

北京邮电大学2022年新生赛题目报告

时间：2022年5月

形式：线上比赛

出题：北京邮电大学ACM-ICPC集训队

7-1绝境

提交通过率：

16/136 (11.76%)

比较显然的概率DP；

考虑到每次的选择范围仅由上两次选择决定；

具体地说，与上两次选择具体是谁没有关系，只取决于上两次选择的差值。

状态转移方程：

f_i ：当可选区间长度是 i ，此后数列长度的期望

$$f_i = 1 + \sum_{j=1}^i \frac{f_j}{i}$$

当然实际上这个状态转移方程式是不能转移的，因为 f_i 出现在等号两侧。

解决这个问题只需要简单的合并同类项处理即可

最终的状态转移方程：

$$f_i = \frac{i + \sum_{j=1}^{i-1} f[j]}{i-1}$$

其中 $f_1 = 0$

累和部分可以使用前缀和，除法部分可以求模意义下的逆元。

使用线性求逆元法可以做到时间复杂度 $O(n)$

当然考虑到新生往往存在模板准备不充分等问题，没有特意强求选手使用线性求逆元（事实上，比赛中，还是向选手对逆元的概念进行了解释）

选手使用欧拉定理（费马小定理）求逆元可以做到时间复杂度 $O(n \log_2 n)$

没有特意卡，也是能过的。

7-2 幸运号码

提交通过率：

10/276(3.62%)

题目有一种操作：

- 修改：把一种数码修改成另一种数码，费用是新旧数码的差距

题目有三个要求：

- 至少k个相同数位——也即出现次数最多的数码至少出现k次
- 修改的费用和
- 字典序尽量小

由于数码只有0-9，是很少的。所以可以枚举我们所希望出现次数最多的数码是谁。

假设此数码是d，那么如果d的次数不足k，则需要把其他数码改成d；

修改时发现，仅考虑费用的话，把d+i修改成d的费用和把d-i修改成d相同，而i越小越优。

但是考虑到字典序问题，所以应该优先修改d+i，把它变小会降低字典序，反之则提高字典序；

此外，把个值为d+i的位置改成d时，应该优先该位置靠前的；把个值为d-i的位置改成d时，应该优先该位置靠后的。

经过一通细致又合理的讨论，于是最终的策略应该是：

- 枚举d
 - 枚举i从小到大
 - 对相同的i，先改d+i，后改d-i
 - 修改d+i时，先修改靠前的
 - 修改d-i时，先修改靠后的
- 对于不同d对应的方案，优先比较费用，同费用比较字典序

请注意, $d_1 < d_2$ 并不一定意味着前者的字典序小于后者 (许多选手的错误往往出在这里, 当然还有别的)

7-3 迷宫

提交通过率:

0/93(0.00%)

求从(1,1)出发走到(n,m)且走了c步的情况下最多能够获得多少金币;

设为 $f_{(c,n,m)}$, 若此值大于等于K, 则说明c是合法的步数

当然c的范围应该在 $n*m$ 之内。

找出所有合法步数x中最小的那一个, 此题得解。

反之, 若枚举金币数求步数的话, 则由于金币数过大而无法求解。

状态转移方程如下:

$$f_{(c,x,y)} = f_{c-1,x+dx,y+dy} + a_{(x,y)}$$

时间复杂度为 $O(n^2 m^2)$

需要注意此问题的空间复杂度, 由于f数组不能完整的开下, 所以需要对第一维进行滚动数组。

注意到很多选手盲目地使用bfs试图通过此题, 但是他们应该计算一下bfs的状态数, 审视自己的队列空间。实际上bfs也是可以通过的, 但是需要选手及时释放队头已经没有意义的状态, 进而保证空间不超限。

7-4 约束

提交通过率:

1/47(2.13%)

从左向右依次满足给出的限制, 当一个新的限制需要多选新的数字来满足自己时, 他一定可以贪心的选靠右的数字, 因为在其左侧的限制都已经被满足好了, 所以他选择靠右的数字可以方便满足后续的限制。

在这个简单的贪心思路考虑实现的问题。

被选中的数字是一个个连续的段, 用一个栈结构来维护之。

当我们为一个新限制增选数字时，新选的数字时靠右的，可能会把一些靠右的数段之间的间隔填满，这样的话就把多个数段拼成一个完整的数段。

这就是栈顶的出栈与入栈操作。

每个限制最多会产生一个新元素入栈，每个元素只会被出栈最多一次

这个算法的复杂度为 $O(n)$

当然为了栈里记录每个数段的情况，是一个 $\text{pair}(l,r)$

7-5剪绳子

提交通过率：

79/463(17.06%)

签到题。

考虑到端点出现在分界编号 n 两侧的绳子可能的情况，设这条绳子是 (x,y) ：

- $y > n, x = y/2 \leq n, y$ 是偶数
- $x \leq n, y = 3x + 1 > n, x$ 是奇数

依照题意列举不等式，计数即可

7-6键盘故障

提交通过率：

104/152(68.42%)

签到题

输入一个字符串，把连续相邻的字符缩成一个即可

7-7硬币游戏

提交通过率：

0/11(0.00%)

把此题的限制 (a,b) 想象成一条有向边的话，那么所有的限制构成一个由多条链和多个环构成的有向图。

此图中没有分叉，或曰所有点的出入度皆小于等于1

考虑环：

若图中有环，则不会有合法方案，输出0

(a-b-c-a,此处a不能既严格大于a, 又严格小于a)

若图中仅含有链，显然这类似一个完全背包问题，但是有些链限制影响了我们自由选择

考虑一条链限制的本质，就是假如我链尾的元素选了一次，那么我整个链的元素都得跟着多选一次，

链上其他元素也是同理，以此类推。

这样的话，我们修改选择一枚硬币的意义：

选择一枚硬币，表示所有依赖他的硬币都多选一枚。

这样的话，一次选择收获的面值就变成了累加所有依赖此硬币的硬币的面值。

在此基础上进行完全背包即可

需要注意的是，由于题目中限制的含义是要求严格大于。所有当确定要选择某一条限制链上的硬币时，所有从属的硬币的选择数量都是不同的，在我们转换了含义后的选择中，则是要求所有硬币均被选择至少一次。