

Reporte

Iñaki Liendo

26 de abril de 2025

1. Resumen

Diseñé un método que encuentra todas las soluciones a problemas de la forma

$$\begin{aligned} \text{máx. } & c^t x, \\ \text{s.a. } & c^t x \leq s, \\ & x \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned}$$

y que corre en tiempo lineal con respecto a la magnitud del lado derecho de la desigualdad pero exponencial con respecto al número de dimensiones. Además de encontrar todas las posibles soluciones, es más rápido que *branch & bound*. A pesar de tener complejidad lineal, los experimentos que realicé sugieren que en la práctica tiene complejidad constante. Aquellos dos últimos puntos contrastan significativamente con *BEB*, pues este algoritmo encuentra solamente una solución y tiene una complejidad más que lineal con respecto a la magnitud del lado derecho de la desigualdad (habíamos dicho que era exponencial en nuestras pláticas si mal no recuerdo, pero los experimentos que hice indican otra cosa).

2. Prerrequisitos

Definición 1. *Dados los enteros a y b , diremos que a divide a b (y escribimos $a \mid b$) si existe un entero r tal que $a \cdot r = b$.*

Definición 2. *Dados dos enteros a y b distintos de cero, su máximo común divisor es el entero d que satisface*

1. $d \mid a$ y $d \mid b$ (d es un divisor común de a y b).
2. Si $d' \mid a$ y $d' \mid b$, entonces $d' \leq d$ (d es el máximo de los divisores comunes).

Escribimos $d = \gcd\{a, b\}$ para denotar que d es el máximo común divisor de a y b . Así también, si a_1, a_2, \dots, a_n son enteros distintos de cero, definimos su máximo común de manera inductiva: para $n = 2$ usamos la definición 2 y si $n > 2$ entonces

$$\gcd\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \gcd\{a_1, \gcd\{a_2, \dots, a_n\}\}.$$

Definición 3. *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Decimos que c es combinación lineal entera de a y b si existen enteros x y y tales que $c = ax + by$.*

Teorema 1. Sean $a, b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Entonces $d = \gcd\{a, b\}$ si y solo si d es la mínima combinación lineal entera positiva de a y b .

Definición 4. Sea d el máximo común divisor de los enteros a y b . Llamamos coeficientes de Bézout asociados a a y b a los enteros x, y que satisfacen $d = ax + by$.

Cabe mencionar que los coeficientes de Bézout no son únicos. Por ejemplo, 1 es el máximo común divisor de 3 y 5, de tal forma que se cumple $1 = 5(2) + 3(-3) = 5(5) + 3(-8)$. Así, $(2, -3)$ y $(5, -8)$ son dos pares de coeficientes de Bézout asociados a 3 y 5.

Definición 5. Sean $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Decimos que a y b son coprimos si $\gcd\{a, b\} = 1$.

Corolario 1. Si $d = \gcd\{a, b\}$, entonces $\gcd\{\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\} = 1$.

Definición 6. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Una pareja de enteros (x_0, y_0) es una solución de la ecuación $ax + by = c$ si se satisface $ax_0 + by_0 = c$.

Teorema 2. Sean $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. La ecuación $ax + by = c$ tiene solución en los enteros si y solo si $\gcd\{a, b\} \mid c$.

Teorema 3. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a, b \neq 0$ y sea (x_0, y_0) una solución particular de la ecuación $ax + by = c$. Entonces todas las soluciones de la ecuación están dadas por

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t, \\ y = y_0 + \frac{a}{d} \cdot t, \end{cases}$$

donde $d = \gcd\{a, b\}$ y $t \in \mathbb{Z}$.

Dada la generalización del máximo común divisor a más de dos enteros, bien es cierto que podemos aplicar inducción para generalizar también las definiciones y resultados anteriores. Decimos, por ejemplo, que un vector $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ es coprimo si $\gcd\{v_1, \dots, v_n\} = 1$. De ser este el caso, existen coeficientes de Bézout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ asociados a v que satisfacen $v_1x_1 + \dots + v_nx_n = 1$. Podemos decir, en forma más compacta, que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ es un vector de Bézout asociado a v y por lo tanto se cumple $v^T x = 1$.

Los siguientes teoremas, lemas y definiciones fueron tomadas de [BH09].

Definición 7. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector. Decimos que el hiperplano afino

$$H_{v,t} := \ker(x \mapsto v^T x) + t \cdot v$$

es una capa entera si contiene al menos un punto entero, es decir, si contiene un punto cuyas entradas son todas enteras.

Lema 1. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector distinto de cero y sea $x \in \mathbb{R}^n$ un punto. Sea $t_x := \frac{v^T x}{\|v\|_2^2}$. Entonces $x \in H_{v,t_x}$.

Definición 8. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector. Decimos que v es esencialmente entero si existe un vector $w \in \mathbb{Z}^n$ y un escalar $k \in \mathbb{R}$ tal que $v = kw$. De otra forma, decimos que v es esencialmente irracional.

Es decir, decimos que v es esencialmente entero si es un múltiplo real de un vector entero. Por las siguientes razones descartamos a los vectores esencialmente irracionales de nuestro análisis: en primer lugar, porque la motivación de este trabajo es la asignación de recursos que tienen un costo asociado, el cual es necesariamente racional; en segundo lugar, porque todo número representable

en cualquier sistema de aritmética finita es necesariamente racional. Independientemente del caso, solamente son de nuestro interés los vectores racionales, pero todo vector v en \mathbb{Q}^n es esencialmente entero.

Definición 9. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero y sea $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^n$ un múltiplo entero de v . Decimos entonces que el vector

$$\frac{1}{\gcd\{w_1, \dots, w_n\}} \cdot (w_1, \dots, w_n)$$

es un múltiplo coprimo de v .

Para asegurar unicidad, forzamos a que la primera entrada del múltiplo coprimo de v sea positivo. Por el Corolario 1 tenemos que el múltiplo coprimo de un vector esencialmente entero es, en efecto, un vector coprimo.

Teorema 4. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector esencialmente entero distinto de cero y sea w su múltiplo coprimo. Entonces la familia de capas enteras $\left\{H_{w,k||w||_2^{-2}} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ cubre a \mathbb{Z}^n .

Demostración. TODO. Reproducir demostración de [BH09] porque esto me ayuda a mostrar el lema 3. \square

Problema entero simple

Sea $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vector esencialmente entero con entradas no negativas y sea $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ un escalar. Consideremos el problema de programación entera

$$\text{máx. } p^T x, \tag{1}$$

$$\text{s. a. } p^T x \leq l, \tag{2}$$

$$x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n.$$

Lema 2. Sea $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vector esencialmente entero y sea $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ un escalar. Entonces el número de capas enteras entre 0 y l está determinado por

$$\eta := \left\lfloor l \cdot \frac{\text{lcm}\{p_1, \dots, p_n\}}{\gcd\{p_1, \dots, p_n\}} \right\rfloor. \tag{3}$$

Demostración. TODO \square

A causa del Lema 2 podemos enumerar las capas enteras que se encuentran entre el origen y la frontera de la restricción 2. Consideremos la k -ésima capa entera, donde $k \in \{0, \dots, \eta\}$. Queremos caracterizar la colección de puntos enteros que se encuentran sobre esta capa entera. Es decir, buscamos resolver la ecuación entera

$$p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = k. \tag{4}$$

Lema 3. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector y sea $t \in \mathbb{R}$ un escalar. Definamos el $H_{v,t}$ hiperplano afino como

$$H_{v,t} := \ker(x \mapsto v^T x) + t \cdot v.$$

Entonces $H_{v,t} = H_{r \cdot v, t}$ para todo escalar $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. TODO (?) □

Sea q el múltiplo coprimo de p . Debido al lema anterior, resolver la ecuación (4) es equivalente a resolver

$$q_1x_1 + \cdots + q_nx_n = k. \quad (5)$$

Definamos $g_{n-1} := \gcd\{q_1, \dots, q_{n-1}\}$. Así, obtenemos la ecuación equivalente

$$g_{n-1} \left(\frac{q_1}{g_{n-1}}x_1 + \cdots + \frac{q_{n-1}}{g_{n-1}}x_{n-1} \right) + q_nx_n = k.$$

Si dejamos que ω_{n-1} sea lo que está dentro de los paréntesis en el primer término, encontramos que podemos reducir el grado de esta ecuación si, en su lugar, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} g_{n-1}\omega_{n-1} + q_nx_n & = k, \\ \frac{q_1}{g_{n-1}}x_1 + \cdots + \frac{q_{n-1}}{g_{n-1}}x_{n-1} & = \omega_{n-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Observemos que $\gcd\{g_{n-1}, q_n\} = 1$ y también $\gcd\{q_1/g_{n-1}, \dots, q_{n-1}/g_{n-1}\} = 1$. Por el Teorema 2 se sigue que ambas ecuaciones tienen una infinidad de soluciones y, por el Teorema 3, podemos generarlas a partir de una solución particular. Como el valor de ω_n depende explícitamente de la primera ecuación, enfoquémonos en ella primero. Consideremos la ecuación auxiliar

$$g_{n-1}\omega_n + q_nx_n = 1. \quad (7)$$

Si $(\omega_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)})$ es una solución particular de esta ecuación auxiliar, entonces $(k\omega_{n-1}^{(0)}, kx_n^{(0)})$ es una solución particular de la primera ecuación de (6). Pero g_{n-1} y q_n son coprimos, por lo que sus coeficientes de Bézout asociados proveen una solución particular de esta ecuación auxiliar. Debido al Teorema 3, obtenemos una enumeración de soluciones de la primera ecuación del sistema (6):

$$\begin{cases} x_n = kx_n^{(0)} - g_{n-1}t_{n-1}, \\ \omega_{n-1} = k\omega_{n-1}^{(0)} + q_nt_{n-1}, \end{cases}$$

donde $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, como $x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0$ por la formulación del problema (1), se debe cumplir $\omega_{n-1} \geq 0$, pues las p es un vector con entradas no negativas. Así también, se debe cumplir $x_n \geq 0$. Es de esta forma que obtenemos cotas inferiores y superiores para t_{n-1} :

$$\left\lceil -k \cdot \frac{\omega_{n-1}^{(0)}}{q_n} \right\rceil \leq t_{n-1} \leq \left\lfloor k \cdot \frac{x_n^{(0)}}{g_{n-1}} \right\rfloor. \quad (8)$$

Si no existe $t_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tal que se satisfaga esta desigualdad, entonces podemos concluir que no existen puntos factibles sobre la k -ésima capa entera y, por lo tanto, podemos continuar la búsqueda de puntos factibles en la $k - 1$ -ésima capa entera.

En caso contrario, fijamos una t_{n-1} factible, de tal forma que ω_{n-1} está completamente determinada. Es de esta manera que ahora somos capaces de resolver la segunda ecuación del sistema (6). Nos encontramos en una situación completamente análoga a cuando buscábamos resolver (5). No obstante, esta ecuación es de un grado menor. Así pues, continuamos este proceso inductivamente (TODO: recursivamente?) hasta que debamos resolver la ecuación en dos variables

$$ax_1 + bx_2 = \omega_2,$$

para algunos enteros a, b coprimos. Encontramos las soluciones a partir de sus coeficientes de Bézout asociados y también del Teorema 3. Acotamos por medio de (8) y, en caso de que exista una t_2 factible, hemos logrado obtener un punto entero factible. A diferencia de t_{n-1} , si no existe t_i factible para alguna $i \in \{2, \dots, n-2\}$, no podemos concluir que la k -ésima capa entera no contiene puntos enteros factibles. Más bien, la elección del parámetro t_{i+1} en la iteración anterior fue incorrecta, por lo que debemos escoger otro t_{i+1} factible, en caso de que exista.

Finalmente, si iniciamos la búsqueda en la η -ésima (c.f. 3) capa entera y vamos descartando uno a uno las capas hasta encontrar un punto factible, se sigue inmediatamente que ese punto es también óptimo.

Observemos que si $x^{(0)} := (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ es una solución a esta ecuación auxiliar, entonces $kx^{(0)}$ es una solución particular de (5). Pero $\gcd\{q_1, \dots, q_n\} = 1$, con lo que $x^{(0)}$.

La idea del método es la siguiente. Para empezar, nos concentramos exclusivamente en vectores de utilidad $c \in \mathbb{R}^n$ proyectivamente racionales. Sea c' el múltiplo coprimo de c , entonces el número de c -layers entre 0 y la frontera de la restricción $p^t x \leq s$ está dado por $\eta := \lfloor s \cdot p'_n / p_n \rfloor$.

Ahora bien, buscamos caracterizar la colección de puntos enteros que se encuentran en el k -ésimo c -layer con $k \in \{0, 1, \dots, \eta\}$. Es decir, buscamos resolver la ecuación entera

$$p'_1 x_1 + p'_2 x_2 + \dots + p'_n x_n = k.$$

Como $\gcd(p'_1, \dots, p'_n) = 1$, se sigue que para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ existe una infinidad de soluciones enteras parametrizadas por una solución inicial $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ y $n-1$ parámetros t_1, \dots, t_{n-1} . Para obtener la solución inicial notemos que podemos resolver el sistema auxiliar

$$p'_1 x_1 + p'_2 x_2 + \dots + p'_n x_n = 1,$$

donde una solución son los coeficientes de Bézout de p'_1, \dots, p'_n . Luego, a esta solución la multiplicamos por k y de esta forma obtenemos $x^{(0)}$. Finalmente, para obtener una solución factible (no negativa) “simplemente” acotamos los parámetros. La forma en la que acoto actualmente los parámetros es recursivamente.

Consideremos el caso $n = 2$. La solución a la ecuación entera está dada por

$$\begin{cases} x_1 = kx_1^{(0)} + p'_2 t, \\ x_2 = kx_2^{(0)} - p'_1 t, \end{cases}$$

donde $x_1^{(0)}$ y $x_2^{(0)}$ son los coeficientes de Bézout de p'_1 y p'_2 . Como buscamos factibilidad, se debe cumplir

$$\frac{-k \cdot x_1^{(0)}}{p'_2} \leq t \leq \frac{k \cdot x_2^{(0)}}{p'_1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Luego, para acotar los parámetros en n dimensiones, definimos $w := p'_1 x_1 + \dots + p'_{n-1} x_{n-1}$ y resolvemos el sistema $w + p'_n x_n = k$. Con esto regresamos al caso $n = 2$ y tenemos que el parámetro $n-1$ debe satisfacer

$$\frac{-k \cdot w^{(0)}}{p'_n} \leq t_{n-1} \leq \frac{k \cdot x_n^{(0)}}{1}, \quad t_{n-1} \in \mathbb{Z}.$$

No es difícil ver que $w^{(0)} = 1$ y $x_n^{(0)} = 0$. Una vez resuelto este sistema, buscamos resolver

$$p'_1 x_1 + \dots + p'_{n-1} x_{n-1} = w = kw^{(0)} + p'_n t_{n-1}$$

para cada t_{n-1} factible y repetimos el proceso anterior hasta poder acotar t_1 . Es de esta forma que la complejidad con respecto a la dimensión d es entonces n^d . Notemos que $t_i = 0$ es factible para todo $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, así que en términos prácticos valdría la pena resolver primero $p'_1 x_1 + p'_2 x_2 = k$ y checar si existe una t_1 factible. Si este es el caso entonces obtendríamos inmediatamente una solución factible con $(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$.

Finalmente, como nos encontramos en un problema de maximización, para obtener el óptimo empezamos nuestra búsqueda en los c -layers más cercanos a la frontera. Es decir, resolvemos las ecuaciones con $k = \eta$, luego con $k = \eta - 1$, etcétera y terminamos el algoritmo una vez que encontremos una solución factible.

3. Experimentos numéricos

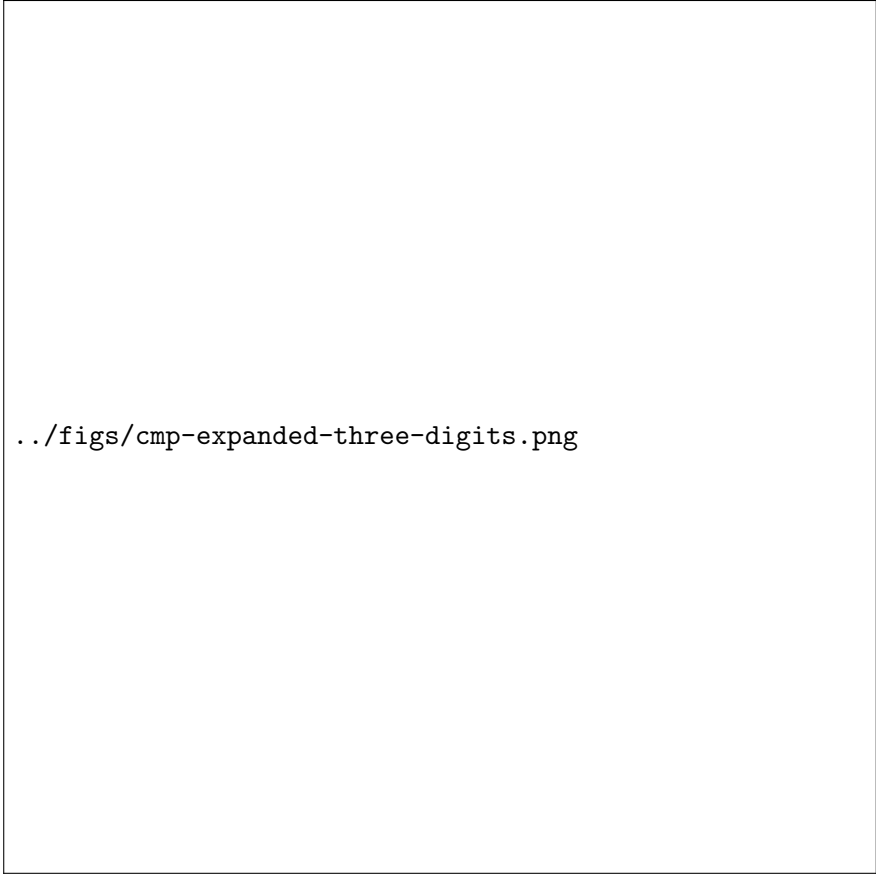
Por el momento solo he realizado experimentos cuando la dimensión n es 2. En ambas figuras 1 y 2 podemos notar que el método que diseñé (“diophantine”) es relativamente constante con respecto al *slack*, que denota la magnitud del lado derecho en la desigualdad $p^t x \leq s$.

También se cumple en ambas figuras que el algoritmo de $B\&B$ sí tiene una dependencia inherente con respecto a s : en un inicio se mantiene constante pues s es demasiado pequeña y no hay efecto real en cuanto al tiempo de convergencia; luego, el tiempo aumenta en proporción a n (cabe mencionar que las gráficas están a escala logarítmica, no sé si haya sido la mejor elección para interpretarlas) y eventualmente aumentos en s no afectan al tiempo. Esto último coincide con la presencia de múltiples soluciones enteras, lo cual parece razonable: mientras más soluciones enteras haya, más probabilidad tiene $B\&B$ de encontrarse con una y por lo tanto el tiempo de convergencia esperado es compensado por esta mayor probabilidad.

Una consecuencia sorprendente de lo expuesto es la siguiente: *Branch & Bound* es sumamente sensible al redondeo numérico. En efecto, mientras más cifras decimales tengan las entradas p_1, \dots, p_n , los puntos enteros que se encuentran sobre la k -ésima c -layer están más distanciados, por lo que el número de puntos enteros factibles se reduce drásticamente (en un orden de 10), y entonces $B\&B$ tomará significativamente más tiempo en encontrar una solución. Así pues, para compensar de nuevo el tiempo de convergencia necesitamos aumentar el *slack* s , pero esto afecta completamente el problema original.

4. Sigüientes pasos

- Implementar el algoritmo “diophantine” para más de dos dimensiones y comparar resultados con $B\&B$.
- Pensar en otras alternativas para generalizar el método a más de dos dimensiones. Encontré algo que se llama la forma normal de Smith para resolver sistemas de ecuaciones enteras (ecuaciones lineales enteras en más de dos dimensiones se pueden transformar a sistemas de ecuaciones). Investigar.
- Gráficas, gráficas gráficas: tiempos vs cifras decimales, tiempos vs dimensión, gráficas que transmitan mejor el mensaje.
- Posibles aplicaciones (?) o exponerlo como casos degenerados del simplex/b&b (?).



../figs/cmp-expanded-three-digits.png


Figura 1: Comparación de tiempos entre el método de *Branch & Bound* y el que diseñé cuando los precios tienen tres cifras decimales.

5. Notas

- Siento que este método puede generalizarse un poco más para agregar otro tipo de restricciones al problema original. Solo habría que ver cómo determinar t_i 's factibles. Esto puede verse como un problema lineal no-entero sobre t y por lo tanto puede resolverse más rápido (?).
- Si el punto anterior es cierto, entonces este método es otro acercamiento para resolver problemas simétricos (c.f. [BH09]) sin hacer uso de órbitas ni mucho menos de transitividad y por lo tanto es un poco más general.

Referencias

[BH09] R. Bödi and K. Herr. Symmetries in integer programs, 2009.



`../figs/cmp-expanded-four-digits.png`

Figura 2: Comparación de tiempos entre el método de *Branch & Bound* y el que diseñé cuando los precios tienen cuatro cifras decimales.