Reporte

Iñaki Liendo

4 de mayo de 2025

Resumen

Introducción

Preliminares

En términos generales, los prerrequisitos necesarios para un entendimiento suficiente de los resultados expuestos en esta tesis son de álgebra, en particular de divisibilidad y ecuaciones lineales enteras o diofantinas; de álgebra lineal y álgebra lineal numérica; y, evidentemente, de programación lineal. Dividimos, pues, los preliminares en tres subsecciones correspondientes que servirán para refrescar la memoria al lector, pero también para que seamos capaces de hacer referencia a resultados establecidos en la medida en que desarrollamos los nuestros.

Álgebra

Nos enfocamos principalmente en obtener condiciones necesarias y suficientes para encontrar soluciones enteras a problemas del tipo

$$ax + by = c \tag{1}$$

con a, b y c enteros. Este tipo de ecuación, así como sus variantes con más de dos variables, recibe el nombre ecuación lineal entera o, también, de ecuación lineal diofantina.

Teorema 1. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos iguales a cero. La ecuación 1 tiene solución en los enteros si y solo si $\gcd\{a, b\}$ divide a c.*

Teorema 2. *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que a, b no son ambos iguales a cero, y sea (x_0, y_0) una solución particular de la ecuación 1. Entonces todas las soluciones de la ecuación están dadas por*

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t, \\ y = y_0 + \frac{a}{d} \cdot t, \end{cases}$$

donde $d \coloneqq \gcd\{a, b\}$ y $t \in \mathbb{Z}$.

Álgebra lineal

Programación lineal

Metodología

En esta sección se desarolla el algoritmo para resolver prácticamente cualquier tipo de problemas de programación lineal entera (c.f. Definición TODO: mostrar definición). Se divide en tres subsecciones que desarollan el modelo de forma incremental.

En primer lugar, consideraremos el caso cuando las únicas dos restricciones son de no-negatividad ($x \geq 0$) y una presupuestaria ($p^T x \leq u$ para algún escalar u). A partir de ello, generaremos una sucesión de ecuaciones lineales enteras cuya solución provee el óptimo para el problema.

En segundo lugar, nos deshacemos de la restricción de no-negatividad y agregamos m restricciones de la forma $Ax \leq b$ además de la presupuestaria. Este es el parteaguas donde el algoritmo toma relevancia, pero donde también aumenta en complejidad y supone ciertas dificultades con la estabilidad numérica. Discutiremos en extensión posibles modificaciones y/o direcciones que puedan mejorar significativamente la estabilidad de nuestro método.

En tercer lugar, eliminamos la restricción presupuestaria y, por lo tanto, nuestro algoritmo será capaz de resolver problemas lineales enteros en su forma general. Ciertamente esta subsección es la más corta, pues lo único que hacemos es agregar implícitamente una restricción presupuestaria válida resolviendo el problema lineal relajado. Es de esta manera que podremos hacer uso de los resultados obtenidos en la segunda fase.

Ahora bien, para que los siguientes resultados sean válidos, debemos agregar una condición a la clase de vectores objetivo $p \in \mathbb{R}^n$ de tal manera que cumplan con la siguiente definición:

Definición 1. *Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector. Decimos que v es esencialmente entero si existe un vector $w \in \mathbb{Z}^n$ y un escalar $k \in \mathbb{R}$ tal que $v = kw$. De otra forma, decimos que v es esencialmente irracional.*

En otras palabras, decimos que $v \in \mathbb{R}^n$ es esencialmente entero si es un múltiplo real de un vector entero. Por las siguientes razones descartamos a los vectores esencialmente irracionales de nuestro análisis: en primer lugar, porque la motivación de este trabajo es la asignación de recursos que tienen un costo asociado, el cual es necesariamente racional; en segundo lugar, porque todo número representable en cualquier sistema de aritmética finita es necesariamente racional. Independientemente del caso, solamente son de nuestro interés los vectores racionales, pero no es difícil ver que todo vector v en $\mathbb{Q}^n$ es esencialmente entero.

Primera fase

A lo largo de esta subsección hacemos mucho uso de resultados cubiertos en un curso básico de álgebra. No obstante, si el lector no se siente familiarizado con el tema o si desea refrescar su memoria, es recomendable que lea la sección de preliminares.

Sean $p \in \mathbb{R}^n$ un vector no negativo esencialmente entero, $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ un escalar y consideremos el problema lineal entero

$$\text{máx. } p^T x \tag{2}$$
$$\text{s. a. } p^T x \leq u \tag{3}$$
$$x \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}. \tag{4}$$

La idea para resolver este tipo de problemas es la siguiente: cada escalar $t \in \mathbb{R}$ define un hiperplano afino

$$H_{p,t} := \ker\left(x \mapsto p^T x\right) + t \cdot p \tag{5}$$

donde se cumple que todo punto $x \in H_{p,t}$ tiene un mismo nivel de utilidad $p^T x$. Si logramos encontrar puntos factibles para el problema 2 entonces obtendremos una cota inferior para el valor objetivo. Además, si somos capaces de determinar un escalar $t \leq u$ cuyo hiperplano afino asociado $H_{p,t}$ es el último[1] en contener puntos factibles, entonces la colección de esos puntos conforman la solución del problema.

Definición 2. *Sean $v \in \mathbb{R}^n$ un vector y $t \in \mathbb{R}$ un escalar. Decimos que su hiperplano afino asociado $H_{v,t}$ (c. f. 5) es una capa entera si contiene al menos un punto entero.*

Lema 1. *Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector distinto de cero y sea $x \in \mathbb{R}^n$ un punto. Entonces $x \in H_{v,t_x}$, donde $t_x := \frac{v^T x}{||v_2^2||}$.*

Demostración. Ver [BH09]. □

Definición 3. *Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ un múltiplo entero de v. Decimos entonces que el vector*

$$\frac{1}{\gcd\{w_1, \ldots, w_n\}} \cdot (w_1, \ldots, w_n)$$

es un múltiplo coprimo de v.

Para asegurar unicidad, forzamos a que la primera entrada del múltiplo coprimo de v sea positivo. Por el Corolario (TODO: mostrar corolario) tenemos que el múltiplo coprimo de un vector esencialmente entero es, en efecto, un vector coprimo. Cualquier vector coprimo define una familia de capas enteras y, sorprendentemente, esa familia contiene a todos los puntos enteros en el espacio, como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero distinto de cero y sea w su múltiplo coprimo. Entonces la familia de capas enteras $\left\{H_{w,k||w||_2^{-2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ cubre a $\mathbb{Z}^n$.*

Demostración. Ver [BH09]. □

Lema 2. *Sea $p \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ un escalar. Entonces el número de capas enteras entre 0 y u está determinado por*

$$\eta := \left\lfloor u \cdot \frac{\operatorname{lcm}\{p_1, \ldots, p_n\}}{\gcd\{p_1, \ldots, p_n\}} \right\rfloor. \tag{6}$$

Demostración. □

[1] Con esto nos referimos a que no existe un escalar $t < t' \leq u$ tal que $H_{p,t'}$ contiene puntos factibles.

Ahora bien, somos capaces de caracterizar una cubierta de $\mathbb{Z}^n$ a partir de capas enteras asociadas a nuestro vector esencialmente entero p. Además, debido al lema anterior, obtenemos una enumeración finita que nos permite analizar si la k-ésima capa entera contiene puntos factibles para el problema 2. Observemos que si $k \in \{0, \dots \eta\}$, entonces la restricción 3 se satisface automáticamente y, por lo tanto, debemos exigir solamente no-negatividad.

Buscamos resolver la ecuación entera

$$p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = k. \tag{7}$$

Lema 3. *Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector y sea $t \in \mathbb{R}$ un escalar. Sea $H_{v,t}$ su hiperplano afino asociado (c. f. 5). Entonces $H_{v,t} = H_{r \cdot v,t}$ para todo escalar $r \in \mathbb{R}$.*

Demostración. □

Sea q el múltiplo coprimo de p. Debido al lema anterior, resolver la ecuación (7) es equivalente a resolver

$$q_1 x_1 + \cdots q_n x_n = k. \tag{8}$$

Definamos $g_{n-1} \coloneqq \gcd\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$. Así, obtenemos la ecuación equivalente

$$g_{n-1} \left(\frac{q_1}{g_{n-1}} x_1 + \cdots + \frac{q_{n-1}}{g_{n-1}} x_{n-1} \right) + q_n x_n = k.$$

Si dejamos que ω_{n-1} sea lo que está dentro de los paréntesis en el primer término, encontramos que podemos reducir el grado de esta ecuación si, en su lugar, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} g_{n-1}\omega_{n-1} + q_n x_n & = k, \\ \frac{q_1}{g_{n-1}} x_1 + \cdots + \frac{q_{n-1}}{g_{n-1}} x_{n-1} & = \omega_{n-1}. \end{cases} \tag{9}$$

Observemos que $\gcd\{g_{n-1}, q_n\} = 1$ y también $\gcd\{q_1/g_{n-1}, \dots, q_{n-1}/g_{n-1}\} = 1$. Por el Teorema 1 se sigue que ambas ecuaciones tienen una infinidad de soluciones y, por el Teorema 2, podemos generarlas a partir de una solución particular. Como el valor de ω_n depende explícitamente de la primera ecuación, enfoquémonos en ella primero. Consideremos la ecuación auxiliar

$$g_{n-1}\omega_n + q_n x_n = 1. \tag{10}$$

Si $(\omega_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)})$ es una solución particular de esta ecuación auxiliar, entonces $(k\omega_{n-1}^{(0)}, kx_n^{(0)})$ es una solución particular de la primera ecuación de (9). Pero g_{n-1} y q_n son coprimos, y entonces sus coeficientes de Bézout asociados proveen una solución particular de esta ecuación auxiliar. Debido al Teorema 2, obtenemos una enumeración de soluciones de la primera ecuación del sistema (9):

$$\begin{cases} x_n = kx_n^{(0)} - g_{n-1}t_{n-1}, \\ \omega_{n-1} = k\omega_{n-1}^{(0)} + q_n t_{n-1}, \end{cases}$$

donde $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, como $x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0$ por la formulación del problema (2), se debe cumplir $\omega_{n-1} \geq 0$, pues p es un vector con entradas no negativas. Así también, se debe cumplir $x_n \geq 0$. Es de esta forma que obtenemos cotas inferiores y superiores para t_{n-1}:

$$\left\lceil -k \cdot \frac{\omega_{n-1}^{(0)}}{q_n} \right\rceil \leq t_{n-1} \leq \left\lfloor k \cdot \frac{x_n^{(0)}}{g_{n-1}} \right\rfloor. \tag{11}$$

Si no existe $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tal que se satisfaga esta desigualdad, entonces podemos concluir que no existen puntos factibles sobre la k-ésima capa entera y, por lo tanto, podemos continuar la búsqueda de puntos factibles en la $k-1$-ésima capa entera.

En caso contrario, fijamos una t_{n-1} factible, de tal forma que ω_{n-1} está completamente determinada. Es de esta manera que ahora somos capaces de resolver la segunda ecuación del sistema (9). Nos encontramos en una situación completamente análoga a cuando buscábamos resolver (8). No obstante, esta ecuación es de un grado menor. Así pues, continuamos este proceso recursivamente hasta que debamos resolver la ecuación en dos variables

$$ax_1 + bx_2 = \omega_2,$$

para algunos enteros a, b coprimos. Encontramos las soluciones a partir de sus coeficientes de Bézout asociados y también del Teorema 2. Acotamos por medio de (11) y, en caso de que exista una t_2 factible, hemos logrado obtener un punto entero factible. A diferencia de t_{n-1}, si no existe t_i factible para alguna $i \in \{2, \ldots, n-2\}$, no podemos concluir que la k-ésima capa entera no contiene puntos enteros factibles. Más bien, la elección del parámetro t_{i+1} en la iteración anterior fue incorrecta, por lo que debemos escoger otro t_{i+1} factible, en caso de que exista.

Segunda fase

Sean $p \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango completo con $n \leq m$ y $b \in \mathbb{R}^m$ un vector. Consideramos ahora el problema lineal entero

$$\begin{aligned} \text{máx. } & p^T x, && (12)\\ \text{s. a. } & p^T x \leq u, && (13)\\ & Ax \leq b, && (14)\\ & x \in \mathbb{Z}^n. && (15) \end{aligned}$$

Observemos que este problema se reduce a 2 si $m = n$ con $A = -I_n$ y $b = 0_n$. Seguiremos la misma lógica que en la subsección pasada en cuanto a establecer ecuaciones lineales diofantinas. No obstante, esto lo haremos para establecer una relación lineal entre $x \in \mathbb{Z}^n$ y el vector de parámetros $t \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Si procedemos de aquella forma y nos enfocamos en una capa entera $H_{p,k}$ con $k \leq u$, podremos, en primer lugar, deshacernos de la restricción 13 y, en segundo lugar, de reducir el problema lineal 12 a uno de factibilidad.

Sea q el múltiplo coprimo de p. Deseamos resolver la ecuación 8. Procedemos con la misma estrategia que en la subsección anterior, solamente que ahora vamos hacia adelante en vez de hacia atrás. Por conveniencia, definimos $g_1 := \gcd\{q_1, \ldots, q_n\} = 1$ y también $\omega_1 := k$, con lo que obtenemos

$$\frac{q_1}{g_1} x_1 + g_2 \underbrace{\left(\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} x_2 + \cdots + \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1} x_n \right)}_{=:\omega_2} = k = \omega_1.$$

donde $g_2 := \gcd\{\frac{q_2}{g_1}, \ldots \frac{q_n}{g_1}\}$. Porque q es coprimo, se sigue que $\gcd\{\frac{q_1}{g_1}, g_2\} = 1$ y por lo tanto la ecuación anterior tiene solución para todo $\omega_1 \in \mathbb{Z}$. Así también, una solución particular está constituida por los coeficientes de Bézout asociados a $\frac{q_1}{g_1}$ y g_2, de tal forma que la solución general está dada por

$$\begin{cases} x_1 &= \omega_1 \cdot x_1^{(0)} + g_2 \cdot t_1, \\ \omega_2 &= \omega_1 \cdot \omega_2^{(0)} - \frac{q_1}{g_1} \cdot t_1, \end{cases}$$

donde $t_1 \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, deseamos resolver la ecuación

$$\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} x_2 + \frac{q_3}{g_2 \cdot g_1} + \cdots + \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1} x_n = \omega_2,$$

por lo que definimos $g_3 \coloneqq \gcd\{\frac{q_3}{g_2 \cdot g_1}, \ldots \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1}\}$, de tal forma que obtenemos

$$\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} x_2 + g_3 \underbrace{\left(\frac{q_3}{g_3 \cdot g_2 \cdot g_1} + \cdots + \frac{q_n}{g_3 \cdot g_2 \cdot g_1} x_n \right)}_{=:\omega_3} = \omega_2.$$

Por un razonamiento similar al anterior, existen soluciones para todo $\omega_2 \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto los coeficientes de Bézout asociados a $\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}$ y g_3 proveen una solución particular, de donde podemos generar la solución general

$$\begin{cases} x_2 & = \omega_2 \cdot x_2^{(0)} + g_3 \cdot t_2, \\ \omega_3 & = \omega_2 \cdot \omega_3^{(0)} - \frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} \cdot t_2, \end{cases}$$

donde $t_2 \in \mathbb{Z}$. De manera inductiva, encontramos que, para $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, la i-ésima solución general está dada por

$$\begin{cases} x_i & = \omega_i \cdot x_i^{(0)} + g_{i+1} \cdot t_i, \\ \omega_{i+1} & = \omega_i \cdot \omega_{i+1}^{(0)} - \frac{q_i}{\prod_{j=1}^{i} g_j} \cdot t_i, \end{cases} \tag{16}$$

con $t_i \in \mathbb{Z}$. Para $i = n-1$ obtenemos la ecuación

$$\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} x_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} x_n = \omega_{n-1},$$

que, por construcción, también tiene solución para todo $\omega_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Finalmente, las últimas dos soluciones son

$$\begin{cases} x_{n-1} & = \omega_{n-1} \cdot x_{n-1}^{(0)} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} \cdot t_{n-1}, \\ x_n & = \omega_{n-1} \cdot x_n^{(0)} - \frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} \cdot t_{n-1}, \end{cases} \tag{17}$$

donde $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

Ahora bien, deseamos expresar al $x = (x_1, \ldots, x_n)$ como una transformación lineal del vector de parámetros $t \coloneqq (t_1, \ldots, t_{n-1})$. Para ello, debemos encontrar una forma cerrada a la siguiente relación de recurrencia obtenida en 16:

$$\begin{cases} \omega_1 & = k, \\ \omega_{i+1} & = \omega_i \cdot \omega_{i+1}^{(0)} - \frac{q_i}{\prod_{j=1}^{i} g_j} \cdot t_i. \end{cases}$$

Si "desenvolvemos" las igualdades, encontramos que

$$\omega_i = k \cdot \prod_{j=2}^{i} \omega_j^{(0)} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{\prod_{\ell=1}^{j} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{i} \omega_\ell^{(0)} \cdot t_j. \tag{18}$$

Donde, por conveniencia, asignamos a la suma vacía el valor de cero y al producto vacío el valor de uno. Por simpleza, definimos los coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ con $j < i$ como

$$a_{ij} \coloneqq \frac{q_j}{\prod_{\ell=1}^{j} g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{i} \omega_\ell^{(0)}. \tag{19}$$

Así pues, juntando esto último con 16, obtenemos para $i \in \{1, \ldots, n-2\}$,

$$\begin{aligned} x_i &= w_i \cdot x_i^{(0)} + g_{i+1} t_i \\ &= k \cdot \prod_{j=2}^{i} \omega_j^{(0)} \cdot x_i^{(0)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(0)} t_j + g_{i+1} t_i. \end{aligned} \tag{20}$$

Similarmente, sustituyendo en 17,

$$x_{n-1} = k \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \omega_j^{(0)} \cdot x_{n-1}^{(0)} - \sum_{j=1}^{n-2} a_{n-1,j} x_{n-1}^{(0)} t_j + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} t_{n-1},$$
$$x_n = k \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \omega_j^{(0)} \cdot x_n^{(0)} - \sum_{j=1}^{n-2} a_{n,j} x_n^{(0)} t_j - \frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} t_{n-1}.$$

Tercera fase

Resultados

Conclusiones

Referencias

[BH09] R. Bödi and K. Herr. Symmetries in integer programs, 2009.