

INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO



Ecuaciones lineales diofantinas  
aplicadas a  
programas lineales enteros

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

IÑAKI SEBASTIÁN LIENDO INFANTE

ASESOR

DR. ANDREAS WACHTEL

# Agradecimientos

# Resumen

# Índice general

<b>1. Motivación</b>	<b>1</b>
<b>2. Aspectos Teóricos</b>	<b>5</b>
2.1. Prerrequisitos . . . . .	6
2.2. Fundamentos . . . . .	17
<b>3. El caso infinito</b>	<b>55</b>
3.1. Análisis de resultados . . . . .	62
<b>4. El caso finito</b>	<b>65</b>
4.1. Análisis de capas enteras . . . . .	66
4.2. Construcción de soluciones . . . . .	87
4.3. Análisis de resultados . . . . .	92
4.4. Aplicaciones . . . . .	92
<b>A. Algoritmo de Ramificación y Acotamiento</b>	<b>95</b>

## Capítulo 1

# Motivación

El algoritmo de Ramificación y Acotamiento (R&A) es el estándar para resolver programas lineales enteros. Este método se basa en el famoso paradigma de división y conquista, el cual combina las soluciones de subproblemas más pequeños a fin de que se obtenga una solución del problema original. Los problemas se estructuran de manera que generen un árbol: el problema original genera una colección de subproblemas, y luego cada subproblema genera su propia colección de subsubproblemas, etcétera.

En la sección 2.1.2 describimos cómo es que Ramificación y Acotamiento cuenta con reglas o políticas de poda para evitar resolver todos los subproblemas, pues de manera contraria el número de nodos a recorrer crece exponencialmente. No obstante, R&A jamás podará subárboles que contengan una posible solución. Por lo tanto, las políticas de poda operan de manera subóptima siempre que exista una gran cantidad de posibles soluciones distribuidas en subárboles disjuntos. Si, en el peor de los casos, cada hoja del árbol contiene una solución, entonces R&A deberá resolver todos los subproblemas.

Se ha observado que esto último ocurre siempre que el vector objetivo es ortogonal a una de las restricciones del programa lineal entero. En efecto, el programa relajado cuenta con una infinidad de soluciones, por lo que todo

subproblema tendrá al menos una solución, lo cual implica que las políticas de resultan ser ineficientes. La figura ?? muestra cómo las implementaciones comunes de R&A generan subproblemas con podas ineficientes. La instancia más simple que exhibe estas ineficiencias en las políticas de poda es

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : \mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq u, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}. \quad (1.1)$$

En este caso, la restricción  $\mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq u$  es ortogonal al vector objetivo.

En esta tesis analizamos a profundidad el problema anterior para desarrollar un nuevo método que nos permita resolver de manera más eficiente este tipo de instancias. Por la misma estructura de este problema, supondremos sin pérdida de generalidad que  $\mathbf{p}$  no tiene entradas nulas. Ciertamente, nos desharemos de esta suposición una vez que introduzcamos el caso de múltiples restricciones en el capítulo 4.

De manera resumida, mostramos que existe una equivalencia entre resolver problemas del tipo (1.1) y resolver ecuaciones lineales diofantinas en  $n$  incógnitas. Los coeficientes de las ecuaciones lineales diofantinas estarán dadas por las entradas de un vector  $\mathbf{q}$  asociado a  $\mathbf{p}$ . Así también, el número de ecuaciones que deberemos resolver depende, en gran medida, de los signos en las entradas de  $\mathbf{q}$ . El teorema 2.2.9 muestra que si alguna entrada  $q_i$  es negativa, entonces es necesario resolver una sola ecuación y, en caso de que todas las entradas de  $\mathbf{q}$  sean positivas, el número de ecuaciones a resolver es finito.

El capítulo 1 presenta los prerequisites necesarios para obtener los resultados que se encuentran a lo largo de esta tesis. Definimos una clase de vectores a la cual supondremos que  $\mathbf{p}$  pertenece y obtendremos varias de sus propiedades. Sin duda, esta clase de vectores contiene cualquier vector representable en aritmética finita por lo que, en la práctica, este supuesto es razonable. Los resultados que más destacan en esta parte de la tesis son, en opinión del autor, los teoremas 2.2.9 y 2.2.15, así como el corolario 2.2.16.

El capítulo 2 analiza el caso en el que el vector  $\mathbf{q}$  asociado a  $\mathbf{p}$  tiene una entrada negativa. Bajo esta hipótesis adicional, la solución del problema (1.1) se obtiene al resolver una sola ecuación lineal diofantina. Por un lado, mostramos que el valor objetivo del problema (1.1) se puede determinar de manera inmediata sin tener conocimiento de la solución óptima. Por el otro lado, presentamos un algoritmo que construye la solución óptima y cuya complejidad es polinomial. Finalmente, realizamos una serie de experimentos numéricos que permiten comparar los tiempos de terminación de nuestro algoritmo con los de Ramificación y Acotamiento.

El capítulo 3 analiza el caso en el que el vector  $\mathbf{q}$  asociado a  $\mathbf{p}$  tiene entradas estrictamente positivas. Bajo esta hipótesis solamente podemos asegurar la finitud del número de ecuaciones lineales diofantinas que debemos resolver para encontrar la solución de (1.1). No obstante, mostramos que si el lado derecho de la restricción  $\mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq u$  es suficientemente grande, entonces sí basta con resolver una sola ecuación lineal diofantina para obtener el óptimo. De manera incidental, a través de las herramientas desarrolladas en este capítulo, encontramos también nuevas cotas superiores para el Problema de la Moneda, también conocido como el problema de Frobenius. Además, presentamos un algoritmo que construye la solución óptima de (1.1) bajo el supuesto  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ . Al igual que el capítulo 2, realizamos una serie de experimentos numéricos que permiten comparar los tiempos de terminación de nuestro algoritmo con los de Ramificación y Acotamiento.

El capítulo 4 introduce el caso de múltiples restricciones. Observamos en este capítulo que la división en casos del teorema 2.2.9 deja de ser vigente. Desarrollamos un nuevo método que permite resolver este tipo de problemas. Es decir, exhibimos una manera de resolver programas lineales enteros bajo la perspectiva de la búsqueda de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales diofantinas. Por lo tanto, es necesario introducir nueva maquinaria para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones. Puesto que este nuevo

análisis requerido sería demasiado grande para añadirlo a la tesis, el autor prefirió ser más informal en su exposición. Ciertamente, este capítulo sirve como directriz inicial para la realización de futuras investigaciones.

Cabe mencionar que cerramos cada capítulo con su respectivo apartado de conclusiones, por lo que no hay capítulo final independiente.



## Capítulo 2

# Aspectos Teóricos

En este capítulo cimentamos las bases teóricas necesarias para resolver instancias particulares de programas lineales enteros. En primer lugar, la sección de prerequisites recopila resultados básicos de teoría de números y de programación lineal que constituyen las herramientas principales para la derivación de nuestros propios resultados. En segundo lugar, la sección de Fundamentos comienza con definiciones y enunciados obtenidos de [BH09], los cuales utilizaremos para continuar con la construcción de nuestros resultados que, en pleno conocimiento del autor, son originales. El problema fundamental que permitirá construir incrementalmente nuestro algoritmo es

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{p}^T \mathbf{x}, \quad (2.1a)$$

$$\text{s.a. } \mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq u, \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

En la sección de Fundamentos analizaremos a profundidad este problema, cuyo punto de culminación será el teorema 2.2.9. Veremos que es recomendable separar en dos partes el análisis de este problema: el caso  $p_i < 0$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ ; y el caso  $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ . Observemos que, para este problema, podemos suponer sin pérdida de generalidad que todas las entradas de  $\mathbf{p}$

son no nulas. Cuando introduzcamos múltiples restricciones en la sección 2.2.2 nos desharemos de este supuesto.

Los siguientes dos capítulos examinarán respectivamente los casos que induce el teorema 2.2.9. Por el momento, cabe destacar que el segundo caso será de mayor interés y tendrá mayor aplicabilidad en problemas reales, pues es una instancia particular del Problema de la Mochila. No obstante, el caso  $p_i < 0$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$  también será de utilidad para exhibir casos particulares en donde el algoritmo de Ramificación y Acotamiento obtiene un rendimiento deficiente.

## 2.1. Prerrequisitos

En los siguientes capítulos usaremos extensivamente resultados básicos de teoría de números y de programación lineal, por lo que es provechoso recopilarlos en esta primera sección. En particular, destaca la importancia de las ecuaciones lineales diofantinas para la construcción de nuestro algoritmo. En esta sección el autor consideró pertinente no incluir demostraciones, pues los enunciados son mostrados en cualquier clase de álgebra superior, programación lineal, o investigación de operaciones, por ejemplo. La referencia principal para la parte de teoría de números es [Lav14], mientras que la de programación lineal es [Oli17].

### 2.1.1. Teoría de Números

#### Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

En primer lugar, introducimos el símbolo de relación “ $|$ ” para indicar divisibilidad. Dados dos enteros  $a, b$ , decimos que  $b$  divide a  $a$  (y escribimos  $b | a$ ) si y solo si existe un entero  $k$  tal que  $a = k \cdot b$ . Así también, denotamos el

conjunto de divisores de  $a$  como

$$D(a) := \{b \in \mathbb{Z} : b \mid a\}.$$

Si  $a$  es distinto de cero, encontramos que  $D(a)$  es finito, puesto que si  $b \mid a$ , entonces  $|b| \leq |a|$ , lo cual implica que  $|D(a)| \leq 2|a|$ . En caso de que  $a$  sea nulo, obtenemos  $D(a) = \mathbb{Z}$ . Observemos también que  $\{-1, 1\} \subseteq D(a)$  para todo entero  $a$ .

**Definición 2.1.1.** Sean  $a_1, \dots, a_n$  enteros no todos iguales a cero, entonces definimos su **máximo común divisor**  $d$  como el elemento maximal del conjunto  $\bigcap_{i=1}^n D(a_i)$ , y escribimos  $d = \text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\}$ . Si  $d = 1$ , entonces decimos que  $a_1, \dots, a_n$  son **coprimos**.

Puesto que  $a_i \neq 0$  para alguna  $i$  en la definición anterior, encontramos que el conjunto  $\bigcap_{i=1}^n D(a_i)$  es finito y, como también es no vacío, en efecto existe un elemento maximal. Es decir, el máximo común divisor  $d$  siempre está bien definido. Cabe mencionar que el máximo común divisor siempre es estrictamente positivo, pues se cumple que  $1 \in D(a)$  para todo entero  $a$ .

Otra definición equivalente para el máximo común divisor normalmente es dada de manera inductiva. Decimos que  $d$  es el máximo común divisor de dos enteros  $a_1, a_2$ , no ambos nulos, si se satisface

1.  $d \mid a_1$  y  $d \mid a_2$ , y también,
2. si  $d' \mid a_1$  y  $d' \mid a_2$ , entonces  $d' \mid d$ .

Luego, para un conjunto de enteros  $a_1, a_2 \dots a_n$ , no todos nulos, definimos el máximo común divisor entre ellos a partir de

$$\text{mcd}\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\} := \text{mcd}\{a_1, \text{mcd}\{a_2, \dots, \text{mcd}\{a_{n-1}, a_n\}\}\}.$$

Sin embargo, debemos ser cuidadosos con esta manera de definir las cosas, pues puede ser el caso, por ejemplo, que  $a_{n-1} = a_n = 0$  y entonces

$\text{mcd}\{a_{n-1}, a_n\}$  no está bien definido. Una manera simple de arreglar esto último es agregar la condición de que  $a_n$  sea no nulo. Es por esto último que el autor prefirió la definición 2.1.1. Independientemente de cómo definamos el máximo común divisor, la manera de calcularlo siempre es a través del Algoritmo de Euclides. A partir de este punto usaremos ambas definiciones de manera indistinta.

*Observación.* No porque una colección de enteros sea coprima se sigue que estos enteros son coprimos a pares. Por ejemplo, los enteros 1, 3 y 3 son coprimos pero evidentemente 3 y 3 no lo son.

**Definición 2.1.2.** Decimos que  $c \in \mathbb{Z}$  es una **combinación lineal entera** de un conjunto de enteros  $a_1, \dots, a_n$  si existen enteros  $x_1, \dots, x_n$  tales que  $c = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ . Si  $c$  es positivo, también decimos que esto último es una **combinación lineal entera positiva**.

El siguiente teorema, a pesar de su simpleza, es central para los resultados obtenidos en esta tesis.

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $d$  un entero y sean  $a_1, \dots, a_n$  una colección de enteros no todos iguales a cero. Entonces  $d = \text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\}$  si y solo si  $d$  es la mínima combinación lineal entera positiva de  $a_1, \dots, a_n$ .*

**Ejemplo 2.1.4.** El máximo común divisor  $d$  de los enteros  $a_1 := 2$ ,  $a_2 := 3$  y  $a_3 := 5$  es 1 y además se cumple que  $-3a_1 - a_2 + 2a_3 = 1 = d$ .

**Lema 2.1.5.** *Si  $d = \text{mcd}\{a_1, \dots, a_n\}$ , entonces  $\text{mcd}\{\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\} = 1$ .*

Además del máximo común divisor, requeriremos al mínimo común múltiplo, empero en menor medida. Sea  $a$  un entero y denotamos el conjunto de sus múltiplos como

$$M(a) := \{x \in \mathbb{Z} : a \mid x\}.$$

Si  $a$  es nulo, entonces  $M(a) = \{0\}$ . En caso contrario encontramos que  $M(a)$  es un conjunto infinito. Análogamente a la definición 2.1.1, definimos el mínimo común múltiplo  $m$  de una colección de enteros  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  como el elemento minimal de  $\mathbb{N} \cap \bigcap_{i=1}^n M(a_i)$ . Escribimos  $m = \text{mcm}\{a_1, \dots, a_n\}$ . Para observar que está bien definido, basta mencionar que el producto  $|a_1 \cdots a_n|$  es un elemento de la intersección y por lo tanto esta es no vacía.

## Ecuaciones lineales diofantinas

Sea  $c \in \mathbb{Z}$  y sean  $a_1, \dots, a_n$  enteros. Una ecuación lineal diofantina es una ecuación donde queremos encontrar enteros  $x_1, \dots, x_n$  que satisfagan

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c.$$

Será de nuestro interés en las siguientes secciones resolver iterativamente este tipo de ecuaciones. Por el momento basta mencionar que podemos enfocarnos en el caso  $n = 2$  sin ninguna pérdida de generalidad. No obstante, los resultados se mantienen para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Los siguientes enunciados abordan el problema de determinar existencia y unicidad para las ecuaciones lineales diofantinas, así como la construcción de sus soluciones.

**Teorema 2.1.6** (Existencia). *Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , no ambos cero. La ecuación  $ax + by = c$  tiene solución entera si y solo si  $\text{mcd}\{a, b\} \mid c$ .*

Para construir el conjunto de soluciones a una ecuación lineal diofantina, encontramos primero una solución particular.

**Definición 2.1.7.** Sea  $d := \text{mcd}\{a, b\}$  y sean  $x', y'$  enteros tales que  $ax' + by' = d$  (c.f. teorema 2.1.3). Decimos entonces que  $x', y'$  son **coeficientes de Bézout** asociados a  $a, b$ , respectivamente<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Los coeficientes de Bézout se pueden calcular a través del Algoritmo Extendido de Euclides. Véase [https://en.wikipedia.org/wiki/Extended\\_Euclidean\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_Euclidean_algorithm).

*Observación.* Los coeficientes de Bézout asociados a un par de enteros no son únicos. En efecto, si  $x', y'$  son coeficientes de Bézout de  $a, b$ , entonces  $x' + b, y' - a$  también lo son:

$$a(x' + b) + b(y' - a) = ax' + by' + ab - ab = ax' + by' = d.$$

Para fines de esta tesis basta la existencia de estos coeficientes, por lo que decimos de manera indistinta “los coeficientes de Bézout” y “una elección de coeficientes de Bézout”.

Definamos  $d := \text{mcd}\{a, b\}$  y supongamos que la ecuación  $ax + by = c$  tiene solución. Por el teorema 2.1.6, se sigue que  $d \mid c$ , y entonces existe  $c' \in \mathbb{Z}$  tal que  $c = c' \cdot d$ . Sean  $x', y'$  los coeficientes de Bézout asociados a  $a, b$  respectivamente. Así,

$$a(c' \cdot x') + b(c' \cdot y') = c'(ax' + by') = c'd = c,$$

por lo que  $(c' \cdot x', c' \cdot y')$  es una solución particular de la ecuación  $ax + by = c$ .

**Teorema 2.1.8** (Construcción). *Sea  $(x_0, y_0)$  una solución particular de la ecuación lineal diofantina  $ax + by = c$ . Entonces todas las soluciones de la ecuación están dadas por*

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t, \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde  $d := \text{mcd}\{a, b\}$  y  $t \in \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 2.1.9.** Consideremos la ecuación lineal  $2x + 3y = 5$ . Los coeficientes de Bézout asociados a 2 y 3 son, respectivamente, -1 y 1. Luego, una solución particular para la ecuación es  $(x_0, y_0) = (-5, 5)$ . Por el teorema

anterior encontramos que todas las soluciones están dadas por

$$\begin{cases} x = -5 + 3t, \\ y = 5 - 2t, \end{cases}$$

donde  $t \in \mathbb{Z}$  es una variable libre. En efecto, sustituyendo obtenemos

$$2(-5 + 3t) + 3(5 - 2t) = -10 + 15 + 6t - 6t = 5.$$

### 2.1.2. Programación lineal

La programación lineal se encarga de resolver problemas de optimización de la forma

$$\max_{\mathbf{x}} \{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}, \quad (2.3)$$

donde  $P$  es un poliedro. En esta sección repasamos brevemente propiedades del poliedro  $P$  al cual llamamos región factible. Así también, indicamos dónde se encuentra el óptimo del problema y hacemos mención rápida sobre cómo obtenerlo. Finalmente, nos enfocamos en programas lineales enteros y, más importantemente, describimos cómo funciona el algoritmo de Ramificación y Acotamiento para encontrar sus soluciones.

**Definición 2.1.10.** Sea  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  un vector no nulo y sea  $b \in \mathbb{R}$  un escalar. Llamamos **hiperplano afino** al conjunto de vectores  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  que satisfacen  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ . Así también, llamamos **semi-espacios afinos** a los conjuntos de vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  que satisfacen  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$  y  $\mathbf{a}^T \mathbf{y} \leq b$ .

**Definición 2.1.11.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matriz con renglones linealmente independientes y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  un vector. Entonces al conjunto definido por

$$P := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\} \quad (2.4)$$

lo llamamos **poliedro**. Si, además,  $P$  es acotado, entonces decimos que  $P$  es un **politopo**.

*Observación.* Todo poliedro  $P$  definido de esta manera representa la intersección de  $m$  semi-espacios afinos. Esto se debe a que  $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$  si y solo si  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$  para toda  $1 \leq i \leq m$  y donde  $\mathbf{a}_i^T$  representa el  $i$ -ésimo renglón de la matriz  $A$ . En la Figura 2.1 se muestra visualmente esta relación entre hiperplanos afinos y poliedros.

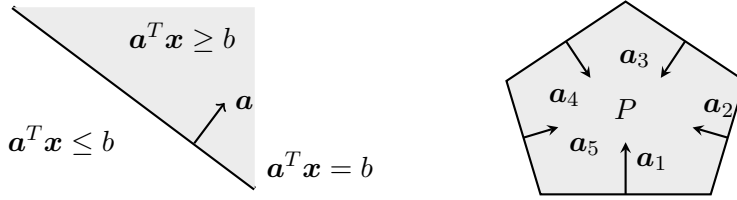


Figura 2.1.: *Izquierda:* Un hiperplano afino  $\{\mathbf{x}: \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$  junto con los dos semi-espacios que induce. *Derecha:* Este poliedro  $P$  es acotado y es la intersección de un conjunto finito de semi-espacios inducidos por un hiperplano afino.

**Definición 2.1.12.** Sea  $P$  un poliedro. Decimos que el vector  $\mathbf{x} \in P$  es un **vértice** de  $P$  si existe  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  de manera que  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T \mathbf{y}$  para todo  $\mathbf{y} \in P \setminus \{\mathbf{x}\}$ .

En términos gráficos, decimos que  $\mathbf{x}$  es un vértice si se satisfacen dos condiciones: en primer lugar, existe un hiperplano afino que pasa por  $\mathbf{x}$  y uno de sus semi-espacios inducidos contiene completamente al poliedro  $P$ ; en segundo lugar, ningún otro punto de  $P$  se encuentra sobre este hiperplano.

**Definición 2.1.13.** Sea  $P$  un poliedro y sea  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  un vector. Todo problema de optimización de la forma (2.3) entra en una de las siguientes tres categorías:

1. El valor óptimo no existe: ningún vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  satisface el sistema de desigualdades  $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ . Es decir, la región factible es vacía.



2. El valor óptimo existe y es infinito: el poliedro  $P$  no es acotado y somos capaces de encontrar una sucesión de vectores  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en el poliedro  $P$  que satisface  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{k+1} > \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .
3. El valor óptimo existe y es finito: este caso es la negación de los dos casos anteriores, pero cabe recalcar que esto no significa que el poliedro  $P$  es acotado.

En el primer caso decimos que **el problema es infactible**, mientras que en los últimos dos decimos que **el problema es factible**. También diremos comúnmente del segundo caso que **el problema es no acotado**.

Es posible mostrar que todo poliedro  $P := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$  puede ser transformado a la forma estándar

$$\{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n+n+m} : A(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) - \mathbf{s} = \mathbf{b}, (\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{s}) \geq \mathbf{0}\},$$

de manera que todo problema de optimización de la forma (2.3) puede ser escrito sin pérdida de generalidad como

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \tag{2.5a}$$

$$\text{s.a.} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.5b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

donde “s.a.” es una abreviación de “sujeto a”. De ahora en adelante, nuestro análisis se concentrará exclusivamente en problemas lineales de este tipo. Es decir, supondremos, sin pérdida de generalidad, que todo problema lineal se encuentra en esta forma estándar.

**Teorema 2.1.14.** *Sea  $P$  un poliedro que tiene al menos un vértice, consideremos el problema (2.5), y supongamos que el valor óptimo  $z^*$  existe y es finito. Entonces el conjunto de soluciones óptimas contiene al menos un vértice de  $P$ .*

Este teorema fundamental constituye el primer paso para la construcción de varios algoritmos que encuentran soluciones del problema (2.5). Ciertamente el más famoso de todos es el algoritmo simplex, el cual “salta” de vértice en vértice hasta llegar a uno con valor óptimo. Otros, más modernos y conocidos como métodos de puntos interiores, comienzan en el interior del poliedro  $P$  y son “atraídos” como imanes a uno de los vértices con valor óptimo. No es el objetivo de esta tesis exponer la maquinaria matemática detrás de estos algoritmos<sup>2</sup>.

Ahora describimos brevemente los programas lineales enteros y pasamos a explicar el método de Ramificación y Acotamiento. Por ello, lo que se encuentra a continuación supone que contamos con un algoritmo para resolver problemas del tipo (2.5).

**Definición 2.1.15.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  una matriz con renglones linealmente independientes y sea  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  un vector. Al problema de optimización lineal (2.5) lo llamamos **problema relajado** del programa lineal entero

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (2.6a)$$

$$\text{s.a. } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.6b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Resalta el hecho de que la formulación de un programa lineal entero es idéntico a su formulación relajada, solamente agregamos la restricción de que nuestro vector solución  $\mathbf{x}^*$  sea entero. Es decir, lo único que cambia es la región de factibilidad. De hecho, si definimos el poliedro

$$P := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

entonces tenemos que  $P \cap \mathbb{Z}^n$  corresponde a la región factible de (2.6),

---

<sup>2</sup>Sin embargo, la literatura para explicar estos métodos es harto abundante. Véase, por ejemplo, [NW06].

mientras que  $P$  corresponde a la región factible de su problema relajado.

A partir de lo anterior, deducimos inmediatamente que el valor óptimo  $z_{\text{PE}}^*$  de un programa entero es una cota inferior del valor óptimo  $z^*$  de su problema relajado, pues ambos son problemas de maximización y es cierto que  $P \cap \mathbb{Z}^n \subseteq P$ . De aquí se sigue entonces que si  $z^* = z_{\text{PE}}^*$ , entonces la solución óptima  $\mathbf{x}^*$  del problema relajado también es la solución óptima del programa lineal entero.

Para resolver problemas lineales enteros más generales, comúnmente se utiliza el algoritmo de Ramificación y Acotamiento. Este método consiste en generar un árbol binario donde cada nodo representa un subproblema lineal a resolver. En la raíz del árbol resolvemos el problema relajado (2.5) y, si la solución óptima  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  no es entera, entonces para alguna entrada  $x_i^*$  no entera agregamos la restricción  $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$  para crear un subproblema, y también añadimos la restricción  $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$  para crear otro subproblema. Este procedimiento se realiza de manera recursiva.

Observemos que, si decidimos recorrer todos los nodos del árbol binario, entonces tendremos que resolver al menos  $2^n$  subproblemas, donde  $n$  es la dimensión del problema lineal. Por esta razón, el algoritmo cuenta con políticas para deshacerse de subárboles que nunca proveerán la solución óptima. El autor considera que es mejor ilustrar estas políticas a partir de un ejemplo. El Algoritmo 5 en el Apéndice A presenta una versión rudimentaria del método de Ramificación y Acotamiento.

**Ejemplo 2.1.16** ([Oli17]). Consideremos el programa lineal entero

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} \quad & 4x_1 - x_2, \\ \text{s. a.} \quad & 7x_1 - 2x_2 \leq 14, \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ & x_2 \leq 3, \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

La región factible de este problema se muestra en la Figura 2.2. La solución al problema relajado, cuya región factible denotamos por  $S_0$ , está dada por  $\mathbf{x}^0 := (20/7, 3)^T$ . Como  $x_1^0 = 20/7$  no es entero, generamos dos nuevos subproblemas con regiones factibles

$$S_{00} := S_0 \cup \{x_1 \leq \lfloor 20/7 \rfloor = 2\},$$

$$S_{01} := S_0 \cup \{x_1 \geq \lceil 20/7 \rceil = 3\}.$$

De la Figura 2.2, observamos que  $S_{01}$  es vacío y por lo tanto de este problema no podemos generar otros subproblemas. En este caso, decimos que **podamos  $S_{01}$  por infactibilidad**.

Ahora bien, la solución al problema  $S_{00}$  está dada por  $\mathbf{x}^1 := (2, 1/2)^T$ . Encontramos que  $x_2^1 = 1/2$  no es entero y por lo tanto generamos dos nuevos subproblemas:

$$S_{000} := S_{00} \cup \{x_2 \leq \lfloor 1/2 \rfloor = 0\},$$

$$S_{001} := S_{00} \cup \{x_2 \geq \lceil 1/2 \rceil = 1\}.$$

Observemos que la solución  $\mathbf{x}^2$  de  $S_{001}$  es  $(2, 1)^T$ , la cual es entera y tiene valor objetivo  $z_2^* := 7$ . No generamos otros subproblemas a partir de este problema porque sus regiones factibles estarán contenidas en  $S_{001}$  y por lo tanto sus valores objetivos serán menores o iguales al de  $S_{001}$ . Así pues, decimos que **podamos  $S_{001}$  por integralidad**.

La solución de  $S_{000}$ , en cambio, es  $\mathbf{x}^3 := (3/2, 0)^T$  y tendríamos que ramificar de nuevo en otros dos subproblemas. No obstante, observemos que el valor objetivo de este subproblema es  $z_3^* := 6$ , el cual es menor que  $z_2^* = 7$ . Como la región factible de cualquier subproblema generado a partir de este último problema estará contenido en  $S_{000}$ , se sigue que su valor

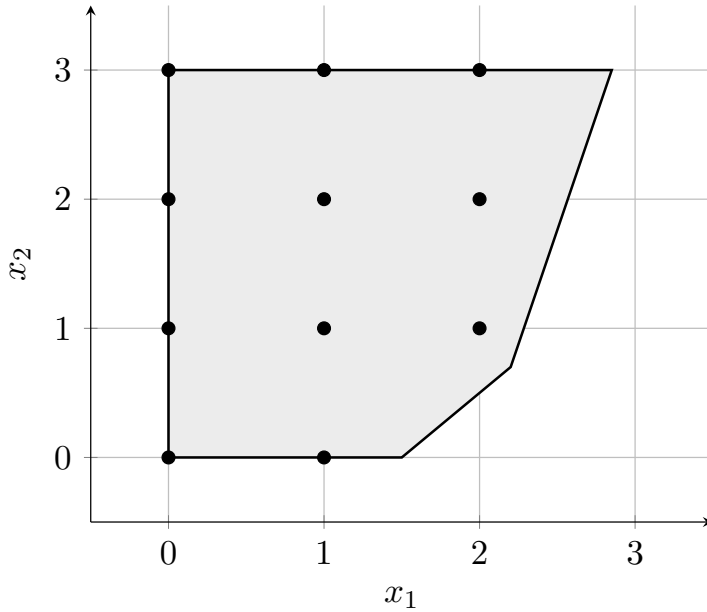


Figura 2.2.: Los puntos negros forman la región factible del programa lineal entero del Ejemplo 2.1.16, mientras que la región sombreada es la región factible de su problema relajado.

objetivo será menor o igual al de  $S_{000}$ . Decimos entonces que **podamos**  $S_{000}$  **por cota**.

Como hemos agotado todos los subproblemas que podríamos generar, entonces concluimos que la solución óptima de este programa lineal entero es  $\mathbf{x}^2 = (2, 1)^T$  y tiene valor objetivo  $z_2^* = 7$ .

## 2.2. Fundamentos

Esta sección constituye el primer paso para la construcción de nuestro algoritmo. Se divide en dos partes. Primeramente damos a conocer las definiciones y enunciados provistos por [BH09], al mismo tiempo que hacemos un par de observaciones. Esta primera parte puede darse por concluida una

vez citado el teorema 2.2.5. Así también, es importante aclarar que el autor tradujo libremente algunos términos a falta de encontrar fuentes en español que hicieran uso de ellos. A saber, el autor decidió nombrar “vectores esencialmente enteros” a los *projectively rational vectors* y “capas enteras” a los *c-layers* en las Definiciones 2.2.1 y 2.2.3, respectivamente.

En la segunda parte de esta sección comenzamos con nuestro análisis del problema (2.1). La razón de considerarlo fundamental para esta tesis fue mencionado en el capítulo de Motivación, pero lo repetimos una vez más: en esta clase de problemas el vector es ortogonal a la única restricción, y esto implica que el problema relajado tenga una infinidad de soluciones. Hemos observado que, en presencia de este fenómeno, el algoritmo de Ramificación y Acotamiento no divide la región factible de manera óptima. Por ello investigamos formas alternativas para atacar este problema antes de hacer la separación de casos  $p_i \leq 0$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$  o  $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ .

**Definición 2.2.1.** Decimos que un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  es **esencialmente entero** si existe un vector  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$  y un escalar  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\mathbf{v} = m\mathbf{w}$ . Además, decimos que  $\mathbf{w}$  es el **múltiplo coprimo** de  $\mathbf{v}$  si sus entradas son coprimas (c.f. definición 2.1.1) y si su primera entrada no nula  $v_i$  también es positiva.

En otras palabras, decimos que  $\mathbf{v}$  es esencialmente entero si es un múltiplo real de un vector entero.

**Ejemplo 2.2.2.** El vector  $(-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T = \sqrt{2}(-1, 1/2)^T$  es esencialmente entero y  $(2, -1)^T$  es su múltiplo coprimo. Contrariamente, el vector  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})^T$  no es esencialmente entero.

*Observación.* Todo vector  $\mathbf{v}$  cuyas entradas son racionales ( $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^n$ ) es esencialmente entero. En efecto,  $v_i = \frac{p_i}{q_i}$  para algunos enteros  $p_i$  y  $q_i$  con  $q_i$  distinto de cero. Si definimos  $m := \text{mcm}\{q_1, \dots, q_n\} \neq 0$  y  $\mathbf{w} := m\mathbf{v}$ , se sigue que  $\mathbf{v} = \frac{1}{m}\mathbf{w}$  y también  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$ .

*Observación.* Todo vector  $\mathbf{v}$  esencialmente entero tiene a lo más dos vectores coprimos asociados. Sean  $m \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$  tales que  $\mathbf{v} = m\mathbf{w}$ . Entonces

$$\pm \frac{1}{\text{mcd}\{w_1, \dots, w_n\}} \mathbf{w}$$

son dos vectores cuyas entradas son coprimas, de acuerdo al lema 2.1.5. Como la primera entrada no nula  $w_i$  también debe ser positiva, se sigue que solo uno de estos dos vectores es el múltiplo coprimo de  $\mathbf{v}$ . Así, el múltiplo coprimo de un vector esencialmente entero es único.

Porque todo número representable en cualquier sistema de aritmética finita es necesariamente racional, decidimos enfocar nuestro análisis en vectores esencialmente enteros. Desde el punto de vista puramente teórico, esta condición reduce drásticamente el tipo de programas lineales que podemos resolver. No obstante, esta clase de vectores es un poco más general que los considerados en otros textos de programación lineal, por ejemplo, [MT90] y [Sch98] toman en cuenta vectores puramente racionales. En [BH09] se revelan propiedades de los vectores esencialmente enteros que reproducimos aquí y que nos permitirán plantear ecuaciones lineales diofantinas cuyas soluciones otorgan candidatos para puntos óptimos de un problema lineal.

**Definición 2.2.3.** Sea  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  un vector esencialmente entero y sea  $t \in \mathbb{R}$  un escalar. Decimos que su hiperplano afino asociado

$$H_{\mathbf{v},t} := \ker\{\mathbf{x} \mapsto \mathbf{v}^T \mathbf{x}\} + t\mathbf{v} = \{\mathbf{v}^\perp + t\mathbf{v} : \mathbf{v}^T \mathbf{v}^\perp = 0\} \quad (2.7)$$

es una **capa entera** si contiene al menos un punto entero.

Observemos que todo hiperplano afino  $H_{\mathbf{v},t}$  es invariante ante reescalamientos en  $\mathbf{v}$ . Es decir, si  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  es un escalar, entonces  $H_{\mathbf{v},t} = H_{r\mathbf{v},t/r}$ . En particular, el conjunto de hiperplanos afinos asociados a un vector  $\mathbf{v}$  esencialmente entero es igual al conjunto de hiperplanos afinos asociados a su múltiplo coprimo  $\mathbf{w}$ . Ahora bien, cualquier vector coprimo induce una

familia de capas enteras y, sorprendentemente, esa familia forma una cobertura de  $\mathbb{Z}^n$ , como lo indica el teorema 2.2.5.

**Lema 2.2.4.** *Sean  $\mathbf{v}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  con  $\mathbf{v}$  distinto de cero. Entonces  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{v}, t_{\mathbf{x}}}$ , donde  $t_{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|^2}$ .*

**Teorema 2.2.5.** *Sea  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  un vector esencialmente entero y sea  $\mathbf{w}$  su múltiplo coprimo. Entonces la familia de capas enteras  $\{H_{\mathbf{w}, k\|\mathbf{w}\|^{-2}} : k \in \mathbb{Z}\}$  cubre a  $\mathbb{Z}^n$ .*

Pasemos a considerar el programa lineal (2.1) donde  $\mathbf{p}$  es un vector esencialmente entero y  $\mathbf{q}$  es su múltiplo coprimo. Comúnmente a la función objetivo (2.1a) le daremos el nombre de utilidad y a la restricción (2.1b) la llamaremos restricción presupuestaria, así como presupuesto al lado derecho de esta restricción.

*Observación.* Debido a la restricción presupuestaria, encontramos que el politopo está acotado por arriba. Así pues, el problema o bien es infactible, o bien tiene una utilidad finita.

Cada escalar  $t \in \mathbb{R}$  induce un hiperplano afino  $H_{\mathbf{p}, t}$  donde se cumple que todo punto  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{p}, t}$  tiene un mismo nivel de utilidad. Como observamos previamente,

$$\{H_{\mathbf{p}, t} : t \in \mathbb{R}\} = \{H_{\mathbf{q}, t} : t \in \mathbb{R}\}.$$

A causa del teorema 2.2.5, somos capaces de caracterizar todos los puntos enteros a partir de  $\mathbf{q}$ . Aún más, obtenemos una enumeración de las capas enteras que cubren  $\mathbb{Z}^n$ , lo cual nos permite determinar si la  $k$ -ésima capa entera contiene puntos factibles para el problema.

**Lema 2.2.6.** *Sea  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^2}$ , entonces su nivel de utilidad  $\mathbf{q}^T \mathbf{x}$  es  $k$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$ , entonces tenemos

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}^\perp + k \|\mathbf{q}\|^{-2} \mathbf{q},$$



donde  $\mathbf{q}^\perp$  es un vector ortogonal a  $\mathbf{q}$ . Por lo tanto,

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \mathbf{q}^T \mathbf{q}^\perp + k \|\mathbf{q}\|^{-2} \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 0 + k \|\mathbf{q}\|^{-2} \|\mathbf{q}\|^2 = k.$$

□

Consideremos el vector esencialmente entero  $\mathbf{p}$  y su múltiplo coprimo  $\mathbf{q}$ , entonces existe un escalar  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$ . Si la restricción (2.1b) se cumple, es decir  $\mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq u$ , también se cumple que  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u/m$  si  $m$  es positivo, o bien que  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \geq u/m$  si  $m$  es negativo.

La gran mayoría de resultados que obtendremos dependerán de un entero que denotamos como  $\eta$ , el cual depende de  $m$  y por lo tanto del signo que este tenga. Para evitar ser repetitivos o dividir los resultados innecesariamente en casos, supondremos de ahora en adelante que  $m$  es positivo. Esto equivale a decir que la primera entrada no nula  $p_i$  es positiva, pues se debe cumplir que  $q_i$  sea positivo. Basta mencionar que la gran mayoría de desigualdades se invierten en caso de que  $m$  sea negativo, y también que usamos la función techo en vez de la función piso.

Para respetar la restricción presupuestaria, podemos encontrar el entero  $\eta$  más grande que satisfaga  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u/m$  para todo  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, \eta \|\mathbf{q}\|^{-2}}$ . Diremos que  $\eta$  es el primer entero que satisface la restricción presupuestaria, o bien que  $H_{\mathbf{q}, \eta \|\mathbf{q}\|^{-2}}$  es la primera capa entera que satisface el presupuesto.

**Lema 2.2.7.** *Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  un vector esencialmente entero y sea  $\mathbf{q}$  su múltiplo coprimo, de manera que  $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$  para algún escalar  $m > 0$ . Entonces la primera capa entera  $H_{\mathbf{q}, \eta \|\mathbf{q}\|^{-2}}$  que satisface el presupuesto está parametrizada por  $\eta := \lfloor u/m \rfloor$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathbf{x}$  tal que  $\mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq u$ . Entonces buscamos el mayor entero  $\eta$  que satisfaga  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u/m$  para todo  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, \eta \|\mathbf{q}\|^{-2}}$ . Por el lema 2.2.4

sabemos que

$$\eta \|\mathbf{q}\|^{-2} = \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{q}\|^2} \leq \frac{u/m}{\|\mathbf{q}\|^2},$$

de donde se sigue inmediatamente que  $\eta = \lfloor u/m \rfloor$ .  $\square$

Encontramos que las capas enteras que satisfacen el presupuesto son parametrizadas por  $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots\}$  y, debido al lema 2.2.6, se cumple inmediatamente que  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$ . Deducimos que si la  $\eta$ -ésima capa entera contiene puntos no negativos, entonces las soluciones se encuentran en esa capa. En caso contrario, descendemos a la  $(\eta - 1)$ -ésima capa entera y buscamos puntos enteros no negativos, etcétera.

**Teorema 2.2.8.** *Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  un vector esencialmente entero y sea  $\mathbf{q}$  su múltiplo coprimo. Entonces el problema (2.1) es infactible si y solo si  $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$  y  $u < 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$  y  $u < 0$ . Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\geq \mathbf{0}}^n$  entonces  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \geq 0 > u$  y por lo tanto  $\mathbf{x}$  no es factible. Luego,

$$\mathbb{Z}_{\geq \mathbf{0}}^n \cap \{\mathbf{x} : \mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u\} = \emptyset,$$

y el problema no es factible. Mostramos la otra implicación por contraposición. Si  $u \geq 0$  observamos que  $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^n$  es factible. Se debe cumplir  $u < 0$ . Similarmente, si  $q_i < 0$  para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ , encontramos que  $\lceil u/q_i \rceil \mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^n$  es factible:

$$\mathbf{q}^T \left\lceil \frac{u}{q_i} \right\rceil \mathbf{e}_i = q_i \left\lceil \frac{u}{q_i} \right\rceil \leq q_i \frac{u}{q_i} = u,$$

además, como  $u < 0$ , concluimos que  $\lceil u/q_i \rceil \mathbf{e}_i$  es no negativo.  $\square$

Debido al teorema anterior, somos capaces de determinar inmediatamente si el problema (2.1) es infactible, por lo que supondremos de ahora en

adelante que es factible. El siguiente teorema muestra que nuestro análisis para resolver el problema anterior deberá dividirse en dos casos.

**Teorema 2.2.9.** *Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  un vector esencialmente entero y sea  $\mathbf{q}$  su múltiplo coprimo. Supongamos que el problema (2.1) es factible y tomemos  $\eta$  del lema 2.2.7. Entonces se satisface lo siguiente:*

1. *Si  $q_i < 0$  para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces la  $\eta$ -ésima capa entera contiene un número infinito de puntos factibles.*
2. *Si  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ , entonces para todo  $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots, 0\}$ , la  $k$ -ésima capa entera contiene un número finito de puntos factibles.*

*Demostración.*

1. En la siguiente sección mostraremos que, como  $\mathbf{q}$  es un vector cuyas entradas son coprimas, entonces existe un punto entero  $\mathbf{x}$  que satisface la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$ . Por el momento, confiemos que esto es verdadero. Como no tenemos asegurada la no negatividad de  $\mathbf{x}$ , construiremos un vector entero  $\mathbf{x}^+$  que sí satisface la restricción de no negatividad y también la restricción presupuestaria  $\mathbf{q}^T \mathbf{x}^+ = \eta$ , de manera que  $\mathbf{x}^+$  sí será factible.

Definamos los siguientes conjuntos de índices

$$I^+ := \{i : q_i > 0\}, \quad I^\circ := \{\ell : q_\ell = 0\}, \quad I^- := \{j : q_j < 0\}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $I^\circ$  es vacío. En efecto, si  $x_k < 0$  para algún  $k \in I^\circ$ , esa entrada no sería factible, pero fácilmente podríamos definir  $x_k^+ = 0$  para hacerla factible.

Por hipótesis, sabemos que  $\mathbf{q}$  tiene una entrada negativa y por lo tanto  $I^- \neq \emptyset$ . Además, por la definición 2.2.1,  $\mathbf{q}$  tiene una entrada positiva y por lo tanto  $I^+ \neq \emptyset$ . Luego, ambos conjuntos  $I^+$  e  $I^-$  forman una

partición del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Podemos escoger escalares positivos  $c_1, \dots, c_n$  que satisfagan simultáneamente

$$x_k + \sum_{i \in I^+} q_i c_i \geq 0, \quad \forall k \in I^-, \quad (2.8)$$

$$x_k - \sum_{j \in I^-} q_j c_k \geq 0, \quad \forall k \in I^+. \quad (2.9)$$

Definamos el vector  $\mathbf{x}^+ \in \mathbb{Z}^n$  de manera que

$$x_k^+ := \begin{cases} x_k + \sum_{i \in I^+} q_i c_i, & k \in I^-, \\ x_k - \sum_{j \in I^-} q_j c_k, & k \in I^+. \end{cases}$$

Se verifica que  $\mathbf{x}^+$  es no negativo y, además,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T \mathbf{x}^+ &= \mathbf{q}^T \mathbf{x} + \sum_{k \in I^-} \sum_{i \in I^+} q_k q_i c_i - \sum_{k \in I^+} \sum_{j \in I^-} q_k q_j c_k \\ &= \eta + \sum_{j \in I^-} \sum_{i \in I^+} q_j q_i c_i - \sum_{i \in I^+} \sum_{j \in I^-} q_i q_j c_i \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Así pues, tenemos existencia de un punto factible. Para concluir que hay un número infinito de puntos factibles, basta observar que si la elección de coeficientes  $c_1, \dots, c_n$  satisface ambas desigualdades (2.8) y (2.9), entonces cualquier múltiplo positivo de estos coeficientes también las satisface.

2. Se sigue que  $u \geq 0$ . Definamos

$$P_k := H_{\mathbf{q}, k \|\mathbf{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}_{\geq \mathbf{0}}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : \mathbf{q}^T \mathbf{x} = k, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}. \quad (2.10)$$

Observemos que  $P_k = \emptyset$  para todo  $k$  negativo, pues  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  y por lo tanto  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \geq 0$  para cualquier  $\mathbf{x}$  no negativo. Esto implica que ningún

punto sobre capas enteras con parámetros negativos es factible.

Sea  $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots, 0\}$ . La capa entera  $H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  interseca los ejes positivos en  $\frac{k}{q_i} \mathbf{e}_i$ . Definamos  $\ell_i := \lceil k/q_i \rceil$ . No es difícil ver que  $P_k$  está contenido en el prisma cuyas aristas son  $[0, \ell_i]$  y, por lo tanto,

$$P_k \subseteq \prod_{i=1}^n [0, \ell_i] \cap \mathbb{Z}^n = \prod_{i=1}^n ([0, \ell_i] \cap \mathbb{Z}).$$

Pero  $|[0, \ell_i] \cap \mathbb{Z}| = \ell_i + 1$ . Así,

$$|P_k| \leq \prod_{i=1}^n (\ell_i + 1) < \infty.$$

Entonces la  $k$ -ésima capa entera contiene un número finito de puntos factibles.

□

Así pues, suponiendo que el problema (2.1) tiene solución, el teorema 2.2.9 nos sugiere dividir nuestro análisis en dos casos: uno donde una entrada  $p_i$  es negativa y por lo tanto existe una infinidad de soluciones en la  $\eta$ -ésima capa entera; y uno donde  $\mathbf{p}$  es estrictamente positivo, lo que implica la finitud de puntos factibles. Ciertamente el segundo caso es el más interesante, pues de alguna manera conocemos automáticamente el óptimo de los problemas que recaen en el primer caso. Efectivamente esta es una de las razones por las que el autor decidió ordenar de tal manera los casos: porque en el primero sabemos exactamente dónde buscar la solución. Aún así, a pesar de encontrarnos con esta primera división, existen muchos elementos en común que comparten ambos casos.

Antes de atacar los casos anteriores, primero debemos mostrar que la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$  tiene soluciones enteras para toda  $k$

entera siempre que las entradas de  $\mathbf{q}$  sean coprimas<sup>3</sup>. La siguiente sección se encarga de mostrar la existencia de tales soluciones enteras y, más tarde, nos enfocaremos en cómo obtener soluciones no negativas a partir de ellas.

### 2.2.1. Una ecuación lineal diofantina

De acuerdo al teorema 2.2.9, las soluciones del problema (2.1) se encuentran en una capa entera  $H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$ . Así, los puntos  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  que se encuentran sobre esa capa satisfacen la ecuación lineal diofantina

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n = k. \quad (2.11)$$

Como  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ , podemos suponer, por el momento, que  $q_n \neq 0$ . En la sección 2.1.1 de Teoría de Números mostramos bajo qué condiciones existen soluciones a este tipo de ecuaciones y también cómo construirlas cuando solamente tenemos dos incógnitas. Partimos de la observación que podemos resolver recursivamente esta ecuación. Definamos, por conveniencia,  $g_1 := \text{mcd}\{q_1, \dots, q_n\}$  y también  $\omega_1 := k$ . Como  $\mathbf{q}$  es un vector coprimo, sabemos que  $g_1 = 1$ . Además, definamos

$$\omega_2 := \frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} x_2 + \cdots + \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1} x_n,$$

donde  $g_2 := \text{mcd}\{q_2/g_1, \dots, q_n/g_1\}$ . Como  $q_n \neq 0$ , tenemos que  $g_2$  está bien definido y además es positivo. Así, la ecuación (2.11) es equivalente a

$$\frac{q_1}{g_1} x_1 + g_2 \omega_2 = \omega_1. \quad (2.12)$$

Observemos que

$$\text{mcd}\left\{\frac{q_1}{g_1}, g_2\right\} = \text{mcd}\left\{\frac{q_1}{g_1}, \text{mcd}\left\{\frac{q_2}{g_1}, \dots, \frac{q_n}{g_1}\right\}\right\}$$

---

<sup>3</sup>Recordemos que supusimos que esto era cierto para demostrar una parte del teorema 2.2.9. Además, la construcción de estas soluciones enteras proveerá herramientas útiles para cuando decidamos agregar más restricciones.

$$= \text{mcd}\left\{\frac{q_1}{g_1}, \frac{q_2}{g_1}, \dots, \frac{q_n}{g_1}\right\} = 1.$$

Por el teorema 2.1.6, existen soluciones enteras para todo  $\omega_1 \in \mathbb{Z}$ . Como  $q_1/g_1$  y  $g_2$  son coprimos, encontramos que sus coeficientes de Bézout asociados (c.f. definición 2.1.7)  $x'_1, \omega'_2$  son soluciones particulares de la ecuación

$$\frac{q_1}{g_1}x_1 + g_2\omega_2 = 1.$$

Deducimos del teorema 2.1.8 que las soluciones de la ecuación (2.12) están dadas por

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 x'_1 + g_2 t_1, \\ \omega_2 = \omega_1 \omega'_2 - \frac{q_1}{g_1} t_1, \end{cases} \quad (2.13)$$

donde  $t_1 \in \mathbb{Z}$  es una variable libre.

*Observación.* Los coeficientes de Bézout  $x'_1$  y  $\omega'_2$  dependen exclusivamente de  $\mathbf{q}$  y no del punto  $\mathbf{x}$ . En efecto,  $x'_1$  está asociado a  $q_1/g_1$  y  $\omega'_2$  está asociado a  $g_2$ . Pero ambos  $g_1$  y  $g_2$  son el máximo común divisor de  $q_1, \dots, q_n$  y  $q_1/g_1, \dots, q_n/g_1$ , respectivamente.

Para el siguiente paso de la recursión escogemos cualquier  $t_1 \in \mathbb{Z}$  para fijar  $\omega_2$  y resolvemos la ecuación

$$\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}x_2 + \frac{q_3}{g_2 \cdot g_1}x_3 + \dots + \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1}x_n = \omega_2. \quad (2.14)$$

Como  $g_2 = \text{mcd}\{q_2/g_1, \dots, q_n/g_1\}$ , sabemos del lema 2.1.5 que

$$\text{mcd}\left\{\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}, \dots, \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1}\right\} = 1.$$

En el mismo espíritu que el primer paso de la recursión, definimos

$$\omega_3 := \frac{q_3}{g_3 \cdot g_2 \cdot g_1}x_3 + \dots + \frac{q_n}{g_3 \cdot g_2 \cdot g_1}x_n,$$

donde

$$g_3 := \text{mcd} \left\{ \frac{q_3}{g_2 \cdot g_1}, \dots, \frac{q_n}{g_2 \cdot g_1} \right\}.$$

Nuevamente, como  $q_n$  es no nulo,  $g_3$  está bien definido y además es positivo.

Por lo que la ecuación (2.14) es equivalente a

$$\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} x_2 + g_3 \omega_3 = \omega_2. \quad (2.15)$$

También se cumple que

$$\text{mcd} \left\{ \frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}, g_3 \right\} = 1,$$

y entonces (2.15) tiene una infinidad de soluciones para todo  $\omega_2 \in \mathbb{Z}$ , las cuales están dadas por

$$\begin{cases} x_2 = \omega_2 x'_2 + g_3 t_2, \\ \omega_3 = \omega_2 \omega'_3 - \frac{q_2}{g_2 \cdot g_1} t_2, \end{cases}$$

donde  $t_2 \in \mathbb{Z}$  es una variable libre, y  $x'_2, \omega'_3$  son los coeficientes de Bézout asociados a  $\frac{q_2}{g_2 \cdot g_1}$  y  $g_3$ , respectivamente.

De manera general, para  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ , el  $i$ -ésimo paso de la recursión provee la ecuación

$$\frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j} x_i + \frac{q_{i+1}}{\prod_{j=1}^i g_j} x_{i+1} + \dots + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^i g_j} x_n = \omega_i, \quad (2.16)$$

donde

$$g_i := \text{mcd} \left\{ \frac{q_i}{\prod_{j=1}^{i-1} g_j}, \dots, \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{i-1} g_j} \right\}, \quad (2.17)$$

por el lema 2.1.5 se sigue que

$$\text{mcd} \left\{ \frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j}, \dots, \frac{q_n}{\prod_{j=1}^i g_j} \right\} = 1. \quad (2.18)$$



Ahora bien, definamos

$$g_{i+1} := \text{mcd} \left\{ \frac{q_{i+1}}{\prod_{j=1}^i g_j}, \dots, \frac{q_n}{\prod_{j=1}^i g_j} \right\}. \quad (2.19)$$

Como  $q_n$  es no nulo, se sigue que  $g_{i+1}$  está bien definido y es positivo. Definamos, también,

$$\omega_{i+1} = \frac{q_{i+1}}{\prod_{j=1}^{i+1} g_j} x_{i+1} + \dots + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{i+1} g_j} x_n,$$

de manera que la ecuación (2.16) es equivalente a

$$\frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j} x_i + g_{i+1} \omega_{i+1} = \omega_i. \quad (2.20)$$

A partir de (2.18) y de (2.19), encontramos que

$$\text{mcd} \left\{ \frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j}, g_{i+1} \right\} = \text{mcd} \left\{ \frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j}, \frac{q_{i+1}}{\prod_{j=1}^i g_j}, \dots, \frac{q_n}{\prod_{j=1}^i g_j} \right\} = 1,$$

y del teorema 2.1.6 se sigue que la ecuación (2.20) tiene soluciones enteras para todo  $\omega_i \in \mathbb{Z}$ . Por el teorema 2.1.8, las soluciones enteras de (2.20) están dadas por

$$\begin{cases} x_i = \omega_i x'_i + g_{i+1} t_i, \\ \omega_{i+1} = \omega_i \omega'_{i+1} - \frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j} t_i, \end{cases} \quad (2.21)$$

donde  $t_i \in \mathbb{Z}$  es la  $i$ -ésima variable libre. Es valioso mencionar, otra vez, que los coeficientes de Bézout  $x'_i, \omega'_{i+1}$  dependen exclusivamente de  $\mathbf{q}$  a través de sus entradas  $q_i$  y de los máximos común divisores entre ellas. En efecto, por el teorema 2.1.3, estos coeficientes son soluciones particulares de la ecuación

$$\frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j} x'_i + g_{i+1} \omega'_{i+1} = 1. \quad (2.22)$$

Finalmente, en el último paso de la recursión obtenemos la ecuación lineal

diofantina

$$\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} x_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} x_n = \omega_{n-1}. \quad (2.23)$$

Por construcción, los coeficientes de  $x_{n-1}$  y  $x_n$  son coprimos. A causa del teorema 2.1.8 las soluciones enteras están dadas por

$$\begin{cases} x_{n-1} = \omega_{n-1} x'_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} t_{n-1}, \\ x_n = \omega_{n-1} x'_n - \frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} t_{n-1}, \end{cases} \quad (2.24)$$

donde  $x'_{n-1}, x'_n$  son los coeficientes de Bézout asociados a  $\frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}$  y  $\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j}$ , respectivamente, por lo que satisfacen

$$\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} x'_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} x'_n = 1. \quad (2.25)$$

Hasta este punto, hemos demostrado que la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$  tiene soluciones enteras para todo  $k \in \mathbb{Z}$  siempre que las entradas de  $\mathbf{q}$  sean coprimas. En realidad, hemos mostrado también la existencia de una infinidad de soluciones enteras, pues cada elección distinta de  $t_i \in \mathbb{Z}$  para cualquier  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  proveerá una solución distinta. Por lo tanto, hemos saldado nuestra cuenta pendiente con respecto a una parte de la demostración en el teorema 2.2.9.

Con respecto a la restricción de no negatividad  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  en el problema (2.1), podemos acotar nuestra elección de variables libres  $t_i \in \mathbb{Z}$  a partir de (2.21). De la primera igualdad encontramos que necesariamente se debe satisfacer

$$t_i \geq \left\lceil -\frac{\omega_i x'_i}{g_{i+1}} \right\rceil, \quad (2.26)$$

para  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ . Para determinar intervalos de no negatividad de  $x_{n-1}$  y  $x_n$ , observamos de (2.24) que dependemos de los signos de  $q_{n-1}$  y de  $q_n$ . Mucho tendremos que decir en los siguientes dos capítulos sobre cómo acotar mejor  $t_1, \dots, t_{n-1}$  para asegurar la no negatividad de  $\mathbf{x}$ . Así pues,

relegamos la discusión en los siguientes dos capítulos cuando analicemos separadamente el caso infinito y el caso finito del teorema 2.2.9.

Ahora bien, hemos encontrado una relación entre el vector de soluciones  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  y el vector de variables libres  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ . Hemos manejado esta relación de manera recursiva a través de (2.21). Resultará conveniente encontrar una forma cerrada a la relación de recurrencia inducida. Para ello, recordemos que el vector  $\mathbf{x}$  se encuentra sobre la capa entera  $H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  y por lo tanto satisface (2.11). Recordemos que habíamos definido, por construcción,  $\omega_1 := k$ . Combinando esto último con la última igualdad de (2.21), llegamos a

$$\begin{cases} \omega_1 = k, \\ \omega_{i+1} = \omega_i \cdot \omega'_{i+1} - \frac{q_i}{\prod_{\ell=1}^i g_\ell} \cdot t_i. \end{cases} \quad (2.27)$$

**Lema 2.2.10.** *La forma cerrada de la relación de recurrencia (2.27) está dada por*

$$\omega_i = k \cdot \prod_{j=2}^i \omega'_j - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{\prod_{\ell=1}^j g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^i \omega'_\ell \cdot t_j, \quad (2.28)$$

donde, por conveniencia, le asignamos el valor de 0 a la suma vacía y el valor de 1 al producto vacío.

*Demostración.* Lo demostramos inductivamente. Observemos que

$$\omega_1 = k \cdot \prod_{j=2}^1 \omega'_j - \sum_{j=1}^0 \frac{q_j}{\prod_{\ell=1}^j g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^1 \omega'_\ell \cdot t_j = k,$$

debido a que definimos el producto vacío como 1 y la suma vacía como 0. Supongamos inductivamente que (2.28) se satisface para alguna  $i \in \mathbb{N}$ . Entonces, tenemos

$$k \cdot \prod_{j=2}^{i+1} \omega'_j - \sum_{j=1}^i \frac{q_j}{\prod_{\ell=1}^j g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^{i+1} \omega'_\ell \cdot t_j$$

$$\begin{aligned}
 &= k \cdot \prod_{j=2}^i \omega'_j \cdot \omega'_{i+1} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{\prod_{\ell=1}^j g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^i \omega'_\ell \cdot t_j \cdot \omega'_{i+1} - \frac{q_i}{\prod_{\ell=1}^i g_\ell} \cdot \prod_{\ell=i+2}^{i+1} \omega'_\ell \cdot t_i \\
 &= \left( k \cdot \prod_{j=2}^i \omega'_j - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{\prod_{\ell=1}^j g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^i \omega'_\ell \cdot t_j \right) \omega'_{i+1} - \frac{q_i}{\prod_{\ell=1}^i g_\ell} \cdot t_i \\
 &= \omega_i \cdot \omega'_{i+1} - \frac{q_i}{\prod_{\ell=1}^i g_\ell} \cdot t_i \\
 &= \omega_{i+1}.
 \end{aligned}$$

Por el principio de inducción se sigue que (2.28) satisface (2.27) para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Así, esta fórmula es la forma cerrada de la relación de recurrencia propuesta.  $\square$

Ahora que encontramos una forma cerrada a la relación de recurrencia (2.27), somos capaces de determinar una relación lineal entre  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  y  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ . Definamos, por conveniencia, los coeficientes  $m_{ij} \in \mathbb{Z}$  con  $i > j$  como

$$m_{ij} := \frac{q_j}{\prod_{\ell=1}^j g_\ell} \cdot \prod_{\ell=j+2}^i \omega'_\ell. \quad (2.29)$$

Sustituyendo en la forma cerrada (2.28), obtenemos la fórmula simplificada

$$\omega_i = k \cdot \prod_{j=2}^i \omega'_j - \sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} t_j, \quad (2.30)$$

Así pues, juntando esto último con (2.21), obtenemos para  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ :

$$\begin{aligned}
 x_i &= \omega_i \cdot x'_i + g_{i+1} t_i \\
 &= k \cdot \prod_{j=2}^i \omega'_j \cdot x'_i - \sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} x'_i t_j + g_{i+1} t_i.
 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Similarmente, usando (2.30) y sustituyendo en (2.24), llegamos a

$$x_{n-1} = k \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \omega'_j \cdot x'_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-2} m_{n-1,j} x'_{n-1} t_j + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} t_{n-1}, \quad (2.32a)$$

$$x_n = k \cdot \prod_{j=2}^{n-1} \omega'_j \cdot x'_n - \sum_{j=1}^{n-2} m_{n-1,j} x'_n t_j - \frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j} t_{n-1}. \quad (2.32b)$$

Con este trabajo anterior, ya podemos establecer una relación lineal entre  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  y  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ . Definimos  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$  a partir de

$$\nu_i := x'_i \cdot \prod_{j=2}^{\min\{i, n-1\}} \omega'_j. \quad (2.33)$$

También definimos la matriz  $M \in \mathbb{Z}^{n \times (n-1)}$  a través de

$$M_{ij} := \begin{cases} -m_{ij} x'_i, & j < i, \\ g_{i+1}, & i = j < n-1, \\ \frac{q_n}{\prod_{k=1}^{n-1} g_k}, & i = j = n-1, \\ -\frac{q_{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} g_k}, & i = n, j = n-1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (2.34)$$

Sustituyendo estas definiciones en (2.31) y (2.32) encontramos que

$$\mathbf{x} = k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}. \quad (2.35)$$

En una observación pasada mencionamos que los coeficientes de Bézout  $\omega'_i, x'_i$  están asociados a términos exclusivamente dependientes de  $\mathbf{q}$ , por lo que no dependen de la elección  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$ . De esta manera,  $\boldsymbol{\nu}$  depende exclusivamente de  $\mathbf{q}$ . El mismo razonamiento aplica para la matriz  $M$ . Entonces, como  $\mathbf{q}$  es fijo, se sigue que  $\boldsymbol{\nu}$  y  $M$  lo son también.

**Lema 2.2.11.** *Sea  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  un vector coprimo. Entonces el vector  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$*

definido en (2.33) satisface  $\mathbf{q}^T \boldsymbol{\nu} = 1$ .

*Demostración.* Primero mostramos por inducción hacia atrás que se cumple

$$\sum_{j=i}^n q_j \nu_j = \prod_{j=2}^i \omega'_j \cdot \prod_{j=1}^i g_j, \quad (2.36)$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Empezamos con el caso base  $i = n-1$ . De (2.33), encontramos que

$$q_{n-1} \nu_{n-1} + q_n \nu_n = \prod_{j=2}^{n-1} \omega'_j \cdot (q_{n-1} x'_{n-1} + q_n x'_n). \quad (2.37)$$

Recordemos que  $x'_{n-1}$  y  $x'_n$  son coeficientes de Bézout asociados a los coeficientes del lado izquierdo de (2.23), los cuales son coprimos. Entonces se cumple, por el teorema 2.1.3,

$$\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} x'_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} x'_n = 1,$$

o, equivalentemente,

$$q_{n-1} x'_{n-1} + q_n x'_n = \prod_{j=1}^{n-1} g_j.$$

Sustituyendo en (2.37), obtenemos la base de la inducción, i.e.,

$$q_{n-1} \nu_{n-1} + q_n \nu_n = \prod_{j=2}^{n-1} \omega'_j \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g_j.$$

Supongamos inductivamente que (2.36) se satisface para alguna  $2 \leq i \leq n-1$ . Reduciendo  $i$ , ocupando (2.33) y usando la hipótesis inductiva, obtenemos

$$\sum_{j=i-1}^n q_j \nu_j = q_{i-1} \nu_{i-1} + \sum_{j=i}^n q_j \nu_j$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{j=2}^{i-1} \omega'_j \cdot q_{i-1} x'_{i-1} + \prod_{j=2}^i \omega'_j \cdot \prod_{j=1}^i g_j \\
 &= \prod_{j=2}^{i-1} \omega'_j \cdot \left( q_{i-1} x'_{i-1} + \omega'_i \prod_{j=1}^i g_j \right).
 \end{aligned}$$

Nuevamente,  $x'_{i-1}$  y  $\omega'_i$  son coeficientes de Bézout asociados, respectivamente, a  $\frac{q_{i-1}}{\prod_{j=1}^{i-1} g_j}$  y  $g_i$ , los cuales son coprimos. De esta manera satisfacen (2.22) pero sustituyendo  $i$  por  $i - 1$ . Es decir, se satisface

$$\frac{q_{i-1}}{\prod_{j=1}^{i-1} g_j} x'_{i-1} + g_i \omega'_i = 1,$$

o, equivalentemente,

$$q_{i-1} x'_{i-1} + \omega'_i \prod_{j=1}^i g_j = \prod_{j=1}^{i-1} g_j.$$

Sustituyendo, obtenemos el resultado (2.36) para  $i - 1$ . Así, por inducción hacia atrás, (2.36) se cumple para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Finalmente, para demostrar este lema, observamos que

$$\mathbf{q}^T \boldsymbol{\nu} = \sum_{j=1}^n q_j \nu_j = \prod_{j=2}^1 \omega'_j \cdot \prod_{j=1}^1 g_j = g_1 = 1.$$

El primer producto es uno por ser el producto vacío. Recordemos también que  $g_1$  es el máximo común divisor de  $q_1, \dots, q_n$ , los cuales son coprimos, y entonces  $g_1 = 1$ . □

**Lema 2.2.12.** Si  $q_n \neq 0$  entonces  $\text{gen}\{\mathbf{q}\} = \ker\{M^T\}$ , donde la matriz  $M$  está definida en (2.34).

*Demostración.* La matriz  $M$  es triangular inferior cuya diagonal principal

es distinta de cero. En efecto, para todo  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ , tenemos

$$M_{ii} = g_{i+1} = \text{mcd} \left\{ \frac{q_i}{\prod_{j=1}^i g_j}, \dots, \frac{q_n}{\prod_{j=1}^i g_j} \right\}.$$

Pero el máximo común divisor entre cualesquiera enteros siempre es positivo. También tenemos

$$M_{n-1, n-1} = \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} \neq 0.$$

Se sigue que las columnas de  $M$  son linealmente independientes, y entonces su imagen tiene dimensión  $n-1$ . Por lo tanto,  $M^T$  tiene  $n-1$  renglones linealmente independientes. Se sigue por el teorema de la Dimensión que  $\dim \ker\{M^T\} = 1$ , así que basta mostrar que  $\mathbf{q} \in \ker\{M^T\}$ .

Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ . Por el teorema 2.2.5, existe una capa entera  $H_{\mathbf{q}, k \|\mathbf{q}\|^{-2}}$  que contiene a  $\mathbf{x}$ . Así, por el lema 2.2.6,  $\mathbf{x}$  satisface la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$ . Por construcción, existe  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  tal que  $\mathbf{x} = k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}$ . Luego, por el lema 2.2.11, tenemos

$$k = \mathbf{q}^T \mathbf{x} = k\mathbf{q}^T \boldsymbol{\nu} + \mathbf{q}^T M\mathbf{t} = k + (\mathbf{q}^T M)\mathbf{t}.$$

De donde obtenemos  $(\mathbf{q}^T M)\mathbf{t} = 0$ . Pero  $\mathbf{x}$  fue arbitrario, así que también lo fue  $\mathbf{t}$ . Entonces se debe cumplir  $\mathbf{q}^T M = \mathbf{0}^T$ , lo que implica que  $\mathbf{q} \in \ker\{M^T\}$ .  $\square$

La gran mayoría de nuestra argumentación para demostrar los resultados ha sido fundamentada a través de las capas enteras  $H_{\mathbf{q}, k \|\mathbf{q}\|^{-2}}$ , así como por el teorema 2.2.5. Sin embargo, estas capas enteras contienen puntos que, en el contexto de programación lineal entera, no son de interés, a saber, contienen puntos no enteros. Nos gustaría concentrarnos exclusivamente en estos puntos enteros, al mismo tiempo que buscamos caracterizarlos por medio de  $\mathbf{q}$ . La siguiente definición hará que logremos este primer objetivo de enfocarnos exclusivamente en los puntos enteros, mientras que el teorema



2.2.15 permitirá que los caractericemos a partir de  $\mathbf{q}$ .

**Definición 2.2.13** ([Sch98]). Decimos que un subconjunto  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$  es un **grupo aditivo** si

1.  $\mathbf{0} \in \Lambda$ , y
2. si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$ , entonces  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \Lambda$ , y también  $-\mathbf{x} \in \Lambda$ .

Además, decimos que  $\Lambda$  es una **red** si existen vectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linealmente independientes tales que

$$\Lambda = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n : \lambda_i \in \mathbb{Z}\}.$$

A los vectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  los llamamos la **base de la red**  $\Lambda$ .

**Ejemplo 2.2.14.** No es difícil ver que  $\mathbb{Z}^n$  es un grupo aditivo. Si consideramos los vectores canónicos  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , entonces encontramos que son linealmente independientes, pero también se cumple

$$\mathbb{Z}^n = \{\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n : \lambda_i \in \mathbb{Z}\}.$$

De esta, manera  $\mathbb{Z}^n$  es una red que tiene como base canónica a los vectores  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ .

**Teorema 2.2.15.** *Supongamos que  $q_n \neq 0$ . Entonces  $\boldsymbol{\nu}$  y las columnas de  $M$  (definidas en (2.33) y (2.34), respectivamente) forman una base de la red  $\mathbb{Z}^n$ .*

*Demostración.* En el lema 2.2.12 mostramos que las columnas de  $M$  son linealmente independientes. Mostramos por contradicción que  $\boldsymbol{\nu}$  es linealmente independiente de las columnas de  $M$ , así que supongamos que no lo es, por lo que existen escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  tales que

$$\boldsymbol{\nu} = \lambda_1 \mathbf{m}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{m}_{n-1},$$

donde  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{n-1}$  son las columnas de  $M$ . De los lemas 2.2.11 y 2.2.12 obtenemos

$$1 = \mathbf{q}^T \boldsymbol{\nu} = \lambda_1 \mathbf{q}^T \mathbf{m}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{q}^T \mathbf{m}_{n-1} = 0,$$

lo cual es una contradicción. Se sigue que  $\{\boldsymbol{\nu}, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{n-1}\}$  es un conjunto de vectores linealmente independiente.

Ahora bien, sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ , por el teorema 2.2.5, sabemos que se encuentra sobre una capa entera, y entonces satisface la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$  para alguna  $k \in \mathbb{Z}$ . Por construcción en el inicio de esta sección junto con la exhaustividad del teorema 2.1.8, existe un vector  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  tal que

$$\mathbf{x} = k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t} = k\boldsymbol{\nu} + t_1\mathbf{m}_1 + \dots + t_{n-1}\mathbf{m}_{n-1}.$$

Como  $\mathbf{x}$  fue arbitrario, se sigue que

$$\mathbb{Z}^n = \{k\boldsymbol{\nu} + t_1\mathbf{m}_1 + \dots + t_{n-1}\mathbf{m}_{n-1} : k, t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{Z}\}.$$

De esta manera, se cumple que  $\{\boldsymbol{\nu}, \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{n-1}\}$  es una base de  $\mathbb{Z}^n$ .  $\square$

El siguiente corolario es presentado sin demostración, pero cabe mencionar que es una consecuencia directa del teorema anterior junto con las equivalencias encontradas en el teorema 4.3 en [Sch98].

**Corolario 2.2.16.** *Supongamos que  $q_n \neq 0$  y consideremos  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$  (definido en (2.33)) y las columnas  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$  de la matriz  $M \in \mathbb{Z}^{n \times (n-1)}$  (definida en (2.34)), entonces la matriz*

$$[\boldsymbol{\nu} \mid \mathbf{m}_1 \mid \dots \mid \mathbf{m}_{n-1}] \in \mathbb{Z}^{n \times n}$$

*es unimodular, es decir, su determinante es  $\pm 1$ .*

Geométricamente, a partir de  $\mathbf{q}$  descomponemos la red  $\mathbb{Z}^n$  como una suma directa de dos subredes isomorfas a  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}^{n-1}$ , cuyas bases están

dadas por  $\boldsymbol{\nu}$  y las columnas de  $M$ , respectivamente. El vector  $\boldsymbol{\nu}$  es una solución particular de la ecuación no homogénea  $\mathbf{q}^T \boldsymbol{\nu} = 1$ , mientras que las columnas de  $M$  forman una base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea  $\mathbf{q}^T \mathbf{m} = 0$ . Tenemos entonces que si  $q_n \neq 0$ , el vector  $\mathbf{q}$  induce una descomposición de  $\mathbb{Z}^n$ . Ciertamente, esta idea de descomponer el espacio vectorial completo a partir de soluciones particulares y homogéneas no es novedosa.

Hasta este punto hemos supuesto que  $q_n \neq 0$ . Ciertamente si este no es el caso podemos permutar las entradas de  $\mathbf{q}$  de manera que el vector permutado  $\tilde{\mathbf{q}}$  cumpla el supuesto. Ahora bien, podemos preguntarnos cómo se relacionan las imágenes de las matrices  $M$  y  $\tilde{M}$  de estos dos vectores. No obstante, si  $q_n = 0$ , puede ser el caso que la matriz  $M$  no esté bien definida<sup>4</sup>. Para responder la pregunta requerimos de un supuesto más fuerte.

**Corolario 2.2.17.** *Sea  $\mathbf{q}$  un vector coprimo y sea  $\tilde{\mathbf{q}}$  el vector coprimo resultante de haber permutado las entradas de  $\mathbf{q}$ . Supongamos además que  $q_n, \tilde{q}_n \neq 0$ . Entonces sus respectivas matrices  $M$  y  $\tilde{M}$  definidas en (2.34) son isomorfas:*

$$\ker\{\tilde{M}^T\} \cong \ker\{M^T\}.$$

*Demostración.* Existe una matriz de permutación  $P \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  tal que  $\tilde{\mathbf{q}} = P\mathbf{q}$ . Puesto que  $P$  es invertible, tenemos  $\text{gen}\{\tilde{\mathbf{q}}\} \cong \text{gen}\{\mathbf{q}\}$ . Usando el lema 2.2.12 obtenemos

$$\ker\{\tilde{M}^T\} = \text{gen}\{\tilde{\mathbf{q}}\} \cong \text{gen}\{\mathbf{q}\} = \ker\{M^T\},$$

---

<sup>4</sup>Por ejemplo, si  $q_n = q_{n-1} = 0$ , encontramos que

$$g_{n-1} := \text{mcd}\left\{\frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j}, \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-2} g_j}\right\} = \text{mcd}\{0, 0\}.$$

Pero el máximo común divisor de dos números no está bien definido si ambos son cero. Esto implica que la entrada  $M_{n-2, n-2} := g_{n-1}$  no está bien definida.

que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

*Observación.* No es cierto que  $\tilde{M} = PM$  si  $\tilde{\mathbf{q}} = P\mathbf{q}$ . Consideremos el vector  $\mathbf{q} := (1, 1, -2)^T$  y la permutación

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos  $\tilde{\mathbf{q}} = (1, -2, 1)^T$ . Observemos que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sí se cumple que

$$\ker\{\tilde{M}^T\} = \text{gen}\{\tilde{\mathbf{q}}\} \cong \text{gen}\{\mathbf{q}\} = \ker\{M^T\},$$

pero

$$PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \neq \tilde{M}.$$

Extendamos más la idea anterior y denotemos por  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  el grupo de permutaciones de  $\mathbb{Z}^n$ . Es decir,

$$\text{GL}_n(\mathbb{Z}) := \{P \in \mathbb{Z}^{n \times n} \text{ es matriz de permutación}\}.$$

También definamos el grupo de permutaciones en  $n$  letras como

$$S_n := \{\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ es función biyectiva}\}.$$

Entonces  $S_n$  actúa naturalmente sobre la red  $\mathbb{Z}^n$ . En efecto, consideremos

el homomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi: S_n &\rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}), \\ \sigma &\mapsto (\mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{Z}^n),\end{aligned}$$

a partir de la extensión lineal de  $\varphi(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ . Escribimos  $\sigma.e_i = e_{\sigma(i)}$  para tener una notación más clara.

**Ejemplo 2.2.18.** Sea  $\sigma \in S_4$  definida por  $\sigma := (12)(34)$ . La permutación  $\sigma$  actúa sobre la base canónica como

$$\begin{aligned}\sigma.e_1 &= e_2, & \sigma.e_2 &= e_1, \\ \sigma.e_3 &= e_4, & \sigma.e_4 &= e_3.\end{aligned}$$

Por lo que  $\sigma$  es realizada como

$$\sigma \mapsto [e_2 \mid e_1 \mid e_4 \mid e_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De manera informal, podemos fortalecer el corolario 2.2.17 con el siguiente argumento. Si  $q_i = 0$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ , podemos proyectar  $\mathbf{q}$  sobre la subred  $\mathbb{Z}^{n-1}$  de  $\mathbb{Z}$ . Repetimos este proceso hasta que todas las entradas de  $\mathbf{q}$  sean distintas de cero. Y es sobre esta subred que podemos considerar cualquier permutación en las entradas del vector  $\mathbf{q}$  proyectado.

**Definición 2.2.19.** Sean  $\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{Z}^n$  dos vectores coprimos cuyas entradas son todas distintas de cero. Entonces decimos que  $\mathbf{q}$  y  $\tilde{\mathbf{q}}$  son **equivalentes** si y solo si existe  $\sigma \in S_n$  tal que  $\tilde{\mathbf{q}} = \sigma.\mathbf{q}$ . En este caso escribimos  $\mathbf{q} \sim \tilde{\mathbf{q}}$ .

Como  $\varphi$  es un homomorfismo, es posible mostrar que  $\sim$  es una relación de equivalencia sobre el conjunto de vectores coprimos cuyas entradas son

distintas de cero. De esta manera, sabemos del corolario 2.2.17 que si  $\mathbf{q} \sim \tilde{\mathbf{q}}$ , entonces ambos vectores descomponen la red  $\mathbb{Z}^n$  de la misma forma. Es decir, existe un isomorfismo tal que  $(\boldsymbol{\nu}, M) \mapsto (\tilde{\boldsymbol{\nu}}, \tilde{M})$ . Podemos entonces empezar a hablar de una clasificación de programas lineales a partir de las clases de equivalencia de  $\mathbf{q}$ . Esto, no obstante, se encuentra fuera del propósito de la tesis.

En conclusión, somos completamente capaces de caracterizar los puntos enteros sobre la  $k$ -ésima capa entera. O lo que es lo mismo, podemos resolver ecuaciones lineales diofantinas con  $n$  incógnitas. Estas ecuaciones son inducidas por el vector coprimo  $\mathbf{q}$ .

Hemos analizado también como es que  $\mathbf{q}$  descompone el espacio  $\mathbb{Z}^n$  a través del vector  $\boldsymbol{\nu}$  y de la matriz  $M$ . Recordemos que  $\boldsymbol{\nu}$  representa el conjunto de soluciones particulares a estas ecuaciones lineales, mientras que las columnas de  $M$  representan el conjunto de soluciones homogéneas.

En la siguiente sección observamos cómo esta descomposición permite que desacoplemos un programa lineal entero en dos partes: una de maximización y otra de factibilidad.

### 2.2.2. Múltiples restricciones

En esta sección hacemos un análisis extensivo sobre lo resulta de agregar más restricciones al problema (2.1). Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  esencialmente entero y consideremos su múltiplo coprimo  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ . Sea  $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$  una matriz racional con renglones linealmente independientes y sea  $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$  un vector. Consideremos el problema

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} \quad \mathbf{q}^T \mathbf{x}, \quad (2.38a)$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u, \quad (2.38b)$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.38c)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Ciertamente, la solución no se encuentra necesariamente en la  $\eta$ -ésima capa entera. Por ejemplo, si dejamos que  $A := \mathbf{q}^T$  y  $b := u - m$ , la solución se encontrará en la  $\xi$ -ésima capa entera, donde

$$\xi := \left\lfloor \frac{u}{m} - 1 \right\rfloor < \eta.$$

No obstante, si el problema (2.38) es factible, sabemos que la solución se encontrará en alguna capa entera con parámetro  $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots\}$ , pues todavía contamos con una restricción presupuestaria que se debe satisfacer.

*Observación.* Recordemos del teorema 2.2.9 que, si tenemos solamente la restricción presupuestaria, entonces la utilidad máxima es  $\eta$  si  $q_i < 0$  para alguna  $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ . Al igual que en el caso finito, ahora no somos capaces de saber inmediatamente en qué capa entera se encuentra nuestra solución.

Ahora bien, en el contexto del problema (2.38), el parámetro  $k \in \mathbb{Z}$  se encarga de maximizar la utilidad (2.38a), así como de respetar el presupuesto (2.38b) a través de  $k \leq \eta$ . Similarmente, el vector  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  se encarga de respetar las otras restricciones (2.38c).

**Teorema 2.2.20.** *El problema (2.38) es equivalente al problema de maximización*

$$\max_{k \in \mathbb{Z}, \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}} k, \tag{2.39a}$$

$$s.a. \quad k \leq \eta, \tag{2.39b}$$

$$A\mathbf{M}\mathbf{t} = kA\boldsymbol{\nu} - \mathbf{b}, \tag{2.39c}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{t} \geq -k\boldsymbol{\nu}. \tag{2.39d}$$

*Demostración.* Por el teorema 2.2.15, sabemos que la transformación lineal

$$(k, \mathbf{t}) \mapsto \mathbf{x} := k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}$$

es un isomorfismo entre las redes  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$  y  $\mathbb{Z}^n$ . Así, tenemos

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff AM\mathbf{t} = \mathbf{b} - kA\boldsymbol{\nu},$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \iff M\mathbf{t} \geq -k\boldsymbol{\nu},$$

y por lo tanto basta mostrar que si un vector es factible para un problema, entonces satisface la correspondiente restricción presupuestaria del otro problema. Para ello, es de utilidad recordar que  $\eta$  parametriza la primera capa entera que satisface el presupuesto.

Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  un vector factible de (2.38). Como  $\mathbf{x}$  es entero, entonces se debe cumplir  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq \eta$ . Ahora bien, existe  $(k, \mathbf{t}) \in \mathbb{Z}^n$  que satisface  $\mathbf{x} = k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}$ . Por el lema 2.2.11 y el corolario 2.2.12 encontramos que

$$k = \mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq \eta,$$

y entonces  $(k, \mathbf{t})$  es factible. Como  $\mathbf{x}$  fue arbitrario, se sigue que la solución del problema (2.38) es una cota inferior del problema (2.39). La demostración de que la solución de (2.39) es una cota inferior de (2.38) es análoga.

Finalmente, supongamos que  $(k, \mathbf{t}) \in \mathbb{Z}^n$  es solución de (2.39). Si existe  $\hat{\mathbf{x}}$  factible para (2.38) con utilidad  $\mathbf{q}^T \hat{\mathbf{x}} = \hat{k}$  estrictamente mayor, entonces consideramos  $(\hat{k}, \hat{\mathbf{t}})$  tal que  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{k}\boldsymbol{\nu} + M\hat{\mathbf{t}}$ . Este vector también es factible con utilidad  $k < \hat{k} \leq \eta$ , y entonces  $(k, \mathbf{t})$  no era la solución de (2.39). Obtenemos una contradicción.  $\square$

*Observación.* El vector objetivo todavía es ortogonal a la restricción presupuestaria. No obstante, es más fácil de manejar en caso de usar cortes como en Ramificación y Acotamiento. Si  $k^*$  no es entero en la solución al problema



relajado, la única manera de ramificar es con el nuevo corte  $k \leq \lfloor k^* \rfloor$ , pues el otro corte  $k \geq \lceil k^* \rceil$  generará un subproblema infactible. Evidentemente, en la sección de análisis de resultados haremos comparaciones de tiempo en los tiempos de terminación entre esta formulación y la original.

La formulación del problema equivalente en el teorema anterior resulta ser más interesante. Podemos desacoplar esta nueva formulación de manera que obtengamos un problema de maximización y otro de factibilidad. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las entradas de  $A$  y  $\mathbf{b}$  son enteras. Como los renglones de  $A$  son linealmente independientes, de [Sch98] sabemos que tiene una única factorización de Hermite. Es decir, existe una matriz  $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  unimodular que satisface  $AU = [H, \mathbf{0}]$ , donde  $H \in \mathbb{Z}^{m \times m}$  es triangular inferior y no singular.

Consideremos el subproblema de maximización

$$\max_{k \in \mathbb{Z}} k, \quad (2.40a)$$

$$\text{s.a. } k \leq \eta, \quad (2.40b)$$

$$A\tilde{\mathbf{y}} = kA\boldsymbol{\nu} - \mathbf{b}, \quad (2.40c)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{y}} := U \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_m \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = U_m \tilde{\mathbf{y}}_m + U_{n-m} \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \in \mathbb{Z}^n,$$

con  $\tilde{\mathbf{y}}_m \in \mathbb{Z}^m$  y  $\tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \in \mathbb{Z}^{n-m}$ . Así también,  $U_m$  y  $U_{n-m}$  denotan las primeras  $m$  columnas y últimas  $n - m$  columnas de  $U$ , respectivamente. Observemos que para toda  $k \in \mathbb{Z}$  se cumple

$$AU \begin{pmatrix} H^{-1}(kA\boldsymbol{\nu} - \mathbf{b}) \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = [H, \mathbf{0}] \begin{pmatrix} H^{-1}(kA\boldsymbol{\nu} - \mathbf{b}) \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = kA\boldsymbol{\nu} - \mathbf{b}, \quad (2.41)$$

lo cual sugiere definir  $\tilde{\mathbf{y}}_m := H^{-1}(\mathbf{b} - kA\mathbf{w})$ . No obstante, también debemos asegurarnos que este vector sea entero. Observemos que  $\tilde{\mathbf{y}}_{n-m}$  queda libre,

así que en realidad este subproblema tiene dimensión  $m + 1$ . Definimos el conjunto de factibilidad

$$F := \{k \in \mathbb{Z} : H^{-1}(kA\boldsymbol{\nu} - \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^m\} \cap \{k \in \mathbb{Z} : k \leq \eta\}. \quad (2.42)$$

*Observación.* Para que  $F$  sea no vacío, debe existir  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\det(H) \mid (k\mathbf{a}_j^T \boldsymbol{\nu} - b_j)$  para todo  $j \in \{1, \dots, m\}$ , donde  $\mathbf{a}_j^T$  denota el  $j$ -ésimo vector renglón de  $A$ . Es decir, una condición suficiente y necesaria para la no vacuidad de  $F$  es

$$\det(H) \mid \text{mcd}\{k\mathbf{a}_1^T \boldsymbol{\nu} - b_1, \dots, k\mathbf{a}_m^T \boldsymbol{\nu} - b_m\}.$$

Ahora bien,  $H$  es triangular inferior e invertible, por lo que  $\det(H) \neq 0$  es el producto de los elementos  $h_1, \dots, h_m$  en su diagonal. Entonces  $h_j \mid \det(H)$  para todo  $j \in \{1, \dots, m\}$  y una condición necesaria para la no vacuidad de  $F$  es

$$\text{mcm}\{h_1, \dots, h_m\} \mid \text{mcd}\{k\mathbf{a}_1^T \boldsymbol{\nu} - b_1, \dots, k\mathbf{a}_m^T \boldsymbol{\nu} - b_m\}.$$

Si  $F$  es vacío, deducimos que este subproblema es infactible y por lo tanto (2.39) también lo es. Supongamos, pues, que  $F \neq \emptyset$ . No es difícil observar que  $F$  tiene un elemento maximal  $k^*$  y que este elemento es la solución al subproblema (2.40). Luego, dada esta solución  $k^* \in \mathbb{Z}$ , busquemos resolver el subproblema de factibilidad

$$M\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{y}}, \quad (2.43a)$$

$$M\mathbf{t} \geq -k^* \boldsymbol{\nu}. \quad (2.43b)$$

Observemos que tenemos un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $2n - m - 1$

incógnitas, por lo que tendremos que lidiar con  $n - m - 1$  parámetros libres:

$$M\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{y}} = U_m \tilde{\mathbf{y}}_m + U_{n-m} \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \iff [M, -U_{n-m}] \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = U_m \tilde{\mathbf{y}}_m. \quad (2.44)$$

Si consideramos ahora la forma normal de Smith de esta matriz por bloques, obtenemos dos matrices unimodulares  $S \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  y  $T \in \mathbb{Z}^{(2n-m-1) \times (2n-m-1)}$  que satisfacen

$$S[M, -U_{n-m}]T = D \in \mathbb{Z}^{n \times (2n-m-1)},$$

donde  $D$  es una matriz diagonal cuyas  $n$  primeras entradas son distintas de cero y las restantes  $n - m - 1$  son cero. Si multiplicamos  $S$  por la izquierda en ambos lados de la ecuación (2.44), tenemos

$$DT^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = SU_m \tilde{\mathbf{y}}_m.$$

Si  $d_i$  no divide a  $(SU_m \tilde{\mathbf{y}}_m)_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ , encontramos que la primera ecuación del subproblema (2.43) no tiene solución en los enteros, lo que implica que la elección de  $k^*$  fue la incorrecta para asegurar soluciones enteras a este subproblema. De ser este el caso, redefinimos  $F \leftarrow F \setminus \{k^*\}$ . Si  $F$  ahora es vacío, entonces (2.39) es infactible, de caso contrario escogemos el nuevo elemento de maximal de  $F$  y repetimos el proceso.

Supongamos, pues que  $d_i \mid (SU_m \tilde{\mathbf{y}}_m)_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , por lo que obtenemos  $n$  soluciones enteras  $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$  y  $n - m - 1$  variables libres  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^{n-m-1}$ :

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, nuestro vector  $\mathbf{t}$  es una función lineal de  $\mathbf{s}$ , es decir,  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{s})$ . Hasta este punto el proceso no ha sido complicado, pues nos hemos encargado de resolver sistemas de ecuaciones lineales diofantinas. En térmi-

nos del problema original (2.38), hemos encontrado los vectores  $\mathbf{x}(\mathbf{s}) := k^*\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}(\mathbf{s})$  que maximizan la utilidad y que satisfacen todas las restricciones excepto, posiblemente, las de no negatividad.

La dificultad entra en juego cuando queremos determinar el vector de variables libres  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^{n-m-1}$  que hagan que  $\mathbf{t}(\mathbf{s})$  satisfaga la desigualdad en el subproblema (2.43). Debilitando más esta condición, nos gustaría determinar si el conjunto

$$\{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^{n-m-1} : M\mathbf{t}(\mathbf{s}) \geq -k^*\boldsymbol{\nu}\}$$

es vacío o no. En esta versión debilitada no nos interesa saber qué elementos contiene o tan siquiera cuántos elementos contiene. Es sabido que los programas enteros tales como (2.38) o (2.39) son problemas difíciles de resolver, en el sentido de que no es conocido si se pueden resolver en tiempo polinomial. A lo largo de este capítulo, no obstante, hemos resuelto todos los problemas en tiempo polinomial<sup>5</sup>. La única deducción posible, entonces, es que el problema de determinar las variables  $\mathbf{s}$ , o bien de determinar cuántas hay, o bien de determinar su existencia, son todos problemas difíciles de resolver.

A pesar de lo anterior, hay dos casos donde la dificultad se reduce drásticamente. El caso menos interesante es cuando  $m = n - 1$ , de manera que no hay parámetros libres. Esto se debe a que el politopo factible resultante es un semirrayo o un segmento de línea. Al momento de escoger la  $k^*$ -ésima capa entera, estamos agregando la ecuación  $k^* = k$ , con lo que obtenemos un sistema lineal entero de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, y entonces la solución es única. Basta entonces verificar que este único vector  $\mathbf{t}$  satisface la desigualdad en el subproblema (2.43). El caso un poco más interesante se

---

<sup>5</sup>En [Sch98] se muestra que calcular el máximo común divisor, resolver ecuaciones lineales diofantinas, y calcular las factorizaciones tanto de Hermite como de Smith son operaciones acotadas por tiempo polinomial.

obtiene cuando  $m = n - 2$ . De esta manera obtenemos un solo parámetro, con lo que podemos determinar rápidamente la existencia o inexistencia de un intervalo de factibilidad.

**Ejemplo 2.2.21.** Consideremos el problema con  $n = 2$  variables y  $m = 1$  restricciones

$$\begin{aligned} & \text{máx } x - y, \\ \text{s.a. } & x - y \leq 12, \\ & 3x + 5y = 25, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

En este caso tenemos  $A = (3, 5)$ ,  $\mathbf{b} = 25$ , y también  $\mathbf{q} = (1, -1)^T$ , al igual que  $\eta = 12$ . De (2.33) y (2.34) obtenemos

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De la forma normal de Hermite de  $A$  tenemos

$$H = 1, U = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

y de la forma normal de Smith de  $[M, -U_m]$ ,

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $H = 1$ , se sigue que  $H^{-1}(\mathbf{b} - kA\boldsymbol{\nu}) = 25 - 3k$  es entero para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Así, el conjunto factible  $F$  (c.f. 2.42) está dado por

$$F = \mathbb{Z} \cap \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 12\} = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq \eta = 12\}.$$

Entonces escogemos  $k^* = 12$  por ser el elemento maximal de  $F$ . Así, encon-

tramos

$$SU_m \tilde{\mathbf{y}}_m = SU_m (H^{-1}(\mathbf{b} - k^* A \boldsymbol{\nu})) = \begin{pmatrix} 22 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Observemos que la segunda entrada de  $SU_m \tilde{\mathbf{y}}_m$  no es divisible por  $D_{22} = 8$ . Así, el subproblema (2.43) no es factible para la elección de  $k^*$  previa. Escogemos el segundo elemento de  $F$  más grande, con lo que tenemos  $k^* \leftarrow 11$ . En este caso obtenemos  $SU_m \tilde{\mathbf{y}}_m = (-16, -24)^T$ , por lo que sí hay soluciones enteras. Luego, se debe satisfacer,

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que  $(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{y}}_{n-m}) = (1, 3)$ . Verificamos factibilidad:

$$M\mathbf{t} + k^* \boldsymbol{\nu} = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} \not\geq \mathbf{0}.$$

Ahora la elección de  $k^*$  dio un punto entero pero con una entrada negativa. Seguimos este procedimiento hasta llegar a  $k^* \leftarrow 3$ . En este caso obtenemos  $(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{y}}_{n-m}) = (-2, -6)^T$ , de donde

$$M\mathbf{t} + k^* \boldsymbol{\nu} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Concluimos diciendo que  $(k^*, \mathbf{t}) := (3, -2)$  es el óptimo del programa (2.39) y entonces  $(x, y) = (5, 2)$  es el óptimo de (2.38).

**Ejemplo 2.2.22.** Ahora consideremos el problema con  $n = 3$  variables y  $m = 1$  restricciones

$$\begin{aligned} & \text{máx } x - y + 2z, \\ & \text{s.a. } x - y + 2z \leq 10 \\ & \quad 3x + 4y - z = 15 \end{aligned}$$

$$x, y, z \geq 0.$$

En este caso tenemos  $A = (3, 4, -1)$ ,  $\mathbf{b} = 15$ , y también  $\mathbf{q} = (1, -1, 2)^T$ , al igual que  $\eta = 10$ . De (2.33) y (2.34) obtenemos

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la forma normal de Hermite de  $A$  tenemos

$$H = 1, U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

y de la forma normal de Smith de  $[M, -U_m]$ ,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, observemos que  $H = 1$  y por lo tanto  $F = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 10\}$ . Seguimos exactamente el mismo procedimiento que en el Ejemplo 2.2.21 hasta llegar a  $k^* \leftarrow 5$ . Encontramos que se satisface

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{n-m} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde  $s \in \mathbb{Z}$  es la única variable libre. En este caso podemos determinar

rápidamente un intervalo de existencia: tenemos  $M\mathbf{t} \geq -k^*\boldsymbol{\nu}$  si y solo si

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue inmediatamente que  $s \in \{-5, -4, \dots, 0\}$ . Sustituyendo en  $\mathbf{t}$  y transformando a  $\mathbf{x}$ , encontramos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

son las seis soluciones del problema. Todas alcanzan un nivel de utilidad  $k^* = 5$ .

Si el programa (2.38) es factible, entonces el programa (2.39) también lo es. A partir de nuestro procedimiento, eventualmente encontraremos un par  $(k^*, \mathbf{t}^*)$  que resuelva tanto el subproblema de maximización (2.40) como el de factibilidad (2.43).

Ahora bien, son dos las maneras en las que nuestro problema sea infactible. Puede que nuestro conjunto de factibilidad  $F$  sea vacío y por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales (2.38c) sea inconsistente. O bien, puede ser que  $F$  tenga cardinalidad infinita pero para ninguno de sus elementos se satisfaga el subproblema de factibilidad.

Esto último puede ocurrir cuando el sistema de ecuaciones siempre tiene solución pero todas ellas son negativas. En efecto, si en el Ejemplo 2.2.21 reemplazamos el lado derecho de la igualdad  $\mathbf{b} = 25$  por  $\mathbf{b} = -4$ , nos encontramos en aquella situación.

En conclusión, para asegurar terminación en tiempo finito, cualquier algoritmo basado en este método debe asegurarse primero que el conjunto de factibilidad  $F$  tiene un número finito de puntos. Este caso lo estudiamos en



la siguiente sección.

### 2.2.3. Eliminando la restricción presupuestaria

Consideremos ahora el problema

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{q}^T \mathbf{x}, \quad (2.45a)$$

$$\text{s.a. } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2.45b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

Evidentemente, si su programa relajado tiene un valor objetivo  $u^*$  finito, podemos agregar la restricción presupuestaria  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u^*$  a este problema de manera válida. Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que este programa es equivalente a (2.38) siempre que su valor objetivo sea finito. Consecuentemente, podemos utilizar las herramientas desarrolladas en la sección pasada para resolver este problema entero.

Es más, supongamos que el politopo asociado al problema relajado es acotado y no vacío. Entonces tanto el problema de maximización como de minimización tienen valores objetivos finitos. Llamemos a estos valores  $\ell^*$  y  $u^*$ , respectivamente. Ahora la restricción

$$\ell^* \leq \mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq u^*$$

es válida para el problema (2.45). De la misma manera que  $\eta$  parametriza la primera capa entera que satisface el presupuesto, podemos definir análogamente la última capa que satisface el presupuesto. Usando el mismo razonamiento que en el lema 2.2.7, encontramos que esta capa está parametrizada por  $\tau := \lceil \ell^*/m \rceil$  si  $m$  es positiva. Así pues, al definir nuestro conjunto de factibilidad  $F$  como

$$F := \{k \in \mathbb{Z} : H^{-1}(kA\boldsymbol{\nu} - \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^m\} \cap \{k \in \mathbb{Z} : \tau \leq k \leq \eta\},$$

podemos replicar las mismas técnicas que en la sección pasada. Pero además,  $F$  es un conjunto finito y por lo tanto tenemos terminación en tiempo finito para este caso. Es decir, cualquier algoritmo basado en los métodos desarrollados en la sección pasada podrá decidir en tiempo finito si el problema es factible o no. En caso de que sí lo sea entonces terminará con la solución óptima.

Existen varios algoritmos para resolver el problema relajado de (2.45) en su versión general. Es cierto que el método del simplex es el más utilizado, a pesar de tener una complejidad algorítmica no acotada polinomialmente. También es cierto que existen métodos polinomiales para resolver este problema, tales como el método elipsoidal o el algoritmo de Karmarkar. Pero más interesante es el hecho de que ya existen cotas superiores para ciertas instancias de estos problemas, por ejemplo, en el caso del Problema de la Mochila, [MT90] provee una cota superior razonable, y ciertamente el valor de 0 es una cota inferior justa. Mucho hablaremos de este problema en el Capítulo 3. No obstante, el autor considera prudente dedicar el siguiente capítulo para el caso infinito.

## Capítulo 3

# El caso infinito

Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  un vector esencialmente entero y recordemos de la definición 2.2.1 que tiene un único múltiplo coprimo  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$ . Es decir, existe un único escalar  $m \in \mathbb{R}$  que satisface tres cosas:  $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$ , las entradas  $q_1, \dots, q_n$  son coprimas, y la primera entrada no nula  $q_i$  es positiva. Al igual que en el capítulo anterior, supondremos que  $m$  es positivo. Equivalentemente, supondremos que la primera entrada no nula  $p_i$  es positiva<sup>1</sup>.

Retomemos el entero  $\eta \in \mathbb{Z}$  del lema 2.2.7 que parametriza la primera capa entera que satisface el presupuesto (2.1b). A causa del teorema 2.2.9 sabemos que si  $q_i \leq 0$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces la  $\eta$ -ésima capa entera contiene un número infinito de puntos factibles. A partir de esto último, somos capaces de resolver automáticamente el problema de decisión de determinar si un escalar  $u^* \in \mathbb{R}$  es el valor óptimo del programa (2.1).

**Corolario 3.0.1.** *Supongamos que  $q_i \leq 0$  para algún  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces el valor óptimo del programa lineal entero (2.1) es  $m\eta$ . Además, si  $m$  es positivo, tenemos que  $\eta$  es el múltiplo de  $m$  más grande que satisface*

---

<sup>1</sup>El autor hace recordar que esta es una cuestión puramente de comodidad y no hay pérdida de generalidad. Cuando  $m$  es negativo, los resultados se mantienen pero es necesario voltear las desigualdades y cambiar las funciones piso por las funciones techo, lo cual añadiría un número innecesario de casos a analizar.

$m\eta \leq u$ , donde  $u$  es el lado derecho de la restricción presupuestaria (2.1b).

*Demostración.* Por el teorema 2.2.9 sabemos que existen una infinidad de soluciones en la  $\eta$ -ésima capa entera, así que sea  $\mathbf{x}^*$  una de ellas. Entonces  $\mathbf{q}^T \mathbf{x}^* = \eta$ , pero  $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$  por la definición 2.2.1, por lo que obtenemos  $\mathbf{p}^T \mathbf{x}^* = m\mathbf{q}^T \mathbf{x}^* = m\eta$ .

Ahora bien, si  $m$  es positivo, por el lema 2.2.7 tenemos que  $\eta = \lfloor u/m \rfloor$ . Supongamos que  $\xi \in \mathbb{Z}$  satisface  $m\xi \leq u$  y también  $\lfloor u/m \rfloor < \xi$ . Luego,

$$m \left\lfloor \frac{u}{m} \right\rfloor < m\xi \leq u \implies \left\lfloor \frac{u}{m} \right\rfloor < \xi \leq \frac{u}{m},$$

pero esto contradice las propiedades de la función piso.  $\square$

*Observación.* Para ilustrar la conveniencia de restringir  $m$  a que sea positivo, consideremos el caso cuando  $m < 0$ . De una manera similar a la del lema 2.2.7, podemos demostrar que  $\eta := \lceil u/m \rceil$  parametriza también la primera capa entera que satisface el presupuesto, pues ahora tenemos de la restricción (2.1b) que  $\mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq u$  si y solo si  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \geq u/m$ . Se sigue cumpliendo que el valor óptimo del problema (2.1) es  $m\eta$ . Sin embargo,  $\eta$  ahora es el múltiplo más chico de  $m$  que satisface  $m\eta \geq u$ .

Una vez resuelto el problema de decisión, podemos preguntarnos concretamente cómo obtener el punto óptimo. Por el teorema 2.2.9 sabemos que debemos resolver la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$ . Del teorema 2.2.15 sabemos que si  $q_n \neq 0$ , entonces existen  $k \in \mathbb{Z}$  y  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  tales que

$$\mathbf{x} = k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t},$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  y  $M$  están definidas por (2.33) y (2.34), respectivamente. De los lemas 2.2.11 y 2.2.12 sabemos que

$$\mathbf{q}^T (\eta\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}) = \eta\mathbf{q}^T \boldsymbol{\nu} + \mathbf{q}^T M\mathbf{t} = \eta$$

para todo  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ . Así pues, debe ser el caso que  $k = \eta$  y debemos encontrar condiciones suficientes en  $\mathbf{t}$  para asegurar la no-negatividad de  $\mathbf{x}$ . En primer lugar, sabemos que para todo  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ , la entrada  $t_i$  debe satisfacer (2.26). En segundo lugar, recuperamos de (2.24) que las últimas dos soluciones de la ecuación  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$  están dadas por

$$\begin{cases} x_{n-1} = \omega_{n-1} x'_{n-1} + \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} t_{n-1}, \\ x_n = \omega_{n-1} x'_n - \frac{q_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1} g_j} t_{n-1}, \end{cases}$$

donde los enteros  $g_i$  están definidos por (2.19) con  $g_1 = 1$ ,  $\omega_{n-1}$  está definida a través de la relación de recurrencia (2.27) con condición inicial  $\omega_1 = \eta$  (o bien a partir del lema 2.28 con  $k = \eta$ ), y  $x'_{n-1}, x'_n$  son coeficientes de Bézout que satisfacen (2.25).

En lo que se encuentra a continuación supondremos que ninguna entrada  $q_i$  es nula. Esto no constituye problema alguno debido a un razonamiento similar al de la demostración del teorema 2.2.9. Definimos

$$I^\circ := \{i : q_i = 0\},$$

y también definimos el vector  $\tilde{\mathbf{q}}$  cuyas entradas son las entradas no nulas de  $\mathbf{q}$ . A partir de lo que sigue vamos a determinar un vector entero no nulo  $\tilde{\mathbf{x}}$  que satisfaga  $\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{x}} = \eta$ . Luego, encontramos que el vector  $\mathbf{x}$  dado por

$$x_i := \begin{cases} \tilde{x}_i, & i \notin I^\circ, \\ 0, & i \in I^\circ, \end{cases}$$

es entero, no negativo, y también satisface  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$ . Así pues, la suposición de que  $q_i \neq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  toma lugar sin pérdida de generalidad.

Para que se satisfagan las condiciones de no negatividad de  $x_{n-1}$  y de  $x_n$ , encontramos que  $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$  debe cumplir ciertas desigualdades según los

signos de  $q_{n-1}$  y de  $q_n$ . Definamos, por conveniencia,

$$b_1 := -\frac{\omega_{n-1}x'_{n-1}}{q_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g_j, \quad b_2 := \frac{\omega_{n-1}x'_n}{q_{n-1}} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g_j. \quad (3.1)$$

Entonces, para asegurar la no-negatividad de  $x_{n-1}$  y de  $x_n$ , debe ser el caso que

$$t_{n-1} \in \begin{cases} [\lceil \max\{b_1, b_2\} \rceil, \infty), & q_{n-1} < 0 < q_n, \\ (-\infty, \lfloor \min\{b_1, b_2\} \rfloor], & q_n < 0 < q_{n-1}, \\ [\lfloor b_2 \rfloor, \lfloor b_1 \rfloor], & q_{n-1}, q_n < 0, \\ [\lceil b_1 \rceil, \lceil b_2 \rceil], & 0 < q_{n-1}, q_n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Podemos emplear la misma estrategia de permutar las entradas de  $q_i$  de manera que colapsemos estos cuatro casos distintos en uno solo. Como estamos en el caso infinito del teorema 2.2.9, naturalmente supondremos que  $q_i < 0$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Así pues, podemos permutar esta  $i$ -ésima entrada de  $\mathbf{q}$  con  $q_{n-1}$ , con lo que obtenemos  $q_{n-1} < 0$ . Luego, como  $\mathbf{q}$  es el múltiplo coprimo de  $\mathbf{p}$  y ninguna entrada de  $\mathbf{q}$  es nula, se sigue de la definición 2.2.1 que  $q_1 > 0$ . Así pues, podemos permutar la primera y última entrada de  $\mathbf{q}$ , de donde se sigue que  $q_n > 0$ . Juntándolo todo, obtenemos  $q_{n-1} < 0 < q_n$ . De esta manera, para asegurar la no negatividad de  $x_{n-1}$  y  $x_n$ , basta con que se satisfaga el primer caso:

$$t_{n-1} \geq \lceil \max\{b_1, b_2\} \rceil. \quad (3.3)$$

**Lema 3.0.2.** *Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}$  un vector cuyas entradas son todas distintas de cero, y sea  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  su múltiplo coprimo. Entonces existe un vector  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  que satisface ambos (2.26) y (3.2).*

*Demostración.* Por la discusión anterior, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $q_{n-1} < 0 < q_n$ , así que basta mostrar la existencia de

$\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  que satisfaga (2.26) y (3.3). Si definimos

$$t_i := \begin{cases} \left\lceil -\frac{\omega_i x'_i}{g_{i+1}} \right\rceil, & i < n-1, \\ \lceil \max\{b_1, b_2\} \rceil, & i = n-1, \end{cases}$$

entonces se verifica automáticamente que estas condiciones se satisfacen.  $\square$

En síntesis, por el lema 3.0.2 sabemos que existe un vector  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  que satisface ambos (2.26) y (3.2). Al definir  $\mathbf{x}^* := \eta \boldsymbol{\nu} + M \mathbf{t}$ , encontramos que  $\mathbf{x}^*$  es entero y no negativo, y además por los lemas 2.2.11 y 2.2.12 encontramos que

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x}^* = \eta \mathbf{q}^T \boldsymbol{\nu} + \mathbf{q}^T M \mathbf{t} = \eta.$$

Por el teorema 2.2.9, se sigue que  $\mathbf{x}^*$  es la solución al problema (2.1).

En la práctica es mejor usar la relación de recurrencia (2.21) y “construir” las entradas  $x_i$  al mismo tiempo que definimos  $t_i$  de manera que satisfaga (2.26) y (3.3). Si procedemos de esta forma no tenemos que encontrar primero  $\boldsymbol{\nu}$  y  $M$ , determinar  $\mathbf{t}$  y luego recuperar  $\mathbf{x}$ . El Algoritmo 1 muestra este procedimiento constructivo.

En el Algoritmo 1 supusimos la existencia de una subrutina **Bezout** que, como su nombre lo indica, calcula los coeficientes de Bézout entre dos enteros. Es la creencia del autor que no es necesario escribir la subrutina en esta tesis, pero reitera, así como lo hizo en la Sección 2.1.1, que estos coeficientes se pueden calcular por medio del Algoritmo Extendido de Euclides.

**Lema 3.0.3.** *El Algoritmo 1 es correcto.*

*Demostración.* Basta observar que el algoritmo sigue la construcción recursiva de la Sección 2.2.1, donde escogemos las variables libres  $t_i$  como lo indica la demostración del lema 3.0.2 para asegurar que  $\mathbf{x}$  sea no negativo. El único punto de aclaración lo hacemos con respecto a las redefiniciones en la línea 11.

Sea  $\mathbf{q}'$  una copia del vector  $\mathbf{q}$  antes de realizar cualquier modificación. No es difícil ver, por medio de inducción y recordando  $g_1 := \text{mcd}\{q'_1, \dots, q'_n\} = 1$ , que

$$q_i = \frac{q'_i}{\prod_{j=1}^{\min\{i, n-1\}} g_j},$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Luego, las definiciones en las líneas (5), (6) y (12) son consistentes con la construcción recursiva de la Sección 2.2.1. Juntando esto con el lema 3.0.2 encontramos que  $\mathbf{x}$  es no negativo y satisface la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$ .

□

El Algoritmo 2 extiende el Algoritmo 1. Solamente construimos un vector  $\tilde{\mathbf{q}}$  a partir del vector coprimo  $\mathbf{q}$  de manera que se satisfagan las hipótesis del Algoritmo 1. Esta construcción sigue la misma lógica con la que justificamos los supuestos  $q_i \neq 0$  y  $q_{n-1} < 0 < q_n$  antes de presentar el lema 3.0.2.

Al igual que en el algoritmo anterior, suponemos la existencia de las subrutinas **length** y **switch**, las cuales determinan la dimensión de un vector  $\mathbf{q}$  y permutan sus entradas, respectivamente. Ambas subrutinas son estándar en la literatura y por lo tanto diremos que son correctos sin proveer alguna demostración. Así también, la subrutina **NonNegativeIntSol** es el Algoritmo 1, el cual es correcto a causa del lema 3.0.3.

**Teorema 3.0.4.** *El Algoritmo 2 es correcto.*

*Demostración.* Primero mostramos que el vector  $\tilde{\mathbf{q}}$  satisface las hipótesis del Algoritmo 1. Por definición, en la línea 3, tenemos que ninguna entrada de  $\tilde{\mathbf{q}}$  es nula.

Recordemos de la definición 2.2.1 que, como  $\mathbf{q}$  es el vector coprimo de un vector esencialmente entero  $\mathbf{p}$ , su primera entrada no nula es positiva. Así, es cierto que  $\tilde{q}_1 > 0$ . A partir de la permutación en la línea 5 encontramos que  $\tilde{q}_m > 0$ .



Del ciclo en la línea 6 recuperamos un índice  $j$  tal que  $\tilde{q}_j < 0$  y lo permutamos con la  $(m - 1)$ -ésima entrada de  $\tilde{\mathbf{q}}$  en la línea (10), de manera que obtenemos  $\tilde{q}_{m-1} < 0$ .

Con los tres puntos anteriores, encontramos que el vector  $\tilde{\mathbf{q}}$  satisface las hipótesis del Algoritmo 1 y por lo tanto el vector  $\tilde{\mathbf{x}}$  es no negativo y satisface la ecuación lineal diofantina  $\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{x}} = \eta$ , debido al lema 3.0.3.

Las siguientes dos líneas se encargan de invertir las permutaciones hechas previamente. Finalmente, en el ciclo (14) insertamos en  $\mathbf{x}$  las entradas  $i$  de  $\tilde{\mathbf{x}}$  donde  $q_{\sigma_i} \neq 0$ . En otro caso tenemos  $x_i = 0$ . Así pues, el vector  $\mathbf{x}$  es no negativo y también tenemos

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n q_i x_i = \sum_{i=1}^m q_{\sigma_i} x_{\sigma_i} = \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i \tilde{x}_i = \eta,$$

por lo que concluimos que el Algoritmo 2 es correcto.  $\square$

**Teorema 3.0.5.** *Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  un vector esencialmente entero tal que su múltiplo coprimo  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  tiene una entrada negativa. Entonces el problema (2.1) se puede resolver a través de encontrar la solución de una ecuación lineal diofantina en  $n$  incógnitas.*

*Demostración.* Como  $\mathbf{q}$  es el múltiplo coprimo de  $\mathbf{p}$ , existe un escalar  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $m$  es positivo. Recuperemos  $\eta$  del lema 2.2.7. Por hipótesis, una entrada de  $\mathbf{q}$  es negativa, y entonces este vector satisface las condiciones del Algoritmo 2. Por el teorema 3.0.4 podemos encontrar, a partir de resolver solo una ecuación lineal diofantina, un vector entero no negativo  $\mathbf{x}$  que satisface  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$ . Observemos que

$$\mathbf{p}^T \mathbf{x} = m\mathbf{q}^T \mathbf{x} = m\eta.$$

Por el corolario 3.0.1 concluimos que  $\mathbf{x}$  no solo es factible para el problema

(2.1), sino que también es un punto óptimo.  $\square$

A partir del teorema anterior, podemos discutir informalmente sobre la complejidad algorítmica del problema (2.1) en el caso especial que una entrada  $q_i$  sea negativa. Sea  $T(\mathbf{v})$  el número de pasos necesarios para calcular el máximo común divisor de las entradas de un vector entero  $\mathbf{v}$ . Como los coeficientes de Bézout entre dos enteros  $a, b$  se determinan a partir del Algoritmo Extendido de Euclides, sabemos que el número de pasos para calcularlos es un múltiplo entero de  $T(a, b)$ .

### 3.1. Análisis de resultados

Una consecuencia del teorema 3.0.5 es que la complejidad algorítmica del problema (2.1) es lineal en la dimensión  $n$  siempre y cuando  $q_i < 0$  para alguna  $i \in \{2, \dots, n\}$ . En esta sección describimos un algoritmo cuyo tiempo de terminación es  $\mathcal{O}(n)$ . A través de los resultados obtenidos previamente, somos capaces de mostrar que nuestro algoritmo es correcto. Finalmente, implementamos nuestro algoritmo en el lenguaje de programación Python y comparamos sus tiempos de terminación con los de la implementación de Ramificación y Acotamiento en la librería PuLP.

---

**Algoritmo 1: NonNegativeIntSolInf**


---

**Datos:**

$\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  coprimo tal que  $q_i \neq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  
 $q_{n-1} < 0 < q_n$ .  
 $\eta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

**Resultado:**

$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tal que  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$ .

**inicio**

$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0};$	1
$\omega_1 \leftarrow \eta;$	2
<b>para</b> $i \leftarrow 1$ <b>a</b> $n - 2$ <b>hacer</b>	3
$g_{i+1} \leftarrow \text{mcd}\{q_{i+1}, \dots, q_n\};$	4
$x'_i, \omega'_{i+1} \leftarrow \text{Bezout}(q_i, g_{i+1});$	5
$t_i \leftarrow \lceil -\omega_i x'_i / g_{i+1} \rceil;$	6
$x_i \leftarrow \omega_i x'_i + g_{i+1} t_i;$	7
$\omega_{i+1} \leftarrow \omega_i \omega'_{i+1} - q_i t_i;$	8
<b>para</b> $j \leftarrow i$ <b>a</b> $n - 1$ <b>hacer</b>	9
$q_{j+1} \leftarrow q_{j+1} / g_{i+1};$	10
	11
$x'_{n-1}, x'_n \leftarrow \text{Bezout}(q_{n-1}, q_n);$	12
$b_1 \leftarrow -\omega_{n-1} x'_{n-1} / q_n;$	13
$b_2 \leftarrow \omega_{n-1} x'_n / q_{n-1};$	14
$t_{n-1} \leftarrow \lceil \text{máx}\{b_1, b_2\} \rceil;$	15
$x_{n-1} \leftarrow \omega_{n-1} x'_{n-1} + q_n t_{n-1};$	16
$x_n \leftarrow \omega_{n-1} x'_n - q_{n-1} t_{n-1};$	17
<b>devolver</b> $\mathbf{x};$	18

---

---

**Algoritmo 2:** Dioph

---

**Datos:** $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  coprimo tal que  $q_i < 0$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . $\eta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .**Resultado:** $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tal que  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$ .

$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0};$	1
$\sigma \leftarrow (i: q_i \neq 0);$	2
$\tilde{\mathbf{q}} \leftarrow (q_i: q_i \neq 0);$	3
$m \leftarrow \text{length}(\tilde{\mathbf{q}});$	4
$\text{switch}(\tilde{\mathbf{q}}, 1, m);$	5
<b>para</b> $i \leftarrow 1$ <b>a</b> $m - 1$ <b>hacer</b>	6
<b>si</b> $\tilde{q}_i < 0$ <b>entonces</b>	7
$j \leftarrow i;$	8
ir al paso 10;	9
$\text{switch}(\tilde{\mathbf{q}}, j, m - 1);$	10
$\tilde{\mathbf{x}} \leftarrow \text{NonNegativeIntSolInf}(\tilde{\mathbf{q}}, \eta);$	11
$\text{switch}(\tilde{\mathbf{x}}, j, m - 1);$	12
$\text{switch}(\tilde{\mathbf{x}}, 1, m);$	13
<b>para</b> $i \leftarrow 1$ <b>a</b> $m$ <b>hacer</b>	14
$x_{\sigma_i} \leftarrow \tilde{x}_i;$	15
<b>devolver</b> $\mathbf{x}$	16

---

## Capítulo 4

# El caso finito

Nuevamente inspirados por el teorema 2.2.9, en este capítulo analizamos el caso en el que el vector coprimo  $\mathbf{q}$  tiene entradas estrictamente positivas. De esta manera, el problema (2.1) deviene una instancia particular del famoso Problema de la Mochila:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{u}^T \mathbf{x}, \quad (4.1a)$$

$$\text{s.a. } \mathbf{w}^T \mathbf{x} \leq c, \quad (4.1b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (4.1c)$$

donde los vectores positivos  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$  son conocidos como vector de útiles y vector de pesos, respectivamente. Puesto que no acotamos  $\mathbf{x}$ , el problema recibe el nombre de Problema de la Mochila no Acotado. Pero también como  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ , el problema puede ser considerado como un Problema de la Suma de Conjuntos no Acotado.

En la primera sección realizamos un análisis de capas enteras a fin de obtener un resultado análogo al teorema 3.0.5. En concreto, el teorema 4.1.19 enuncia que, para un presupuesto  $u$  suficientemente grande en el problema (2.1), la búsqueda de una solución se reduce a resolver solamente una ecuación lineal diofantina.

El resultado anterior, si bien interesante, es de existencia y no muestra

cómo obtener las soluciones enteras no negativas de ecuaciones lineales diofantinas. De manera similar a como lo hicimos en el capítulo anterior, la segunda sección se encarga de presentar tal construcción de soluciones a partir de los Algoritmos 3 y 4.

Finalmente, en la tercera y última sección de este capítulo, realizamos algunos experimentos numéricos que comparan la eficacia de nuestros algoritmos recién desarrollados con la de Ramificación y Acotamiento, así como de una formulación alternativa de programación dinámica.

## 4.1. Análisis de capas enteras

De acuerdo al segundo caso del teorema 2.2.9, el número de puntos enteros no negativos sobre la  $k$ -ésima capa entera es finito y, por lo tanto, puede ser cero. Sea  $k \in \{\eta, \dots, 0\}$ . Sabemos de la Sección 2.2.1 que deseamos resolver la ecuación lineal diofantina (2.11), por lo que implementamos la misma estrategia para plantear una formulación recursiva.

Debido al supuesto  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ , observemos de (2.16) que podemos agregar la condición  $\omega_i \geq 0$ . En efecto, buscamos que  $\mathbf{x}$  sea no negativo y recordemos que  $g_i$  es un máximo común divisor (ver (2.17)), por lo que es estrictamente positivo. Juntando esto con el supuesto  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ , encontramos que  $\omega_i$  es no negativo para toda  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Así pues, despejando  $t_i$  de (2.21) obtenemos los intervalos de factibilidad

$$\left\lceil -\frac{\omega_i x'_i}{g_{i+1}} \right\rceil \leq t_i \leq \left\lfloor \frac{\omega_i \omega'_{i+1}}{q_i} \prod_{j=1}^i g_j \right\rfloor,$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ . Luego, como  $0 < q_{n-1}, q_n$ , se sigue de (2.24) que

$$\left\lceil -\frac{\omega_{n-1} x'_{n-1}}{q_n} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j \right\rceil \leq t_{n-1} \leq \left\lfloor \frac{\omega_{n-1} x'_n}{q_{n-1}} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} g_j \right\rfloor.$$

Consecuentemente, el número de elecciones que podemos realizar para el vector de variables libres  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$  es, como lo confirma el teorema 2.2.9, finito. Si determinamos que no existe tal punto en la  $k$ -ésima capa entera, descendemos a la  $(k - 1)$ -ésima capa entera y continuamos con nuestra búsqueda.

Ahora bien, en esta primera parte de la sección nos encargamos de calcular una cota superior para el número de capas enteras que debemos analizar de manera que garanticemos la existencia de un punto entero no negativo sobre una de estas capas enteras.

**Lema 4.1.1.** *Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  un vector esencialmente entero y sea  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  su múltiplo coprimo, por lo que existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$ . Supongamos que  $m > 0$  y que  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ . Sea  $q^* := \max\{q_1, \dots, q_n\}$ , y sea*

$$\tau := \left\lfloor \left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor \frac{q^*}{m} \right\rfloor, \quad (4.2)$$

donde  $u$  es el lado derecho de (2.1b). Entonces la solución del problema (2.1), de ser factible, se encuentra en una capa entera parametrizada por  $k \in \{\eta, \eta - 1, \dots, \tau\}$ , donde recuperamos  $\eta$  del lema 2.2.7.

*Demostración.* Definamos  $i^* := \arg \max\{q_1, \dots, q_n\}$  y consideremos el vector

$$\mathbf{v} := \left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor \mathbf{e}_{i^*}.$$

Por hipótesis tenemos  $q^* > 0$  y, además, como el problema (2.1) es factible, se sigue del teorema 2.2.9 que el presupuesto  $u$  es no negativo. De esto obtenemos que  $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ . Así también,

$$\mathbf{q}^T \mathbf{v} = \left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor q^* \leq \frac{u}{q^*} q^* = u,$$

y entonces  $\mathbf{v}$  es factible. De aquí se sigue que este vector provee una cota inferior para el problema (2.1). Así pues, todo vector  $\mathbf{x}$  candidato a ser el

óptimo del problema satisface

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \frac{\mathbf{p}^T \mathbf{x}}{m} \geq \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{v}}{m} = \left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor \frac{q^*}{m}.$$

Nos interesa determinar el entero  $\tau$  más pequeño tal que todo punto sobre la capa entera  $H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  con  $k \in \{\tau, \tau + 1, \dots\}$  satisfaga esta desigualdad. Del lema 2.2.4, encontramos que  $k$  debe satisfacer

$$\frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{q}\|^2} \geq \left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor \frac{q^*}{m \|\mathbf{q}\|^2},$$

equivalentemente,

$$k \geq \left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor \frac{q^*}{m}.$$

Consecuentemente,

$$\tau = \left\lfloor \left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor \frac{q^*}{m} \right\rfloor.$$

Finalmente, recordemos del lema 2.2.7 que  $\eta$  es la primera capa en satisfacer la restricción presupuestaria. Por lo tanto, el óptimo del problema (2.1) se encuentra en una capa entera parametrizada por  $\tau \leq k \leq \eta$ .  $\square$

*Observación.* Siempre se cumple que  $\tau \leq \eta$ . En efecto,

$$\left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor q^* \leq \frac{u}{q^*} q^* = u,$$

como  $m > 0$ , tenemos

$$\left\lfloor \frac{u}{q^*} \right\rfloor \frac{q^*}{m} \leq \frac{u}{m}.$$

Aplicando la función piso a ambos lados de la desigualdad y comparando con (4.2) y el lema 2.2.7 encontramos que  $\tau \leq \eta$ .

*Observación.* Nuevamente, la suposición de que el escalar  $m$  sea positivo ocurre sin pérdida de generalidad. Así como mencionamos en el capítulo anterior que si  $m$  es negativo entonces existe un parámetro  $\eta'$  análogo a  $\eta$ ,



también existe  $\tau' \geq \eta'$  tal que la solución del problema (2.1) se encuentra en una capa parametrizada por  $\eta' \leq k \leq \tau'$ .

**Lema 4.1.2.** *Sean  $q$  y  $m$  enteros distintos de cero. Entonces la función  $\Delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\Delta(x) := \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} \right\rfloor,$$

*es periódica con periodo  $\text{mcm}\{q, m\}$ .*

*Demostración.* Tenemos

$$\Delta(x + \text{mcm}\{q, m\}) = \left\lfloor \frac{x}{m} + \frac{\text{mcm}\{q, m\}}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} + \frac{\text{mcm}\{q, m\}}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} \right\rfloor,$$

pero  $q, m \mid \text{mcm}\{q, m\}$ , por lo que  $\text{mcm}\{q, m\}/m$  y  $\text{mcm}\{q, m\}/q$  son enteros. Por las propiedades de la función piso obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta(x + \text{mcm}\{q, m\}) &= \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \frac{\text{mcm}\{q, m\}}{m} - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} + \frac{\text{mcm}\{q, m\}}{q} \cdot \frac{q}{m} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \frac{\text{mcm}\{q, m\}}{m} - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} \right\rfloor - \frac{\text{mcm}\{q, m\}}{m} \\ &= \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor \frac{q}{m} \right\rfloor \\ &= \Delta(x), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Definición 4.1.3.** Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  un vector esencialmente entero y sea  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  su múltiplo coprimo. Consideremos los parámetros  $\eta$  y  $\tau$  (c.f. lemas 2.2.7 y 4.1.1) como funciones del presupuesto  $u$ . Entonces decimos que la función  $\Delta^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Delta^*(u) := \eta(u) - \tau(u) \tag{4.3}$$

denota el **número de capas enteras a revisar** dado el presupuesto  $u$ .

Si queremos aplicar el lema 4.1.2 a la función de la definición anterior, debemos reducir nuestra atención a vectores  $\mathbf{p}$  enteros. Esto se debe a que debemos asegurar que el múltiplo  $m$  sea entero<sup>1</sup>. Independientemente del comportamiento periódico de  $\Delta^*$ , tenemos que esta función varía significativamente ante cambios en  $m$ . Esto último implica que el número de capas enteras a revisar depende del número de cifras decimales usadas para especificar  $\mathbf{p}$ . Véase la Figura 4.1 o el Ejemplo 4.1.4.

**Ejemplo 4.1.4.** Si tenemos  $\mathbf{p} := (9.6, 7.2, 5.6)^T$ , entonces  $m = 0.8$  y por lo tanto el número de capas a revisar dado  $u := 119$  es  $\Delta^*(u) = 14$ . En cambio, si tenemos  $\mathbf{p} := (9.60, 7.28, 5.68)^T$ , obtenemos  $m = 0.08$ , por lo que el número de capas a revisar dado  $u$  es  $\Delta^*(u) = 1499$ . Es decir, si usamos una cifra decimal más en cada entrada, entonces  $\Delta^*(u)$  se multiplica por 100, aproximadamente.

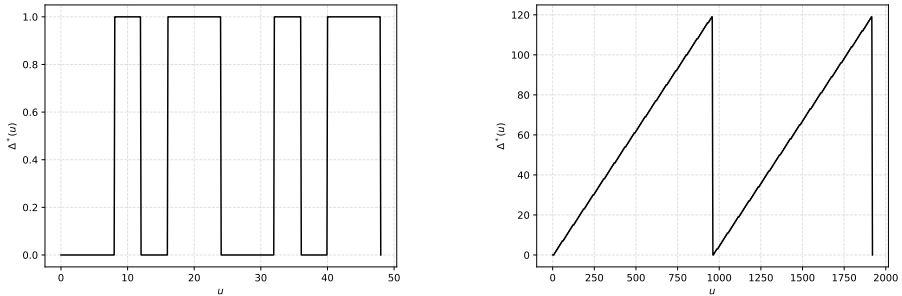


Figura 4.1.: Número de capas a revisar en función del presupuesto. *Izquierda:* Para los parámetros  $m = 8$  y  $q^* = 12$  encontramos que hay un máximo de una capa a revisar. *Derecha:* A medida que  $m$  se vuelve fraccionario, las capas a revisar aumentan. En este caso tenemos  $m = 0.08$  y  $q^* = 960$ .

Observaremos en el análisis de resultados que el número de capas enteras

<sup>1</sup>Es la creencia del autor que el lema 4.1.2 puede ser generalizado para múltiplos  $m$  racionales, mas esto no agrega demasiado valor en lo que sigue de la tesis.

que nuestro algoritmo revisa en realidad disminuye a medida que aumenta el presupuesto  $u$ .

En esta segunda parte de la sección, demostraremos que para un presupuesto  $u$  suficientemente grande, la solución del problema (2.1) se encuentra en la  $\eta$ -ésima capa entera donde, como siempre,  $\eta$  es recuperada del lema 2.2.7. Este resultado será análogo al teorema 3.0.5. No obstante, para lograr aquello, necesitamos de un par de definiciones y lemas preliminares.

Para motivar al lector, primero mostramos que existe una vecindad fija de todo punto en  $\mathbb{R}^n$  de manera que esa vecindad contiene al menos un punto entero. Esto es especificado en el teorema 4.1.6.

Luego, observamos que el “trozo” no negativo de una capa entera  $H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  crece a medida que  $k$  aumenta. Así pues, si  $k$  es lo suficientemente grande, habrá un punto sobre ese trozo no negativo cuya vecindad también se encuentra contenida en ese trozo y, por lo tanto, habrá un punto entero no negativo sobre ese trozo. Esto es especificado en el teorema 4.1.17.

Finalmente, relacionamos el punto entero que se encuentra sobre el pedazo no negativo de  $H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  con el problema (2.1). Así pues, concluimos esta sección con los teoremas 4.1.18 y 4.1.19.

**Definición 4.1.5.** Sea  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  un vector coprimo y sea  $k$  un entero. Entonces definimos la **bola cerrada** sobre la  $k$ -ésima capa entera  $H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  con radio  $r > 0$  y centro  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  como

$$B_r^{(k)}(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r\} \cap H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}. \quad (4.4)$$

**Teorema 4.1.6.** Sea  $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$  un vector coprimo y supongamos que  $q_n \neq 0$ . Sea  $k$  un entero. Entonces existe  $r > 0$  tal que la familia de bolas

$$\left\{ B_r^{(k)}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n \right\}$$

es una cubierta de la  $k$ -ésima capa entera  $H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$ .

*Demostración.* Como  $q_n \neq 0$ , recordemos del teorema (2.2.15) que

$$\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n \iff \mathbf{x} = k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}$$

para algún vector  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ , donde recuperamos  $\boldsymbol{\nu}$  y  $M$  de (2.33) y (2.34), respectivamente. Así, tenemos

$$\left\{ B_r^{(k)}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{Z}^n \right\} = \left\{ B_r^{(k)}(k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}) : \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1} \right\}.$$

Por la definición 4.1.5 sabemos que  $B_r^{(k)}(k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}) \subseteq H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  para todo  $r > 0$  y para todo  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ . Luego, para cualquier  $r > 0$  tenemos

$$\bigcup_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}} B_r^{(k)}(k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}) \subseteq H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}. \quad (4.5)$$

Ahora bien, sea  $\mathbf{y}$  un punto sobre la  $k$ -ésima capa entera. Por el lema 2.2.12 sabemos que las columnas de  $M$  son linealmente independientes, y entonces existe  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-1}$  tal que

$$\mathbf{y} = k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}.$$

Sea  $\lfloor \mathbf{t} \rfloor \in \mathbb{Z}^{n-1}$  el vector resultante de redondear cada entrada de  $\mathbf{t}$  al entero más cercano. Luego,  $\mathbf{t} = \lfloor \mathbf{t} \rfloor + \boldsymbol{\delta}$ , para alguna  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{n-1}$  que satisface  $\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty \leq 1/2$ . Definamos

$$\mathbf{x} := k\boldsymbol{\nu} + M\lfloor \mathbf{t} \rfloor \in \mathbb{Z}^{n-1},$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 &= \|M\boldsymbol{\delta}\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |\delta_i|^2 \|M\mathbf{e}_i\|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \|M\mathbf{e}_i\|^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{4} \|M\|_F^2,$$

donde  $\|M\|_F$  denota la norma Frobenius de  $M$ . Por lo tanto, si definimos

$$r := \frac{1}{2} \|M\|_F, \quad (4.7)$$

encontramos que  $\mathbf{y} \in B_r^{(k)}(\mathbf{x})$ . Luego, como  $\mathbf{y} \in H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^2}$  fue genérico, tenemos que si  $r$  está definido por (4.7), entonces

$$H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}} \subseteq \bigcup_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}} B_r^{(k)}(k\boldsymbol{\nu} + M\mathbf{t}). \quad (4.8)$$

Juntando esto con (4.5) obtenemos lo que queríamos demostrar.  $\square$

Lo que se encuentra a continuación se encarga de formalizar y caracterizar lo que nos referíamos anteriormente como “trozo no negativo” de la  $k$ -ésima capa entera. Todas las definiciones fueron tomadas de [BV04] a excepción del baricentro, mientras que las demostraciones de los lemas y teoremas fueron realizadas completamente por el autor.

**Definición 4.1.7.** Sean  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$  una colección de vectores, entonces definimos su **combinación afina** a partir de

$$\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} := \{\theta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \theta_m \mathbf{v}_m : \theta_1 + \dots + \theta_m = 1\}.$$

**Lema 4.1.8.** Sean  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$  una colección de vectores. Entonces

$$\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} = \mathbf{v}_j + \text{gen}\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\}_{i=1}^n = \mathbf{v}_j + \text{gen}\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\}_{i \neq j}.$$

*Demostración.* Puesto que  $\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ , se sigue inmediatamente que

$$\mathbf{v}_j + \text{gen}\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\}_{i=1}^n = \mathbf{v}_j + \text{gen}\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\}_{i \neq j}.$$

Sean  $\theta_1, \dots, \theta_m$  escalares tales que  $\theta_1 + \dots + \theta_m = 1$ . Por un lado, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \theta_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i=1}^m \theta_i \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^m \theta_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \\ &= \mathbf{v}_j + \sum_{i \neq j} \theta_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j). \end{aligned}$$

De donde se sigue que  $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subseteq \mathbf{v}_j + \text{gen}\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\}_{i \neq j}$ .

Ahora bien, sea  $\{\lambda_i\}_{i \neq j}$  un conjunto de  $m - 1$  escalares y definamos

$$\lambda_j = 1 - \sum_{i \neq j} \lambda_i.$$

Observemos que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$  y, además,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) &= \left(1 - \sum_{i \neq j} \lambda_i\right) \mathbf{v}_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \mathbf{v}_i \\ &= \lambda_j \mathbf{v}_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i. \end{aligned}$$

De donde se sigue que  $\mathbf{v}_j + \text{gen}\{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\}_{i \neq j} \subseteq \text{aff}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ . Puesto que hemos mostrado ambas contenciones, obtenemos lo que queríamos demostrar.  $\square$

**Ejemplo 4.1.9.** Si  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  es un vector coprimo y  $k$  un entero positivo, entonces la  $k$ -ésima capa entera  $H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  es la combinación afina de un conjunto de vectores. En efecto, recordemos de la definición 2.2.3 que esta capa entera es simplemente un hiperplano afino. Como  $\mathbf{q}$  es el vector normal a este hiperplano, se sigue que puede ser escrito como  $\mathbf{v} + \ker\{\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}^T \mathbf{x}\}$  para alguna  $\mathbf{v} \in H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$ .

Sean  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  las intersecciones de la  $k$ -ésima capa entera con cada uno

de los ejes. Es decir, sean, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\mathbf{u}_i := \frac{k}{q_i} \mathbf{e}_i. \quad (4.9)$$

Como cada  $\mathbf{u}_i$  está en la  $k$ -ésima capa entera, se verifica que  $\mathbf{q}^T \mathbf{u}_i = k$  y por lo tanto  $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j \in \ker\{\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}^T \mathbf{x}\}$ . No es difícil ver entonces que el conjunto de vectores  $\{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\}_{i \neq j}$  forma una base del espacio nulo de la transformación lineal  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}^T \mathbf{x}$ , por lo que obtenemos

$$H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}} = \mathbf{u}_j + \text{gen}\{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\}_{i \neq j}.$$

Por el lema 4.1.8 concluimos que la  $k$ -ésima capa entera es la combinación afina de los vectores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ .

**Definición 4.1.10.** Sean  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$  vectores linealmente independientes. Entonces definimos el **símplice**  $\sigma$  como la combinación convexa de estos vectores:

$$\sigma = \text{conv}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} := \{\theta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \theta_m \mathbf{v}_m : \theta_1 + \dots + \theta_m = 1, \theta_i \geq 0\}.$$

Decimos entonces que  $\sigma$  es generado por  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ . También definimos la  **$j$ -ésima faceta**  $\sigma_j$  de  $\sigma$  como el símplice generado por los vectores  $\{\mathbf{v}_i\}_{i \neq j}$ .

*Observación.* Comparando con la definición 4.1.7, encontramos que todo símplice  $\sigma$  generado por  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  está contenido en la combinación afina de estos vectores. Es decir,

$$\text{conv}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subseteq \text{aff}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}. \quad (4.10)$$

*Observación.* Si  $\sigma$  es un símplice generado por  $m$  vectores, entonces tiene  $\binom{m}{m-1} = m$  facetas. Tomaremos por hecho, puesto que de otra manera arriesgamos desviarnos por una tangente, que estas facetas constituyen la frontera relativa del símplice. Es decir, tomaremos por hecho que las facetas

constituyen las “aristas” o “caras” de  $\sigma$ .

**Lema 4.1.11.** *Sea  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  un vector coprimo y sea  $H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  la  $k$ -ésima capa entera, con parámetro  $k$  positivo. Consideremos el símplice  $\sigma$  generado por los vectores definidos en (4.9), entonces*

$$\sigma = H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{R}_{\geq \mathbf{0}}^n.$$

*Demostración.* En el Ejemplo 4.1.9 mostramos que

$$H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}} = \text{aff}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}.$$

Sea  $\mathbf{x} \in \sigma$ , de la definición 4.1.10 y de (4.10) encontramos que  $\mathbf{x}$  se encuentra en la  $k$ -ésima capa entera. Además, existen escalares  $\theta_1, \dots, \theta_n$  no negativos tales que

$$\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \theta_n \mathbf{u}_n = k \begin{pmatrix} \theta_1/q_1 \\ \vdots \\ \theta_n/q_n \end{pmatrix}.$$

Como  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  y  $k > 0$  por hipótesis, tenemos que  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , lo que implica que  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q},k\|\mathbf{q}\|^{-2}} \cap \mathbb{R}_{\geq \mathbf{0}}^n$ .

El otro lado de la contención se muestra de manera completamente análoga. □

En el contexto del problema (2.1), sabemos que si  $\sigma$  es generado por los vectores en (4.9) entonces, por el lema anterior, todo punto entero sobre  $\sigma$  es un punto factible siempre que  $0 < k \leq \eta$ , donde recuperamos  $\eta$  del lema 2.2.7. Nos gustaría entonces garantizar la existencia de tal punto entero.

Adoptamos la siguiente estrategia: nos concentramos en un punto  $\mathbf{x} \in \sigma$  y abrimos una bola (ver definición 4.1.5) con radio dado por (4.7). Si esa bola está contenida en el símplice  $\sigma$ , entonces el teorema 4.1.6 garantiza la existencia de un punto entero sobre  $\sigma$ . Por el lema anterior, garantizaríamos



la existencia de un punto entero no negativo sobre la  $k$ -ésima capa entera.

Lo que se encuentra a continuación es un análisis para determinar qué tan grande debe ser  $k$  para asegurar que la bola de radio (4.7) esté contenida en el símple  $\sigma$ , dado que la bola está centrada en un punto particular, a saber, en el baricentro del símple.

**Definición 4.1.12.** Sea  $\sigma$  un símple generado por  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ , definimos su **baricentro**  $\hat{\sigma}$  como

$$\hat{\sigma} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i.$$

*Observación.* El baricentro  $\hat{\sigma}$  es un elemento de  $\sigma$ . Esto se debe a que  $\hat{\sigma}$  es la combinación convexa de  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ , donde  $\theta_1 = \dots = \theta_m = \frac{1}{m}$ .

**Definición 4.1.13.** Sea  $\sigma$  un símple y sea  $\hat{\sigma}$  su baricentro. Entonces definimos el **radio de la bola inscrita** en  $\sigma$  con centro  $\hat{\sigma}$  como

$$r_\sigma := \max\{r > 0: B_r^{(k)}(\hat{\sigma}) \subseteq \sigma\}, \quad (4.11)$$

donde  $B_r^{(k)}(\hat{\sigma})$  está dada en la definición 4.1.5.

Encontraremos que el radio de la bola inscrita está dado por el mínimo de las distancias entre el baricentro del símple con cada una de sus facetas. Puesto que  $\hat{\sigma}_j \in \sigma_j$ , sabemos bien por álgebra lineal, bien por optimización, que la distancia entre  $\sigma$  y su  $j$ -ésima faceta  $\sigma_j$  es

$$d(\hat{\sigma}, \sigma_j) = |\hat{\mu}_j^T(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_j)|, \quad (4.12)$$

donde  $\hat{\mu}_j$  es un vector unitario y normal a la  $j$ -ésima faceta.

**Lema 4.1.14.** Sean  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ ,  $k > 0$  y retomemos el símple  $\sigma$  generado por los vectores  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$  en (4.9). Definamos, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\mu_j := \mathbf{u}_j - \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{u}_j}{\mathbf{q}^T \mathbf{q}} \mathbf{q} = \mathbf{u}_j - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q}. \quad (4.13)$$

Entonces  $\boldsymbol{\mu}_j$  es un vector normal a la  $j$ -ésima faceta  $\sigma_j$  del símplice  $\sigma$ .

*Demostración.* Debemos mostrar que si  $\mathbf{x} \in \sigma_j$ , entonces  $\boldsymbol{\mu}_j^T \mathbf{y} = 0$  para todo  $\mathbf{y} \in \sigma_j - \mathbf{x}$ . Por la definición 4.1.10, tenemos que los vectores  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \neq j}$  generan la  $j$ -ésima faceta  $\sigma_j$ , y entonces basta mostrar que  $\boldsymbol{\mu}_j^T \mathbf{y} = 0$  para todo  $\mathbf{y} \in \sigma_j - \mathbf{u}_m$  con  $m \neq j$ .

Sea, pues,  $m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ . Tenemos de las definiciones 4.1.7 y 4.1.10, así como del lema 4.1.8 que

$$\sigma_j = \text{conv}\{\mathbf{u}_i\}_{i \neq j} \subseteq \text{aff}\{\mathbf{u}_i\}_{i \neq j} = \mathbf{u}_m + \text{gen}\{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_m\}_{i \neq j}.$$

De donde obtenemos

$$\sigma_j - \mathbf{u}_m \subseteq \text{gen}\{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_m\}_{i \neq j},$$

así que basta mostrar que  $\boldsymbol{\mu}_j^T(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_m) = 0$  para todo  $i \neq j$ . Cabe mencionar que los vectores  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$  son ortogonales entre sí (ver (4.9)). Sustituyendo con la definición de  $\boldsymbol{\mu}_j$  en la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_j^T(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_m) &= \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_m - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2}(\mathbf{q}^T \mathbf{u}_i - \mathbf{q}^T \mathbf{u}_m) \\ &= 0 - 0 - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2}(k - k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que  $\boldsymbol{\mu}_j$  es un vector normal a  $\sigma_j$ . □

Ahora que encontramos vectores normales  $\boldsymbol{\mu}_j$  para cada faceta  $\sigma_j$ , podemos simplificar un poco más (4.12). Aprovechando el hecho de que  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$  son todos ortogonales entre sí, obtenemos cálculos simples:

$$\boldsymbol{\mu}_j^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \mathbf{u}_j - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} \right)^T \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_i - \frac{k}{n \|\mathbf{q}\|^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^T \mathbf{u}_i \\
&= \frac{1}{n} \|\mathbf{u}_j\|^2 - \frac{k}{n \|\mathbf{q}\|^2} \sum_{i=1}^n k \\
&= \frac{k^2}{n q_j^2} - \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2}.
\end{aligned}$$

A través de un procedimiento similar, encontramos también que

$$\boldsymbol{\mu}_j^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j = -\frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2}, \quad (4.14)$$

y por lo tanto

$$\boldsymbol{\mu}_j^T (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) = \frac{k^2}{n q_j^2}. \quad (4.15)$$

Más adelante normalizaremos  $\boldsymbol{\mu}$  de manera que este vector sea unitario. Cabe resaltar el hecho de que el lado derecho (4.15) es positivo. Geométricamente, lo anterior implica que los vectores normales  $\boldsymbol{\mu}_j$  de cada faceta  $\sigma_j$  apuntan hacia el interior relativo del símple  $\sigma$ . Esto sugiere una caracterización alternativa de  $\sigma$  que nos permite interpretarlo como un poliedro.

**Lema 4.1.15.** *Sea  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  un vector coprimo y sea  $\sigma$  el símple generado por los vectores definidos en (4.9), con  $k > 0$ . Entonces*

$$\sigma = \bigcap_{j=1}^n \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) \geq 0\} \cap H_{\mathbf{q}, k \|\mathbf{q}\|^{-2}}, \quad (4.16)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$  es el vector  $\boldsymbol{\mu}_j$  definido en (4.13) normalizado.

*Demostración.* Denotemos por  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$  los vectores ortogonales definidos en (4.9). Como  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$  es el vector  $\boldsymbol{\mu}_j$  normalizado, se sigue que

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) \geq 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\mu}_j^T (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) \geq 0\},$$

y entonces podemos trabajar con  $\boldsymbol{\mu}_j$  sin normalizarlo.

Sea  $\mathbf{x} \in \sigma$ . Por el lema 4.1.11 sabemos que  $\mathbf{x}$  se encuentra en la  $k$ -ésima capa entera. También sabemos que existen escalares no negativos  $\theta_1, \dots, \theta_n$  que suman 1 y que satisfacen  $\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \theta_n \mathbf{u}_n$ . Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\mu}_j^T \mathbf{x} &= \left( \mathbf{u}_j - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} \right)^T \left( \theta_j \mathbf{u}_j + \sum_{i \neq j} \theta_i \mathbf{u}_i \right) \\
 &= \theta_j \|\mathbf{u}_j\|^2 - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \sum_{i \neq j} \theta_i \mathbf{q}^T \mathbf{u}_i \\
 &= \theta_j \frac{k^2}{q_j^2} - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \sum_{i \neq j} k \theta_i \\
 &= \theta_j \frac{k^2}{q_j^2} - \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2} (1 - \theta_j) \\
 &= \theta_j \left( \frac{k^2}{q_j^2} + \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2} \right) - \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2}.
 \end{aligned}$$

Retomamos de (4.14) el valor de  $\boldsymbol{\mu}_j^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j$ , así que obtenemos

$$\boldsymbol{\mu}_j^T (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) = \boldsymbol{\mu}_j^T \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j = \theta_j \left( \frac{k^2}{q_j^2} + \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2} \right),$$

lo cual es no negativo para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Mostramos la otra contención por contrapositiva, así que supongamos que  $\mathbf{x} \notin \sigma$ . Por el lema 4.1.11 se sigue o bien que  $\mathbf{x} \notin H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}}$  o bien que  $\mathbf{x} \notin \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ . En el primer caso obtenemos inmediatamente que  $\mathbf{x}$  no se encuentra en el lado derecho de (4.16).

Supongamos, pues, que  $\mathbf{x}$  está en la  $k$ -ésima capa entera pero que tiene al menos una entrada negativa con respecto a la base canónica. Como  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$  es base de  $\mathbb{R}^n$ , existen escalares  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  tales que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i.$$

Como las entradas de  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  son todas no negativas y  $x_j < 0$  para alguna  $j \in \{1, \dots, n\}$ , se sigue que  $\lambda_j < 0$ . Observemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_j^T \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{\mu}_j^T \mathbf{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \mathbf{u}_j - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} \right)^T \mathbf{u}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_i - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q}^T \mathbf{u}_i \right) \\ &= \lambda_j \|\mathbf{u}_j\|^2 - \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|} \sum_{i=1}^n \lambda_i. \end{aligned}$$

Pero  $\mathbf{x} \in H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}} = \text{aff}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  (ver Ejemplo 4.1.9) y entonces los escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  suman a 1. Sustituyendo,

$$\boldsymbol{\mu}_j^T \mathbf{x} = \lambda_j \frac{k^2}{q_j^2} - \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2},$$

retomando el valor de  $\boldsymbol{\mu}_j^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j$  en (4.14), encontramos que

$$\boldsymbol{\mu}_j^T (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) = \lambda_j \frac{k^2}{q_j^2} < 0$$

y entonces  $\mathbf{x}$  no es elemento del semi-espacio  $\{\mathbf{x} : \boldsymbol{\mu}_j^T (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) \geq 0\}$ , por lo que tampoco es elemento del lado derecho de (4.16).  $\square$

**Teorema 4.1.16.** *Sea  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  un vector coprimo y sea  $\sigma$  el símplice generado por los vectores  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$  definidos en (4.9). Entonces el radio  $r_\sigma$  de la bola inscrita (ver definición 4.1.13) en  $\sigma$  con centro  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  está dado por*

$$r_\sigma = \min_{1 \leq j \leq n} d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_j) = \min_{1 \leq j \leq n} \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j),$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$  es el vector  $\boldsymbol{\mu}_j$  definido en (4.13) normalizado.

*Demostración.* Como  $\hat{\sigma} \in \sigma$ , tenemos del lema 4.1.15 que  $\mu_j^T(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_j) \geq 0$  y, por lo tanto, deducimos de (4.12) que la distancia entre  $\hat{\sigma}$  y la  $j$ -ésima faceta  $\sigma_j$  es

$$d(\hat{\sigma}, \sigma_j) = \hat{\mu}_j^T(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_j). \quad (4.17)$$

Supongamos que  $r \leq d(\hat{\sigma}, \sigma_j)$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  y sea  $\mathbf{x} \in B_r^{(k)}(\hat{\sigma})$ . Observemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j^T(\mathbf{x} - \hat{\sigma}_j) &= \hat{\mu}_j^T(\mathbf{x} - \hat{\sigma}) + \hat{\mu}_j^T(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}_j) \\ &= \hat{\mu}_j^T(\mathbf{x} - \hat{\sigma}) + d(\hat{\sigma}, \sigma_j). \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos

$$\hat{\mu}_j^T(\mathbf{x} - \hat{\sigma}) \geq -\|\hat{\mu}_j\| \|\mathbf{x} - \hat{\sigma}\| \geq -r,$$

pues  $\hat{\mu}$  es unitario y  $\mathbf{x} \in B_r^{(k)}(\hat{\sigma})$ . Así pues, tenemos

$$\hat{\mu}_j^T(\mathbf{x} - \hat{\sigma}_j) \geq -r + d(\hat{\sigma}, \sigma_j) \geq 0,$$

pues supusimos que  $r \leq d(\hat{\sigma}, \sigma_j)$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Además, como  $\mathbf{x} \in B_r^{(k)}(\hat{\sigma})$ , por la definición 4.1.5 tenemos que  $\mathbf{x}$  se encuentra en la  $k$ -ésima capa entera. Así pues,

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{j=1}^n \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \hat{\mu}_j^T(\mathbf{x} - \hat{\sigma}_j) \geq 0\} \cap H_{\mathbf{q}, k\|\mathbf{q}\|^{-2}} = \sigma,$$

donde la última igualdad se sigue del lema 4.1.15. Así pues,  $B_r^{(k)}(\hat{\sigma}) \subseteq \sigma$  si  $r \leq d(\hat{\sigma}, \sigma_j)$  para toda  $j \in \{1, \dots, n\}$ . De la definición 4.1.13 encontramos entonces que el radio  $r_\sigma$  de la bola inscrita satisface

$$r_\sigma \geq \min_{1 \leq j \leq n} d(\hat{\sigma}, \sigma_j). \quad (4.18)$$

Ahora bien, supongamos que  $r > d(\hat{\sigma}, \sigma_j)$  para alguna  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Consideremos el punto  $\mathbf{x} \in \sigma_j$  que satisface  $d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_j) = d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{x})$ . Tal punto existe porque  $\sigma_j$  es cerrado. Luego,  $\|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\| < r$ . Entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\|(\mathbf{x} - \varepsilon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\| \leq r,$$

lo que implica que  $\mathbf{x} - \varepsilon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j \in B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ . Observemos que

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T((\mathbf{x} - \varepsilon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) = \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) - \varepsilon.$$

Pero  $\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \in \sigma_j$ , así que  $\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \in \sigma_j - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j$ . Del lema 4.1.14 encontramos que

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) = 0,$$

de donde obtenemos

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T((\mathbf{x} - \varepsilon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j) - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) = -\varepsilon < 0,$$

lo cual implica que  $\mathbf{x} - \varepsilon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j$  no se encuentra en el semi-espacio definido por  $\{\mathbf{x}: \hat{\boldsymbol{\mu}}^T(\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) \geq 0\}$ . Así pues, por el lema 4.1.15, encontramos que  $\mathbf{x} - \varepsilon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j \notin \sigma$ . Pero  $\mathbf{x} - \varepsilon \hat{\boldsymbol{\mu}}_j \in B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ . De aquí se desprende que  $B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \not\subseteq \sigma$  si  $r > d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_j)$  para alguna  $j \in \{1, \dots, n\}$ . De la definición 4.1.13 obtenemos entonces

$$r_\sigma \leq \min_{1 \leq j \leq n} d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_j). \quad (4.19)$$

De (4.18) y de (4.19) concluimos entonces con lo que queríamos demostrar.  $\square$

De (4.12) tenemos

$$d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_j) = \hat{\boldsymbol{\mu}}_j^T(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j) = \frac{\boldsymbol{\mu}_j^T(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j)}{\|\boldsymbol{\mu}_j\|}. \quad (4.20)$$

Recordemos de (4.15) que ya contamos con el numerador, así que ahora

debemos calcular la norma de  $\boldsymbol{\mu}_j$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
 \|\boldsymbol{\mu}_j\|^2 &= \boldsymbol{\mu}_j^T \boldsymbol{\mu}_j \\
 &= \left( \mathbf{u}_j - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} \right)^T \left( \mathbf{u}_j - \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} \right) \\
 &= \|\mathbf{u}_j\|^2 - 2 \frac{k}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q}^T \mathbf{u}_j + \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^4} \mathbf{q}^T \mathbf{q} \\
 &= \frac{k^2}{q_j^2} - 2 \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2} + \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2} \\
 &= \frac{k^2}{q_j^2} - \frac{k^2}{\|\mathbf{q}\|^2}.
 \end{aligned}$$

De donde obtenemos

$$\|\boldsymbol{\mu}_j\| = k \sqrt{\frac{1}{q_j^2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2}}. \quad (4.21)$$

Usando (4.15) y (4.21) para sustituir en (4.20), obtenemos

$$d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_j) = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{q_j^2 \sqrt{q_j^{-2} - \|\mathbf{q}\|^{-2}}} = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{Q_j},$$

donde definimos  $Q_j$  pertinentemente. Finalmente, del teorema 4.1.16 encontramos que el radio  $r_\sigma$  de la bola inscrita en el símplice  $\sigma$  con centro  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  está dado por

$$r_\sigma = \min_{1 \leq j \leq n} \{d(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_j)\} = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{\max_{1 \leq j \leq n} \{Q_j\}} \quad (4.22)$$

**Teorema 4.1.17.** *Sea  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  un vector coprimo y sea  $k$  un entero positivo suficientemente grande. Entonces existe un punto entero sobre el símplice  $\sigma$  generado por los vectores en (4.9).*

*Demostración.* Sea  $r$  el radio definido en (4.7) y sea  $r_\sigma$  el radio definido en (4.22). Por el teorema 4.1.6 sabemos que existe un punto entero  $\mathbf{x}$  en  $B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ , y por el teorema 4.1.16 sabemos que la bola  $B_{r_\sigma}^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$  está contenida



en  $\sigma$ . Entonces basta mostrar que existe  $k$  suficientemente grande tal que  $r \leq r_\sigma$ , pues esto implicaría la contención de  $\sigma$  en medio en la cadena

$$\mathbf{x} \in B_r^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq B_{r_\sigma}^{(k)}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq \sigma.$$

De (4.7) y de (4.22) obtenemos que  $r \leq r_\sigma$  si y solo si

$$k \geq \frac{n}{2} \|M\|_F \max_{1 \leq j \leq n} \{Q_j\}, \quad (4.23)$$

que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

De (4.23) parece que podemos concluir que hay una dependencia lineal entre la dimensión  $n$  y el parámetro de la capa entera  $k$ . No obstante, la norma  $\|M\|_F$  depende implícitamente de  $n$ . Para ser más explícitos con respecto a esta dependencia, podemos rescatar de (4.6) la siguiente cota:

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \|M\mathbf{e}_j\|^2 \leq \frac{n-1}{4} \max_{1 \leq j \leq n} \{\|M\mathbf{e}_j\|^2\},$$

de donde reemplazaríamos la cota (4.23) en el teorema 4.1.17 por

$$k \geq \frac{n\sqrt{n-1}}{2} \max_{1 \leq j \leq n} \{\|M\mathbf{e}_j\|\} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \{Q_j\}.$$

Esta cota, no obstante, es más grande que la propuesta inicialmente.

Además, el resultado que obtuvimos es más fuerte de lo que aparenta. Hemos encontrado una cota inferior de manera que podamos asegurar la existencia de puntos enteros en una vecindad del baricentro  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . Este punto no es especial, pues en realidad podemos realizar el mismo procedimiento enfocándonos en otros puntos del símplex  $\sigma$  para asegurar soluciones en sus respectivas vecindades. Entonces, dependiendo del punto, podemos obtener mejores o peores cotas para  $k$ . El punto más interesante es aquel que provee

la cota inferior más pequeña<sup>2</sup>.

De manera inmediata obtenemos también los siguientes teoremas. Cabe mencionar que estos resultados solamente muestran la existencia de una solución entera  $\mathbf{x}$  no negativa para la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$ . Será en la Sección 4.2 que discutiremos cómo encontrar esta solución.

**Teorema 4.1.18.** *Sea  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  un vector coprimo. Entonces la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$  tiene soluciones enteras no negativas para  $k$  suficientemente grande.*

*Demostración.* Consideremos el símplice  $\sigma$  generado por los vectores en (4.9) y supongamos que  $k$  satisface la cota en (4.23). Por el teorema 4.1.17 existe un punto entero no negativo  $\mathbf{x} \in \sigma$ , y esto implica que  $x \in H_{\mathbf{q}, k \|\mathbf{q}\|^{-2}}$  por el lema 4.1.11. Luego, por el lema 2.2.6,  $\mathbf{x}$  satisface la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$ .  $\square$

**Teorema 4.1.19.** *Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  un vector esencialmente entero y supongamos que su múltiplo coprimo  $\mathbf{q}$  tiene entradas estrictamente positivas. Entonces el problema (2.1) se puede resolver a través de encontrar la solución de una sola ecuación lineal en  $n$  incógnitas para un presupuesto  $u$  suficientemente grande.*

*Demostración.* Por la definición 2.2.1 sabemos que existe un escalar  $m$  tal que  $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $m$  es positivo. Del lema 2.2.7 tenemos que el entero  $\eta$  parametriza la primera capa entera en satisfacer el presupuesto y que  $\eta = \lfloor u/m \rfloor$ . Por el teorema 4.1.18 sabemos que si  $\eta$  es suficientemente grande, entonces la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = \eta$  tiene al menos una solución entera no negativa  $\mathbf{x}$ . Luego,  $\mathbf{x}$  es factible para el problema (2.1), pero por la maximalidad de  $\eta$  encontramos que

---

<sup>2</sup>Una hipótesis del autor es que el baricentro  $\hat{\sigma}$  provee, en efecto, la mejor cota.

$\mathbf{x}$  también es un punto óptimo. En conclusión, solo deviene necesario resolver una ecuación lineal diofantina para determinar la solución del problema (2.1).  $\square$

El teorema 4.1.18 junto con la cota (4.23) provee, hasta donde llega el conocimiento del autor, nuevas cotas superiores para los números de Frobenius<sup>3</sup>. De manera resumida, dada una colección de enteros  $a_1, \dots, a_n$  coprimos, el número de Frobenius es el entero  $F$  más grande tal que  $F$  no pueda ser expresado como una combinación lineal entera no negativa de  $a_1, \dots, a_n$ . Un estudio sobre cómo se compara esta colección de cotas con respecto a la literatura existente, si bien interesante, queda fuera del propósito de esta tesis.

En último lugar, mencionamos que eventualmente es suficiente con revisar la primera capa entera. No hemos demostrado, empero, que el número de capas enteras a revisar eventualmente decrece en cuanto el presupuesto  $u$  aumenta. Observaremos en el análisis de resultados que hay un patrón periódico y decreciente en cuanto al número de capas enteras revisadas. Demostrar, en cambio, que este comportamiento siempre se cumple es mucho más difícil y queda fuera del propósito de esta tesis.

## 4.2. Construcción de soluciones

Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  un vector esencialmente entero y supongamos que las entradas de su múltiplo coprimo  $\mathbf{q}$  son todas estrictamente positivas. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el escalar  $m$  que satisface  $\mathbf{p} = m\mathbf{q}$  es también positivo. Bastante hemos discutido sobre cómo la solución del problema (2.1) se traduce a la búsqueda de una solución entera no negativa de la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$  para alguna  $k \leq \eta$ , donde  $\eta$  es tomada del lema 2.2.7.

---

<sup>3</sup>Véase el Problema de la Moneda en [https://en.wikipedia.org/wiki/Coin\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Coin_problem).

En esta sección presentamos los algoritmos 3 y 4, los cuales se encargan de obtener estas soluciones enteras no negativas que tanto buscamos. Consecuentemente, estos algoritmos se encargan de resolver el problema (2.1).

**Teorema 4.2.1.** *El algoritmo 3 es correcto.*

*Demostración.* Hacemos la demostración por inducción en la dimensión  $n$  del vector  $\mathbf{q}$ . Supongamos, para el caso base, que  $n = 2$ . Luego, queremos encontrar soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$q_1x_1 + q_2x_2 = k. \quad (4.24)$$

Por hipótesis sabemos que  $q_1$  y  $q_2$  son coprimos. Luego, del teorema 2.1.8 encontramos que las soluciones enteras de esta ecuación están dadas por

$$\begin{cases} x_1 = kx'_1 + q_2t, \\ x_2 = kx'_2 - q_1t, \end{cases} \quad (4.25)$$

donde  $t \in \mathbb{Z}$  es una variable libre, y  $x'_1, x'_2$  son los coeficientes de Bézout (c.f. definición 2.1.7) de  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente. Por claridad, escribimos  $x'_1$  y  $x'_2$  como  $x'_{n-1}$  y  $x'_n$  en la línea 4. Despejando de estas soluciones, encontramos que existen soluciones no negativas si y solo si existe  $t \in \mathbb{Z}$  que satisfaga

$$\left\lceil -\frac{kx'_1}{q_2} \right\rceil \leq t \leq \left\lfloor \frac{kx'_2}{q_1} \right\rfloor.$$

Los enteros  $b_1$  y  $b_2$  en las líneas 5 y 6 representan el lado izquierdo y derecho de estas desigualdades, respectivamente. De esta manera, el algoritmo devuelve NIL si solo si este intervalo no está bien definido, es decir, si y solo si no existen soluciones enteras no negativas. Supongamos, pues, que este intervalo sí está bien definido. Entonces, podemos escoger que la variable libre  $t$  sea  $b_1$ . Sustituyendo en (4.25) obtenemos una solución entera no negativa de la ecuación (4.24) (líneas 9 y 10) y entonces el algoritmo es

correcto para  $n = 2$ .

Haciendo uso de la hipótesis inductiva, queremos mostrar que el algoritmo también es correcto para  $n \geq 3$  si lo es para  $n - 1 \geq 2$ . Entonces deseamos encontrar soluciones enteras no negativas de la ecuación (2.11) Haciendo la misma sustitución que en (2.12), recordando que  $q_1, \dots, q_n$  son coprimos por hipótesis, que definimos  $\omega_1 := k$ , y renombrando las variables ( $x$  en vez de  $x_1$ ,  $g$  en vez de  $g_2$  y  $\omega$  en vez de  $\omega_2$ ), obtenemos la ecuación

$$q_1x + g\omega = k. \quad (4.26)$$

Observemos que, como  $g_1 = 1$ , el entero  $g = \text{mcd}\{q_2/g_1, \dots, q_n/g_1\}$ , es equivalente a lo que se encuentra en la línea 12. Por definición de  $g$ , tenemos que  $q_1$  y  $g$  son coprimos (ver el lema 2.1.5), así que por el teorema 2.1.8 tenemos que las soluciones enteras de esta ecuación están dadas por

$$\begin{cases} x = kx' + gt, \\ \omega = k\omega' - q_1t, \end{cases} \quad (4.27)$$

donde  $t \in \mathbb{Z}$  es una variable libre, y  $x', \omega'$  son los coeficientes de Bézout de  $x, \omega$ . Recordemos de (2.12) que

$$\omega = \frac{q_2}{g}x_2 + \dots + \frac{q_n}{g}x_n. \quad (4.28)$$

Como  $q > \mathbf{0}$  por hipótesis,  $g > 0$  porque el máximo común divisor siempre es positivo, y exigimos que  $x_2, \dots, x_n$  sean no negativos, debe ser el caso que  $\omega$  también sea no negativo. Luego, despejando de 4.27, existen soluciones no negativas de la ecuación (4.26) si y solo si existe  $t \in \mathbb{Z}$  que satisfaga

$$\left\lceil -\frac{kx'}{g} \right\rceil \leq t \leq \left\lfloor \frac{k\omega'}{q_1} \right\rfloor. \quad (4.29)$$

Los enteros  $b_1$  y  $b_2$  en las líneas 14 y 15 representan el lado izquierdo y derecho de estas desigualdades, respectivamente. Si no existe tal variable

libre  $t \in \mathbb{Z}$  es porque el intervalo  $[b_1, b_2]$  no está bien definido y por lo tanto  $b_2 < b_1$ . El algoritmo entonces salta a la línea 27 y devuelve NIL.

Si el intervalo  $[b_1, b_2]$  está bien definido, entonces podemos asegurar la no negatividad de  $x$  y de  $\omega$  en (4.27) para cualquier elección de  $t$  en  $[b_1, b_2]$  a causa de (4.29) y en la línea 21 nos encargamos entonces de encontrar soluciones enteras no negativas de la ecuación (4.28). Se verifica automáticamente que los coeficientes del lado derecho de esta ecuación son coprimos y constituyen justamente las entradas del vector  $\mathbf{q}^{\text{tail}}$  (c.f. línea 17). Como  $g > 0$  se sigue que  $\mathbf{q}^{\text{tail}} > \mathbf{0}$ . Luego,  $\mathbf{q}^{\text{tail}}$  y  $\omega$  satisfacen las hipótesis del algoritmo.

Por hipótesis inductiva, en la línea 21 tenemos o bien que  $\mathbf{x}^{\text{tail}}$  es entero no negativo y solución de (4.28), o bien es NIL. En el primer caso y definiendo  $\mathbf{x}$  como el vector de la línea 25 encontramos que

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = q_1 x + g (\mathbf{q}^{\text{tail}})^T \mathbf{x}^{\text{tail}} = q_1 x + g\omega = k.$$

Pero  $x \geq 0$  por construcción y  $\mathbf{x}^{\text{tail}} \geq \mathbf{0}$  por este caso de la hipótesis inductiva. Así,  $\mathbf{x}$  también es no negativo.

Finalmente, en caso de que  $\mathbf{x}^{\text{tail}}$  sea NIL, iteramos sobre otra elección de la variable libre  $t$  y regresamos al caso pasado. En caso de que este vector sea NIL para todas las elecciones posibles de  $t$  en el intervalo de factibilidad  $[b_1, b_2]$ , se sigue por hipótesis inductiva que la ecuación (4.28) no tiene solución entera no negativa y por lo tanto tampoco la tiene la ecuación (2.11). Una vez agotadas estas elecciones finitas, devolvemos NIL en la línea 27.

En conclusión, si el algoritmo es correcto para vectores  $\mathbf{q}$  con dimensión  $n-1 \geq 2$ , entonces también es correcto para vectores  $\mathbf{q}$  con dimensión  $n \geq 3$ . Juntando esto con el caso base, se sigue por inducción que el algoritmo es correcto para toda  $n \geq 2$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Observemos que la elección del parámetro libre  $t$  en el intervalo de factibilidad  $I$  definido en la línea 16 del Algoritmo 3 es similar a la elección del subproblema  $S_i$  de optimización definido en la línea 6 del Algoritmo 5. La diferencia radica en que, como todos los puntos enteros sobre la  $k$ -ésima capa entera tienen el mismo nivel de utilidad  $k$ , no es necesario desarrollar políticas de poda así como lo hicimos en el Ejemplo 2.1.16 en la Sección 2.1. De cierta manera, la única política de poda posible es la de infactibilidad por no respetar la no negatividad de un punto entero.

**Teorema 4.2.2.** *El algoritmo 4 es correcto.*

*Demostración.* A causa del teorema 4.2.1 basta verificar que el algoritmo termina y no devuelve NIL. Además, obtenemos la maximalidad de  $k$  debido a la manera en la que iniciamos el ciclo en la línea 2. Tenemos  $0 \leq \eta$  por hipótesis y observemos que  $\mathbf{0}$  es la única solución entera no negativa de la ecuación lineal diofantina  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = 0$ . De esta manera, si la ecuación  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$  no tiene solución para  $0 < k \leq \eta$ , entonces el algoritmo devuelve  $\mathbf{0}$  debido al teorema 4.2.1.  $\square$

Sabemos, en realidad, por el lema 4.1.1 que el parámetro  $k$  definido en la línea 2 descenderá hasta 0 si y solo si el parámetro  $\tau$  definido en (4.2) es nulo. No obstante, la demostración del teorema 4.2.2 deviene más simple cuando en el Algoritmo 4 dejamos que  $k$  se encuentre en  $[0, \eta]$  en vez de  $[\tau, \eta]$ . Esta modificación, sin embargo, no afecta en lo más mínimo la correctud o la complejidad del algoritmo.

Siguiendo la misma directriz, vale la pena mencionar lo siguiente con respecto al Algoritmo 3. Varios lenguajes de programación, tales como Python, cuentan con un límite en las llamadas de recursión que el usuario puede realizar<sup>4</sup>. Si bien este límite puede modificarse, aumenta la posibilidad de

---

<sup>4</sup>En la computadora del autor, por ejemplo, el valor predeterminado de este límite es 3000, y por lo tanto, solamente podría el autor resolver problemas con dimensión  $n \leq 3000$ .

encontramos con un desbordamiento de pila, pues este algoritmo no está expresado en forma de recursión terminal<sup>5</sup>.

Además, este algoritmo, por ejemplo, no minimiza el número de llamadas para calcular el máximo común divisor en la línea 12. En efecto, supongamos que un intervalo de factibilidad  $I$  definido en la línea 16 induce a que  $\mathbf{x}^{\text{tail}}$  sea NIL para todo  $t \in I$ . Entonces estaríamos haciendo  $|I|$  llamadas recursivas a `NonNegativeIntSolFin` en la línea 21 con el mismo vector  $\mathbf{q}^{\text{tail}}$  y, por lo tanto, estaríamos calculando  $|I|$  veces la misma  $g$  en la línea 12. Lo mismo ocurre con el cálculo de los coeficientes de Bézout  $x'$  y  $\omega'$  en la línea 13.

A pesar de los puntos anteriores, el autor decidió escribir el Algoritmo 3 de esa manera debido a que se simplificaba de manera significativa la demostración del teorema 4.2.1. Sin embargo, el autor realizó una implementación equivalente más eficiente a través de ciclos para obtener los resultados de la siguiente sección.

### 4.3. Análisis de resultados

### 4.4. Aplicaciones

---

<sup>5</sup>Véase [https://en.wikipedia.org/wiki/Tail\\_call](https://en.wikipedia.org/wiki/Tail_call).



---

**Algoritmo 3:** NonNegativeIntSolFin

---

**Datos:** $q \in \mathbb{Z}_{>0}^n$  coprimo tal que  $\text{length}(q) \geq 2$ . $k \geq 0$ .**Resultado:** $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tal que  $q^T x = k$  o NIL.**inicio**

$n \leftarrow \text{length}(q);$	1
<b>si</b> $n = 2$ <b>entonces</b>	2
$x'_{n-1}, x'_n \leftarrow \text{Bezout}(q_1, q_2);$	3
$b_1 \leftarrow \lceil -kx'_{n-1}/q_2 \rceil;$	4
$b_2 \leftarrow \lfloor kx'_n/q_1 \rfloor;$	5
<b>si</b> $b_2 < b_1$ <b>entonces</b>	6
<b>devolver</b> NIL;	7
$x_{n-1} \leftarrow kx'_{n-1} + b_1q_2;$	8
$x_n \leftarrow kx'_n - b_1q_1;$	9
<b>devolver</b> $(x_{n-1}, x_n);$	10
$g \leftarrow \text{mcd}\{q_2, \dots, q_n\};$	11
$x', \omega' \leftarrow \text{Bezout}(q_1, g);$	12
$b_1 \leftarrow \lceil -kx'/g \rceil;$	13
$b_2 \leftarrow \lfloor k\omega'/q_1 \rfloor;$	14
$I \leftarrow \{b_1, b_1 + 1, \dots, b_2\};$	15
$q^{\text{tail}} \leftarrow (q_{i+1}/g : 1 \leq i \leq n-1);$	16
<b>mientras</b> $I \neq \emptyset$ <b>hacer</b>	17
elegir $t \in I;$	18
$\omega \leftarrow k\omega' - tq_1;$	19
$x^{\text{tail}} \leftarrow \text{NonNegativeIntSolFin}(q^{\text{tail}}, \omega);$	20
<b>si</b> $x^{\text{tail}} \neq \text{NIL}$ <b>entonces</b>	21
$r \leftarrow \text{length}(x^{\text{tail}});$	22
$x \leftarrow kx' + tg;$	23
<b>devolver</b> $(x, x_1^{\text{tail}}, \dots, x_r^{\text{tail}});$	24
$I \leftarrow I \setminus \{t\};$	25
<b>devolver</b> NIL;	26
	27

---

---

**Algoritmo 4: Dioph**


---

**Datos:** $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}_{>0}$  coprimo tal que  $\text{length}(\mathbf{q}) \geq 2$ . $\eta \geq 0$ .**Resultado:** $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  tal que  $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = k$  con  $0 \leq k \leq \eta$  maximal.**inicio**    **para**  $k \leftarrow \eta$  **a** 0 **hacer**         $\mathbf{x} \leftarrow \text{NonNegativeIntSolFin}(\mathbf{q}, k);$         **si**  $\mathbf{x} \neq \text{NIL}$  **entonces**            **devolver**  $\mathbf{x};$ 

1

2

3

4

5

---

## Capítulo A

# Algoritmo de Ramificación y Acotamiento

El Algoritmo 5 presenta una versión rudimentaria del algoritmo de ramificación y acotamiento. El rendimiento de este método depende en gran parte de la elección del subproblema (6) pues partir de su solución podemos obtener cotas que nos permitan podar subárboles lo más pronto posible. En la práctica, también debemos tomar en cuenta estrategias de selección que permitan paralelizar la solución de los problemas relajados, o que minimicen la sobrecarga computacional de “saltar” de un subproblema a otro.

Además del problema de selección de los nodos, también se encuentra el de creación de estos nodos. En la línea (15) ramificamos  $S_i$  usando una de las técnicas más básicas: elegir  $x_j^i$  fraccionario y generar  $S_{i0}$ ,  $S_{i1}$  a partir de los cortes válidos  $x_j \leq \lfloor x_j^i \rfloor$  y  $x_j \geq \lceil x_j^i \rceil$ . En realidad, existen muchas otras estrategias de corte, tales como los cortes de Gomory, cortes SOS1, cortes de pseudo costos, cortes fuertes, cortes de mochila, etcétera.

Implementaciones comerciales y de código abierto extienden el algoritmo de ramificación y acotamiento a partir de otros esquemas. Es común que estas cuenten con métodos de presolución para disminuir el tamaño del problema original o con heurísticas para generar nuevos tipos de cortes. Normalmente, en las implementaciones comerciales, las heurísticas no son

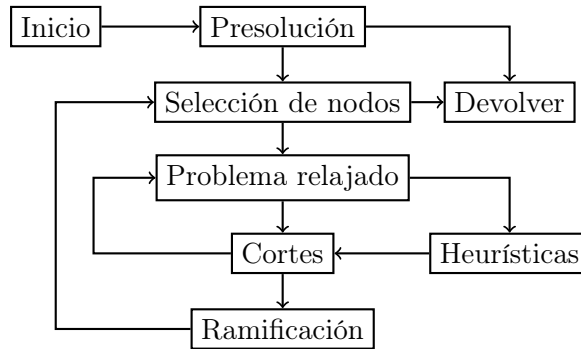


Figura A.1.: Flujo típico de algoritmos que resuelven problemas lineales mixtos. Adaptado de [Oli17].

de dominio público. Referirse a [AA95] para conocer algunas técnicas de presolución.

La Figura A.1 muestra el flujo típico de algoritmos que resuelven problemas lineales mixtos. Implementaciones comunes de código abierto son COIN-OR CBC, HiGHS y SCIP, mientras que algunas implementaciones comerciales son Gurobi Optimizer, IBM ILOG CPLEX Optimizer, y Fico Xpress Solver. Referirse a las documentaciones respectivas para obtener más información sobre el contexto en el que entra el algoritmo de ramificación y acotamiento en la resolución de problemas lineales.

---

**Algoritmo 5:** Algoritmo de Ramificación y Acotamiento. Adaptado de [Oli17].

---

**Datos:** Problema de maximización lineal  $S_0$ .

**Resultado:** Solución óptima entera  $\mathbf{x}^*$  y valor óptimo  $z_{PE}^*$ .

```

inicio                                                                 1
     $\mathcal{L} \leftarrow \{S_0\};$                                          2
     $\mathbf{x}^* \leftarrow -\infty;$                                          3
     $z_{PE}^* \leftarrow -\infty;$                                          4
    mientras  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  hacer                                   5
        elegir de  $\mathcal{L}$  subproblema  $S_i$ ;                               6
        obtener de  $S_i$  valor óptimo  $z_i^*$  y solución óptima  $\mathbf{x}^i$ ;      7
         $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \setminus \{S_i\};$                          8
        si  $S_i = \emptyset$  o  $z_i^* \leq z_{PE}^*$  entonces                 9
             $\lfloor$  ir al paso (6);                                         10
        si  $\mathbf{x}^i \in \mathbb{Z}^n$  entonces                                   11
             $\mathbf{x}^* \leftarrow \mathbf{x}^i;$                                    12
             $z_{PE}^* \leftarrow z_i^*;$                                    13
             $\lfloor$  ir al paso (6);                                         14
        elegir  $x_j^i \notin \mathbb{Z}$  y generar subproblemas  $S_{i0}$  y  $S_{i1}$  con regiones 15
            factibles  $S_i \cup \{x_j \leq \lfloor x_j^i \rfloor\}$  y  $S_i \cup \{x_j \geq \lceil x_j^i \rceil\}$ ,
            respectivamente;
             $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{S_{i1}, S_{i2}\}.$                  16
    devolver  $(\mathbf{x}^*, z_{PE}^*)$                                          17
  
```

---

## Bibliografía

- [AA95] Erling Andersen and Knud Andersen. Presolving in linear programming. *Math. Program.*, 71:221–245, 12 1995.
- [BH09] Robert F. Bodi and Katrin Herr. Symmetries in integer programs. *arXiv: Combinatorics*, 2009.
- [BV04] Stephen Boyd and Lieven Vandenbergh. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [Lav14] Carmen Gómez Laveaga. *Álgebra Superior: Curso completo*. Programa Universitario del Libro de Texto. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México, primera edición edition, 2014. Primera reimpresión: julio de 2015.
- [MT90] Silvano Martello and Paolo Toth. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc., USA, 1990.
- [NW06] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 2 edition, 2006.
- [Oli17] Fabricio Oliveira. Linear optimisation notes. <https://github.com/gamma-opt/linopt-notes>, 2017. Accessed: 2025-07-14.

- [Sch98] Alexander Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1998.