

TSTST 2018 Per un enter $n > 0$ definim $\mathcal{F}(n)$ com el conjunt de $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que el polinomi

$$p(x) = x^2 + mx + n$$

té alguna arrel entera.

La setmana passada vam veure que el conjunt S de n tals que $\mathcal{F}(n)$ conté 2 números consecutius és infinit i la suma dels recíprocs dels elements de S és menor que 1.

1. Demostra que hi han infinits n tals que $F(n)$ conté tres enters consecutius.

Pistes:

Solució: Notem que si $\mathcal{F}(n)$ té tres elements consecutius, aleshores pel mateix raonament de la setmana passada, tenim que existeixen d_0 , d_1 i d_2 tals que

$$m = \underbrace{\frac{n}{d_0}}_{k_0} + d_0 \quad m + 1 = \underbrace{\frac{n}{d_1}}_{k_1} + d_1 \quad m + 2 = \underbrace{\frac{n}{d_2}}_{k_2} + d_2$$

Per tant, pel que hem trobat abans:

$$n = ab(b+1)(a+1) = a'b'(b'+1)(a'+1)$$

tal que

$$2ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1) + ab = m + 2$$

$$2ab + a + b = m + 1$$

$$2a'b' + a' + b' + 1 = (a'+1)(b'+1) + a'b' = m + 1$$

$$2a'b' + a' + b' = m$$

$$2ab + a + b + 1 = m + 2$$

$$2a'b' + a' + b' = m$$

$$((a+1)(b+1) - (a'+1)(b'+1)) + ab - a'b' - 1$$

$$ab(a+1)(b+1) - a'b'(a'+1)(b'+1) = 0$$

$$2(ab - a'b') + (a - a') + (b - b') = 1$$

$$\frac{2a'b' + a' + b' + 1}{2ab + a + b} = 1$$

$$2ab + a + b = (a+1)(b+1) + ab - 1$$