# Ecuaciones lineales diofantinas aplicadas a programas lineales enteros

Iñaki Sebastián Liendo Infante

17 de junio de 2025

# Índice general

**1. Prerrequisitos** **2**
1.1. Teoría de Números . . . . . 2
1.1.1. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo . . . . . 2
1.1.2. Ecuaciones lineales diofantinas . . . . . 3
1.2. Programación lineal . . . . . 4

**2. El algoritmo** **5**
2.1. Fase 1: una restricción presupuestaria . . . . . 7
2.1.1. El caso infinito . . . . . 10
2.1.2. El caso finito . . . . . 12
2.1.3. Análisis de resultados . . . . . 14
2.2. Fase 2: múltiples restricciones junto con la presupuestaria . . . . . 14
2.2.1. Estrategias alternativas para el problema de factibilidad . . . . . 14
2.3. Fase 3: múltiples restricciones . . . . . 14
2.4. Consideraciones y extensiones del algoritmo . . . . . 14

# Capítulo 1

# Prerrequisitos

En los siguientes capítulos usaremos extensivamente resultados básicos de teoría de números y de programación lineal, por lo que es provechoso recopilarlos en las siguientes secciones. En particular, va se destaca la importancia de las ecuaciones lineales diofantinas para la construcción de nuestro algoritmo. En este capítulo consideramos pertinente no incluir demostraciones, pues los enunciados son mostrados en cualquier clase de álgebra superior o de programación lineal, por ejemplo. La referencia principal para la sección de teoría de números es [Lav14]. Finalmente, a lo largo de este capítulo tanto como de esta tesis excluimos al cero del conjunto de los números naturales.

## 1.1. Teoría de Números

### 1.1.1. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

En primer lugar, introducimos el símbolo de relación "|" para indicar divisibilidad. Dados dos enteros $a, b$, decimos que $b$ divide a $a$ (y escribimos $b \mid a$) si existe un entero $k$ tal que $a = k \cdot b$. Así también, denotamos el conjunto de divisores de $a$ como

$$D(a) \coloneqq \{b \in \mathbb{Z} : b \mid a\}.$$

Si $a$ es distinto de cero, encontramos que $D(a)$ es finito, puesto que si $b \mid a$, entonces $|b| \leq |a|$, lo cual implica que $|D(a)| \leq 2|a|$. En caso de que $a$ sea nulo, obtenemos $D(a) = \mathbb{Z}$. Observemos también que $\{-1, 1\} \subseteq D(a)$ para todo entero $a$.

**Definición 1.1.** *Sean $a_1, \ldots, a_n$ enteros no todos iguales a cero, entonces definimos su máximo común divisor $d$ como el elemento maximal del conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} D(a_i)$, y escribimos $d = \operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Si $\operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\} = 1$, entonces decimos que $a_1, \ldots, a_n$ son coprimos.*

Puesto que $a_i \neq 0$ para alguna $i$ en la definición anterior, encontramos que el conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} D(a_i)$ es finito y, como también es no vacío, en efecto existe un elemento maximal. Es decir, el máximo común divisor $d$ siempre está bien definido.

*Observación.* No porque una colección de enteros sea coprima ($\operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\} = 1$) se sigue que estos enteros sean coprimos a pares ($\operatorname{mcd}\{a_i, a_j\} = 1$ para todo $i, j$). Por ejemplo, los enteros $1, 3, 3$ son coprimos pero evidentemente $3, 3$ no lo son.

**Definición 1.2.** *Decimos que $c \in \mathbb{Z}$ es una combinación lineal entera de un conjunto de enteros $a_1, \ldots, a_n$ si existen enteros $x_1, \ldots, x_n$ tales que $c = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.*

El siguiente teorema, a pesar de su simpleza, es central para los resultados obtenidos en esta tesis.

**Teorema 1.3.** *Sea $d$ un entero y sean $a_1, \ldots, a_n$ una colección de enteros no todos iguales a cero. Entonces $d = \operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\}$ si y solo si $d$ es la mínima combinación lineal entera positiva de $a_1, \ldots, a_n$.*

**Corolario 1.4.** *Si $d = \operatorname{mcd}\{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces $\operatorname{mcd}\{\frac{a_1}{d}, \ldots, \frac{a_n}{d}\} = 1$.*

Además del máximo común divisor, requeriremos al mínimo común múltiplo, empero en menor medida. Sea $a$ un entero y denotamos el conjunto de sus múltiplos como

$$M(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{Z} : a \mid x\}.$$

Si $a$ es nulo, entoncees $M(a) = \{0\}$. En caso contrario encontramos que $M(a)$ es un conjunto infinito. Ánalogamente a la Definición 1.1, definimos al mínimo común múltiplo $m$ de una colección de enteros $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ como el elemento minimal de $\mathbb{N} \cap \bigcap_{i=1}^{n} M(a_i)$. Escribimos $m = \operatorname{mcm}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Para observar que está bien definido, basta mencionar que el producto $|a_1 \cdots a_n|$ es un elemento de la intersección y por lo tanto esta no es vacía.

### 1.1.2. Ecuaciones lineales diofantinas

Sea $c \in \mathbb{Z}$ y sean $a_1, \ldots, a_n$ enteros. Una ecuación lineal diofantina es una ecuación donde queremos encontrar enteros $x_1, \ldots, x_n$ que satisfagan

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c.$$

Será de nuestro interés en las siguientes secciones resolver iterativamente este tipo de ecuaciones. Por el momento basta mencionar que podemos enfocarnos en el caso $n = 2$ sin ninguna pérdida de generalidad. Los siguientes resultados abordan el problema de determinar existencia y unicidad para las ecuaciones lineales diofantinas, así como la construcción de sus soluciones.

**Teorema 1.5** (Existencia)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos cero. La ecuación $ax + by = c$ tiene solución si y solo si $\operatorname{mcd}\{a, b\} \mid c$.*

Para construir el conjunto de soluciones a una ecuación lineal diofantina, encontramos primero una solución particular.

**Definición 1.6.** *Sea $d \coloneqq \operatorname{mcd}\{a, b\}$ y sean $x', y'$ enteros tales que $ax' + by' = d$ (c.f. 1.3). Decimos entonces que $x', y'$ son coeficientes de Bézout asociados a $a, b$, respectivamente.*

*Observación.* Los coeficientes de Bézout asociados a un par de enteros no son únicos. en efecto, si $x', y'$ son coeficientes de Bézout de $a, b$, entonces $x' + b$, $y' - a$ también lo son:

$$a(x' + b) + b(y' - a) = ax' + by' + ab - ab = ax' + by' = d.$$

Para fines de esta tesis basta la existencia de estos coeficientes, por lo que decimos de manera indistinta “los coeficientes de Bézout” y “una elección de coeficientes de Bézout”.

Definamos $d \coloneqq \operatorname{mcd}\{a, b\}$ y supongamos que la ecuación $ax + by = c$ tiene solución. Entonces $d \mid c$, por lo que existe $c' \in \mathbb{Z}$ tal que $c = c' \cdot d$. Sean $x', y'$ los coeficientes de Bézout asociados a $a, b$ respectivamente. Entonces

$$a(c' \cdot x') + b(c' \cdot y') = c'(ax' + by') = c'd = c,$$

por lo que $c' \cdot x', c' \cdot y'$ es una ecuación particular a la ecuación $ax + by = c$.

**Teorema 1.7** (Construcción)**.** *Sea $(x_0, y_0)$ una solución particular de la ecuación lineal diofantina $ax + by = c$. Entonces todas las soluciones de la ecuación están dadas por*

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t, \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t, \end{cases} \tag{1.1}$$

*donde $d \coloneqq \operatorname{mcd}\{a, b\}$ y $t \in \mathbb{Z}$.*

## 1.2. Programación lineal

# Capítulo 2

# El algoritmo

En este capítulo desarrollamos el algoritmo para resolver prácticamente cualquier tipo de problemas de programación lineal entera; se divide en tres subsecciones que construyen el algoritmo de forma incremental. En primer lugar, consideramos el caso cuando las únicas dos restricciones son de no negatividad ($\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$) y una presupuestaria ($\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq u$ para algún escalar $u$). A partir de ello, generamos una sucesión de ecuaciones lineales enteras cuya solución provee candidatos para el óptimo del problema.

En segundo lugar, agregamos $m$ restricciones de desigualdad además de la presupuestaria. Este es el parteaguas donde el algoritmo toma relevancia, pero donde también aumenta en complejidad y supone ciertas dificultades con los tiempos de terminación. Discutiremos ampliamente posibles direcciones que puedan mejorar de manera significativa la rapidez de nuestro algoritmo.

En tercer lugar, eliminamos la restricción presupuestaria y, por lo tanto, nuestro algoritmo será capaz de resolver problemas lineales enteros en su forma general. Ciertamente esta subsección es la más corta, pues lo único que hacemos es agregar implícitamente una restricción presupuestaria válida resolviendo el problema lineal relajado. Es de esta manera que podremos hacer uso de los resultados obtenidos en la segunda fase.

En cuarto lugar, agregamos consideraciones que facilitan la implementación del algoritmo. En particular, consideramos el caso donde hay una o más restricciones de igualdad, así como el caso donde las variables de decisión son binarias. Finalmente, discutiremos brevemente una extensión a este algoritmo para que sea capaz de resolver problemas lineales mixtos.

**Definición 2.1** ([BH09]). *Decimos que un vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es esencialmente entero*[1] *si existen $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$. Además, decimos que $\boldsymbol{w}$ es el múltiplo coprimo de $\boldsymbol{v}$ si sus entradas son coprimas (c.f. 1.1) y si su primera entrada es no negativa.*

En otras palabras, decimos que $\boldsymbol{v}$ es esencialmente entero si es un múltiplo real de un vector entero.

**Ejemplo 2.2.** *El vector $\left(-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)^T = \sqrt{2}(-1, 1/2)^T$ es esencialmente entero y $(2,-1)^T$ es su múltiplo coprimo. Contrariamente, el vector $(\sqrt{2}, \sqrt{3})^T$ no es esencialmente entero.*

[1] El artículo los nombra *projectively rational vectors*, mas el autor de esta tesis no encontró una traducción al español establecida, por lo que decidió nombrarlos de la forma que lo hizo. Por la misma razón, el autor decidió traducir *c-layer* como “capa entera” en la Definición 2.3.

*Observación.* Todo vector $\boldsymbol{v}$ cuyas entradas son racionales ($\boldsymbol{v} \in \mathbb{Q}^n$) es esencialmente entero. En efecto, $\boldsymbol{v}_i = \frac{p_i}{q_i}$ para algunos enteros $p_i$ y $q_i$ con $q_i$ distinto de cero. Si definimos $q \coloneqq \operatorname{mcm}\{q_1, \ldots, q_n\} \neq 0$ y $\boldsymbol{w} \coloneqq q\boldsymbol{v}$, se sigue que $\boldsymbol{v} = \frac{1}{q}\boldsymbol{w}$ y también $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n$.

*Observación.* Todo vector $\boldsymbol{v}$ esencialmente entero tiene a lo más dos vectores coprimos asociados. Sean $k \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n$ tales que $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$. Entonces

$$\pm \frac{1}{\operatorname{mcd}\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}} \boldsymbol{w}$$

son dos vectores cuyas entradas son coprimas, de acuerdo al Corolario 1.4. Si $\boldsymbol{w}_1 = 0$, estos representan el mismo vector, y si $\boldsymbol{w}_1 \neq 0$ entonces solo uno de estos dos vectores es el múltiplo coprimo de $\boldsymbol{v}$. Independientemente del caso, el múltiplo coprimo de todo vector esencialmente entero es único.

Porque todo número representable en cualquier sistema de aritmética finita es necesariamente racional, decidimos enfocar nuestro análisis en vectores esencialmente enteros. Desde el punto de vista puramente teórico, esta condición reduce drásticamente el tipo de programas lineales que podemos resolver. No obstante, en [BH09] se revelan propiedades de los vectores esencialmente enteros que reproducimos aquí y que nos permitirán plantear ecuaciones lineales diofantinas cuyas soluciones otorgan candidatos para puntos óptimos de un problema lineal.

**Definición 2.3** ([BH09])**.** *Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $t \in \mathbb{R}$ un escalar. Decimos que su hiperplano afino asociado*

$$H_{\boldsymbol{v},t} \coloneqq \ker\left\{x \mapsto \boldsymbol{v}^T x\right\} + t\boldsymbol{v} \tag{2.1}$$

*es una capa entera si contiene al menos un punto entero.*

Todo hiperplano afino $H_{\boldsymbol{v},t}$ es invariante ante reescalamientos en $\boldsymbol{v}$. Es decir, si $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ es un escalar, entonces $H_{\boldsymbol{v},t} = H_{r\boldsymbol{v},t/r}$. En particular, el conjunto de hiperplanos afinos asociados a un vector $\boldsymbol{v}$ esencialmente entero es igual al conjunto de hiperplanos afinos asociados a su múltiplo coprimo $\boldsymbol{w}$. Ahora bien, cualquier vector coprimo induce una familia de capas enteras y, sorprendentemente, esa familia forma una cobertura de $\mathbb{Z}^n$, como lo indica el Teorema 2.5.

**Lema 2.4** ([BH09])**.** *Sean $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{v}$ distinto de cero. Entonces $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{v},t_{\boldsymbol{x}}}$, donde $t_{\boldsymbol{x}} \coloneqq \frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$.*

**Teorema 2.5** ([BH09])**.** *Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\boldsymbol{w}$ su múltiplo coprimo. Entonces la familia de capas enteras $\left\{H_{\boldsymbol{w},k\|\boldsymbol{w}\|^{-2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ cubre a $\mathbb{Z}^n$.*

*Demostración.* $\square$

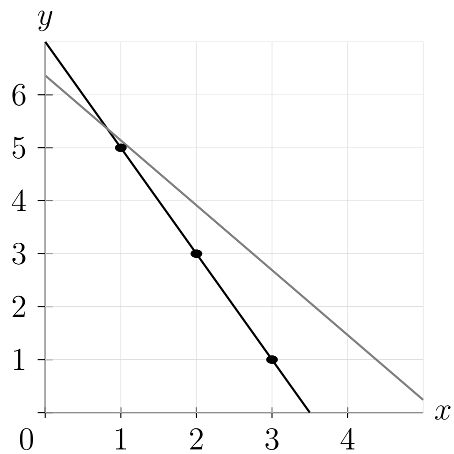


Figura 2.1: Representación de una capa entera (en negro) junto a un hiperplano afino que no es capa entera (en gris). La capa entera tiene como parámetros $\boldsymbol{v} = (2,1)^T$ y $t = 1{,}4$, mientras que los del hiperplano afino son $\boldsymbol{v} = (\sqrt{3}, \sqrt{2})^T$ y $t = 1{,}4$.

## 2.1. Fase 1: una restricción presupuestaria

Sea $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^n$ su múltiplo coprimo. Consideremos el programa lineal

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n} \quad \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x}, \tag{2.2a}$$
$$\text{s.a.} \quad \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{x} \leq u, \tag{2.2b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.$$

*Observación.* Debido a la restricción presupuestaria (2.2b), encontramos que el politopo está acotado por arriba. Así pues, el problema o bien es infactible, o bien tiene un valor óptimo finito.

Cada escalar $t \in \mathbb{R}$ induce un hiperplano afino $H_{\boldsymbol{p},t}$ donde se cumple que todo punto $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{p},t}$ tiene un mismo nivel de utilidad (2.2a). Como observamos previamente,

$$\{H_{\boldsymbol{p},t} : t \in \mathbb{R}\} = \{H_{\boldsymbol{q},t} : t \in \mathbb{R}\}.$$

A causa del Teorema 2.5, somos capaces de caracterizar todos los puntos enteros a partir de $\boldsymbol{q}$. Aún más, obtenemos una enumeración de las capas enteras, lo cual nos permite determinar si la $k$-ésima capa entera contiene puntos factibles para el problema.

Observemos que el nivel de utilidad (2.2a) para la $k$-ésima capa entera es $k$. En efecto, si $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$, entonces

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}^\perp + k \left\|\boldsymbol{q}\right\|^{-2} \boldsymbol{q},$$

donde $\boldsymbol{q}^\perp$ es un vector ortogonal a $\boldsymbol{q}$. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q}^\perp + k \left\|\boldsymbol{q}\right\|^{-2} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q} = 0 + k \left\|\boldsymbol{q}\right\|^{-2} \left\|\boldsymbol{q}\right\|^2 = k.$$

Para respetar la restricción presupuestaria (2.2b), podemos encontrar el primer[2] entero $\eta$ que satisfaga $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u$ para todo $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},\eta\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$. De esta manera, encontramos que las capas enteras que contienen puntos enteros que respetan el presupuesto son parametrizadas por $k \in \{\eta, \eta-1, \ldots\}$. Debido a la observación anterior, se cumple inmediatamente que $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = k$. De esta manera, deducimos que si la $\eta$-ésima capa entera contiene puntos no negativos, entonces las soluciones se encuentran en esa capa. En caso contrario, descendemos a la $(\eta-1)$-ésima capa entera y verificamos no negatividad, etcétera.

**Lema 2.6.** *Sea $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\boldsymbol{q}$ su múltiplo coprimo, de manera que $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{q}$ para algún escalar $m \in \mathbb{R}$. Entonces la primera capa entera $H_{\boldsymbol{q},\eta\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ que satisface la restricción presupuestaria (2.2b) está parametrizada por $\eta := \lfloor u/m \rfloor$.*

*Demostración.* Sea $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} \leq u$. Entonces buscamos el mayor entero $\eta$ que satisfaga $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u/m$ para todo $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},\eta\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$. Por el Lema 2.4 sabemos que

$$\eta \|\boldsymbol{q}\|^{-2} = \frac{\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{q}\|^2} \leq \frac{u/m}{\|\boldsymbol{q}\|^2},$$

de donde se sigue inmediatamente que $\eta = \lfloor u/m \rfloor$. □

**Teorema 2.7.** *Sea $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\boldsymbol{q}$ su múltiplo coprimo. Entonces se cumple lo siguiente con respecto al problema (2.2):*

1. *El problema es infactible si y solo si $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}$ y $u < 0$.*
2. *Si $\boldsymbol{q}_i < 0$ para algún $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces la $\eta$-ésima capa entera contiene un número infinito de puntos factibles.*
3. *Si el problema es factible y $\boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}$, entonces la $k$-ésima capa entera contiene un número finito de puntos factibles, donde $k \in \{\eta, \eta-1, \ldots\}$.*

*Demostración.*

1. Supongamos que $\boldsymbol{q} \geq 0$ y $u < 0$. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n_{\geq \boldsymbol{0}}$ entonces $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \geq 0 > u$ y por lo tanto $\boldsymbol{x}$ no es factible. Luego,
$$\mathbb{Z}^n_{\geq \boldsymbol{0}} \cap \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u\} = \emptyset, \tag{2.3}$$
y el problema no es factible. Mostramos la otra implicación por contraposición. Si $u \geq 0$ observamos que $\boldsymbol{0}$ es factible. Se debe cumplir $u < 0$. Similarmente, si $q_i < 0$ para algún $i \in \{2, \ldots, n\}$ encontramos que $\lceil u/q_i \rceil \boldsymbol{e}_i$ es factible:
$$\boldsymbol{q}^T \left\lceil \frac{u}{q_i} \right\rceil \boldsymbol{e}_i = q_i \left\lceil \frac{u}{q_i} \right\rceil \leq q_i \frac{u}{q_i} = u, \tag{2.4}$$
además, como $u < 0$, concluimos que $\lceil u/q_i \rceil \boldsymbol{e}_i$ es no negativo.

[2]Con esto nos referimos a que no existen $\xi \in \mathbb{Z}$ y $\boldsymbol{x} \in H_{\boldsymbol{q},\xi\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ que satisfagan $\eta < \xi$ y $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} \leq u$.

2. Como $\boldsymbol{q}$ es un vector cuyas entradas son coprimas, sabemos de una generalización del Teorema 1.5 que existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} = \eta$. Definamos los siguientes conjuntos de índices

$$I^+ \coloneqq \{i : q_i > 0\}, \quad I^0 \coloneqq \{i : q_i = 0\}, \quad I^- \coloneqq \{i : q_i < 0\}. \tag{2.5}$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_i = 0$ para todo $i \in I^0$. Supongamos que $x_j < 0$ para algún $i \in I^+ \cup I^-$. Cabe resaltar que estos dos conjuntos son disjuntos. Supongamos que $j \in I^-$. Sean $\{c_i\}_{i \in I^+}$ escalares positivos que satisfagan

$$x_j + \sum_{i \in I^+} q_i c_i \geq 0. \tag{2.6}$$

Observemos que $x_i - c_i q_j \geq 0$ para todo $i \in I^+$, pues $q_j < 0$. Definamos el vector $\boldsymbol{x}^+ \in \mathbb{Z}^n$ de manera que

$$\boldsymbol{x}_k^+ = \begin{cases} x_i - c_i q_j & k \in I^+, \\ x_j + \sum_{i \in I^+} q_i c_i & k = j, \\ x_k & \text{e.o.c.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Se verifica que $x^+$ es no negativo y, además,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x}^+ &= \sum_{k \in I^+} q_k (x_k - c_k q_j) + q_j \left( x_j + \sum_{i \in I^+} c_i q_i \right) + \sum_{k \in I^- \cup I^0 \setminus \{j\}} q_k x_k \\ &= \sum_{k \in I^+} q_k x_k + q_j x_j + \sum_{k \in I^- \cup I^0 \setminus \{j\}} q_k x_k - q_j \sum_{k \in I^+} q_k c_k + q_j \sum_{i \in I^+} q_i c_i \\ &= \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} = \eta. \end{aligned}$$

Así pues, tenemos existencia. Para concluir que hay un número infinito de puntos, basta observar que si la elección de coeficientes $\{c_i\}_{i \in I^+}$ satisface (2.6), entonces cualquier múltiplo positivo de estos coeficientes también lo satisface. Finalmente, la demostración para el caso $j \in I^+$ es completamente análoga.

3. Se sigue que $u \geq 0$. Definamos

$$P_k \coloneqq H_{\boldsymbol{q}, k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n_{\geq \boldsymbol{0}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n : \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} \leq k, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \right\}. \tag{2.8}$$

Observemos que $P_k = \emptyset$ para todo $k$ negativo, pues $\boldsymbol{q} \geq 0$. El hiperplano afino $H_{\boldsymbol{q}, k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}}$ interseca los ejes positivos en $\frac{k}{q_i} \boldsymbol{e}_i$. Definamos $\ell_i \coloneqq \lceil k/q_i \rceil$. No es difícil ver que $P_k$ está contenido en el prisma cuyas aristas son $\ell_i$:

$$P_k \subseteq \prod_{i=1}^{n} [0, \ell_i] \cap \mathbb{Z}^n. \tag{2.9}$$

Pero $|[0, \ell_i] \cap \mathbb{Z}^n| = \ell_i$. Así, $|P_k| \leq \ell_1 \times \cdots \times \ell_n < \infty$.

$\square$

**Corolario 2.8.** *Si $\boldsymbol{q}_i < 0$ para algún $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces el valor óptimo del problema (2.2) es $m\eta$ y existe una infinidad de soluciones.*

*Demostración.* Por el Teorema anterior sabemos que existen una infinidad de soluciones, así que sea $\boldsymbol{x}^*$ una de ellas. Entonces $\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}^* = \eta$, pero $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{q}$, por lo que obtenemos $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}^* = m\eta$. □

Supongamos, pues, que el problema (2.2) tiene solución. Debido al Teorema anterior, conviene dividir en dos casos el análisis para construir un algoritmo que resuelva problemas de este tipo. Evidentemente, los resultados obtenidos en una parte serán de utilidad para desarrollar la otra.

### 2.1.1. El caso infinito

Los puntos enteros que se encuentran en la $\eta$-ésima capa entera satisfacen la ecuación lineal diofantina

$$\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} = q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n = \eta. \tag{2.10}$$

En la sección de Teoría de Números mostramos bajo qué condiciones existen soluciones a este tipo de ecuaciones y también cómo construirlas cuando solamente tenemos dos incógnitas. Por conveniencia definamos $g_1 := \text{mcd}\{q_1, \ldots, q_n\} = 1$ y $\omega_1 := \eta$. De manera análoga a una formulación de programación dinámica hacia adelante, podemos definir también $g_2 := \text{mcd}\left\{\frac{q_2}{g_1}, \ldots, \frac{q_n}{g_1}\right\}$, con lo que la ecuación anterior es equivalente a la ecuación

$$\frac{q_1}{g_1}x_1 + g_2 \underbrace{\left(\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}x_2 + \cdots + \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1}x_n\right)}_{:=\omega_2} = \omega_1. \tag{2.11}$$

No es difícil observar que $\text{mcd}\left\{\frac{q_1}{g_1}, g_2\right\} = 1$ y por lo tanto existen soluciones enteras para todo $\omega_1 \in \mathbb{Z}$. Como estos coeficientes son coprimos, encontramos que sus coeficientes de Bézout asociados (c.f. Definición 1.6) $x_1', \omega_2'$ son soluciones particulares de la ecuación

$$\frac{q_1}{g_1}x_1 + g_2\omega_2 = 1,$$

con lo que las soluciones de la ecuación (2.11) están dadas por

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 x_1' + g_2 t_1, \\ \omega_2 = \omega_1 \omega_2' - \frac{q_1}{g_1} t_1, \end{cases}$$

donde $t_1 \in \mathbb{Z}$. Como la restricción de no negatividad se debe satisfacer ($x_1 \geq 0$), encontramos que

$$t_1 \geq \left\lceil -\frac{\omega_1 x_1'}{g_2} \right\rceil.$$

Siguiendo el razonamiento de la formulación dinámica en (2.11), fijamos $t_1$ y resolvemos la ecuación

$$\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}x_2 + \frac{q_3}{g_2 \cdot g_1}x_3 + \cdots + \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1}x_n = \omega_2.$$

Por construcción, los coeficientes de las incógnitas en el lado izquierdo de la ecuación son coprimos y por lo tanto existen una infinidad de soluciones para todo $\omega_2 \in \mathbb{Z}$. Por el mismo razonamiento que el anterior, encontramos que las soluciones son

$$\begin{cases} x_2 = \omega_2 x_2' + g_3 t_2, \\ \omega_3 = \omega_2 \omega_3' - \frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} t_2, \end{cases}$$

donde $t_2 \in \mathbb{Z}$ es un parámetro, $\omega_3$ y $g_3$ están definidos de forma análoga al paso anterior, y $x_2', \omega_3'$ son los coeficientes de Bézout asociados a $\frac{q_2}{g_2 \cdot g_2}$ y $g_3$, respectivamente. Por la restricción de no negatividad ($x_2 \geq 0$), se debe cumplir

$$t_2 \geq \left\lceil -\frac{\omega_2 x_2'}{g_3} \right\rceil.$$

De manera general, en el $i$-ésimo paso de la formulación dinámica para $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, encontramos

$$\begin{cases} x_i = \omega_i x_i' + g_{i+1} t_i, \\ \omega_{i+1} = \omega_i \omega_{i+1}' - \frac{q_i}{\prod_{j=1}^{i} g_j} t_i, \end{cases} \tag{2.12}$$

donde $t_i \in \mathbb{Z}$ satisface, debido a la restricción de no negatividad,

$$t_i \geq \left\lceil -\frac{\omega_i x_i'}{g_{i+1}} \right\rceil. \tag{2.13}$$

Finalmente, en el último paso, obtenemos la ecuación lineal diofantina

$$\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} x_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} x_n = \omega_{n-1}. \tag{2.14}$$

Nuevamente, los coeficientes de las incógnitas son coprimos. Por lo tanto, las soluciones están dadas por

$$\begin{cases} x_{n-1} = \omega_{n-1} x_{n-1}' + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} t_{n-1}, \\ x_n = \omega_{n-1} x_n' - \frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} t_{n-1}, \end{cases} \tag{2.15}$$

Para que ahora se satisfagan las condiciones de no negatividad de $x_{n-1}$ y de $x_n$, encontramos que $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$ debe cumplir ciertas desigualdades según los signos de $q_{n-1}$ y de $q_n$. Por conveniencia, definamos

$$b_1 := -\frac{\omega_{n-1} x_{n-1}'}{q_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j, \quad b_2 := \frac{\omega_{n-1} x_n'}{q_{n-1}} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j.$$

Entonces se verifica que

$$t_{n-1} \in \begin{cases} \big[\lceil b_1 \rceil, \lfloor b_2 \rfloor\big] & \text{si } 0 < q_{n-1}, q_n, \\ \big[\lceil b_2 \rceil, \lfloor b_1 \rfloor\big] & \text{si } q_{n-1}, q_n < 0, \\ \big[\lceil \max\{b_1, b_2\} \rceil, \infty\big) & \text{si } q_{n-1} < 0 < q_n, \\ \big( -\infty, \lfloor \min\{b_1, b_2\} \rfloor\big] & \text{si } q_n < 0 < q_{n-1}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Como supusimos que el problema es factible, existe un vector de parámetros $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ que satisface las desigualdades (2.13) y (2.16) y por lo tanto que provee una solución al problema (2.2). Para encontrar estos parámetros, usamos la técnica de *backtracking*, en donde hacemos una elección de $t_1, \ldots, t_{n-2} \in \mathbb{Z}$ que satisfagan (2.13) y determinamos si existe $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$ que satisfaga (2.16). En caso de que no exista tal parámetro, cambiamos nuestra elección de $t_1, \ldots, t_{n-2}$. Ciertamente la decisión más simple es realizar el cambio $t_{n-2} \leftarrow t_{n-2} - 1$. Cabe destacar que si los signos de $q_{n-1}$ y $q_n$ son distintos, entonces no es necesario realizar *backtracking*, pues el algoritmo termina en la primera iteración. Independientemente del caso, eventualmente obtendremos un vector de parámetros $\boldsymbol{t}$ que satisfaga las desigualdades necesarias y, por lo tanto, eventualmente obtendremos un punto entero óptimo.

### 2.1.2. El caso finito

Debido a que $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$, resulta valioso mencionar que el problema (2.2) es una instancia particular del famoso Problema de la Mochila

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n} \quad \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{x}, \tag{2.17a}$$

$$\text{s.a.} \quad \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} \leq c, \tag{2.17b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \tag{2.17c}$$

donde los vectores positivos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n$ son conocidos como vector de útiles y vector de pesos, respectivamente. Puesto que no acotamos $\boldsymbol{x}$, el problema recibe el nombre de Problema de la Mochila no Acotado. Pero también como $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$, el problema también puede ser considerado como un Problema de la Suma de Conjuntos no Acotado. En nuestro análisis de resultados comparamos los tiempos de terminación de nuestro algoritmo con los de Ramificación y Acotamiento, `MTU2` ([MT90]), y una formulación alternativa de programación dinámica.

De acuerdo al Teorema 2.7, el número de puntos factibles sobre la $\eta$-ésima capa entera es finito y, por lo tanto, puede ser cero. No obstante, al igual que en la sección anterior, somos capaces de caracterizar todos los puntos enteros que se encuentran en cualquier capa entera. Consecuentemente, si determinamos que no hay ningún punto factible en la $\eta$-ésima capa entera, descendemos a la $(\eta - 1)$-ésima capa entera y realizamos el mismo análisis.

Además, observemos que en realidad es suficiente con descender hasta la 0-ésima capa entera, pues los puntos enteros sobre capas menores tienen utilidades negativas. De acuerdo al Teorema 2.7, estos no pueden ser factibles. Concluimos entonces que basta con analizar las capas enteras con parámetros $k \in \{\eta, \eta - 1, \ldots, 0\}$ y terminamos una vez que encontremos un punto no negativo.

Así pues, sea $k \in \{\eta, \eta - 1, \ldots, 0\}$. Al igual que en el caso anterior, deseamos resolver la ecuación lineal diofantina

$$\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n = k.$$

Implementamos la misma estrategia para plantear una formulación dinámica,

$$\frac{q_1}{g_1} x_1 + g_2 \omega_2 = \omega_1.$$

No obstante, en este caso podemos interpretar $\omega_2$ de tal manera que obtengamos más información. Así como $\omega_1 \coloneqq k$ es el presupuesto disponible en un inicio, $\omega_2$ es el presupuesto disponible después de utilizar parte de él para adquirir $x_1 \geq 0$ unidades. Por lo tanto, es posible agregar la restricción $\omega_2 \geq 0$. Similarmente, en el $i$-ésimo paso de la formulación dinámica, somos capaces de agregar la restricción de que el presupuesto restante $\omega_{i+1}$ sea no negativo. Combinando esto con la no negatividad de $x_i$, obtenemos de (2.12),

$$\left\lceil -\frac{\omega_i x_i'}{g_{i+1}} \right\rceil \leq t_i \leq \left\lfloor \frac{\omega_i \omega_{i+1}'}{q_i} \prod_{j=1}^{i} g_j \right\rfloor. \tag{2.18}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Después, como $0 < q_{n-1}, q_n$, se sigue de (2.15),

$$\left\lceil -\frac{\omega_{n-1} x_{n-1}'}{q_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j \right\rceil \leq t_{n-1} \leq \left\lfloor \frac{\omega_{n-1} x_n'}{q_{n-1}} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j \right\rfloor. \tag{2.19}$$

De igual manera que el caso infinito, hacemos *backtracking* en caso de encontrarnos con que $t_i \in \mathbb{Z}$ no puede satisfacer (2.18) si $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, o si $t_{n-2} \in \mathbb{Z}$ no puede satisfacer (2.19). En este caso, puede ser que en cualquier nivel $t_i$ no se satisfaga la desigualdad y por lo tanto que necesitemos cambiar uno de $t_1, \ldots, t_{i-1}$. Ciertamente, la elección más simple es realizar el cambio $t_{i-1} \leftarrow t_{i-1} \pm 1$ siempre y cuando continúe satisfaciendo sus cotas correspondientes.

El número de elecciones $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{Z}$ es finito para la $k$-ésima capa entera. Decidimos, finalmente, descender a la $(k-1)$-capa entera y repetir el proceso si en ninguna de esas elecciones se satisfacen ambas (2.18) y (2.19). Evidentemente, $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^n$ es factible y se encuentra en la 0-ésima capa, por lo que este proceso está asegurado en terminar si es que el problema es factible, lo cual supusimos desde un inicio.

Con respecto a la complejidad algorítmica de este procedimiento podemos decir lo siguiente. Supongamos que modificamos el algoritmo para que encuentre todas las soluciones. Definamos

$$P_k \coloneqq H_{\boldsymbol{q}, k\|\boldsymbol{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n_{\geq \mathbf{0}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n : \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{x} = k, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}, \tag{2.20}$$

y sea $T(n)$ el tiempo requerido para encontrar todos los puntos en $P_k$ o determinar que este conjunto es vacío[3]. Es razonable suponer que $T(n)$ es exponencial en $n$. En efecto, cada par $(x_i, \omega_{i+1})$ genera un intervalo de factibilidad $[t_i^{\text{mín}}, t_i^{\text{máx}}]$. Este intervalo ciertamente depende de las elecciones previas de $t_1, \ldots, t_{i-1}$. Para encontrar todos los puntos en $P_k$, el algoritmo recorre todas las posibilidades:

$$\prod_{i=1}^{\tau_1} \min_{t_1, \ldots, t_{i-1}} \{t_i^{\text{máx}} - t_i^{\text{mín}}\} \leq T(n) \leq \prod_{i=1}^{\tau_2} \max_{t_1, \ldots, t_{i-1}} \{t_i^{\text{máx}} - t_i^{\text{mín}}\}, \tag{2.21}$$

donde $1 \leq \tau_1 \leq n$ es el entero más grande que asegura que $\min_{t_1, \ldots, t_{i-1}} \{t_i^{\text{máx}} - t_i^{\text{mín}}\}$ sea positivo para todo $i \in \{1, \ldots, \tau_1\}$. Definimos $\tau_2$ de manera análoga. Se cumple que $\tau_1 \leq \tau_2$.

[3]Estamos suponiendo implícitamente que el tiempo no depende del lado derecho $k$, por lo que depende exclusivamente de la dimensión del politopo. Es la creencia del autor que en realidad el tiempo es linealmente decreciente en $k$ puesto que la probabilidad de que haya puntos enteros en $P_k$ es mayor a medida que $k$ aumenta. Si bien los resultados numéricos apuntan a que esta hipótesis es cierta, el autor prefirió decir que el tiempo es constante a falta de un mejor argumento teórico.

Sean $\ell_{\text{mín}}, \ell_{\text{máx}}$ las longitudes del intervalo de factibilidad más pequeño y del más grande en todos los niveles, respectivamente. Es decir, definimos

$$\ell_{\text{mín}} \coloneqq \min_{1 \leq i \leq \tau_1} \left\{ \min_{t_1, \ldots, t_{i-1}} \{ t_i^{\text{máx}} - t_i^{\text{mín}} \} \right\}, \tag{2.22}$$

$$\ell_{\text{máx}} \coloneqq \max_{1 \leq i \leq \tau_2} \left\{ \max_{t_1, \ldots, t_{i-1}} \{ t_i^{\text{máx}} - t_i^{\text{máx}} \} \right\}. \tag{2.23}$$

Si $P_k$ es vacío, se sigue que no existe ningún intervalo factible en el nivel $n$, lo que implica que $\tau_2 < n$. En caso contrario, el algoritmo recorre hasta el último nivel, por lo que $\tau_1 = \tau_2 = n$. De (2.21), obtenemos

$$\ell_{\text{mín}}^n \leq T(n) \leq \ell_{\text{máx}}^n. \tag{2.24}$$

En el peor de los casos, nuestro algoritmo recorre todas las capas enteras. Se sigue que

$$\text{Tiempo de ejecución} = \mathcal{O}\left( \sum_{k=1}^{\eta} T(n) \right) = \mathcal{O}(\eta \cdot T(n)) = \mathcal{O}(\eta \cdot c^n), \tag{2.25}$$

para alguna $c > 1$.

Ahora bien, este razonamiento aplica a la modificación del algoritmo en donde decidimos buscar todas las soluciones posibles. En realidad solo nos interesa encontrar un punto óptimo, por lo que podemos concluir que una cota superior para la complejidad de nuestro algoritmo es (2.25). Concluimos esta sección diciendo haremos uso del mismo razonamiento para determinar la complejidad algorítmica de nuestro método en la segunda fase de su construcción. Finalmente, observemos también que, para problemas del tipo (2.2), la solución siempre se encuentra razonablemente cerca de la frontera presupuestaria $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x} = u$, así que a excepción de casos degenerados, nunca recorre nuestro algoritmo todas las capas enteras.

### 2.1.3. Análisis de resultados

## 2.2. Fase 2: múltiples restricciones junto con la presupuestaria

### 2.2.1. Estrategias alternativas para el problema de factibilidad

## 2.3. Fase 3: múltiples restricciones

## 2.4. Consideraciones y extensiones del algoritmo

# Bibliografía


[BH09] Robert F. Bodi and Katrin Herr. Symmetries in integer programs. *arXiv: Combinatorics*, 2009.

[Lav14] Carmen Gómez Laveaga. *Álgebra Superior: Curso completo*. Programa Universitario del Libro de Texto. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México, primera edición edition, 2014. Primera reimpresión: julio de 2015.

[MT90] Silvano Martello and Paolo Toth. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc., USA, 1990.