

Ecuaciones lineales diofantinas aplicadas a programas lineales enteros

Iñaki Sebastián Liendo Infante

15 de junio de 2025

Índice general

1. Prerrequisitos	2
1.1. Teoría de Números	2
1.1.1. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo	2
1.1.2. Ecuaciones lineales diofantinas	3
1.2. Programación lineal	4
2. El algoritmo	5
2.1. Fase 1: una restricción presupuestaria	7
2.1.1. El caso infinito	8
2.1.2. El caso finito	10
2.1.3. Análisis de resultados	12
2.2. Fase 2: múltiples restricciones junto con la presupuestaria	12
2.2.1. Estrategias alternativas para el problema de factibilidad	12
2.3. Fase 3: múltiples restricciones	12
2.4. Consideraciones y extensiones del algoritmo	12

Capítulo 1

Prerrequisitos

En los siguientes capítulos usaremos extensivamente resultados básicos de teoría de números y de programación lineal, por lo que es provechoso recopilarlos en las siguientes secciones. En particular, va se destaca la importancia de las ecuaciones lineales diofantinas para la construcción de nuestro algoritmo. En este capítulo consideramos pertinente no incluir demostraciones, pues los enunciados son mostrados en cualquier clase de álgebra superior o de programación lineal, por ejemplo. La referencia principal para la sección de teoría de números es [Lav14]. Finalmente, a lo largo de este capítulo tanto como de esta tesis excluimos al cero del conjunto de los números naturales.

1.1. Teoría de Números

1.1.1. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

En primer lugar, introducimos el símbolo de relación “ $|$ ” para indicar divisibilidad. Dados dos enteros a, b , decimos que b divide a a (y escribimos $b \mid a$) si existe un entero k tal que $a = k \cdot b$. Así también, denotamos el conjunto de divisores de a como

$$D(a) := \{b \in \mathbb{Z} : b \mid a\}.$$

Si a es distinto de cero, encontramos que $D(a)$ es finito, puesto que si $b \mid a$, entonces $|b| \leq |a|$, lo cual implica que $|D(a)| \leq 2|a|$. En caso de que a sea nulo, obtenemos $D(a) = \mathbb{Z}$. Observemos también que $\{-1, 1\} \subseteq D(a)$ para todo entero a .

Definición 1.1. Sean a_1, \dots, a_n enteros no todos iguales a cero, entonces definimos su máximo común divisor d como el elemento maximal del conjunto $\bigcap_{i=1}^n D(a_i)$, y escribimos $d = \text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\}$. Si $\text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\} = 1$, entonces decimos que a_1, \dots, a_n son coprimos.

Puesto que $a_i \neq 0$ para alguna i en la definición anterior, encontramos que el conjunto $\bigcap_{i=1}^n D(a_i)$ es finito y, como también es no vacío, en efecto existe un elemento maximal. Es decir, el máximo común divisor d siempre está bien definido.

Observación. No porque una colección de enteros sea coprime ($\text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\} = 1$) se sigue que estos enteros sean coprimos a pares ($\text{mcd}\{a_i, a_j\} = 1$ para todo i, j). Por ejemplo, los enteros 1, 3, 3 son coprimos pero evidentemente 3, 3 no lo son.

Definición 1.2. Decimos que $c \in \mathbb{Z}$ es una combinación lineal entera de un conjunto de enteros a_1, \dots, a_n si existen enteros x_1, \dots, x_n tales que $c = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

El siguiente teorema, a pesar de su simpleza, es central para los resultados obtenidos en esta tesis.

Teorema 1.3. Sea d un entero y sean a_1, \dots, a_n una colección de enteros no todos iguales a cero. Entonces $d = \text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\}$ si y solo si d es la mínima combinación lineal entera positiva de a_1, \dots, a_n .

Corolario 1.4. Si $d = \text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\}$, entonces $\text{mcd}\{\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\} = 1$.

Además del máximo común divisor, requeriremos al mínimo común múltiplo, empero en menor medida. Sea a un entero y denotamos el conjunto de sus múltiplos como

$$M(a) := \{x \in \mathbb{Z} : a \mid x\}.$$

Si a es nulo, entonces $M(a) = \{0\}$. En caso contrario encontramos que $M(a)$ es un conjunto infinito. Análogamente a la Definición 1.1, definimos al mínimo común múltiplo m de una colección de enteros $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ como el elemento minimal de $\mathbb{N} \cap \bigcap_{i=1}^n M(a_i)$. Escribimos $m = \text{mcm}\{a_1, \dots, a_n\}$. Para observar que está bien definido, basta mencionar que el producto $|a_1 \cdots a_n|$ es un elemento de la intersección y por lo tanto esta no es vacía.

1.1.2. Ecuaciones lineales diofantinas

Sea $c \in \mathbb{Z}$ y sean a_1, \dots, a_n enteros. Una ecuación lineal diofantina es una ecuación donde queremos encontrar enteros x_1, \dots, x_n que satisfagan

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c.$$

Será de nuestro interés en las siguientes secciones resolver iterativamente este tipo de ecuaciones. Por el momento basta mencionar que podemos enfocarnos en el caso $n = 2$ sin ninguna pérdida de generalidad. Los siguientes resultados abordan el problema de determinar existencia y unicidad para las ecuaciones lineales diofantinas, así como la construcción de sus soluciones.

Teorema 1.5 (Existencia). Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, no ambos cero. La ecuación $ax + by = c$ tiene solución si y solo si $\text{mcd}\{a, b\} \mid c$.

Para construir el conjunto de soluciones a una ecuación lineal diofantina, encontramos primero una solución particular.

Definición 1.6. Sea $d := \text{mcd}\{a, b\}$ y sean x', y' enteros tales que $ax' + by' = d$ (c.f. 1.3). Decimos entonces que x', y' son coeficientes de Bézout asociados a a, b , respectivamente.

Observación. Los coeficientes de Bézout asociados a un par de enteros no son únicos. En efecto, si x', y' son coeficientes de Bézout de a, b , entonces $x' + b, y' - a$ también lo son:

$$a(x' + b) + b(y' - a) = ax' + by' + ab - ab = ax' + by' = d.$$

Para fines de esta tesis basta la existencia de estos coeficientes, por lo que decimos de manera indistinta “los coeficientes de Bézout” y “una elección de coeficientes de Bézout”.

Definamos $d := \text{mcd}\{a, b\}$ y supongamos que la ecuación $ax + by = c$ tiene solución. Entonces $d \mid c$, por lo que existe $c' \in \mathbb{Z}$ tal que $c = c' \cdot d$. Sean x', y' los coeficientes de Bézout asociados a a, b respectivamente. Entonces

$$a(c' \cdot x') + b(c' \cdot y') = c'(ax' + by') = c'd = c,$$

por lo que $c' \cdot x', c' \cdot y'$ es una ecuación particular a la ecuación $ax + by = c$.

Teorema 1.7 (Construcción). *Sea (x_0, y_0) una solución particular de la ecuación lineal diofantina $ax + by = c$. Entonces todas las soluciones de la ecuación están dadas por*

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t, \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $d := \text{mcd}\{a, b\}$ y $t \in \mathbb{Z}$.

1.2. Programación lineal

Capítulo 2

El algoritmo

En este capítulo desarrollamos el algoritmo para resolver prácticamente cualquier tipo de problemas de programación lineal entera; se divide en tres subsecciones que construyen el algoritmo de forma incremental. En primer lugar, consideramos el caso cuando las únicas dos restricciones son de no negatividad ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$) y una presupuestaria ($\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq u$ para algún escalar u). A partir de ello, generamos una sucesión de ecuaciones lineales enteras cuya solución provee candidatos para el óptimo del problema.

En segundo lugar, agregamos m restricciones de desigualdad además de la presupuestaria. Este es el parteaguas donde el algoritmo toma relevancia, pero donde también aumenta en complejidad y supone ciertas dificultades con los tiempos de terminación. Discutiremos ampliamente posibles direcciones que puedan mejorar de manera significativa la rapidez de nuestro algoritmo.

En tercer lugar, eliminamos la restricción presupuestaria y, por lo tanto, nuestro algoritmo será capaz de resolver problemas lineales enteros en su forma general. Ciertamente esta subsección es la más corta, pues lo único que hacemos es agregar implícitamente una restricción presupuestaria válida resolviendo el problema lineal relajado. Es de esta manera que podremos hacer uso de los resultados obtenidos en la segunda fase.

En cuarto lugar, agregamos consideraciones que facilitan la implementación del algoritmo. En particular, consideramos el caso donde hay una o más restricciones de igualdad, así como el caso donde las variables de decisión son binarias. Finalmente, discutiremos brevemente una extensión a este algoritmo para que sea capaz de resolver problemas lineales mixtos.

Definición 2.1 ([BH09]). *Decimos que un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es esencialmente entero¹ si existen $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$. Además, decimos que \mathbf{w} es el múltiplo coprimo de \mathbf{v} si sus entradas son coprimas (c.f. 1.1) y si su primera entrada es no negativa.*

En otras palabras, decimos que \mathbf{v} es esencialmente entero si es un múltiplo real de un vector entero.

Ejemplo 2.2. *El vector $(-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T = \sqrt{2}(-1, 1/2)^T$ es esencialmente entero y $(2, -1)^T$ es su múltiplo coprimo. Contrariamente, el vector $(\sqrt{2}, \sqrt{3})^T$ no es esencialmente entero.*

¹El artículo los nombra *projectively rational vectors*, mas el autor de esta tesis no encontró una traducción al español establecida, por lo que decidió nombrarlos de la forma que lo hizo. Por la misma razón, el autor decidió traducir *c-layer* como “capa entera” en la Definición 2.3.

Observación. Todo vector \mathbf{v} cuyas entradas son racionales ($\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^n$) es esencialmente entero. En efecto, $v_i = \frac{p_i}{q_i}$ para algunos enteros p_i y q_i con q_i distinto de cero. Si definimos $q := \text{mcm}\{q_1, \dots, q_n\} \neq 0$ y $\mathbf{w} := q\mathbf{v}$, se sigue que $\mathbf{v} = \frac{1}{q}\mathbf{w}$ y también $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$.

Observación. Todo vector \mathbf{v} esencialmente entero tiene a lo más dos vectores coprimos asociados. Sean $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$ tales que $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$. Entonces

$$\pm \frac{1}{\text{mcd}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}} \mathbf{w}$$

son dos vectores cuyas entradas son coprimas, de acuerdo al Corolario 1.4. Si $\mathbf{w}_1 = 0$, estos representan el mismo vector, y si $\mathbf{w}_1 \neq 0$ entonces solo uno de estos dos vectores es el múltiplo coprimo de \mathbf{v} . Independientemente del caso, el múltiplo coprimo de todo vector esencialmente entero es único.

Porque todo número representable en cualquier sistema de aritmética finita es necesariamente racional, decidimos enfocar nuestro análisis en vectores esencialmente enteros. Desde el punto de vista puramente teórico, esta condición reduce drásticamente el tipo de programas lineales que podemos resolver. No obstante, en [BH09] se revelan propiedades de los vectores esencialmente enteros que reproducimos aquí y que nos permitirán plantear ecuaciones lineales diofantinas cuyas soluciones otorgan candidatos para puntos óptimos de un problema lineal.

Definición 2.3 ([BH09]). Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $t \in \mathbb{R}$ un escalar. Decimos que su hiperplano afino asociado

$$H_{\mathbf{v},t} := \ker\{x \mapsto \mathbf{v}^T x\} + t\mathbf{v} \quad (2.1)$$

es una capa entera si contiene al menos un punto entero.

Todo hiperplano afino $H_{\mathbf{v},t}$ es invariante ante reescalamientos en \mathbf{v} . Es decir, si $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un escalar, entonces $H_{\mathbf{v},t} = H_{r\mathbf{v},t/r}$. En particular, el conjunto de hiperplanos afinos asociados a un vector \mathbf{v} esencialmente entero es igual al conjunto de hiperplanos afinos asociados a su múltiplo coprimo \mathbf{w} . Ahora bien, cualquier vector coprimo induce una familia de capas enteras y, sorprendentemente, esa familia forma una cobertura de \mathbb{Z}^n , como lo indica el Teorema 2.5.

Lema 2.4 ([BH09]). Sean $\mathbf{v}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con \mathbf{v} distinto de cero. Entonces $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{v},t_{\mathbf{x}}}$, donde $t_{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|^2}$.

Teorema 2.5 ([BH09]). Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea \mathbf{w} su múltiplo coprimo. Entonces la familia de capas enteras $\{H_{\mathbf{w},k\|\mathbf{w}\|^{-2}} : k \in \mathbb{Z}\}$ cubre a \mathbb{Z}^n .

Demostración. □

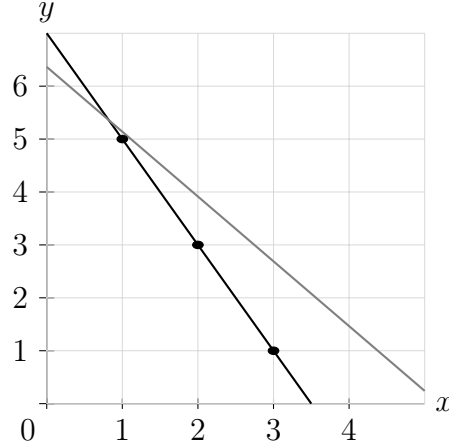


Figura 2.1: Representación de una capa entera (en negro) junto a un hiperplano afino que no es capa entera (en gris). La capa entera tiene como parámetros $\mathbf{v} = (2, 1)^T$ y $t = 1, 4$, mientras que los del hiperplano afino son $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, \sqrt{2})^T$ y $t = 1, 4$.

2.1. Fase 1: una restricción presupuestaria

Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ su múltiplo coprimo. Consideremos el programa lineal

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{p}^T \mathbf{x}, \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & \mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq u, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.2b)$$

Observación. Debido a la restricción presupuestaria (2.2b), encontramos que el politopo está acotado por arriba. Así pues, el problema o bien es infactible, o bien tiene un valor óptimo finito.

Cada escalar $t \in \mathbb{R}$ induce un hiperplano afino $H_{\mathbf{p},t}$ donde se cumple que todo punto $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{p},t}$ tiene un mismo nivel de utilidad (2.2a). Como observamos previamente,

$$\{H_{\mathbf{p},t} : t \in \mathbb{R}\} = \{H_{\mathbf{q},t} : t \in \mathbb{R}\}.$$

A causa del Teorema 2.5, somos capaces de caracterizar todos los puntos enteros a partir de \mathbf{q} . Aún más, obtenemos una enumeración de las capas enteras, lo cual nos permite determinar si la k -ésima capa entera contiene puntos factibles para el problema.

Observemos que el nivel de utilidad (2.2a) para la k -ésima capa entera es k . En efecto, si $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$, entonces

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^\perp + k \|\mathbf{q}\|^{-2} \mathbf{q},$$

donde \mathbf{q}^\perp es un vector ortogonal a \mathbf{q} . Por lo tanto,

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \mathbf{q}^T \mathbf{q}^\perp + k \|\mathbf{q}\|^{-2} \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 0 + k \|\mathbf{q}\|^{-2} \|\mathbf{q}\|^2 = k.$$

Para respetar la restricción presupuestaria (2.2b), podemos encontrar el primer² entero η que satisfaga $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u$ para todo $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, \eta \|\mathbf{q}\|^{-2}}$. De esta manera, encontramos que las capas enteras que contienen puntos enteros que respetan el presupuesto son parametrizadas por $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots\}$. Debido a la observación anterior, se cumple inmediatamente que $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$. De esta manera, deducimos que si la η -ésima capa entera contiene puntos no negativos, entonces las soluciones se encuentran en esa capa. En caso contrario, descendemos a la $(\eta - 1)$ -ésima capa entera y verificamos no negatividad, etcétera.

Lema 2.6. *Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea \mathbf{q} su múltiplo coprimo, de manera que $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$ para algún escalar $m \in \mathbb{R}$. Entonces la primera capa entera $H_{\mathbf{q}, \eta \|\mathbf{q}\|^{-2}}$ que satisface la restricción presupuestaria (2.2b) está parametrizada por $\eta := \lfloor u/m \rfloor$.*

Demostración. □

Teorema 2.7. *Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea \mathbf{q} su múltiplo coprimo. Entonces se cumple lo siguiente con respecto al problema (2.2):*

1. *El problema es infactible si y solo si $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ y $u < 0$.*
2. *Si el problema es factible y $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, entonces la k -ésima capa entera contiene un número finito de puntos factibles, donde $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots\}$.*
3. *Si el problema es factible y $\mathbf{q}_i < 0$ para algún $i \in \{2, \dots, n\}$, entonces la η -ésima capa entera contiene un número infinito de puntos factibles.*

Demostración. □

Corolario 2.8. *Si $\mathbf{q}_i < 0$ para algún $i \in \{2, \dots, n\}$, entonces el valor óptimo del problema (2.2) es η/m y existe una infinidad de soluciones.*

Supongamos, pues, que el problema (2.2) tiene solución. Debido al Teorema anterior, conviene dividir en dos casos el análisis para construir un algoritmo que resuelva problemas de este tipo. Evidentemente, los resultados obtenidos en una parte serán de utilidad para desarrollar la otra.

2.1.1. El caso infinito

Los puntos enteros que se encuentran en la η -ésima capa entera satisfacen la ecuación lineal diofantina

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n = \eta. \quad (2.3)$$

En la sección de Teoría de Números mostramos bajo qué condiciones existen soluciones a este tipo de ecuaciones y también cómo construirlas cuando solamente tenemos dos incógnitas. Por conveniencia definamos $g_1 := \text{mcd}\{q_1, \dots, q_n\} = 1$ y $\omega_1 := \eta$. De manera análoga a

²Con esto nos referimos a que no existen $\xi \in \mathbb{Z}$ y $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, \xi \|\mathbf{q}\|^{-2}}$ que satisfagan $\eta < \xi$ y $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u$.

una formulación de programación dinámica hacia adelante, podemos definir también $g_2 := \text{mcd}\left\{\frac{q_2}{g_1}, \dots, \frac{q_n}{g_1}\right\}$, con lo que la ecuación anterior es equivalente a la ecuación

$$\frac{q_1}{g_1}x_1 + g_2 \underbrace{\left(\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}x_2 + \dots + \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1}x_n\right)}_{:=\omega_2} = \omega_1. \quad (2.4)$$

No es difícil observar que $\text{mcd}\left\{\frac{q_1}{g_1}, g_2\right\} = 1$ y por lo tanto existen soluciones enteras para todo $\omega_1 \in \mathbb{Z}$. Como estos coeficientes son coprimos, encontramos que sus coeficientes de Bézout asociados (c.f. Definición 1.6) x'_1, ω'_2 son soluciones particulares de la ecuación

$$\frac{q_1}{g_1}x_1 + g_2\omega_2 = 1,$$

con lo que las soluciones de la ecuación (2.4) están dadas por

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 x'_1 + g_2 t_1, \\ \omega_2 = \omega_1 \omega'_2 - \frac{q_1}{g_1} t_1, \end{cases}$$

donde $t_1 \in \mathbb{Z}$. Como la restricción de no negatividad se debe satisfacer ($x_1 \geq 0$), encontramos que

$$t_1 \geq \left\lceil -\frac{\omega_1 x'_1}{g_2} \right\rceil.$$

Siguiendo el razonamiento de la formulación dinámica en (2.4), fijamos t_1 y resolvemos la ecuación

$$\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}x_2 + \frac{q_3}{g_2 \cdot g_1}x_3 + \dots + \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1}x_n = \omega_2.$$

Por construcción, los coeficientes de las incógnitas en el lado izquierdo de la ecuación son coprimos y por lo tanto existen una infinidad de soluciones para todo $\omega_2 \in \mathbb{Z}$. Por el mismo razonamiento que el anterior, encontramos que las soluciones son

$$\begin{cases} x_2 = \omega_2 x'_2 + g_3 t_2, \\ \omega_3 = \omega_2 \omega'_3 - \frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} t_2, \end{cases}$$

donde $t_2 \in \mathbb{Z}$ es un parámetro, ω_3 y g_3 están definidos de forma análoga al paso anterior, y x'_2, ω'_3 son los coeficientes de Bézout asociados a $\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}$ y g_3 , respectivamente. Por la restricción de no negatividad ($x_2 \geq 0$), se debe cumplir

$$t_2 \geq \left\lceil -\frac{\omega_2 x'_2}{g_3} \right\rceil.$$

De manera general, en el i -ésimo paso de la formulación dinámica para $i \in \{1, \dots, n-2\}$, encontramos

$$\begin{cases} x_i = \omega_i x'_i + g_{i+1} t_i, \\ \omega_{i+1} = \omega_i \omega'_{i+1} - \frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j} t_i, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde $t_i \in \mathbb{Z}$ satisface, debido a la restricción de no negatividad,

$$t_i \geq \left\lceil -\frac{\omega_i x'_i}{g_{i+1}} \right\rceil. \quad (2.6)$$

Finalmente, en el último paso, obtenemos la ecuación lineal diofantina

$$\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} x_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} x_n = \omega_{n-1}. \quad (2.7)$$

Nuevamente, los coeficientes de las incógnitas son coprimos. Por lo tanto, las soluciones están dadas por

$$\begin{cases} x_{n-1} = \omega_{n-1} x'_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} t_{n-1}, \\ x_n = \omega_{n-1} x'_n - \frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} t_{n-1}, \end{cases} \quad (2.8)$$

Para que ahora se satisfagan las condiciones de no negatividad de x_{n-1} y de x_n , encontramos que $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$ debe cumplir ciertas desigualdades según los signos de q_{n-1} y de q_n . Por conveniencia, definamos

$$b_1 := -\frac{\omega_{n-1} x'_{n-1}}{q_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j, \quad b_2 := \frac{\omega_{n-1} x'_n}{q_{n-1}} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j.$$

Entonces se verifica que

$$t_{n-1} \in \begin{cases} [b_1, b_2] & \text{si } 0 < q_{n-1}, q_n, \\ [b_2, b_1] & \text{si } q_{n-1}, q_n < 0, \\ [\max\{b_1, b_2\}, \infty) & \text{si } q_{n-1} < 0 < q_n, \\ (-\infty, \min\{b_1, b_2\}] & \text{si } q_n < 0 < q_{n-1}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Como supusimos que el problema es factible, existe un vector de parámetros $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ que satisface las desigualdades (2.6) y (2.9) y por lo tanto que provee una solución al problema (2.2). Para encontrar estos parámetros, usamos la técnica de *backtracking*, en donde hacemos una elección de $t_1, \dots, t_{n-2} \in \mathbb{Z}$ que satisfagan (2.6) y determinamos si existe $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$ que satisfaga (2.9). En caso de que no exista tal parámetro, cambiamos nuestra elección de t_1, \dots, t_{n-2} . Ciertamente la decisión más simple es realizar el cambio $t_{n-2} \leftarrow t_{n-2} - 1$. Cabe destacar que si los signos de q_{n-1} y q_n son distintos, entonces no es necesario realizar *backtracking*, pues el algoritmo termina en la primera iteración. Independientemente del caso, eventualmente obtendremos un vector de parámetros \mathbf{t} que satisfaga las desigualdades necesarias y, por lo tanto, eventualmente obtendremos un punto entero óptimo.

2.1.2. El caso finito

Resulta valioso mencionar que, como $\mathbf{p} \geq 0$, el problema (2.2) es una instancia particular del famoso problema de la mochila:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{u}^T \mathbf{x}, \quad (2.10a)$$

$$\text{s.a. } \mathbf{w}^T \mathbf{x} \leq c, \quad (2.10b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (2.10c)$$

donde los vectores positivos $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$ son conocidos como vector de útiles y vector de pesos, respectivamente. Como no acotamos \mathbf{x} , el problema recibe el nombre de problema de la mochila no acotado. Pero también como $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, el problema también puede considerado como un problema de la suma de conjuntos no acotado. En nuestro análisis de resultados compararemos los tiempos de terminación de nuestro algoritmo con los de Ramificación y Acotamiento, MTU1, MTU2, al igual que una formulación de programación dinámica alternativa ([MT90]).

De acuerdo al Teorema 2.7, el número de puntos factibles sobre la η -ésima capa entera es finito y, por lo tanto, puede ser cero. No obstante, al igual que en la sección anterior, somos capaces de caracterizar todos los puntos enteros que se encuentran en cualquier capa entera. Consecuentemente, si determinamos que no hay ningún punto factible en la η -ésima capa entera, descendemos a la $(\eta - 1)$ -ésima capa entera y realizamos el mismo análisis.

Además, observemos que en realidad es suficiente con descender hasta la 0-ésima capa entera, pues los puntos enteros sobre capas menores tienen utilidades negativas. De acuerdo al Teorema 2.7, estos no pueden ser factibles. Concluimos entonces que basta con analizar las capas enteras con parámetros $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots, 0\}$ y terminamos una vez que encontremos un punto no negativo.

Así pues, sea $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots, 0\}$. Al igual que en el caso anterior, deseamos resolver la ecuación lineal diofantina

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n = k.$$

Implementamos la misma estrategia para plantear una formulación dinámica,

$$\frac{q_1}{g_1} x_1 + g_2 \omega_2 = \omega_1.$$

No obstante, en este caso podemos interpretar ω_2 de tal manera que obtengamos más información. Así como $\omega_1 := k$ es el presupuesto disponible en un inicio, ω_2 es el presupuesto disponible después de utilizar parte de él para adquirir $x_1 \geq 0$ unidades. Por lo tanto, es posible agregar la restricción $\omega_2 \geq 0$. Similarmente, en el i -ésimo paso de la formulación dinámica, somos capaces de agregar la restricción de que el presupuesto restante ω_{i+1} sea no negativo. Combinando esto con la no negatividad de x_i , obtenemos de (2.5),

$$\left\lceil -\frac{\omega_i x'_i}{g_{i+1}} \right\rceil \leq t_i \leq \left\lfloor \frac{\omega_i \omega'_{i+1}}{q_i} \prod_{j=1}^i g_j \right\rfloor. \quad (2.11)$$

para todo $i \in \{1, \dots, n - 2\}$. Después, como $0 < q_{n-1}, q_n$, se sigue de (2.8),

$$\left\lceil -\frac{\omega_{n-1} x'_{n-1}}{q_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j \right\rceil \leq t_{n-1} \leq \left\lfloor \frac{\omega_{n-1} x'_n}{q_{n-1}} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j \right\rfloor. \quad (2.12)$$

De igual manera que el caso infinito, hacemos *backtracking* en caso de encontrarnos con que $t_i \in \mathbb{Z}$ no puede satisfacer (2.11) si $i \in \{1, \dots, n - 2\}$, o si $t_{n-2} \in \mathbb{Z}$ no puede satisfacer (2.12). En este caso, puede ser que en cualquier nivel t_i no se satisfaga la desigualdad y por lo tanto que necesitemos cambiar uno de t_1, \dots, t_{i-1} . Ciertamente, la elección más simple

es realizar el cambio $t_{i-1} \leftarrow t_{i-1} \pm 1$ siempre y cuando continúe satisfaciendo sus cotas correspondientes.

El número de elecciones $t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{Z}$ es finito para la k -ésima capa entera. Decidimos, finalmente, descender a la $(k-1)$ -capa entera y repetir el proceso si en ninguna de esas elecciones se satisfacen ambas (2.11) y (2.12). Evidentemente, $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^n$ es factible y se encuentra en la 0-ésima capa, por lo que este proceso está asegurado en terminar si es que el problema es factible, lo cual supusimos desde un inicio.

2.1.3. Análisis de resultados

2.2. Fase 2: múltiples restricciones junto con la presupuestaria

2.2.1. Estrategias alternativas para el problema de factibilidad

2.3. Fase 3: múltiples restricciones

2.4. Consideraciones y extensiones del algoritmo

Bibliografía

- [BH09] Robert F. Bodi and Katrin Herr. Symmetries in integer programs. *arXiv: Combinatorics*, 2009.
- [Lav14] Carmen Gómez Laveaga. *Álgebra Superior: Curso completo*. Programa Universitario del Libro de Texto. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México, primera edición edition, 2014. Primera reimpresión: julio de 2015.
- [MT90] Silvano Martello and Paolo Toth. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc., USA, 1990.