

---

## Problem A. 理财

定位: easy

签到题。直接输出  $n/p * q - n$  即可。

## Problem B. 棋盘

定位: easy

$n, m$  都是偶数的时候是无解的, 考虑棋盘黑白染色, 考虑一条路径一定是从黑点走到白点再走到黑点,  $n, m$  都是偶数的时候黑点和白点个数差 2, 因此无解。考虑如何构造解, 当  $n$  为奇数的时候, 从  $(1, 2)$  出发, 一直走到  $(1, n)$  然后走到  $(2, n)$ , 再反向走, 走到  $(2, 1)$  以此类推, 按照  $S$  型走, 最后一定可以走到  $(n, m - 1)$ , 如果  $n$  是偶数  $m$  是奇数, 将横纵坐标倒过来, 再按照之前构造的方法即可。

时间复杂度  $O(n \times m)$ , 可以通过本题。

## Problem C. Cover Master

定位: medium-hard

首先特判掉  $k = 1$  的情况。

考虑什么时候能让覆盖的区间个数变少, 当一个线段树上的区间的左右区间都有覆盖的时候, 我们可以把它左右延长, 让它覆盖整个区间, 这样可以减少覆盖的区间个数。

我们可以分别处理出向左和向右延长, 使得覆盖区间减少个数为  $x$ , 所需要延长的长度, 记为  $a_x, b_x$ , 之后我们枚举  $a$  序列, 用总的需要减少的个数减去  $a$  序列, 即可求出对应的  $b$  序列的位置。对答案取  $\min$  即可。

每组数据的复杂度为  $O(\log n)$ , 总复杂度为  $O(T \log n)$ 。

## Problem D. Dessert Theif

定位: medium-hard

首先先将每行每列最大值保留, 其他的格子糖果数拿到 1。

令  $MaxR[i]$  表示第  $i$  行的最大值,  $MaxC[j]$  表示第  $j$  列的最大值。则若  $a_{i,j} \neq 0$ , 且  $MaxR[i] = MaxC[j]$ , 则可以将第  $a_{i,j}$  变为  $MaxR[i]$ , 这样就可以获得  $MaxR[i] - 1$  的贡献。

因此, 若  $MaxR[i] = MaxC[j]$  且  $a_{i,j} \neq 0$ , 则可以将第  $i$  行与第  $j$  列连边, 跑一个二分图最大匹配即可求出最优答案。

时间复杂度  $O(n^3)$ , 可以通过本题。

## Problem E. 求导

定位: easy

$ax^b$  的导数为  $abx^{b-1}$ , 注意题目中多项式的正确表达方式即可。

时间复杂度为  $O(|S|)$ , 可以通过本题。

---

## Problem F. 蒸汽朋克

赛前出题人和验题人的定位: medium

实际过题情况: hard

对于本题, 大部分选手都能够想到直接 DFS 判断, 若存在一个连通块, 其中没有点被选中, 则答案为  $\infty$ 。问题在于一种特殊情况, 对于一个连通块, 若它为一个非二分图, 则有且仅有一种合法方案——所有齿轮角速度均为 0。

复杂度  $O(n + m)$ , 可以通过本题。

## Problem G. Grand Ark Bible

定位: medium-hard

一道比较经典的期望 DP。令  $P_i$  表示连续进行  $i$  次寻访且恰好在第  $i$  次获得干员的概率, 则有:

$$P_i = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & i \leq m \\ (1-p)^m (p + (i-m)q) \prod_{j=1}^{i-m-1} (1-p-jq) & i > m \end{cases}$$

同时令  $F[i]$  表示一共进行了  $i$  次寻访, 且第  $i$  次刚好获得干员, 获得干员数的期望数,  $G[i]$  表示一共进行  $i$  次寻访, 且第  $i$  次刚好获得干员的概率。则有:

$$F[n] = \sum_{i=0}^{n-1} (F[i] + G[i])P[n-i]G[n] = \sum_{i=0}^{n-1} G[i]P[n-i]$$

复杂度  $O(n^2)$ , 可以通过本题。注意要讨论  $q = 0$  以及若干次后  $p + (i-m)q > 1$  的情况。

## Problem H. 信号传输

定位: easy-medium

首先二分答案, 设二分到的值为  $x$ , 之后 dp, 设  $dp[i]$  表示到第  $i$  个城市的优质指数的最大值, 则  $dp[i] = a_i + \max_{j=0}^{i-x} (f[j])$ , 设  $g[i]$  为  $0 \sim i$  中  $dp[i]$  的最大值, 则  $dp[i] = g[j] + a[i]$ , 最后与  $W$  比较即可。

总时间复杂度  $O(n \log n)$ , 可以通过本题。

## Problem I. In Hogwarts

定位: hard

要求  $S$  串所有的后缀与询问串  $T$  的最长公共前缀之和。我们不妨先考虑如何快速求  $S$  的某个特定后缀与询问串的最长公共前缀。

注意到后缀自动机中 parent 树里两个节点 lca 表示两个节点代表字符串的最长公共后缀, 那么我们可以考虑将  $S$  串翻转后建立后缀自动机, 在建立时就标记该后缀所代表的节点, 如果我们能找到  $T$  在后缀自动机中所表示的节点即可快速求答案。其中存在一个问题, 就是如果无法找到  $T$  所对应的节点, 也就是说当发生了失配时, 其实我们需要的只是  $S$  任意一个子串与  $T$  最长的匹配前缀即可, 因此可以直接跳到 parent 树的祖先后继续匹配, 只需要在匹配的过程中记录当前匹配的长度即可。

---

如果要求所有后缀的贡献，其实就是在 parent 树中标记  $n$  个节点然后一起求 lca 的贡献。从  $T$  对应的节点开始暴力跳父亲节点即可。

势能分析一下该算法的复杂度， $T$  对应节点表示的最长字符串长度不会超过  $|T|$ ，每次跳父亲节点后长度至少减少 1，计算某个节点的复杂度是  $O(1)$  的，故询问上的复杂度为  $O(\sum |T_i|)$ 。预处理出后缀自动机是  $O(n)$  的，总复杂度为  $O(n + \sum |T_i|)$ ，可以通过本题。

该题也有使用 SA 的线性做法，此处不再赘述。带  $\log$  的算法也可以通过本题，但需要选手在实现时注意常数。

## Problem J. 罚时算术

定位: easy

判定一下首字符是否为负号，负号直接输出 0。否则字符串处理一下读入的两个数，计算即可。

如果是使用手写快读来直接读入的选手，可能需要注意特判一下 ‘-0’ 的数据，样例中也已经给出。

时间复杂度是  $O(n)$  的，可以通过本题。

## Problem K. Kate and Company Management

定位: medium-hard

首先把每个数排序，然后对每个数进行质因数分解，我们依次枚举每个质因子，把具有这个质因子的数依次连边。因为  $a_i$  的质因子个数小于  $\log a_i$ ，因此总边数是  $O(n \log C)$  级别的，其中  $C$  为  $a_i$  的值域。

之后我们可以 dp，设  $dp[i]$  表示到第  $i$  个的时候最长序列的长度，则  $dp[i] = 1 + \max_j(dp[j])$ ，其中  $i$  和  $j$  有连边，答案就是  $\max_{i=1}^n(dp[i])$ ，时间复杂度为  $O(n \log C)$ ，可以通过本题。

## Problem L. 变进制四舍五入

定位: medium-hard

这是一个构造题。我们只考虑比较特殊的操作  $f(k, 2)$ ，它的意义其实就是将当前的数  $N$  变成离  $N$  最近且为  $k$  的倍数的数，特殊情况就是有两个倍数一样近时，取较小的那个。

对于数  $N$ ，考虑如何最大限度地将其变大和变小。

如果执行操作  $f(2N - 1, 2)$ ，那么就可以将其变成  $2N - 1$ ，这样我们可以利用大约  $\log_2(y - x)$  个操作达到目标。

如果执行操作  $f(\lceil \frac{2N}{3} \rceil, 2)$ ，那么就可以将其变成  $\lceil \frac{2N}{3} \rceil$ ，这样我们可以利用大约  $\log_{1.5}(y - x)$  个操作达到目标。

因此，当值域范围  $C \leq 10^9$  时，最多仅需要 51 个操作，可以通过本题。