $t = 1{,}4$, mientras que los del hiperplano afino son $\boldsymbol{v} = (\sqrt{3}, \sqrt{2})^T$ y $t = 1{,}4$.

el punto de vista puramente teórico, esta condición reduce drásticamente el tipo de programas lineales que podemos resolver. No obstante, esta clase de vectores es un poco más general que los considerados en otros textos de programación lineal, por ejemplo, [MT90] y [Sch98] toman en cuenta vectores puramente racionales. En [BH09] se revelan propiedades de los vectores esencialmente enteros que reproducimos aquí y que nos permitirán plantear ecuaciones lineales diofantinas cuyas soluciones otorgan candidatos para puntos óptimos de un problema lineal.

Definición 1.10. *Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $t \in \mathbb{R}$ un escalar. Decimos que su hiperplano afino asociado*

$$H_{\boldsymbol{v},t} \coloneqq \ker\{\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}\} + t\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{v}^\perp + t\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}^\perp = 0\} \tag{1.3}$$

es una capa entera si contiene al menos un punto entero.

Observemos que todo hiperplano afino $H_{\boldsymbol{v},t}$ es invariante ante reescalamientos en $\boldsymbol{v}$. Es decir, si $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un escalar, entonces $H_{\boldsymbol{v},t} = H_{r\boldsymbol{v},t/r}$. En particular, el conjunto de hiperplanos afinos asociados a un vector $\boldsymbol{v}$ esencialmente entero es igual al conjunto de hiperplanos afinos asociados a su múltiplo coprimo $\boldsymbol{w}$. Ahora bien, cualquier vector coprimo induce una familia de capas enteras y, sorprendentemente, esa familia forma una cobertura de $\mathbb{Z}^n$, como lo indica el Teorema 1.12.

Lema 1.11. *Sean $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{v}$ distinto de cero. Entonces $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{v},t_{\boldsymbol{x}}}$, donde $t_{\boldsymbol{x}} \coloneqq \frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$.*

Teorema 1.12. *Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\boldsymbol{w}$ su múltiplo coprimo. Entonces la familia de capas enteras $\left\{H_{\boldsymbol{w},k\|\boldsymbol{w}\|^{-2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ cubre a $\mathbb{Z}^n$.*

Pasemos a considerar el programa lineal (1.1) donde $\boldsymbol{p}$ es un vector esencialmente entero y $\boldsymbol{q}$ es su múltiplo coprimo. Comúnmente a la función objetivo (1.1a) le daremos el nombre de utilidad y a la restricción (1.1b) la llamaremos restricción presupuestaria, así como presupuesto al lado derecho de esta restricción.

Observación. Debido a la restricción presupuestaria, encontramos que el politopo está acotado por arriba. Así pues, el problema o bien es infactible, o bien tiene una utilidad finita.

Cada escalar $t \in \mathbb{R}$ induce un hiperplano afino $H_{\boldsymbol{p},t}$ donde se cumple que todo punto $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{p},t}$ tiene un mismo nivel de utilidad. Como observamos previamente,

$$\{H_{\boldsymbol{p},t} : t \in \mathbb{R}\} = \{H_{\boldsymbol{q},t} : t \in \mathbb{R}\}.$$

A causa del Teorema 1.12, somos capaces de caracterizar todos los puntos enteros a partir de $\boldsymbol{q}$. Aún más, obtenemos una enumeración de las capas enteras que cubren $\mathbb{Z}^n$, lo cual nos permite determinar si la k-ésima capa entera contiene puntos factibles para el problema.

El nivel de utilidad para la k-ésima capa entera es k. En efecto, si $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$, tenemos

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}^{\perp} + k\,\|\boldsymbol{q}\|^{-2}\,\boldsymbol{q},$$

donde $\boldsymbol{q}^{\perp}$ es un vector ortogonal a $\boldsymbol{q}$. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q}^{\perp} + k\,\|\boldsymbol{q}\|^{-2}\,\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q} = 0 + k\,\|\boldsymbol{q}\|^{-2}\,\|\boldsymbol{q}\|^2 = k.$$

Consideremos el vector esencialmente entero $\boldsymbol{p}$ y su múltiplo coprimo $\boldsymbol{q}$. Entonces existe un escalar $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{q}$. Si $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} \leq u$, se cumple que $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u/m$ si m es positivo, y también tenemos $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \geq u/m$ si m es negativo.

La gran mayoría de resultados que obtendremos dependerán de un entero que denotamos como η, el cual depende de m y por lo tanto del signo que este tenga. Para evitar ser repetitivos o dividir los resultados innecesariamente en casos, supondremos de ahora en adelante que m es positivo. Esto equivale a decir que $\boldsymbol{p}_1 \geq 0$, pues se debe cumplir que $\boldsymbol{q}_1 \geq 0$. Basta mencionar que la gran mayoría de desigualdades se invierten en caso de que m sea negativo, y también que usamos la función techo en vez de la función piso.

Para respetar la restricción presupuestaria, podemos encontrar el entero η más grande que satisfaga $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u$ para todo $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},\eta\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$. Diremos que η es el primer entero que satisface la restricción presupuestaria, o bien que $H_{\boldsymbol{q},\eta\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ es la primera capa entera que satisface el presupuesto.

Lema 1.13. *Sea $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\boldsymbol{q}$ su múltiplo coprimo, de manera que $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{q}$ para algún escalar $m \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces la primera capa entera $H_{\boldsymbol{q},\eta\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ que satisface el presupuesto está parametrizada por $\eta \coloneqq \lfloor u/m \rfloor$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} \leq u$. Entonces buscamos el mayor entero η que satisfaga $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u/m$ para todo $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},\eta\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$. Por el Lema 1.11 sabemos que

$$\eta\,\|\boldsymbol{q}\|^{-2} = \frac{\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{q}\|^2} \leq \frac{u/m}{\|\boldsymbol{q}\|^2},$$

de donde se sigue inmediatamente que $\eta = \lfloor u/m \rfloor$. □

Encontramos que las capas enteras que satisfacen el presupuesto son parametrizadas por $k \in \{\eta, \eta-1, \ldots\}$. Debido a la observación anterior, se cumple inmediatamente que $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = k$. Deducimos que si la η-ésima capa entera contiene puntos no negativos, entonces las soluciones se encuentran en esa capa. En caso contrario, descendemos a la $(\eta-1)$-ésima capa entera y buscamos puntos enteros no negativos, etcétera.

Teorema 1.14. *Sea $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\boldsymbol{q}$ su múltiplo coprimo. Entonces se cumple lo siguiente con respecto al problema (1.1):*

1. *El problema es infactible si y solo si $\boldsymbol{q} \geq \mathbf{0}$ y $u < 0$.*

2. *Si $\boldsymbol{q}_i < 0$ para algún $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces la η-ésima capa entera contiene un número infinito de puntos factibles.*

3. *Si el problema es factible y $\boldsymbol{q} > \mathbf{0}$, entonces la k-ésima capa entera contiene un número finito de puntos factibles, donde $k \in \{\eta, \eta - 1, \ldots 0\}$.*

Demostración.

1. Supongamos que $\boldsymbol{q} \geq 0$ y $u < 0$. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n_{\geq \mathbf{0}}$ entonces $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \geq 0 > u$ y por lo tanto $\boldsymbol{x}$ no es factible. Luego,
$$\mathbb{Z}^n_{\geq \mathbf{0}} \cap \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u\} = \emptyset,$$
y el problema no es factible. Mostramos la otra implicación por contraposición. Si $u \geq 0$ observamos que $\mathbf{0}$ es factible. Se debe cumplir $u < 0$. Similarmente, si $\boldsymbol{q}_i < 0$ para algún $i \in \{2, \ldots, n\}$, encontramos que $\lceil u/\boldsymbol{q}_i \rceil \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{Z}^n$ es factible:
$$\boldsymbol{q}^T \left\lceil \frac{u}{\boldsymbol{q}_i} \right\rceil \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{q}_i \left\lceil \frac{u}{\boldsymbol{q}_i} \right\rceil \leq \boldsymbol{q}_i \frac{u}{\boldsymbol{q}_i} = u,$$
además, como $u < 0$, concluimos que $\lceil u/\boldsymbol{q}_i \rceil \boldsymbol{e}_i$ es no negativo.

2. Como $\boldsymbol{q}$ es un vector cuyas entradas son coprimas, sabemos de una generalización del Teorema 1.5 que existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = \eta$. Definamos los siguientes conjuntos de índices
$$I^+ \coloneqq \{i : q_i > 0\}, \quad I^\circ \coloneqq \{\ell : q_\ell = 0\}. \quad I^- \coloneqq \{j : q_j < 0\}.$$
Podemos suponer sin pérdida de generalidad que I° es vacío. En efecto, si $x_\ell < 0$ para algún $\ell \in I^\circ$, al redefinir $x_\ell \leftarrow 0$ se satisface $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = \eta$.

   Entonces, ambos conjuntos I^+ e I^- forman una partición de $\{1, \ldots, n\}$. Podemos escoger escalares positivos $c_1, \ldots, c_n$ que satisfagan simultáneamente
$$x_j + \sum_{i \in I^+} \boldsymbol{q}_i c_i \geq 0, \quad \forall j \in I^-, \tag{1.4}$$
$$x_i - \sum_{j \in I^-} \boldsymbol{q}_j c_i \geq 0, \quad \forall i \in I^+. \tag{1.5}$$
   Definamos el vector $\boldsymbol{x}^+ \in \mathbb{Z}^n$ de manera que
$$\boldsymbol{x}^+_k \coloneqq \begin{cases} x_k + \sum_{i \in I^+} \boldsymbol{q}_i c_i, & k \in I^-, \\ x_k - \sum_{j \in I^-} \boldsymbol{q}_j c_k, & k \in I^+. \end{cases}$$

Se verifica que $\boldsymbol{x}^+$ es no negativo y, además,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}^+ &= \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} + \sum_{k\in I^-}\sum_{i\in I^+}\boldsymbol{q}_k\boldsymbol{q}_i c_i - \sum_{k\in I^+}\sum_{j\in I^-}\boldsymbol{q}_k\boldsymbol{q}_j c_k \\ &= \eta + \sum_{j\in I^-}\sum_{i\in I^+}\boldsymbol{q}_j\boldsymbol{q}_i c_i - \sum_{i\in I^+}\sum_{j\in I^-}\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_j c_i \\ &= \eta.\end{aligned}$$

Así pues, tenemos existencia. Para concluir que hay un número infinito de puntos, basta observar que si la elección de coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ satisface ambas desigualdades (1.4) y (1.5), entonces cualquier múltiplo positivo de estos coeficientes también las satisface.

3. Se sigue que $u \geq 0$. Definamos

$$P_k \coloneqq H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n_{\geq \mathbf{0}} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n : \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = k, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\right\}. \tag{1.6}$$

Observemos que $P_k = \emptyset$ para todo k negativo, pues $\boldsymbol{q} > \mathbf{0}$ y por lo tanto $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \geq 0$ para cualquier $\boldsymbol{x}$ no negativo. Esto implica que ningún punto sobre capas enteras con parámetros negativos es factible.

Sea $k \in \{\eta, \eta - 1, \ldots, 0\}$. La capa entera $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ interseca los ejes positivos en $\frac{k}{\boldsymbol{q}_i}\boldsymbol{e}_i$. Definamos $\ell_i \coloneqq \lceil k/\boldsymbol{q}_i \rceil$. No es difícil ver que $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ está contenido en el prisma cuyas aristas son $[0, \ell_i]$ y, por lo tanto,

$$P_k \subseteq \prod_{i=1}^n [0, \ell_i] \cap \mathbb{Z}^n = \prod_{i=1}^n \left([0, \ell_i] \cap \mathbb{Z}\right).$$

Pero $|[0, \ell_i] \cap \mathbb{Z}| = \ell_i + 1$. Así,

$$|P_k| \leq \prod_{i=1}^n (\ell_i + 1) < \infty.$$

Entonces la k-ésima capa entera contiene un número finito de puntos factibles.

□

Suponiendo que el problema (1.1) tiene solución, el Teorema 1.14 nos sugiere dividir nuestro análisis en dos casos: uno donde $\boldsymbol{p}_i$ es negativo y por lo tanto hay una infinidad de soluciones en la η-ésima capa entera; y uno donde $\boldsymbol{p} > \mathbf{0}$, lo que implica la finitud de puntos factibles. Ciertamente el segundo caso es el más interesante, pues de alguna manera conocemos automáticamente el óptimo de los problemas que recaen en el primer caso. Efectivamente esta es una de las razones por las que el autor decidió ordenar de tal manera los casos: porque en el primero sabemos exactamente dónde buscar la solución. Aún así, a pesar de encontrarnos con esta primera división, existen muchos elementos en común que comparten ambos casos.

1.2.1. Una ecuación lineal diofantina

De acuerdo al Teorema 1.14, las soluciones del problema (1.1) se encuentran en una capa entera $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$. Así, los puntos $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ que se encuentran sobre esa capa satisfacen la ecuación lineal diofantina

$$\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{q}_n\boldsymbol{x}_n = k. \tag{1.7}$$

Como $\boldsymbol{q} \neq 0$, podemos suponer, por el momento, que $\boldsymbol{q}_n \neq 0$. En la sección de Teoría de Números mostramos bajo qué condiciones existen soluciones a este tipo de ecuaciones y también cómo construirlas cuando solamente tenemos dos incógnitas. Partimos de la observación que podemos resolver recursivamente esta ecuación. Definamos, por conveniencia, $g_1 \coloneqq \operatorname{mcd}\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n\}$ y también $\omega_1 \coloneqq k$. Como $\boldsymbol{q}$ es un vector coprimo, sabemos que $g_1 = 1$. Además, definamos

$$\omega_2 \coloneqq \frac{\boldsymbol{q}_2}{g_2 \cdot g_1}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \frac{\boldsymbol{q}_n}{g_2 \cdot g_1}\boldsymbol{x}_n,$$

donde $g_2 \coloneqq \operatorname{mcd}\{\boldsymbol{q}_2/g_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n/g_1\}$. Como $\boldsymbol{q}_n \neq 0$, tenemos que g_2 está bien definido. Así, la ecuación (1.7)es equivalente a

$$\frac{q_1}{g_1}\boldsymbol{x}_1 + g_2\omega_2 = \omega_1. \tag{1.8}$$

Observemos que

$$\operatorname{mcd}\left\{\frac{\boldsymbol{q}_1}{g_1}, g_2\right\} = \operatorname{mcd}\left\{\frac{\boldsymbol{q}_1}{g_1}, \operatorname{mcd}\left\{\frac{\boldsymbol{q}_2}{g_1}, \ldots, \frac{\boldsymbol{q}_n}{g_1}\right\}\right\} = \operatorname{mcd}\left\{\frac{\boldsymbol{q}_1}{g_1}, \frac{\boldsymbol{q}_2}{g_1}, \ldots, \frac{\boldsymbol{q}_n}{g_1}\right\} = 1.$$

Por lo tanto, existen soluciones enteras para todo $\omega_1 \in \mathbb{Z}$. Como $\boldsymbol{q}_1/g_1$ y g_2 son coprimos, encontramos que sus coeficientes de Bézout asociados (c.f. Definición 1.6) x_1', ω_2' son soluciones particulares de la ecuación

$$\frac{q_1}{g_1}\boldsymbol{x}_1 + g_2\omega_2 = 1.$$

Deducimos que las soluciones de la ecuación (1.8) están dadas por

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \omega_1 x_1' + g_2 t_1, \\ \omega_2 = \omega_1\omega_2' - \frac{q_1}{g_1}t_1, \end{cases}$$

donde $t_1 \in \mathbb{Z}$ es una variable libre.

Observación. Los coeficientes de Bézout x_1' y ω_2' dependen exclusivamente de $\boldsymbol{q}$ y no del punto $\boldsymbol{x}$. En efecto, x_1' está asociado a $\boldsymbol{q}_1/g_1$ y ω_2' está asociado a g_2. Pero ambos g_1 y g_2 son el máximo común divisor de $\boldsymbol{q}_1, \ldots \boldsymbol{q}_n$ y $\boldsymbol{q}_1/g_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n/g_1$, respectivamente.

Para el siguiente paso de la recursión fijamos t_1 y resolvemos la ecuación

$$\frac{\boldsymbol{q}_2}{g_2 \cdot g_1}\boldsymbol{x}_2 + \frac{\boldsymbol{q}_3}{g_2 \cdot g_1}\boldsymbol{x}_3 + \cdots + \frac{\boldsymbol{q}_n}{g_2 \cdot g_1}\boldsymbol{x}_n = \omega_2. \tag{1.9}$$

Como $g_2 = \operatorname{mcd}\{\boldsymbol{q}_2/g_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n/g_1\}$, sabemos del Corolario 1.4 que

$$\operatorname{mcd}\left\{\frac{\boldsymbol{q}_2}{g_2 \cdot g_1}, \ldots, \frac{\boldsymbol{q}_n}{g_2 \cdot g_1}\right\} = 1.$$

En el mismo espíritu que el primer paso de la recursión, definimos

$$\omega_3 \coloneqq \frac{\boldsymbol{q}_3}{g_3 \cdot g_2 \cdot g_1}\boldsymbol{x}_3 + \cdots + \frac{\boldsymbol{q}_n}{g_3 \cdot g_2 \cdot g_1}\boldsymbol{x}_n,$$

donde

$$g_3 \coloneqq \operatorname{mcd}\left\{ \frac{\boldsymbol{q}_3}{g_2 \cdot g_1}, \ldots, \frac{\boldsymbol{q}_n}{g_2 \cdot g_1} \right\}.$$

Por lo que la ecuación (1.9) es equivalente a

$$\frac{\boldsymbol{q}_2}{g_2 \cdot g_1}\boldsymbol{x}_2 + g_3\omega_3 = \omega_2. \tag{1.10}$$

Nuevamente, como $\boldsymbol{q}_n \neq 0$, g_3 está bien definido. Además, tenemos

$$\operatorname{mcd}\left\{ \frac{\boldsymbol{q}_2}{g_2 \cdot g_1}, g_3 \right\} = 1,$$

y entonces (1.10) tiene una infinidad de soluciones para todo $\omega_2 \in \mathbb{Z}$, las cuales están dadas por

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_2 = \omega_2 x_2' + g_3 t_2, \\ \omega_3 = \omega_2 \omega_3' - \frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} t_2, \end{cases}$$

donde $t_2 \in \mathbb{Z}$ es una variable libre, y x_2', ω_3' son los coeficientes de Bézout asociados a $\frac{\boldsymbol{q}_2}{g_2 \cdot g_2}$ y g_3, respectivamente.

De manera general, para $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, el i-ésimo paso de la recursión provee las soluciones

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_i = \omega_i x_i' + g_{i+1} t_i, \\ \omega_{i+1} = \omega_i \omega_{i+1}' - \frac{\boldsymbol{q}_i}{\prod_{j=1}^{i} g_j} t_i, \end{cases} \tag{1.11}$$

donde $t_i \in \mathbb{Z}$ es la i-ésima variable libre. Es valioso mencionar, otra vez, que los coeficientes de Bézout x_i', ω_{i+1}' dependen exclusivamente de $\boldsymbol{q}$ a través de sus entradas $\boldsymbol{q}_i$ y de los máximos común divisores entre ellas. Es decir, ni x_i' ni ω_{i+1}' dependen de la elección $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$. Así también, $\boldsymbol{q}_n \neq 0$ y por lo tanto g_{i+1} está bien definido para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$.

En el último paso obtenemos la ecuación lineal diofantina

$$\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}\boldsymbol{x}_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}\boldsymbol{x}_n = \omega_{n-1}. \tag{1.12}$$

Por construcción, los coeficientes de $\boldsymbol{x}_{n-1}$ y $\boldsymbol{x}_n$ son coprimos. Las soluciones están dadas por

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{n-1} = \omega_{n-1} x_{n-1}' + \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} t_{n-1}, \\ \boldsymbol{x}_n = \omega_{n-1} x_n' - \frac{\boldsymbol{q}_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} t_{n-1}, \end{cases} \tag{1.13}$$

donde x_{n-1}', x_n' son los coeficientes de Bézout asociados a $\frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}$ y $\frac{\boldsymbol{q}_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}$, respectivamente.

Finalmente, por la restricción de no negatividad $\boldsymbol{x} \geq 0$ en el problema (1.1), podemos acotar nuestra elección de variables libres $t_i \in \mathbb{Z}$ a partir de (1.11). De la primera igualdad encontramos que necesariamente se debe satisfacer

$$t_i \geq \left\lceil -\frac{\omega_i x_i'}{g_{i+1}} \right\rceil, \tag{1.14}$$

para $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Para determinar intervalos de no negatividad de $\boldsymbol{x}_{n-1}$ y $\boldsymbol{x}_n$, observamos de (1.13) que dependemos de los signos de $\boldsymbol{q}_{n-1}$ y de $\boldsymbol{q}_n$. Mucho tendremos que decir en los siguientes dos capítulos sobre cómo acotar mejor $t_1, \ldots, t_{n-1}$ para asegurar la no negatividad de $\boldsymbol{x}$. Así pues, relegamos la discusión en los siguientes dos capítulos cuando analicemos separadamente el caso infinito y el caso finito.

Ahora bien, hemos encontrado una relación entre el vector de soluciones $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ y el vector de variables libres $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Hemos manejado esta relación de manera recursiva a través de (1.11). Resultará conveniente encontrar una forma cerrada a la relación de recurrencia inducida. Para ello, recordemos que $\boldsymbol{x}$ se encuentra sobre la capa entera $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ y por lo tanto satisface (1.7). Recordemos, también, que en el primer paso definimos $\omega_1 \coloneqq k$. Combinando estos dos últimos puntos, obtenemos

$$\begin{cases} \omega_1 & = k, \\ \omega_{i+1} & = \omega_i \cdot \omega_{i+1}' - \frac{\boldsymbol{q}_i}{\prod_{\ell=1}^{i} g_\ell} \cdot t_i. \end{cases} \tag{1.15}$$

Lema 1.15. *La forma cerrada de la relación de recurrencia (1.15) está dada por*

$$\omega_i = k \cdot \prod_{j=2}^{i} \omega_j' - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\boldsymbol{q}_j}{\prod_{\ell=1}^{j} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{i} \omega_\ell' \cdot t_j. \tag{1.16}$$

Donde, por conveniencia, le asignamos el valor de 0 a la suma vacía y el valor de 1 al producto vacío.

Demostración. Lo demostramos inductivamente. Observemos que

$$\omega_1 = k \cdot \prod_{j=2}^{1} \omega_j' - \sum_{j=1}^{0} \frac{\boldsymbol{q}_j}{\prod_{\ell=1}^{j} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{1} \omega_\ell' \cdot t_j = k,$$

debido a que definimos el producto vacío como 1 y la suma vacía como 0. Supongamos inductivamente que (1.16) se satisface para alguna $i \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= k \cdot \prod_{j=2}^{i+1} \omega_j' - \sum_{j=1}^{i} \frac{\boldsymbol{q}_j}{\prod_{\ell=1}^{j} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{i+1} \omega_\ell' \cdot t_j \\ &= k \cdot \prod_{j=2}^{i} \omega_j' \cdot \omega_{i+1}' - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\boldsymbol{q}_j}{\prod_{\ell=1}^{j} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{i} \omega_\ell' \cdot t_j \cdot \omega_{i+1}' - \frac{\boldsymbol{q}_i}{\prod_{\ell=1}^{i} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=i+2}^{i+1} \omega_\ell' \cdot t_i \\ &= \left(k \cdot \prod_{j=2}^{i} \omega_j' - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\boldsymbol{q}_j}{\prod_{\ell=1}^{j} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{i} \omega_\ell' \cdot t_j \right) \omega_{i+1}' - \frac{\boldsymbol{q}_i}{\prod_{\ell=1}^{i} g_\ell} \cdot t_i \\ &= \omega_i \cdot \omega_{i+1}' - \frac{\boldsymbol{q}_i}{\prod_{\ell=1}^{i} g_\ell} \cdot t_i. \end{aligned}$$

Por el principio de inducción se sigue que (1.16) satisface (1.15) para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, esta fórmula es la forma cerrada de la relación de recurrencia propuesta. □

Por conveniencia, definimos los coeficientes $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ con $i > j$ como

$$m_{ij} \coloneqq \frac{\boldsymbol{q}_j}{\prod_{\ell=1}^{j} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{i} \omega'_\ell. \tag{1.17}$$

Así pues, juntando esto último con 1.11, obtenemos para $i \in \{1, \ldots, n-2\}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_i &= \omega_i \cdot x'_i + g_{i+1}\boldsymbol{t}_i \\ &= k \cdot \prod_{j=2}^{i} \omega'_j \cdot x'_i - \sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} x'_i \boldsymbol{t}_j + g_{i+1}\boldsymbol{t}_i. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Similarmente, sustituyendo en 1.13,

$$\boldsymbol{x}_{n-1} = k \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \omega'_j \cdot x'_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-2} m_{n-1,j} x'_{n-1} \boldsymbol{t}_j + \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} \boldsymbol{t}_{n-1}, \tag{1.19a}$$

$$\boldsymbol{x}_n = k \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \omega'_j \cdot x'_n - \sum_{j=1}^{n-2} m_{n,j} x'_n \boldsymbol{t}_j - \frac{\boldsymbol{q}_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} \boldsymbol{t}_{n-1}. \tag{1.19b}$$

Con este trabajo anterior, ya podemos establecer una relación lineal entre $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$. Definimos $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{Z}^n$ como

$$\boldsymbol{\omega}_i \coloneqq x'_i \cdot \prod_{j=2}^{\min\{i, n-1\}} \omega'_j. \tag{1.20}$$

También definimos la matriz $M \in \mathbb{Z}^{n \times (n-1)}$ a través de

$$M_{ij} \coloneqq \begin{cases} -m_{ij} x'_i, & j < i, \\ g_{i+1}, & i = j < n-1, \\ \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{k=1}^{n-1} g_k}, & i = j = n-1, \\ -\frac{\boldsymbol{q}_{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} g_k}, & i = n, j = n-1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{1.21}$$

De (1.18) y (1.19) encontramos que

$$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}. \tag{1.22}$$

En una observación pasada mencionamos que los coeficientes de Bézout ω'_i, x'_i están asociados a términos exclusivamente dependientes de $\boldsymbol{q}$, por lo que no dependen de la elección $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}$. De esta manera, $\boldsymbol{\omega}$ depende exclusivamente de $\boldsymbol{q}$. El mismo razonamiento aplica para la matriz M. Entonces, como $\boldsymbol{q}$ es fijo, se sigue que $\boldsymbol{\omega}$ y M lo son también.

Lema 1.16. *El vector $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{Z}^n$ satisface $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{\omega} = 1$.*

Demostración. Primero mostramos por inducción hacia atrás que se cumple

$$\sum_{j=i}^{n} \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{\omega}_j = \prod_{j=2}^{i} \omega'_j \cdot \prod_{j=1}^{i} g_j, \tag{1.23}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Empezamos con el caso base $i = n-1$:

$$\boldsymbol{q}_{n-1}\boldsymbol{\omega}_{n-1} + \boldsymbol{q}_n\boldsymbol{\omega}_n = \prod_{j=2}^{n-1} \omega'_j \cdot \left(\boldsymbol{q}_{n-1}x'_{n-1} + \boldsymbol{q}_n x'_n\right). \tag{1.24}$$

Recordemos que x'_{n-1} y x'_n son coeficientes de Bézout asociados a los coeficientes del lado izquierdo de (1.12), los cuales son coprimos. Entonces se cumple

$$\frac{\boldsymbol{q}_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}x'_{n-1} + \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}x'_n = 1,$$

lo cual implica

$$\boldsymbol{q}_{n-1}x'_{n-1} + \boldsymbol{q}_n x'_n = \prod_{j=1}^{n-1} g_j.$$

Sustituyendo en (1.24), obtenemos

$$\boldsymbol{q}_{n-1}\boldsymbol{\omega}_{n-1} + \boldsymbol{q}_n\boldsymbol{\omega}_n = \prod_{j=2}^{n-1} \omega'_j \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g_j.$$

Supongamos inductivamente que (1.23) se satisface para alguna $2 \leq i \leq n-1$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i-1}^{n} \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{\omega}_j &= \boldsymbol{q}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \sum_{j=i}^{n} \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{\omega}_j \\
&= \prod_{j=2}^{i-1} \omega'_j \cdot \boldsymbol{q}_{i-1}x'_{i-1} + \prod_{j=2}^{i} \omega'_j \cdot \prod_{j=1}^{i} g_j \\
&= \prod_{j=2}^{i-1} \omega'_j \cdot \left(\boldsymbol{q}_{i-1}x'_{i-1} + \omega'_i \prod_{j=1}^{i} g_j\right).
\end{aligned}$$

Nuevamente, x'_{i-1} y ω'_i son coeficientes de Bézout asociados, respectivamente, a $\frac{\boldsymbol{q}_{i-1}}{\prod_{j=1}^{i-1} g_j}$ y g_i, los cuales son coprimos. De esta manera satisfacen

$$\frac{\boldsymbol{q}_{i-1}}{\prod_{j=1}^{i-1} g_j}x'_{i-1} + g_i\omega'_i = 1,$$

por lo tanto,

$$\boldsymbol{q}_{i-1}x'_{i-1} + \omega'_i \prod_{j=1}^{i} g'_j = \prod_{j=1}^{i-1} g_j.$$

Sustituyendo, obtenemos el resultado (1.23) para $i-1$. Así, por inducción hacía atrás, (1.23) se cumple para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Finalmente, para demostrar el Lema, observamos que

$$\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{\omega}_j = \prod_{j=2}^{1} \omega_j' \cdot \prod_{j=1}^{1} g_j = g_1 = 1.$$

El primer producto es uno por ser el producto vacío. Recordemos también que g_1 es el máximo común divisor de $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n$, los cuales son coprimos, y entonces $g_1 = 1$. □

Lema 1.17. *El vector* $\boldsymbol{q}$ *genera* $\ker\{M^T\}$ *si* $\boldsymbol{q}_n \neq 0$.

Demostración. La matriz M es triangular inferior cuya diagonal principal es distinta de cero. En efecto, para todo $i \in \{1, \dots, n-2\}$, tenemos

$$M_{ii} = g_{i+1} = \operatorname{mcd}\left\{ \frac{\boldsymbol{q}_i}{\prod_{j=1}^{i} g_j}, \dots, \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{i} g_j} \right\}.$$

Pero el máximo común divisor entre cualesquiera enteros siempre es positivo. También tenemos

$$M_{n-1,n-1} = \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} \neq 0.$$

Se sigue que las columnas de M son linealmente independientes, y entonces su imagen tiene dimensión $n-1$. Por lo tanto, M^T tiene $n-1$ renglones linealmente independientes. Se sigue por el Teorema de la Dimensión que $\dim\ker\{M^T\} = 1$, así que basta mostrar que $\boldsymbol{q} \in \ker\{M^T\}$.

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$. Por el Teorema 1.12, existe una capa entera $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ que contiene a $\boldsymbol{x}$. Así, $\boldsymbol{x}$ satisface la ecuación lineal diofantina $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = k$. Por construcción, existe $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ tal que $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}$. Luego,

$$k = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{q}^T M\boldsymbol{t} = k + (\boldsymbol{q}^T M)\boldsymbol{t}.$$

De donde obtenemos $(\boldsymbol{q}^T M)\boldsymbol{t} = 0$. Pero $\boldsymbol{x}$ fue arbitrario, así que también lo fue $\boldsymbol{t}$. Entonces se debe cumplir $\boldsymbol{q}^T M = 0$, lo que implica que $\boldsymbol{q} \in \ker\{M^T\}$. □

La gran mayoría de nuestra argumentación para demostrar los resultados ha sido fundamentada a través de las capas enteras $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$, así como por el Teorema 1.12. Sin embargo, estas capas enteras contienen puntos que, en el contexto de programación lineal entera, no son de interés, a saber, contienen puntos no enteros. Nos gustaría concentrarnos exclusivamente en estos puntos enteros, al mismo tiempo que buscamos caracterizarlos por medio de $\boldsymbol{q}$. La siguiente Definición hará que logremos este primer objetivo de enfocarnos exclusivamente en los puntos enteros, mientras que el Teorema 1.20 permitirá que los caractericemos a partir de $\boldsymbol{q}$.

Definición 1.18 ([Sch98])**.** *Decimos que un subconjunto* Λ *de* $\mathbb{R}^n$ *es un grupo aditivo si*

1. $0 \in \Lambda$, *y*
2. *si* $x, y \in \Lambda$, *entonces* $x + y \in \Lambda$, *y también* $-x \in \Lambda$.

Además, decimos que Λ es una red si existen vectores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ linealmente independientes tales que

$$\Lambda = \{\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n : \lambda_i \in \mathbb{Z}\}.$$

A los vectores $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ los llamamos la base de la red Λ.

Ejemplo 1.19. *No es difícil ver que $\mathbb{Z}^n$ es un grupo aditivo. Si consideramos los vectores canónicos $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, entonces encontramos que son linealmente independientes, pero también se cumple*

$$\mathbb{Z}^n = \{\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n : \lambda_i \in \mathbb{Z}\}.$$

De esta, manera $\mathbb{Z}^n$ es una red que tiene como base canónica a los vectores $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Teorema 1.20. *Supongamos que $\boldsymbol{q}_n \neq 0$. Entonces $\boldsymbol{\omega}$ y las columnas de M forman una base de la red $\mathbb{Z}^n$.*

Demostración. En el Lema 1.17 mostramos que las columnas de M son linealmente independientes. Mostremos que $\boldsymbol{\omega}$ es linealmente independiente de las columnas de M. Supongamos que no lo es, por lo que existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ tales que

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \boldsymbol{m}_{n-1},$$

donde $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_{n-1}$ son las columnas de M. De los Lemas 1.16 y 1.17 obtenemos

$$1 = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{m}_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{m}_{n-1} = 0,$$

lo cual es una contradicción. Se sigue que $\{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_{n-1}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

Ahora bien, sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$, por lo que se encuentra sobre una capa entera, y entonces satisface la ecuación lineal diofantina $\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} = k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Por construcción, existe un vector $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ tal que

$$\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t} = k\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{t}_1 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + \boldsymbol{t}_{n-1} \boldsymbol{m}_{n-1}.$$

Como $\boldsymbol{x}$ fue arbitrario, se sigue que

$$\mathbb{Z}^n = \{k\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{t}_1 \boldsymbol{m}_1 + \cdots + \boldsymbol{t}_{n-1} \boldsymbol{m}_{n-1} : k, \boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1} \in \mathbb{Z}\}.$$

De esta manera, se cumple que $\{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_{n-1}\}$ es una base de $\mathbb{Z}^n$. □

Geométricamente, a partir de $\boldsymbol{q}$ descomponemos la red $\mathbb{Z}^n$ como una suma directa de dos subredes isomorfas a $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^{n-1}$, cuyas bases están dadas por $\boldsymbol{\omega}$ y las columnas de M, respectivamente. El vector $\boldsymbol{\omega}$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{\omega} = 1$, mientras que las columnas de M forman una base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea $\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{m} = 0$. Tenemos entonces que si $\boldsymbol{q}_n \neq 0$, el vector $\boldsymbol{q}$ induce una descomposición de $\mathbb{Z}^n$. Ciertamente, esta idea de descomponer el espacio completo a partir de soluciones particulares y homogéneas no es novedosa.

Hasta este punto hemos supuesto que $\boldsymbol{q}_n \neq 0$. Ciertamente si este no es el caso podemos permutar las entradas de $\boldsymbol{q}$ de manera que el vector permutado $\tilde{\boldsymbol{q}}$ cumpla el supuesto. Ahora

bien, podemos preguntarnos cómo se relacionan las imágenes de las matrices M y $\tilde{M}$ de estos dos vectores. No obstante, si $\boldsymbol{q}_n = 0$, puede ser el caso que la matriz M no esté bien definida[1]. Para responder la pregunta requerimos de un supuesto más fuerte.

Corolario 1.21. *Sea $\boldsymbol{q}$ un vector coprimo y sea $\tilde{\boldsymbol{q}}$ el vector coprimo resultante de haber permutado las entradas de $\boldsymbol{q}$. Supongamos además que $\boldsymbol{q}_n, \tilde{\boldsymbol{q}}_n \neq 0$. Entonces*

$$\ker\{M^T\} \cong \ker\left\{\tilde{M}^T\right\}.$$

Demostración. Existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ tal que $\tilde{\boldsymbol{q}} = P\boldsymbol{q}$. Por el Lema 1.17 sabemos que

$$\ker\left\{\tilde{M}^T\right\} = \langle\tilde{\boldsymbol{q}}\rangle = \langle P\boldsymbol{q}\rangle,$$

pero también $\langle\boldsymbol{q}\rangle = \ker\{M^T\}$. Como P es una matriz invertible, se sigue que $\langle P\boldsymbol{q}\rangle \cong \langle\boldsymbol{q}\rangle$ y obtenemos nuestro resultado. □

Observación. No es cierto que $\tilde{M} = PM$ si $\tilde{\boldsymbol{q}} = P\boldsymbol{q}$. Consideremos el vector $\boldsymbol{q} \coloneqq (1, 1, -2)^T$ y la permutación

$$P \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos $\tilde{\boldsymbol{q}} = (1, -2, 1)^T$. Observemos que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sí se cumple que

$$\ker\left\{\tilde{M}^T\right\} = \langle\tilde{\boldsymbol{q}}\rangle = \langle P\boldsymbol{q}\rangle \cong \langle\boldsymbol{q}\rangle = \ker\{M^T\},$$

pero

$$PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \neq \tilde{M}.$$

Extendamos más la idea anterior y denotemos por $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ el grupo de permutaciones de $\mathbb{Z}^n$. Es decir,

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \coloneqq \{P \in \mathbb{Z}^{n\times n} \text{ es matriz de permutación}\}.$$

También definamos el grupo de permutaciones en n letras como

$$S_n \coloneqq \{\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \text{ es función biyectiva}\}.$$

[1]Por ejemplo, si $\boldsymbol{q}_n = \boldsymbol{q}_{n-1} = 0$, encontramos que

$$g_{n-1} \coloneqq \mathrm{mcd}\left\{\frac{\boldsymbol{q}_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j}, \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j}\right\} = \mathrm{mcd}\{0, 0\}.$$

Pero el máximo común divisor de dos números no está bien definido si ambos son cero. Esto implica que la entrada $M_{n-2,n-2} \coloneqq g_{n-1}$ no está bien definida.

Entonces S_n actúa naturalmente sobre la red $\mathbb{Z}^n$. En efecto, consideremos el homomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi\colon S_n &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}),\\ \sigma &\mapsto (\mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{Z}^n),\end{aligned}$$

a partir de la extensión lineal de $\varphi(\sigma)(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_{\sigma(i)}$. Escribimos $\sigma.\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{\sigma(i)}$ para tener una notación más clara.

Ejemplo 1.22. *Sea $\sigma \in S_4$ definida por $\sigma \coloneqq (12)(34)$. La permutación σ actúa sobre la base canónica como*

$$\begin{aligned}\sigma.\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_2, \quad \sigma.\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1,\\ \sigma.\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_4, \quad \sigma.\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

Por lo que σ es realizada como

$$\sigma \mapsto [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De manera informal, podemos fortalecer el Corolario 1.21 con el siguiente argumento. Si $\boldsymbol{q}_i = 0$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$, podemos proyectar $\boldsymbol{q}$ sobre la subred $\mathbb{Z}^{n-1}$ de $\mathbb{Z}$. Repetimos este proceso hasta que todas las entradas de $\boldsymbol{q}$ sean distintas de cero. Y es sobre esta subred que podemos considerar cualquier permutación en las entradas del vector $\boldsymbol{q}$ proyectado.

Definición 1.23. *Sean $\boldsymbol{q}, \tilde{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{Z}^n$ dos vectores coprimos cuyas entradas son todas distintas de cero. Entonces decimos que $\boldsymbol{q}$ y $\tilde{\boldsymbol{q}}$ son equivalentes si y solo si existe $\sigma \in S_n$ tal que $\tilde{\boldsymbol{q}} = \sigma.\boldsymbol{q}$. En este caso escribimos $\boldsymbol{q} \sim \tilde{\boldsymbol{q}}$.*

Como φ es un homomorfismo, es posible mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de vectores coprimos cuyas entradas son distintas de cero. De esta manera, sabemos del Corolario 1.21 que si $\boldsymbol{q} \sim \tilde{\boldsymbol{q}}$, entonces ambos vectores descomponen la red $\mathbb{Z}^n$ de la misma forma. Es decir, existe un isomorfismo tal que $(\boldsymbol{\omega}, M) \mapsto (\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \tilde{M})$. Podemos entonces empezar a hablar de una clasificación de programas lineales a partir de las clases de equivalencia de $\boldsymbol{q}$. Esto, no obstante, se encuentra fuera del propósito de la tesis.

En conclusión, somos completamente capaces de caracterizar los puntos enteros sobre la k-ésima capa entera. O lo que es lo mismo, podemos resolver ecuaciones lineales diofantinas con n incógnitas. Estas ecuaciones son inducidas por el vector coprimo $\boldsymbol{q}$. Hemos analizado también como es que $\boldsymbol{q}$ descompone el espacio $\mathbb{Z}^n$ a través del vector $\boldsymbol{\omega}$ y de la matriz M. Recordemos que $\boldsymbol{w}$ representa el conjunto de soluciones particulares a estas ecuaciones lineales, mientras que las columnas de M representan el conjunto de soluciones homogéneas. En la siguiente sección observamos cómo esta descomposición permite que desacoplemos un programa lineal entero en dos partes: una de maximización y otra de factibilidad.

1.2.2. Múltiples restricciones

En esta sección hacemos un análisis extensivo sobre lo resulta de agregar más restricciones al problema (1.1). Sea $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ esencialmente entero y consideremos su múltiplo coprimo $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^n$. Sea $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ una matriz racional con renglones linealmente independientes y sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^m$ un vector. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n} \quad & \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}, && \text{(1.25a)}\\ \text{s.a.} \quad & \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \le u, && \text{(1.25b)}\\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, && \text{(1.25c)}\\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Ciertamente, la solución no se encuentra necesariamente en la η-ésima capa entera. Por ejemplo, si dejamos que $A \coloneqq \boldsymbol{q}^T$ y $b \coloneqq u - m$, la solución se encontrará en la ξ-ésima capa entera, donde

$$\xi \coloneqq \left\lfloor \frac{u}{m} - 1 \right\rfloor < \eta.$$

No obstante, si el problema (1.25) es factible, sabemos que la solución se encontrará en alguna capa entera con parámetro $k \in \{\eta, \eta-1, \ldots\}$, pues todavía contamos con una restricción presupuestaria que se debe satisfacer.

Observación. Recordemos del Teorema 1.14 que, si tenemos solamente la restricción presupuestaria, entonces la utilidad máxima es η si $\boldsymbol{q}_i < 0$ para alguna $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Al igual que en el caso finito, ahora no somos capaces de saber inmediatamente en qué capa entera se encuentra nuestra solución.

Ahora bien, en el contexto del problema (1.25), el parámetro $k \in \mathbb{Z}$ se encarga de maximizar la utilidad (1.25a), así como de respetar el presupuesto (1.25b) a través de $k \le \eta$. Similarmente, el vector $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ se encarga de respetar las otras restricciones (1.25c).

Teorema 1.24. *El problema (1.25) es equivalente al problema de maximización*

$$\begin{aligned} \max_{k\in\mathbb{Z},\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}^{n-1}} \quad & k, && \text{(1.26a)}\\ \textit{s.a.} \quad & k \le \eta, && \text{(1.26b)}\\ & AM\boldsymbol{t} = kA\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{b}, && \text{(1.26c)}\\ & M\boldsymbol{t} \ge -k\boldsymbol{\omega}. && \text{(1.26d)} \end{aligned}$$

Demostración. Por el Teorema 1.20, sabemos que la transformación lineal

$$(k, \boldsymbol{t}) \mapsto \boldsymbol{x} \coloneqq k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}$$

es un isomorfismo entre las redes $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$ y $\mathbb{Z}^n$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\iff AM\boldsymbol{t} = \boldsymbol{b} - kA\boldsymbol{\omega},\\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} &\iff M\boldsymbol{t} \ge -k\boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

y por lo tanto basta mostrar que si un vector es factible para un problema, entonces satisface la correspondiente restricción presupuestaria del otro problema. Para ello, es de utilidad recordar que η parametriza la primera capa entera que satisface el presupuesto.

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ un vector factible de (1.25) Como $\boldsymbol{x}$ es entero, entonces se debe cumplir $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq \eta$. Ahora bien, existe $(k, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{Z}^n$ que satisface $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}$. Por el Lema 1.16 y el Corolario 1.17 encontramos que

$$k = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq \eta,$$

y entonces $(k, \boldsymbol{t})$ es factible. Como $\boldsymbol{x}$ fue arbitrario, se sigue que la solución del problema (1.25) es una cota inferior del problema (1.26). La demostración de que la solución de (1.26) es una cota inferior de (1.25) es análoga.

Finalmente, supongamos que $(k, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{Z}^n$ es solución de (1.26). Si existe $\hat{\boldsymbol{x}}$ factible para (1.25) con utilidad $\boldsymbol{q}^T\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{k}$ estrictamente mayor, entonces consideramos $(\hat{k}, \hat{\boldsymbol{t}})$ tal que $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{k}\boldsymbol{\omega} + M\hat{\boldsymbol{t}}$. Este vector también es factible con utilidad $k < \hat{k} \leq \eta$, y entonces $(k, \boldsymbol{t})$ no era la solución de (1.26). Obtenemos una contradicción. □

Observación. El vector objetivo todavía es ortogonal a la restricción presupuestaria. No obstante, es más fácil de manejar en caso de usar cortes como en Ramificación y Acotamiento. Si k^* no es entero en la solución al problema relajado, la única manera de ramificar es con el nuevo corte $k \leq \lfloor k^* \rfloor$, pues el otro corte $k \geq \lceil k^* \rceil$ generará un subproblema infactible. Evidentemente, en la sección de análisis de resultados haremos comparaciones de tiempo en los tiempos de terminación entre esta formulación y la original.

La formulación del problema equivalente en el Teorema anterior resulta ser más interesante. Podemos desacoplar esta nueva formulación de manera que obtengamos un problema de maximización y otro de factibilidad. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las entradas de A y $\boldsymbol{b}$ son enteras. Como los renglones de A son linealmente independientes, de [Sch98] sabemos que tiene una única factorización de Hermite. Es decir, existe una matriz $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ unimodular que satisface $AU = [H, \boldsymbol{0}]$, donde $H \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ es triangular inferior y no singular.

Consideremos el subproblema de maximización

$$\max_{k\in\mathbb{Z}} k, \tag{1.27a}$$

$$\text{s.a.} \quad k \leq \eta, \tag{1.27b}$$

$$A\tilde{\boldsymbol{y}} = kA\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{b}, \tag{1.27c}$$

donde

$$\tilde{\boldsymbol{y}} \coloneqq U \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}_m \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = U_m\tilde{\boldsymbol{y}}_m + U_{n-m}\tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \in \mathbb{Z}^n,$$

con $\tilde{\boldsymbol{y}}_m \in \mathbb{Z}^m$ y $\tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \in \mathbb{Z}^{n-m}$. Así también, U_m y U_{n-m} denotan las primeras m columnas y últimas $n-m$ columnas de U, respectivamente. Observemos que para toda $k \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$AU \begin{pmatrix} H^{-1}(kA\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{b}) \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = [H, \boldsymbol{0}] \begin{pmatrix} H^{-1}(kA\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{b}) \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = kA\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{b}, \tag{1.28}$$

lo cual sugiere definir $\tilde{\boldsymbol{y}}_m \coloneqq H^{-1}(\boldsymbol{b} - kA\boldsymbol{w})$. No obstante, también debemos asegurarnos que este vector sea entero. Observemos que $\tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m}$ queda libre, así que en realidad este subproblema tiene dimensión $m+1$. Definimos el conjunto de factibilidad

$$F \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} : H^{-1}\left(kA\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{b}\right) \in \mathbb{Z}^m\} \cap \{k \in \mathbb{Z} : k \leq \eta\}. \tag{1.29}$$

Observación. Para que F sea no vacío, debe existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\det(H) \mid (k\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{b}_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, donde $\boldsymbol{a}_j^T$ denota el j-ésimo vector renglón de A. Es decir, una condición suficiente y necesaria para la no vacuidad de F es

$$\det(H) \mid \operatorname{mcd}\left\{k\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{\omega} - b_1, \ldots, k\boldsymbol{a}_m^T\boldsymbol{\omega} - b_m\right\}.$$

Ahora bien, H es triangular inferior e invertible, por lo que $\det(H) \neq 0$ es el producto de los elementos $h_1, \ldots, h_m$ en su diagonal. Entonces $h_j \mid \det(H)$ para todo $j \in \{1, \ldots m\}$ y una condición necesaria para la no vacuidad de F es

$$\operatorname{mcm}\{h_1, \ldots, h_m\} \mid \operatorname{mcd}\left\{k\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{\omega} - b_1, \ldots, k\boldsymbol{a}_m^T\boldsymbol{\omega} - b_m\right\}.$$

Si F es vacío, deducimos que este subproblema es infactible y por lo tanto (1.26) también lo es. Supongamos, pues, que $F \neq \emptyset$. No es difícil observar que F tiene un elemento maximal k^* y que este elemento es la solución al subproblema (1.27). Luego, dada esta solución $k^* \in \mathbb{Z}$, buscamos resolver el subproblema de factibilidad

$$M\boldsymbol{t} = \tilde{\boldsymbol{y}}, \tag{1.30a}$$
$$M\boldsymbol{t} \geq -k^*\boldsymbol{\omega}. \tag{1.30b}$$

Observemos que tenemos un sistema de n ecuaciones lineales con $2n - m - 1$ incógnitas, por lo que tendremos que lidiar con $n - m - 1$ parámetros libres:

$$M\boldsymbol{t} = \tilde{\boldsymbol{y}} = U_m\tilde{\boldsymbol{y}}_m + U_{n-m}\tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \iff [M, -U_{n-m}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m}\end{pmatrix} = U_m\tilde{\boldsymbol{y}}_m. \tag{1.31}$$

Si consideramos ahora la forma normal de Smith de esta matriz por bloques, obtenemos dos matrices unimodulares $S \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ y $T \in \mathbb{Z}^{(2n-m-1)\times(2n-m-1)}$ que satisfacen

$$S[M, -U_{n-m}]T = D \in \mathbb{Z}^{n\times(2n-m-1)},$$

donde D es una matriz diagonal cuyas n primeras entradas son distintas de cero y las restantes $n-m-1$ son cero. Si multiplicamos S por la izquierda en ambos lados de la ecuación (1.31), tenemos

$$DT^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m}\end{pmatrix} = SU_m\tilde{\boldsymbol{y}}_m.$$

Si d_i no divide a $(SU_m\tilde{\boldsymbol{y}}_m)_i$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$, encontramos que la primera ecuación del subproblema (1.30) no tiene solución en los enteros, lo que implica que la elección de k^* fue la incorrecta para asegurar soluciones enteras a este subproblema. De ser este el caso, redefinimos $F \leftarrow F \setminus \{k^*\}$. Si F ahora es vacío, entonces (1.26) es infactible, de caso contrario escogemos el nuevo elemento de maximal de F y repetimos el proceso.

Supongamos, pues que $d_i \mid (SU_m\tilde{\boldsymbol{y}}_m)_i$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$, por lo que obtenemos n soluciones enteras $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}^n$ y $n-m-1$ variables libres $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^{n-m-1}$:

$$T^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, nuestro vector $\boldsymbol{t}$ es una función lineal de $\boldsymbol{s}$, es decir, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{s})$. Hasta este punto el proceso no ha sido complicado, pues nos hemos encargado de resolver sistemas de ecuaciones lineales diofantinas. En términos del problema original (1.25), hemos encontrado los vectores $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}) \coloneqq k^*\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}(\boldsymbol{s})$ que maximizan la utilidad y que satisfacen todas las restricciones excepto, posiblemente, las de no negatividad.

La dificultad entra en juego cuando queremos determinar el vector de variables libres $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^{n-m-1}$ que hagan que $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{s})$ satisfaga la desigualdad en el subproblema (1.30). Debilitando más esta condición, nos gustaría determinar si el conjunto

$$\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^{n-m-1} : M\boldsymbol{t}(\boldsymbol{s}) \geq -k^*\boldsymbol{\omega}\}$$

es vacío o no. En esta versión debilitada no nos interesa saber qué elementos contiene o tan siquiera cuántos elementos contiene. Es sabido que los programas enteros tales como (1.25) o (1.26) son problemas difíciles de resolver, en el sentido de que no es conocido si se pueden resolver en tiempo polinomial. A lo largo de este capítulo, no obstante, hemos resuelto todos los problemas en tiempo polinomial[2]. La única deducción posible, entonces, es que el problema de determinar las variables $\boldsymbol{s}$, o bien de determinar cuántas hay, o bien de determinar su existencia, son todos problemas difíciles de resolver.

A pesar de lo anterior, hay dos casos donde la dificultad se reduce drásticamente. El caso menos interesante es cuando $m = n-1$, de manera que no hay parámetros libres. Esto se debe a que el politopo factible resultante es un semirrayo o un segmento de línea. Al momento de escoger la k^*-ésima capa entera, estamos agregando la ecuación $k^* = k$, con lo que obtenemos un sistema lineal entero de n ecuaciones con n incógnitas, y entonces la solución es única. Basta entonces verificar que este único vector $\boldsymbol{t}$ satisface la desigualdad en el subproblema (1.30). El caso un poco más interesante se obtiene cuando $m = n-2$. De esta manera obtenemos un solo parámetro, con lo que podemos determinar rápidamente la existencia o inexistencia de un intervalo de factibilidad.

Ejemplo 1.25. *Consideremos el problema con $n = 2$ variables y $m = 1$ restricciones*

$$\begin{aligned} \text{máx } & x - y, \\ \textit{s.a.} \quad & x - y \leq 12, \\ & 3x + 5y = 25, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

En este caso tenemos $A = (3,5), \boldsymbol{b} = 25$, y también $\boldsymbol{q} = (1,-1)^T$, al igual que $\eta = 12$. De (1.20) y (1.21) obtenemos

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

[2]En [Sch98] se muestra que calcular el máximo común divisor, resolver ecuaciones lineales diofantinas, y calcular las factorizaciones tanto de Hermite como de Smith son operaciones acotadas por tiempo polinomial.

De la forma normal de Hermite de A tenemos

$$H = 1, U = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

y de la forma normal de Smith de $[M, -U_m]$,

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $H = 1$, se sigue que $H^{-1}(\boldsymbol{b} - kA\boldsymbol{\omega}) = 25 - 3k$ es entero para todo $k \in \mathbb{Z}$. Así, el conjunto factible F (c.f. 1.29) está dado por

$$F = \mathbb{Z} \cap \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 12\} = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq \eta = 12\}.$$

Entonces escogemos $k^* = 12$ por ser el elemento maximal de F. Así, encontramos

$$SU_m \tilde{\boldsymbol{y}}_m = SU_m \left(H^{-1}(\boldsymbol{b} - k^* A\boldsymbol{\omega})\right) = \begin{pmatrix} 22 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Observemos que la segunda entrada de $SU_m \tilde{\boldsymbol{y}}_m$ no es divisible por $D_{22} = 8$. Así, el subproblema (1.30) no es factible para la elección de k^* previa. Escogemos el segundo elemento de F más grande, con lo que tenemos $k^* \leftarrow 11$. En este caso obtenemos $SU_m \tilde{\boldsymbol{y}}_m = (-16, -24)^T$, por lo que sí hay soluciones enteras. Luego, se debe satisfacer,

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que $(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m}) = (1, 3)$. Verificamos factibilidad:

$$M\boldsymbol{t} + k^*\boldsymbol{\omega} = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} \ngeq \mathbf{0}.$$

Ahora la elección de k^* dio un punto entero pero con una entrada negativa. Seguimos este procedimiento hasta llegar a $k^* \leftarrow 3$. En este caso obtenemos $(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m}) = (-2, -6)^T$, de donde

$$M\boldsymbol{t} + k^*\boldsymbol{\omega} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Concluimos diciendo que $(k^*, \boldsymbol{t}) \coloneqq (3, -2)$ es el óptimo del programa (1.26) y entonces $(x, y) = (5, 2)$ es el óptimo de (1.25).

Ejemplo 1.26. *Ahora consideremos el problema con $n = 3$ variables y $m = 1$ restricciones*

$$\begin{aligned} \text{máx } & x - y + 2z, \\ s.a. \quad & x - y + 2z \leq 10 \\ & 3x + 4y - z = 15 \\ & x, y, z \geq 0. \end{aligned}$$

En este caso tenemos $A = (3, 4, -1), \boldsymbol{b} = 15$*, y también* $\boldsymbol{q} = (1, -1, 2)^T$*, al igual que* $\eta = 10$*. De (1.20) y (1.21) obtenemos*

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la forma normal de Hermite de A tenemos

$$H = 1, U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

y de la forma normal de Smith de $[M, -U_m]$*,*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, observemos que $H = 1$ *y por lo tanto* $F = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 10\}$*. Seguimos exactamente el mismo procedimiento que en el Ejemplo 1.25 hasta llegar a* $k^* \leftarrow 5$*. Encontramos que se satisface*

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $s \in \mathbb{Z}$ *es la única variable libre. En este caso podemos determinar rápidamente un intervalo de existencia: tenemos* $M\boldsymbol{t} \geq -k^*\boldsymbol{\omega}$ *si y solo si*

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue inmediatamente que $s \in \{-5, -4, \ldots, 0\}$*. Sustituyendo en* $\boldsymbol{t}$ *y transformando a* $\boldsymbol{x}$*, encontramos que*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

son las seis soluciones del problema. Todas alcanzan un nivel de utilidad $k^* = 5$*.*

Si el programa (1.25) es factible, entonces el programa (1.26) también lo es. A partir de nuestro procedimiento, eventualmente encontraremos un par $(k^*, \boldsymbol{t}^*)$ que resuelva tanto el subproblema de maximización (1.27) como el de factibilidad (1.30).

Ahora bien, son dos las maneras en las que nuestro problema sea infactible. Puede que nuestro conjunto de factibilidad F sea vacío y por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales

(1.25c) sea inconsistente. O bien, puede ser que F tenga cardinalidad infinita pero para ninguno de sus elementos se satisfaga el subproblema de factibilidad.

Esto último puede ocurrir cuando el sistema de ecuaciones siempre tiene solución pero todas ellas son negativas. En efecto, si en el Ejemplo 1.25 reemplazamos el lado derecho de la igualdad $\boldsymbol{b} = 25$ por $\boldsymbol{b} = -4$, nos encontramos en aquella situación.

En conclusión, para asegurar terminación en tiempo finito, cualquier algoritmo basado en este método debe asegurarse primero que el conjunto de factibilidad F tiene un número finito de puntos. Este caso lo estudiamos en la siguiente sección.

1.2.3. Eliminando la restricción presupuestaria

Consideremos ahora el problema

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n} \quad & \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}, && \text{(1.32a)} \\ \text{s.a.} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, && \text{(1.32b)} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

Evidentemente, si su programa relajado tiene un valor objetivo u^* finito, podemos agregar la restricción presupuestaria $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u^*$ a este problema de manera válida. Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que este programa es equivalente a (1.25) siempre que su valor objetivo sea finito. Consecuentemente, podemos utilizar las herramientas desarrolladas en la sección pasada para resolver este problema entero.

Es más, supongamos que el politopo asociado al problema relajado es acotado y no vacío. Entonces tanto el problema de maximización como de minimización tienen valores objetivos finitos. Llamemos a estos valores ℓ^* y u^*, respectivamente. Ahora la restricción

$$\ell^* \leq \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u^*$$

es válida para el problema (1.32). De la misma manera que η parametriza la primera capa entera que satisface el presupuesto, podemos definir análogamente la última capa que satisface el presupuesto. Usando el mismo razonamiento que en el Lema 1.13, encontramos que esta capa está parametrizada por $\tau \coloneqq \lceil \ell^*/m \rceil$ si m es positiva. Así pues, al definir nuestro conjunto de factibilidad F como

$$F \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} : H^{-1}\left(kA\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{b}\right) \in \mathbb{Z}^m\} \cap \{k \in \mathbb{Z} : \tau \leq k \leq \eta\},$$

podemos replicar las mismas técnicas que en la sección pasada. Pero además, F es un conjunto finito y por lo tanto tenemos terminación en tiempo finito para este caso. Es decir, cualquier algoritmo basado en los métodos desarrollados en la sección pasada podrá decidir en tiempo finito si el problema es factible o no. En caso de que sí lo sea entonces terminará con la solución óptima.

Existen varios algoritmos para resolver el problema relajado de (1.32) en su versión general. Es cierto que el método del simplex es el más utilizado, a pesar de tener una complejidad algorítmica no acotada polinomialmente. También es cierto que existen métodos polinomiales para resolver este problema, tales como el método elipsoidal o el algoritmo

de Karmarkar. Pero más interesante es el hecho de que ya existen cotas superiores para ciertas instancias de estos problemas, por ejemplo, en el caso del Problema de la Mochila, [MT90] provee una cota superior razonable, y ciertamente el valor de 0 es una cota inferior justa. Mucho hablaremos de este problema en el Capítulo 3. No obstante, el autor considera prudente dedicar el siguiente capítulo para el caso infinito.

Capítulo 2

El caso infinito

Recordemos del Teorema 1.14 que si $\boldsymbol{q}_i < 0$ para alguna $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces la η-ésima capa entera contiene un número infinito de puntos factibles. A partir de esto somos capaces de resolver el automáticamente el problema de decisión de determinar si un escalar k^* es el valor óptimo del programa (1.1).

Corolario 2.1. *Si $\boldsymbol{q}_i < 0$ para algún $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces el valor óptimo del programa (1.1) es $m\eta$. Además, si $m > 0$, entonces η es el múltiplo de m más grande que satisface $m\eta \leq u$.*

Demostración. Por el Teorema 1.14 sabemos que existen una infinidad de soluciones en la η-ésima capa entera, así que sea $\boldsymbol{x}^*$ una de ellas. Entonces $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}^* = \eta$, pero $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{q}$, por lo que obtenemos $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}^* = m\eta$.

Ahora bien, recordemos que $\eta = \lfloor u/m \rfloor$ si $m > 0$ por el Lema 1.13. Supongamos que $\xi \in \mathbb{Z}$ satisface $m\xi \leq u$ y también $\lfloor u/m \rfloor < \xi$. Luego,

$$m \left\lfloor \frac{u}{m} \right\rfloor < m\xi \leq u \implies \left\lfloor \frac{u}{m} \right\rfloor < \xi \leq \frac{u}{m},$$

pero esto contradice las propiedades de la función piso. □

Observación. En el capítulo anterior mencionamos que siempre supondremos que $m > 0$, es decir, que la primera entrada de nuestro vector esencialmente entero $\boldsymbol{p}_1$ es no negativo. Sin embargo, en caso de que $m < 0$, es posible demostrar también que $\eta \coloneqq \lceil u/m \rceil$ es ahora el múltiplo más chico de m que satisface $m\eta \geq u$. Este es uno de los muchos casos en los que las desigualdades se invierten y la función piso se reemplaza por la función techo en caso de que m sea negativo.

Una vez resuelto el problema de decisión, podemos preguntarnos concretamente cómo obtener el punto óptimo. Del capítulo anterior sabemos que debemos resolver la ecuación lineal diofantina $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = \eta$. Pero

$$\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = \eta\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{q}^T M\boldsymbol{t} = \eta,$$

para toda $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Así que debemos encontrar condiciones suficientes en $\boldsymbol{t}$ para asegurar la no negatividad de $\boldsymbol{x}$. Recordemos que $\boldsymbol{t}_i$ debe satisfacer (1.14). En términos del vector $\boldsymbol{\omega}$, tenemos

$$\boldsymbol{t}_i \geq \left\lceil -\frac{\boldsymbol{\omega}_i}{g_{i+1}} \right\rceil, \tag{2.1}$$

para todo $i \in \{2, \dots, n-2\}$.

Ahora bien, recuperamos de (1.13) que las últimas dos soluciones de la ecuación $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}$ están dadas por

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{n-1} = \omega_{n-1}x'_{n-1} + \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}\boldsymbol{t}_{n-1}, \\ \boldsymbol{x}_n = \omega_{n-1}x'_n - \frac{\boldsymbol{q}_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}\boldsymbol{t}_{n-1}, \end{cases} \tag{2.2}$$

Para que se satisfagan las condiciones de no negatividad de $\boldsymbol{x}_{n-1}$ y de $\boldsymbol{x}_n$, encontramos que la variable libre $\boldsymbol{t}_{n-1} \in \mathbb{Z}$ debe cumplir ciertas desigualdades según los signos de $\boldsymbol{q}_{n-1}$ y de $\boldsymbol{q}_n$. Definamos, por conveniencia,

$$b_1 \coloneqq -\frac{\omega_{n-1}x'_{n-1}}{\boldsymbol{q}_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g_j = -\frac{\boldsymbol{\omega}_{n-1}}{\boldsymbol{q}_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g_j, \tag{2.3a}$$

$$b_2 \coloneqq \frac{\omega_{n-1}x'_n}{\boldsymbol{q}_{n-1}} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g_j = \frac{\boldsymbol{\omega}_n}{\boldsymbol{q}_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g_j, \tag{2.3b}$$

Entonces se verifica que

$$t_{n-1} \in \begin{cases} \big[\lceil b_1 \rceil, \lfloor b_2 \rfloor\big] & 0 < \boldsymbol{q}_{n-1}, \boldsymbol{q}_n, \\ \big[\lceil b_2 \rceil, \lfloor b_1 \rfloor\big] & \boldsymbol{q}_{n-1}, \boldsymbol{q}_n < 0, \\ \big[\lceil \max\{b_1, b_2\} \rceil, \infty\big) & \boldsymbol{q}_{n-1} < 0 < \boldsymbol{q}_n, \\ \big(-\infty, \lfloor \min\{b_1, b_2\} \rfloor\big] & \boldsymbol{q}_n < 0 < \boldsymbol{q}_{n-1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Lema 2.2. *Existe un vector $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ que satisface ambos (2.1) y (2.4).*

Demostración. Tenemos cuatro casos, pero observemos que los dos en donde $\boldsymbol{q}_{n-1}$ y $\boldsymbol{q}_n$ tienen signo distinto no son difíciles: si $\boldsymbol{q}_{n-1} < 0 < \boldsymbol{q}_n$, entonces el vector $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ dado por

$$\boldsymbol{t}_i \coloneqq \begin{cases} \left\lceil -\frac{\boldsymbol{\omega}_i}{g_{i+1}} \right\rceil, & i < n-1, \\ \lceil \max\{b_1, b_2\} \rceil, & i = n-1, \end{cases}$$

satisface ambos (2.1) y (2.4). El caso $\boldsymbol{q}_n < 0 < \boldsymbol{q}_{n-1}$ es completamente similar.

Ahora bien, supongamos que $0 < \boldsymbol{q}_{n-1}, \boldsymbol{q}_n$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\boldsymbol{q}_{n-2} < 0$. En efecto, como $\boldsymbol{q}_i < 0$ para alguna $i \in \{2, \dots, n-2\}$, somos capaces permutar las entradas i y $n-2$ de $\boldsymbol{q}$ en el problema (1.1). Observemos que

$$\begin{aligned} b_2 - 1 \leq \lfloor b_2 \rfloor \leq b_2, \\ b_1 \leq \lceil b_1 \rceil \leq b_1 + 1. \end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$b_2 - b_1 - 2 \leq \lfloor b_2 \rfloor - \lceil b_1 \rceil \leq b_2 - b_1.$$

Así pues, para que el intervalo $[\lceil b_1 \rceil, \lfloor b_2 \rfloor]$ esté bien definido, es suficiente con mostrar que existe un escalar ω_{n-1} que satisfaga $b_2 - b_1 \geq 2$. Tenemos

$$b_2 - b_1 = \omega_{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} g_j \cdot \left(\frac{x'_{n-1}}{\boldsymbol{q}_n} + \frac{x'_n}{\boldsymbol{q}_{n-1}} \right) \tag{2.5}$$

Como x'_{n-1} y x'_n son coeficientes de Bézout asociados a los dos coeficientes en (1.12) que son coprimos, se cumple

$$\frac{\boldsymbol{q}_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} x'_{n-1} + \frac{\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} x'_n = 1,$$

lo que implica que

$$\frac{x'_{n-1}}{\boldsymbol{q}_n} + \frac{x'_n}{\boldsymbol{q}_{n-1}} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}{\boldsymbol{q}_{n-1}\boldsymbol{q}_n}.$$

Sustituyendo en (2.5),

$$b_2 - b_1 = \omega_{n-1} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n-1} g_j^2}{\boldsymbol{q}_{n-1}\boldsymbol{q}_n} \geq 2 \iff \omega_{n-1} \geq 2\frac{\boldsymbol{q}_{n-1}\boldsymbol{q}_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j^2}. \tag{2.6}$$

De (1.11) sabemos que

$$\omega_{n-1} = \omega_{n-2}\omega'_{n-1} - \frac{\boldsymbol{q}_{n-2}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j}\boldsymbol{t}_{n-2}.$$

Sustituyendo en (2.6), usando el hecho de que $\boldsymbol{q}_{n-2} < 0$ y despejando t_{n-2}, encontramos que $\lceil b_2 \rceil - \lfloor b_1 \rfloor \geq 0$ si

$$\boldsymbol{t}_{n-2} \geq \frac{\omega_{n-2}\omega'_{n-1}}{\boldsymbol{q}_{n-2}} \prod_{j=1}^{n-2} g_j - 2\frac{\boldsymbol{q}_{n-1}\boldsymbol{q}_n}{\boldsymbol{q}_{n-2}g_{n-1}^2} \prod_{j=1}^{n-2} g_j^{-1}$$

Llamemos c al lado derecho de esta desigualdad. Así pues, definimos el vector $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ de manera que

$$\boldsymbol{t}_i \coloneqq \begin{cases} \left\lceil -\frac{\boldsymbol{\omega}_i}{\boldsymbol{q}_i} \right\rceil, & i < n-2, \\ \left\lceil \text{máx}\left\{ -\frac{\boldsymbol{\omega}_i}{\boldsymbol{q}_i}, c \right\} \right\rceil, & i = n-2, \\ \lceil b_1 \rceil, & i = n-1. \end{cases}$$

Se verifica que $\boldsymbol{t}$ satisface ambos (2.1) y (2.4). Finalmente, el caso $\boldsymbol{q}_{n-1}, \boldsymbol{q}_n < 0$ es completamente similar. □

En síntesis, por el Lema 2.2 sabemos que existe un vector $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ que satisface ambos (2.1) y (2.4). Al definir $\boldsymbol{x}^* \coloneqq \eta\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}$, entonces $\boldsymbol{x}$ es una solución no negativa de $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = \eta$. Por el Teorema 1.14 se sigue que $\boldsymbol{x}^*$ es el óptimo de (1.1).

En la práctica es mejor usar la relación de recurrencia (1.11) y "construir" las entradas $\boldsymbol{x}_i$ al mismo tiempo que definimos $\boldsymbol{t}_i$ de manera que satisfaga (1.14) y (2.3). Si procedemos de esta forma no tenemos que encontrar primero $\boldsymbol{\omega}$ y M, determinar $\boldsymbol{t}$ y luego recuperar $\boldsymbol{x}$. A partir de esto obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *El problema (1.1) se puede resolver a través de encontrar la solución de una ecuación lineal diofantina en n incógnitas.*

2.1. Análisis de resultados

Una consecuencia del Teorema 2.3 es que la complejidad algoritmítica del problema (1.1) es lineal en la dimensión n siempre y cuando $\boldsymbol{q}_i < 0$ para alguna $i \in \{2, \ldots, n\}$. En esta sección describimos un algoritmo cuyo tiempo de terminación es $\mathcal{O}(n)$. A través de los resultados obtenidos previamente, somos capaces de mostrar que nuestro algoritmo es correcto. Finalmente, implementamos nuestro algoritmo en el lenguaje de programación Python y comparamos sus tiempos de terminación con los de la implementación de Ramificación y Acotamiento en la librería PuLP.

Capítulo 3

El caso finito

Debido a que $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$, resulta valioso mencionar que el problema (1.1) es una instancia particular del famoso Problema de la Mochila

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^n} \quad & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}, && \text{(3.1a)} \\ \text{s.a.} \quad & \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} \leq c, && \text{(3.1b)} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, && \text{(3.1c)} \end{aligned}$$

donde los vectores positivos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n$ son conocidos como vector de útiles y vector de pesos, respectivamente. Puesto que no acotamos $\boldsymbol{x}$, el problema recibe el nombre de Problema de la Mochila no Acotado. Pero también como $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$, el problema también puede ser considerado como un Problema de la Suma de Conjuntos no Acotado. En nuestro análisis de resultados comparamos los tiempos de terminación de nuestro algoritmo con los de Ramificación y Acotamiento, `MTU2` ([MT90]), y una formulación alternativa de programación dinámica.

3.1. Análisis de capas enteras

De acuerdo al Teorema 1.14, el número de puntos factibles sobre la k-ésima capa entera es finito y, por lo tanto, puede ser cero. No obstante, al igual que en la sección anterior, somos capaces de caracterizar todos los puntos enteros que se encuentran en cualquier capa entera. Consecuentemente, si determinamos que no hay ningún punto factible en la k-ésima capa entera, descendemos a la $(k-1)$-ésima capa entera y realizamos el mismo análisis.

En la primera parte de esta sección determinamos una cota superior para el número de capas enteras que visitamos y analizamos el comportamiento a medida que el presupuesto u aumenta. En la segunda parte de esta sección mostramos que si el presupuesto u es suficientemente grande, entonces la solución de (1.1) sí se encuentra sobre la η-ésima capa entera. Este resultado es análogo al caso infinito del Teorema 1.14. Finalmente, en la tercera parte de esta sección discutimos brevemente sobre la complejidad algorítmica de encontrar la solución.

Lema 3.1. *Sea*

$$i^* \coloneqq \arg\max \left\{ \frac{1}{\boldsymbol{q}_1}, \ldots, \frac{1}{\boldsymbol{q}_n} \right\}, \tag{3.2}$$

y definamos

$$\tau \coloneqq \left\lfloor \left\lfloor \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \right\rfloor \frac{\boldsymbol{q}_{i^*}}{m} \right\rfloor. \tag{3.3}$$

Entonces la solución del problema (1.1) se encuentra en una capa entera parametrizada por $k \in \{\eta, \eta - 1, \ldots, \tau\}$.

Demostración. Consideremos el vector

$$\boldsymbol{v} \coloneqq \left\lfloor \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \right\rfloor \boldsymbol{e}_{i^*},$$

y observemos que $\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$, pues $\boldsymbol{q} > \boldsymbol{0}$ y supusimos que el problema (1.1) es factible, por lo que $u \geq 0$. Así también, tenemos

$$\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{v} = \left\lfloor \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \right\rfloor \boldsymbol{q}_{i^*} \leq \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \boldsymbol{q}_{i^*} = u,$$

y entonces $\boldsymbol{v}$ es factible. De aquí se sigue que este vector provee una cota inferior para el problema (1.1). Así pues, todo vector $\boldsymbol{x}$ candidato a ser el óptimo del problema satisface

$$\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x}}{m} \geq \left\lfloor \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \right\rfloor \frac{\boldsymbol{q}_{i^*}}{m}.$$

Nos interesa calcular el número entero τ más pequeño tal que todo punto sobre la capa entera $H_{\boldsymbol{q}, k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ con $k \in \{\tau, \tau + 1, \ldots\}$ satisfaga esta desigualdad. Del Lema 1.11, toda k debe satisfacer

$$k \left\|\boldsymbol{q}\right\|^{-2} = \frac{\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x}}{\left\|\boldsymbol{q}\right\|^2} \geq \left\lfloor \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \right\rfloor \frac{\boldsymbol{q}_{i^*}}{m} \frac{1}{\left\|\boldsymbol{q}\right\|^2},$$

y por lo tanto

$$\tau = \left\lfloor \left\lfloor \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \right\rfloor \frac{\boldsymbol{q}_{i^*}}{m} \right\rfloor.$$

Finalmente, recordemos que k es la primera capa en satisfacer la restricción presupuestaria. Por lo tanto, el óptimo del problema (1.1) se encuentra en una capa parametrizada por $k \in \{\eta, \eta - 1, \ldots, \tau\}$. □

Observación. Siempre se cumple que $\tau \leq k$. En efecto,

$$\left\lfloor \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \right\rfloor \boldsymbol{q}_{i^*} \leq \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \boldsymbol{q}_{i^*} = u,$$

como $m > 0$, tenemos

$$\left\lfloor \frac{u}{\boldsymbol{q}_{i^*}} \right\rfloor \frac{\boldsymbol{q}_{i^*}}{m} \leq \frac{u}{m}.$$

Aplicando la función piso a ambos lados de la desigualdad encontramos que $\tau \leq k$.

Sea $k \in \{\eta, \eta - 1, \ldots, \tau\}$. Sabemos de la sección de Fundamentos en el primer capítulo que deseamos resolver la ecuación lineal diofantina

$$\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{q}_n \boldsymbol{x}_n = k.$$

Implementamos la misma estrategia para plantear una formulación recursiva,

$$\frac{q_1}{g_1} \boldsymbol{x}_1 + g_2 \omega_2 = \omega_1.$$

No obstante, en este caso podemos interpretar ω_2 de tal manera que obtengamos más información. Así como $\omega_1 \coloneqq k$ es el presupuesto disponible en un inicio, ω_2 es el presupuesto disponible después de utilizar parte de él para adquirir $\boldsymbol{x}_1 \geq 0$ unidades. Por lo tanto, es posible agregar la restricción $\omega_2 \geq 0$. Similarmente, en el i-ésimo paso de la formulación recursiva, somos capaces de agregar la restricción de que el presupuesto restante ω_{i+1} sea no negativo. Combinando esto con la no negatividad de $\boldsymbol{x}_i$, obtenemos de (1.11),

$$\left\lceil -\frac{\omega_i x_i'}{g_{i+1}} \right\rceil \leq \boldsymbol{t}_i \leq \left\lfloor \frac{\omega_i \omega_{i+1}'}{\boldsymbol{q}_i} \prod_{j=1}^{i} g_j \right\rfloor. \tag{3.4}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Después, como $0 < \boldsymbol{q}_{n-1}, \boldsymbol{q}_n$, se sigue de (1.13),

$$\left\lceil -\frac{\omega_{n-1} x_{n-1}'}{\boldsymbol{q}_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j \right\rceil \leq \boldsymbol{t}_{n-1} \leq \left\lfloor \frac{\omega_{n-1} x_n'}{\boldsymbol{q}_{n-1}} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j \right\rfloor. \tag{3.5}$$

Consecuentemente, el número de elecciones que podemos hacer para $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ es finito. Observemos que una elección de $\boldsymbol{t}_i$ modifica ω_{i+1} y por lo tanto también afecta el intervalo de factibilidad de $\boldsymbol{t}_{i+1}$. Siguiendo con este razonamiento, encontramos que una elección de $\boldsymbol{t}_i$ afecta los intervalos de factibilidad de $\boldsymbol{t}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}$.

Es decir, a pesar de que el óptimo se encuentre sobre la capa entera k que estamos analizando, la elección de los primeros parámetros que realicemos puede afectar el tiempo de terminación de nuestro algoritmo. Hay dos extremos en las posibles estrategias que podemos adoptar para realizar estas elecciones. Para visualizarlo, tenemos que nuestro presupuesto actual ω_i determina el siguiente presupuesto a partir de

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_i = \omega_i x_i' + g_{i+1} \boldsymbol{t}_i, \\ \omega_{i+1} = \omega_i \omega_{i+1}' - \frac{\boldsymbol{q}_i}{\prod_{j=1}^{i} g_j} \boldsymbol{t}_i, \end{cases}$$

donde la primera ecuación indica cuántos elementos de $\boldsymbol{x}_i$ decidimos adquirir a partir del presupuesto actual ω_i.

El primer extremo está en buscar agotar todo nuestro presupuesto disponible en las primeras elecciones de $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_i$. Es decir, adquirimos la mayor cantidad que podamos de los primeros productos. Bajo esta perspectiva, es razonable imponer un orden en $\boldsymbol{q}$ de manera que

$$\boldsymbol{q}_1 \geq \boldsymbol{q}_2 \geq \cdots \geq \boldsymbol{q}_n,$$

por lo que primero adquirimos los artículos más caros. En este caso diremos que $\boldsymbol{q}$ está en orden descendente. Si adoptamos esta estrategia es porque suponemos que el óptimo se concentra en una vecindad de los primeros i artículos. Es decir, si tenemos la creencia de que $\boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ pueden ser aproximadamente cero.

El segundo extremo es esencialmente lo opuesto. Esto no quiere decir que ahora ordenamos $\boldsymbol{q}$ de manera ascendente y escogemos las primera $\boldsymbol{t}_i$ lo más pequeñas posible[1]. Consiste en escoger $\boldsymbol{t}_i$ de manera que se encuentre en el punto medio de sus cotas inferiores y superiores. Es decir, creemos que el óptimo se encuentra en una vecindad del centro de masa de la k-ésima capa entera.

Observemos que, independientemente del caso, si una capa entera no contiene puntos factibles, entonces ambas estrategias agotan todas las elecciones posibles de $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}$. Por lo tanto, los tiempos de terminación de ambas estrategias son iguales para capas enteras que no contienen puntos óptimos. La segunda estrategia, no obstante, es candidata ideal para realizar una búsqueda binaria. Discutimos más sobre esto último en la sección de análisis de resultados.

Lema 3.2. *Sean q y m enteros distintos de cero. Entonces la función $\Delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta(x) \coloneqq \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} \right\rfloor,$$

es periódica con periodo $\operatorname{mcm}\{q, m\}$.

Demostración. Tenemos

$$\Delta(x + \operatorname{mcm}\{q,m\}) = \left\lfloor \frac{x}{m} + \frac{\operatorname{mcm}\{q,m\}}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} + \frac{\operatorname{mcm}\{q,m\}}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} \right\rfloor,$$

pero $q, m \mid \operatorname{mcm}\{q,m\}$, por lo que $\operatorname{mcm}\{q,m\}/m$ y $\operatorname{mcm}\{q,m\}/q$ son enteros. Por las propiedades de la función piso obtenemos los que queremos demostrar:

$$\begin{aligned}
\Delta(x + \operatorname{mcm}\{q,m\}) &= \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \frac{\operatorname{mcm}\{q,m\}}{m} - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} + \frac{\operatorname{mcm}\{q,m\}}{q} \cdot \frac{q}{m} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \frac{\operatorname{mcm}\{q,m\}}{m} - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} \right\rfloor - \frac{\operatorname{mcm}\{q,m\}}{m} \\
&= \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} \right\rfloor \\
&= \Delta(x).
\end{aligned}$$

□

Definición 3.3. *Sea $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^n$ su múltiplo coprimo. Consideremos los parámetros η y τ (c.f. 1.13, 3.3) como funciones del presupuesto u. Entonces decimos que la función $\Delta^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta^*(u) \coloneqq \eta(u) - \tau(u) \tag{3.6}$$

denota el número de capas enteras a revisar dado el presupuesto u.

[1]Si hiciéramos esto es porque creemos que $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i$ son aproximadamente cero, pero entonces podemos permutar estas entradas de manera que se encuentren hasta el final y emplear la primera estrategia.

Si queremos aplicar el Lema 3.2, debemos reducir nuestra atención a vectores $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^n$ distintos de cero. Esto se debe a que debemos asegurar que el múltiplo $m \neq 0$ sea entero[2]. Independientemente del comportamiento periódico de Δ^*, observemos que esta función varía significativamente en ante cambios en m. Esto último implica que el número de capas enteras a revisar depende del número de cifras decimales usadas para especificar $\boldsymbol{p}$.

Ejemplo 3.4. *Si tenemos* $\boldsymbol{p} \coloneqq (9{,}6, 7{,}2, 5{,}6)^T$*, entonces* $m = 0{,}8$ *y por lo tanto el número de capas a revisar dado* $u \coloneqq 119$ *es* $\Delta^*(u) = 14$*. En cambio, si tenemos* $\boldsymbol{p} \coloneqq (9{,}60, 7{,}28, 5{,}68)^T$*, obtenemos* $m = 0{,}08$*, por lo que el número de capas a revisar dado* u *es* $\Delta^*(u) = 1499$*. Es decir, si usamos una cifra decimal más, entonces* $\Delta^*(u)$ *se multiplica por 100, aproximadamente.*

Observaremos en el análisis de resultados que el número de capas enteras que nuestro algoritmo revisa en realidad disminuye a medida que aumenta el presupuesto u. Demostraremos a continuación que para u suficientemente grande, la solución al problema (1.1) se encuentra en la η-ésima capa entera. Este resultado es análogo al caso infinito del Teorema 1.14.

No obstante, necesitamos primero de un par de Definiciones y Lemas preliminares. Para motivar lo que se encuentra a continuación mencionamos lo siguiente. Primero mostramos que existe un punto entero en una vecindad fija de cada punto sobre la k-ésima capa entera. Luego, a medida que aumenta el parámetro k, como la vecindad es fija, debe ser el caso que existe un punto entero no negativo en la vecindad de cualquier otro punto no negativo.

Sea $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ una capa entera. Entonces definimos la bola cerrada sobre esta capa entera con radio $r > 0$ y centro $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ como

$$B_r^{(k)}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \leq r\} \cap H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}. \tag{3.7}$$

Lema 3.5. *Existe* $r > 0$ *tal que la familia de bolas*

$$\left\{ B_r^{(k)}(\boldsymbol{x}) \colon \boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n \right\}$$

es una cubierta de $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$*.*

Demostración. Recordemos del Teorema (1.20) que $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n$ si y solo si $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}$ para algún $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Así, tenemos

$$\left\{ B_r^{(k)}(\boldsymbol{x}) \colon \boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n \right\} = \left\{ B_r^{(k)}(k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}) \colon \boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\}.$$

Por un lado, sabemos que $B_r^{(k)}(k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}) \subseteq H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ para todo punto entero $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Luego, para cualquier $r > 0$ tenemos

$$\bigcup_{\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}} B_r^{(k)}(k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}) \subseteq H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}. \tag{3.8}$$

[2]Es la creencia del autor que este resultado se puede generalizar para múltiplos m racionales, mas esto no agrega demasiado valor en lo que sigue de la tesis.

Ahora bien, sea $\boldsymbol{y}$ un punto sobre la k-ésima capa entera. Como las columnas de M son linealmente independientes, existe $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que

$$\boldsymbol{y} = k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}.$$

Sea $\lfloor \boldsymbol{t} \rceil \in \mathbb{Z}^{n-1}$ el vector resultante de redondear cada entrada de $\boldsymbol{t}$ al entero más cercano. Luego, $\boldsymbol{t} = \lfloor \boldsymbol{t} \rfloor + \boldsymbol{\delta}$, donde $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{n-1}$ satisface $\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty \leq 0{,}5$. Definamos

$$\boldsymbol{x} \coloneqq k\boldsymbol{\omega} + M\lfloor \boldsymbol{t} \rceil \in \mathbb{Z}^{n-1},$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|_2^2 &= \|M\boldsymbol{\delta}\|_2^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |\boldsymbol{\delta}_i|^2 \, \|M\boldsymbol{e}_i\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \|M\boldsymbol{e}_i\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4} \|M\|_F^2 , \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $\|M\|_F$ denota la norma Frobenius de M. Por lo tanto, si definimos

$$r \coloneqq \frac{1}{2} \|M\|_F , \tag{3.10}$$

entonces para todo $\boldsymbol{y} \in H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$, existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ sobre esa misma capa entera tal que $\boldsymbol{y} \in B_r^{(k)}(\boldsymbol{x})$. Por lo tanto,

$$H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}} \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}} B_r^{(k)}(k\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{t}). \tag{3.11}$$

Juntando esto con (3.8) obtenemos lo que queríamos demostrar. □

Ahora bien, denotemos por $\boldsymbol{u}_i$ las intersecciones que tiene la capa entera $H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ con cada uno de los ejes. Es decir,

$$\boldsymbol{u}_i \coloneqq \frac{k}{\boldsymbol{q}_i}\boldsymbol{e}_i, \tag{3.12}$$

y consideremos el símplice σ generado por estos vectores:

$$\sigma \coloneqq \left\{ \theta_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots \theta_n\boldsymbol{u}_n \colon \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}.$$

No es difícil ver que todo punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_{\geq \boldsymbol{0}}$ sobre la k-ésima capa entera también es un elemento de este símplice σ y viceversa.

Ahora bien, nos interesa determinar la existencia de un punto entero sobre σ. De esta manera, tendríamos un punto entero no negativo que satisface la ecuación lineal diofantina $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = k$. Para lograr esto, definimos el baricentro del σ y determinamos una vecindad de este baricentro de manera que esté contenida en el símplice.

Definición 3.6. *Dado un símplice σ generado por $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, definimos su baricentro o centro de masa $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ como*

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \coloneqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i.$$

Observación. El baricentro $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ es un elemento de σ. Esto se debe a que $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ es la combinación convexa de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, donde $\theta_1 = \cdots = \theta_n = \frac{1}{n}$.

Definición 3.7. *Sea σ un símplice y consideremos su baricentro $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Definamos*

$$r_\sigma \coloneqq \text{máx}\{r > 0 \colon B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq \sigma\}. \tag{3.13}$$

Entonces decimos que $\mathcal{C}^{(k)} \coloneqq B_{r_\sigma}^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ es la circunferencia inscrita en σ. A r_σ le llamamos el radio de tal circunferencia.

Definición 3.8. *Sea σ un símplice. Al símplice F_j generado por los vectores $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i \neq j}$ lo llamamos la j-ésima faceta de σ.*

Observación. Si σ es generado por n vectores, entonces tiene $\binom{n}{n-1} = n$ facetas, y cada una es generada por $n-1$ vectores. También se cumple que la frontera del símplice es $F_1 \cup \cdots \cup F_n$.

De (3.12) encontramos que el vector $\boldsymbol{u}_j$ es ortogonal a los vectores $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i \neq j}$, se sigue que su proyección sobre la capa entera $H_{\boldsymbol{q}, k\|\boldsymbol{q}\|_2^{-2}}$ es el vector normal de la faceta F_j. Además, esta proyección apunta hacia el interior del símplice σ. Ahora bien, como $\boldsymbol{q}$ es el vector normal a $H_{\boldsymbol{q}, k\|\boldsymbol{q}\|_2}$, encontramos que la proyección de $\boldsymbol{u}_j$ sobre esta capa entera es

$$\boldsymbol{\mu}_j \coloneqq \boldsymbol{u}_j - \frac{\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{u}_j}{\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q}} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}_j - \frac{k}{\|\boldsymbol{q}\|_2^2} \boldsymbol{q}. \tag{3.14}$$

Denotemos por $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ el vector $\boldsymbol{\mu}_j$ normalizado. Encontramos entonces que cada faceta F_j está contenida en el hiperplano afino

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T \boldsymbol{x} = b_j\} \cap H_{\boldsymbol{q}, k\|\boldsymbol{q}\|_2^{-2}},$$

donde $b_j \coloneqq \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T \boldsymbol{x}$ para algún $\boldsymbol{x} \in F_j$. Luego, como cada vector normal $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ apunta hacia el interior del símplice σ, se sigue que podemos escribirlo como

$$\sigma = \bigcap_{j=1}^{n} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T \boldsymbol{x} \geq b_j\} \cap H_{\boldsymbol{q}, k\|\boldsymbol{q}\|_2^{-2}}.$$

Esta caracterización de σ nos permite demostrar el siguiente Lema.

Lema 3.9. *El radio r_σ de la circunferencia inscrita en σ está dado por*

$$r_\sigma = \min_{1 \leq j \leq n} \{d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)\},$$

donde $d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)$ denota la mínima distancia entre el baricentro $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ y la j-ésima faceta F_j del símplice σ.

Demostración. Observemos que $\boldsymbol{u}_i$ con $i \neq j$ es un vector sobre el símplice σ. Luego, la distancia entre el baricentro y la j-ésima faceta es

$$d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j) = |\hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{u}_i)| = \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{u}_i),$$

pues $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ es un elemento de σ y $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ apunta hacia adentro del símplice.

Mostramos primero que si $r \leq \text{mín}_{1\leq j\leq n}\{d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)\}$, entonces $B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq \sigma$. Así pues, sea $\boldsymbol{x} \in B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$. Observemos que

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T\boldsymbol{x} - b_j &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T\hat{\boldsymbol{\sigma}} - b_j \\ &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j).\end{aligned}$$

Por Cauchy-Schwartz tenemos

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \geq -\left\|\hat{\boldsymbol{\mu}}_j\right\|_2 \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\|_2 = -\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\|_2 \geq -r,$$

y por lo tanto,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T\boldsymbol{x} - b_j \geq -r + d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j) \geq 0,$$

pues $r \leq d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Así, encontramos que, para todo $\boldsymbol{x} \in B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$,

$$\boldsymbol{x} \in \bigcap_{j=1}^{n}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \colon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T\boldsymbol{x} \geq b_j\} \cap H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|_2^{-2}} = \sigma,$$

y por lo tanto $B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq \sigma$. A causa de (3.13) encontramos que $r_\sigma \geq \text{mín}_{1\leq j\leq n}\{d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)\}$.

Ahora bien, supongamos que $r > d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos el punto $\boldsymbol{x} \in F_j$ que satisface $d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j) = d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{x})$. Tal punto existe porque F_j es cerrado. Luego, $\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{x}\|_2 < r$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\|\hat{\boldsymbol{\sigma}} - (\boldsymbol{x} - \varepsilon\hat{\boldsymbol{\mu}}_j)\right\|_2 \leq r,$$

lo que implica que $\boldsymbol{x} - \varepsilon\hat{\boldsymbol{\mu}}_j \in B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$. Sin embargo, tenemos

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\boldsymbol{x} - \varepsilon\hat{\boldsymbol{\mu}}_j) = b_j - \varepsilon\left\|\hat{\boldsymbol{\mu}}_j\right\|_2^2 < b_j,$$

y entonces $\boldsymbol{x} - \varepsilon\hat{\boldsymbol{\mu}} \notin \sigma$. De aquí se sigue que $r_\sigma \leq d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ y, por lo tanto, $r_\sigma \leq \text{mín}_{1\leq j\leq n}\{d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)\}$.

Concluimos, entonces, con

$$r_\sigma = \min_{1\leq j\leq n}\{d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j)\},$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Buscamos expresar el radio r_σ en función de k, por lo que debemos realizar un par de cálculos. Retomemos de la demostración del Lema anterior que la distancia entre el baricentro y la j-ésima faceta está dada por

$$d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j) = \frac{\boldsymbol{\mu}_j^T(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\mu}_j)}{\left\|\boldsymbol{\mu}_j\right\|_2}.$$

Realizando los cálculos, encontramos que

$$\boldsymbol{\mu}_j^T(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{u}_i) = \frac{k^2}{n\boldsymbol{q}_j^2},$$

y también

$$\left\|\boldsymbol{\mu}_j\right\|_2 = k\sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{q}_j^2} - \frac{1}{\|\boldsymbol{q}\|_2^2}}.$$

Sustituyendo valores, obtenemos

$$d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j) = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{q}_j^2\sqrt{\boldsymbol{q}_j^{-2} - \|\boldsymbol{q}\|_2^{-2}}} = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{Q_j},$$

donde definimos Q_j pertinentemente. Finalmente, del Lema 3.9 encontramos que el radio de la circunferencia inscrita en el símplice σ está dado por

$$r_\sigma = \min_{1\leq j\leq n}\{d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, F_j) = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{\max_{1\leq j\leq n}\{Q_j\}} \tag{3.15}$$

Teorema 3.10. *Existe un punto entero sobre el símplice σ para k suficientemente grande.*

Demostración. Consideremos r definida en (3.10). Por el Lema 3.5 sabemos que existe un punto entero $\boldsymbol{x}$ en $B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$. Como la circunferencia $\mathcal{C}^{(k)}$ está inscrita en σ, basta mostrar que existe k suficientemente grande tal que $r \leq r_\sigma$, pues esto implicaría

$$\boldsymbol{x} \in B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq \mathcal{C}^{(k)} \subseteq \sigma.$$

De (3.15) obtenemos que $r \leq r_\sigma$ si y solo si

$$k \geq \frac{n}{2}\|M\|_F \max_{1\leq j\leq n}\{Q_j\}, \tag{3.16}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

De manera inmediata obtenemos los siguientes Corolarios.

Corolario 3.11. *La ecuación lineal diofantina $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = \eta$ tiene soluciones enteras no negativas para η suficientemente grande.*

Corolario 3.12. *El problema (1.1) se puede resolver a partir de una ecuación lineal diofantina para u suficientemente grande.*

Vale la pena hacer un par de observaciones. En primer lugar, de (3.16) parece que podemos concluir que hay una dependencia lineal entre la dimensión n y el lado derecho k. No obstante, la norma $\|M\|_F$ también depende de la dimensión. Para ser más explícitos con respecto a esta dependencia, podemos rescatar de (3.9) la siguiente cota:

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\|M\boldsymbol{e}_i\|_2^2 \leq \frac{n-1}{4}\max_{1\leq j\leq n}\{\|M\boldsymbol{e}_j\|_2^2\},$$

de donde obtendríamos

$$k \geq \frac{n\sqrt{n-1}}{2} \max_{1\leq j\leq n}\{\|M\boldsymbol{e}_j\|_2\} \cdot \max_{1\leq j\leq n}\{Q_j\}.$$

Esta cota, no obstante, es menos ajustada que la propuesta inicialmente.

En segundo lugar, el resultado que obtuvimos es más fuerte de lo que aparenta. Hemos encontrado una cota inferior de manera que podamos asegurar la existencia de soluciones enteras en una vecindad del baricentro $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Este punto no es especial, en realidad podemos realizar el mismo procedimiento enfocándonos en otros puntos del símplice σ para asegurar soluciones en sus respectivas vecindades. Entonces, dependiendo del punto, podemos obtener mejores o peores cotas para k. El punto más interesante es aquel que provee la cota inferior más pequeña[3].

En tercer lugar, la cota (3.16) provee, hasta donde llega el conocimiento del autor, nuevas cotas superiores para los números de Frobenius. De manera resumida, dada una colección de enteros $a_1, \ldots, a_n$ coprimos, el número de Frobenius es el entero F más grande tal que F no pueda ser expresado como una combinación lineal entera no negativa de $a_1, \ldots, a_n$. Un estudio sobre cómo se compara esta colección de cotas con respecto a la literatura existente, si bien interesante, queda fuera del propósito de esta tesis.

En cuarto lugar, cabe mencionar que eventualmente es suficiente con revisar la primera capa entera. No hemos demostrado, empero, que el número de capas enteras a revisar eventualmente decrece en cuanto u aumenta. Observaremos en el análisis de resultados que hay un patrón periódico y decreciente en cuanto al número de capas enteras revisadas. Demostrar que este comportamiento se cumple es mucho más difícil y queda fuera del propósito de esta tesis.

3.1.1. Complejidad algorítmica

Con respecto a la complejidad algorítmica de analizar capas enteras podemos decir lo siguiente. Supongamos que deseamos encontrar todas las soluciones de (1.1). Definamos

$$P_k \coloneqq H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n_{\geq \mathbf{0}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n : \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = k, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}, \tag{3.17}$$

y sea $T(n)$ el tiempo requerido para encontrar todos los puntos en P_k o determinar que este conjunto es vacío. Es razonable suponer que $T(n)$ es exponencial en n. En efecto, cada par $(\boldsymbol{x}_i, \omega_{i+1})$ genera un intervalo de factibilidad $[\boldsymbol{t}_i^{\text{mín}}, \boldsymbol{t}_i^{\text{máx}}]$. Este intervalo ciertamente depende de las elecciones previas de $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{i-1}$, aunque suprimimos esta dependencia en la notación para tener mayor claridad. Para encontrar todos los puntos en P_k, el algoritmo recorre todas las posibilidades:

$$\prod_{i=1}^{\kappa_1} \min_{\boldsymbol{t}_1,\ldots,\boldsymbol{t}_{i-1}} \{\boldsymbol{t}_i^{\text{máx}} - \boldsymbol{t}_i^{\text{mín}}\} \leq T(n) \leq \prod_{i=1}^{\kappa_2} \max_{\boldsymbol{t}_1,\ldots,\boldsymbol{t}_{i-1}} \{\boldsymbol{t}_i^{\text{máx}} - \boldsymbol{t}_i^{\text{mín}}\}, \tag{3.18}$$

donde $1 \leq \kappa_1 \leq n$ es el entero más grande que asegura que $\min_{\boldsymbol{t}_1,\ldots,\boldsymbol{t}_{i-1}}\{\boldsymbol{t}_i^{\text{máx}} - \boldsymbol{t}_i^{\text{mín}}\}$ sea positivo para todo $i \in \{1, \ldots, \kappa_1\}$. Definimos κ_2 de manera análoga. Se cumple que $\kappa_1 \leq \kappa_2$.

[3]El autor tiene razones para sospechar que este punto se encuentra en la intersección de todos los vectores normales a cada faceta F_j.

Sean $\ell_{\text{mín}}, \ell_{\text{máx}}$ las longitudes del intervalo de factibilidad más pequeño y del más grande en todos los niveles, respectivamente. Es decir, definimos

$$\ell_{\text{mín}} \coloneqq \min_{1\leq i\leq \kappa_1} \left\{ \min_{\boldsymbol{t}_1,\ldots,\boldsymbol{t}_{i-1}} \{\boldsymbol{t}_i^{\text{máx}} - \boldsymbol{t}_i^{\text{mín}}\} \right\}, \tag{3.19}$$

$$\ell_{\text{máx}} \coloneqq \max_{1\leq i\leq \kappa_2} \left\{ \max_{\boldsymbol{t}_1,\ldots,\boldsymbol{t}_{i-1}} \{\boldsymbol{t}_i^{\text{máx}} - \boldsymbol{t}_i^{\text{máx}}\} \right\}. \tag{3.20}$$

Si P_k es vacío, se sigue que no existe ningún intervalo factible en el nivel n, lo que implica que $\kappa_2 < n$. En caso contrario, el algoritmo recorre hasta el último nivel, por lo que $\kappa_1 = \kappa_2 = n$. De (3.18), obtenemos

$$\ell_{\text{mín}}^n \leq T(n) \leq \ell_{\text{máx}}^n. \tag{3.21}$$

En el peor de los casos, nuestro algoritmo recorre todas las capas enteras parametrizadas por $\{k, k-1, \ldots, \tau\}$. Se sigue que

$$\text{Tiempo de ejecución} = \mathcal{O}((k-\tau)\cdot T(n)) = \mathcal{O}(c^n), \tag{3.22}$$

para alguna $c > 1$.

Ahora bien, este razonamiento aplica a la modificación de nuestro objetivo en donde decidimos buscar todas las soluciones posibles. En realidad solo nos interesa encontrar un punto óptimo, por lo que podemos concluir que una cota superior para la complejidad de nuestro algoritmo es (3.22). Asímismo, en la práctica encontramos que la diferencia $k - \tau$ es crucial para determinar cuántas capas enteras recorre nuestro algoritmo en el peor de los casos.

Hemos mostrado anteriormente que para u suficientemente grande es suficiente con recorrer una capa. En caso de que u no sea suficientemente grande, observaremos en el análisis de resultados cómo se distribuye el número de capas enteras que en realidad se visitan.

3.2. Análisis de resultados

3.3. Aplicaciones

Bibliografía

[BH09] Robert F. Bodi and Katrin Herr. Symmetries in integer programs. *arXiv: Combinatorics*, 2009.

[Lav14] Carmen Gómez Laveaga. *Álgebra Superior: Curso completo*. Programa Universitario del Libro de Texto. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México, primera edición edition, 2014. Primera reimpresión: julio de 2015.

[MT90] Silvano Martello and Paolo Toth. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc., USA, 1990.

[Sch98] Alexander Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1998.