

# Resum de teoria pel final de MATN

*Curs 2025-2026*

BERNAT ESTEVE

2026

---

# ÍNDIX

## 1 | Capítol 1

Definicions

- 1.1 Sèries de Dirichlet 4
- 1.2 Funcions L 4
- 1.3 Continuació meromorfa i equació funcional de  $\zeta(s)$  6
- 1.4 Productes d'Hadamard 6

## 2 | Capítol 2

Enunciat sense demostració del criteri de sumació d'Abel (Teorema 4, capítol 1)

## 3 | Capítol 3

Demostració del Teorema 8, capítol 3 (sense la part final de veure que la integral  $I(s)$  defineix una funció holomorfa ).

## 4 | Capítol 4

Demostració de la Proposició 6 del capítol 4, donat el seu enunciat i assumint la Proposició 7.

## 5 | Capítol 5

Demostració del Teorema 15 del capítol 4, donat el seu enunciat i assumint els corol·laris 10 i 14.

## 6 | Capítol 6

Demostració del Teorema 5 del capítol 5. La demostració ha d'incloure els enunciats i demostracions de Lema 2 i), Lema 3, i Proposició 4 i).

## 7

### Capítol 7

Demostració del Teorema 8 §5, donat el seu enunciat. A la demostració cal ser capaç d'enunciar el Lema 6 i) i el Lema 7 de capítol 5 amb les seves dues parts (però no cal donar les demostracions dels lemes).

## 8

### Capítol 8

Demostració de la Proposició 8 de capítol 6 assumint el Lema 9 (l'enunciat del qual cal recordar).

## 9

### Capítol 9

Demostració de Lema 5 del capítol 6 donat el seu enunciat.

## DEFINICIONS

## 1.1 Sèries de Dirichlet

**Definició 1.1 Sèrie de Dirichlet**

Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{f(n)}{n^s}$$

On  $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$  és una funció aritmètica, i  $s \in \mathbb{C}$ .

**Definició 1.2 Convergència de productoris**

Sigui  $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$  una successió de complexos, aleshores el productori  $\prod z_n$  convergeix si i només si existeix el límit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n z_n$ , i aquest és no nul.

**Definició 1.3 Convergència absoluta de productoris**

Donada una seqüència  $z_n$  amb  $\Re(z_n) > 0$ , aleshores el productori  $\prod z_n$  es diu que convergeix absolutament si  $\sum \log(z_n)$  convergeix absolutament.

## 1.2 Funcions L

**Definició 1.4 Caràcter d'un grup**

Sigui  $G$  un grup finit i abelià, aleshores un caràcter de  $G$  serà un morfisme  $\psi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$

(on  $\mathbb{C}^*$  és el grup multiplicatiu de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ )

### Definició 1.5 El grup de caràcters

Denotem per  $\widehat{G}$  al grup  $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \{\text{Caràcters de } G\}$ , on la operació és:

$$\psi, \phi: G \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{aleshores } (\psi \cdot_{\widehat{G}} \phi)(g) \mapsto \psi(g) \cdot_{\mathbb{C}^*} \phi(g)$$

I anomenarem a  $\widehat{G}$  el grup de caràcters de  $G$ .

### Definició 1.6 Caràcter mòdul $m$

Un caràcter mòdul  $m$  és un caràcter de  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ .

### Definició 1.7 Caràcter principal mòdul $m$

El caràcter principal mòdul  $m$  és  $\chi_0(a): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  definit per

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \text{gcd}(a, m) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

### Definició 1.8 Funció $L$ associada a un caràcter de Dirichlet

La funció  $L$  associada al caràcter de Dirichlet mòdul  $m$   $\chi$  és la sèrie de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

.

### Definició 1.9 Funció $m$ -èsima de Dirichlet

Sigui  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , aleshores la funció  $m$ -èsima de Dirichlet es defineix com

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

On el producte recorre tots els caràcters de Dirichlet mòdul  $m$ .

### Definició 1.10 Caràcters reals i complexos.

Diem que  $\chi: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$  és un caràcter de Dirichlet real si  $\text{Im}(\chi) \subset \mathbb{R}$ . És a dir  $\text{Im}(\chi) \subset \{-1, 0, 1\}$ . I direm que és complex altrament.

### Definició 1.11 Caràcter conjugat

Direm  $\overline{\chi}$  al caràcter de Dirichlet conjugat

$$\overline{\chi}: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{que envia } a \in \mathbb{Z} \text{ a } \overline{\chi(a)} = \overline{\chi(a)}$$

I no és massa difícil de veure que aquesta funció és un caràcter de Dirichlet del mateix mòdul.

## 1.3 Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$

### Definició 1.12 $\theta$ de Jacobi

La funció  $\theta$  de Jacobi es defineix  $\theta: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi x}$$

I definim també la funció  $\omega$  com

$$\omega(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi x} = \frac{\theta(x) - 1}{2}$$

### Definició 1.13 La funció $\Gamma$

La funció  $\Gamma$  es defineix:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x} \quad \text{per } \sigma > 0$$

### Definició 1.14 Funció de Riemann completada

Definim la funció de Riemann completada com

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

I també tenim

$$\frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \left( x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \right) \omega(x) dx + \frac{1}{2}$$

## 1.4 Productes d'Hadamard

### Definició 1.15 Ordre d'una funció

Sigui  $f(s)$  una funció entera. Es diu que  $f$  és d'ordre menor o igual que  $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  si existeix  $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que

$$f(s) = \mathcal{O}\left(e^{|s|^\alpha}\right) \quad \text{per tot } |s| \geq r_0$$

Aleshores l'ordre de  $f$  es defineix

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f \text{ és d'ordre } \leq \alpha\}.$$

# ENUNCIAT SENSE DEMOSTRACIÓ DEL CRITERI DE SUMACIÓ D'ABEL (TEOREMA 4,CAPÍTOL 1)

## 2

**Teorema 2.1 Criteri de sumació d'Abel**

Sigui  $a: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ , considerem  $A(t) := \sum_{n \leq t} a(n)$  les sumes parcials de  $a$ ; i una funció  $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  amb derivada contínua en un interval  $[x, y] \neq \emptyset^a$ . Aleshores

$$\sum_{x < n \leq y} a(n)g(n) = A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)dt$$

<sup>a</sup>Per alguna raó, al professor li ha agradat considerar l'interval  $[y, x]$ , però em nego a fer servir aquesta notació.



# DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 8, CAPÍTOL 3 (SENSE LA PART FINAL DE VEURE QUE LA INTEGRAL $I(s)$ DEFINEIX UNA FUNCIÓ HOLOMORFA ).

## 3

**Teorema 3.1 Teorema 8**

Per  $\sigma > 1$ , tenim:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \underbrace{\int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) \omega(x) dx}_{=I(s)}$$

On la funció  $I(s)$  és una funció holomorfa a tot  $\mathbb{C}$ .

1. Comencem amb  $\Gamma(s)$ , i apliquem el canvi de variable  $x = n^2 \pi x$  i ho treiem tot a fora.
2. Suposem que hi ha convergència absoluta, i fem el sumatori sobre  $n \geq 1$  dels 2 costats (en un costat apareix  $\omega$  i a l'altre apareix  $\zeta$ ).
3. Separem la integral  $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ .

4. Fem el canvi de variable  $u = \frac{1}{t}$  a la integral de la esquerra.

5. Fem servir  $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\theta(x)$  i que  $2\omega(x) + 1 = \theta$ .

# DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 6 DEL CAPÍTOL 4, DONAT EL SEU ENUNCIAT I ASSUMINT LA PROPOSICIÓ 7.

# 4

## Proposició 4.1 proposició 6

Sigui  $f$  una funció entera d'ordre  $\alpha$ . I suposem que  $f$  no té zeros. Aleshores es té que  $f = e^{g(s)}$  on  $g$  és un polinomi de grau  $\alpha$ . És a dir, que el grau d'una funció entera sense zeros ha de ser un enter.

## Proposició 4.2 proposició 7

Sigui  $U \subseteq \mathbb{C}$  simplement connex. Sigui  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa i sense zeros en  $U$ . Aleshores existeix  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f(s) = e^{g(s)}$  per tot  $s \in U$ .

Amb això, només ens fa falta veure que  $g$  ha de ser un polinomi.

1. Agafar la  $g(s)$  que ens dona la proposició.
2. Fitar la part real de  $g(s)$
3. Menjar-nos el que no fa falta en una constant.
4. Assumir que  $g(0) = 0$
5. Fer Taylor de  $g$ .

6. posar els summands de Taylor com a integrals amb el teorema de Cauchy
7. Calcular la integral de  $g(s)s^{n-1}$ , i fer el conjugat.
8. Sumar 0 a  $a_n$
9. Fer el valor absolut de tot  $a_n$ .
10. Integrar  $g(s)/s$ , i veure que la integral de la part real ha de ser 0.
11. Sumar 0 a la integral que tenim de  $|a_n|$ .

# DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 15 DEL CAPÍTOL 4, DONAT EL SEU ENUNCIAT I ASSUMINT ELS COROL·LARIS 10 I 14.

## 5

**Teorema 5.1**

La funció zeta de Riemann completada

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

satisfà:

1. Es una funció d'ordre 1.
2. Té un nombre infinit de zeros (a la franja crítica).
3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|}$  divergeix; i  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$  convergeix  $\forall \varepsilon > 0$ .

Notem que els zeros de la funció  $\xi$  són exactament els zeros (amb multiplicat) de  $\zeta$  en la franja crítica.

1. Notar que  $\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}$  té ordre 1.
2. Si ens centrem en  $\sigma > 0$  la funció gamma també té ordre 1 (i argumentar per què és suficient  $\sigma > 0$ ).

3. Escriure  $\zeta$  com  $\frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx$  en  $\sigma > \frac{1}{2}$ , i veure que això també és d'ordre 1 (de fet és aproximadament lineal per  $s \gg 1$ ).
4. Argumentar que  $\log(r!) \sim r \log(r)$ .
5. Estudiar  $\log(\xi)$  en  $s = r$  (un enter)
6. Estudiar  $r \rightarrow \infty$ .
7. Com que té ordre 1, pel corol·lari 14 sabem que si el sumatori convergeix aleshores la funció ha de ser  $\leq e^{C|s|}$ .
8. Raonar a partir d'aquí que hi ha d'haver un nombre infinit de zeros.
9. Enunciar el corol·lari 10, i acabar la demostració.

# DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 5 DEL CAPÍTOL 5. LA DEMOSTRACIÓ HA D'INCLOURE ELS ENUNCIATS I DEMOSTRACIONS DE LEMA 2 I), LEMA 3, I PROPOSICIÓ 4 I).

## 6

**Lema 6.1 lema 2**

Per  $\sigma > 1$  es té:

$$1. \Re \log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\cos(mt \log p)}{mp^{\sigma m}}$$

On en el segon apartat, la funció  $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

- Demostració.** 1. Per corol·lari 1.17 sabem que  $\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{\sigma m}}$  a tot  $\mathbb{C}$  (per continuació analítica)
2. trencar  $s$  en la seva part real i la seva part imaginària.
3. Fer  $\Re(\log(\zeta(s)))$ .

□

### Lema 6.2 Lema de Mertens

Per qualsevol  $\theta \in \mathbb{R}$ , tenim la següent desigualtat.

$$3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$$

*Demostració.* 1. Utilitzar la fórmula de l'angle dobl del cosinus.

□

### Proposició 6.1 Mertens per a la funció $\zeta$ .

Per  $\sigma > 1$ , tenim:

$$1. \quad \zeta^3(\sigma) |\zeta^4(\sigma + it)| |\zeta(\sigma + i2t)| \geq 0,$$

*Demostració.* 1. Aplicar el lema 2.

2. Aplicar el lema de Mertens.

□

### Teorema 6.1 Regió lliure de zeros I

La funció  $\zeta(s) \neq 0$  en  $\sigma = 1$  (i per la simetria de  $\zeta$ , en  $\sigma = 0$ ).

*Demostració.* 1. Suposem que  $\exists t \in \mathbb{R}$  tal que  $\zeta(1 + it) = 0$ .

2. Veure que  $t \neq 0$

3. A més  $\zeta(s) \sim \frac{1}{\sigma-1}$ .

4. agafem  $f$  tal que  $\zeta(\sigma + it) = (\sigma - 1)^m f(\sigma + it)$

5. Utilitzem la prop 6, i arribem a una contradicció

□



DEMOSTRACIÓ DEL  
TEOREMA 8 §5, DONAT EL  
SEU ENUNCIAT. A LA  
DEMOSTRACIÓ CAL SER  
CAPAÇ D'ENUNCIAR EL  
LEMA 6 I) I EL LEMA 7 DE  
CAPÍTOL 5 AMB LES  
SEVES DUES PARTS (PERÒ  
NO CAL DONAR LES  
DEMOSTRACIONS DELS  
LEMES).

7

**Lema 7.1 Lema 6**Per  $1 < \sigma \leq 2$ 

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{\sigma-1} + K \quad \text{on } K \in \mathbb{R}$$

### Lema 7.2 Lema 7

Sigui  $\rho = \beta + i\gamma$  un zero no trivial de  $\zeta(s)$  amb  $\gamma \geq 2$ . Sigui  $s = \sigma + it$  amb  $1 < \sigma \leq 2$  i  $t \geq 2$ , aleshores

1.  $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < K \log(t)$  per  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ .
2. Si a més  $t = \gamma$ , aleshores:  $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < k \log(t) - \frac{1}{\sigma-\beta}$  per  $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

### Lema 7.3 Teorema 8

Existeix  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\zeta$  no té zeros a la regió  $t \geq 2$ , i  $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(t)}$

**Demostració.** 1. Posem el que ens diu Mertens per  $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ .

2. Posem  $s(t) = \sigma + it$  amb  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t)}$  de tal manera que estigui entre  $\sigma \in (1, 2]$ .

3. Prenem  $t$  l'ordenada d'algun zero no trivial de  $\zeta$ .

4. Fitem tots els termes pel que ens diuen els lemes 6 i 7.

5. Fem que totes les  $k$  siguin iguals i simplifiquem les coses de tal manera que només quedin 3 termes.

6. Fem  $\sigma = 1 + \delta/\log(t)$ .

7. Fem àlgebra i posem tot el que sobra en una constant (que per  $\delta$  prou petita, aquesta constant serà positiva).

□

# DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 8 DE CAPÍTOL 6 ASSUMINT EL LEMA 9 (L'ENUNCIAT DEL QUAL CAL RECORDAR).

8

## Proposició 8.1 Proposició 8

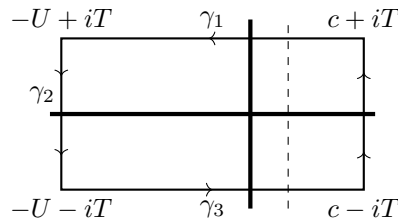
Per  $T \gg 1$ , i  $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ , i  $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ , aleshores:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \underbrace{\left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s}}_{F(s)} ds = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{x(\log T)^2}{T \log(x)} \right)$$

On la suma sobre  $\rho$  és una suma sobre els zeros no trivials de  $\zeta$ .

### *Demostració.*

Considerem el següent contorn:



On  $U$  és un senar positiu; i  $T$  no és la ordenada de cap zero de  $\zeta$ .

Recordem per l'exercici 4 del FP 8,  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  té un pol a cada pol/zero de  $\zeta$ , amb residu l'ordre del zero o pol. Per tant:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) ds = -R - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{-U+iT} F(s) ds}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{-U+iT}^{-U-iT} F(s) ds}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{-U-iT}^{c-iT} F(s) ds}_{I_3}$$

On  $R$  són els residus:

$$R = \overbrace{\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U < \beta < 1 \\ |\gamma| < T}} \text{Res}_{s=\rho} F(s)}^{R_1} + \overbrace{\text{Res}_{s=0} F(s)}^{R_2} + \overbrace{\text{Res}_{s=1} F(s)}^{R_3}$$

Notem que l'ordre dels zeros de  $R_1$  és 1 (tant dels zeros trivials, com el dels no trivials); i els altres residus són:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U < \beta < c \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{2 \leq 2m < U} \frac{x^{-2m}}{-2m} \\ R_2 &= \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \\ R_3 &= x \end{aligned}$$

Per tant, ens queda:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) ds = - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U < \beta < c \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{2 \leq 2m < U} \frac{x^{-2m}}{-2m} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - x + I_1 + I_2 + I_3$$

I ara, pel lema 9:

### Lema 8.1 Lema 9

Les integrals:

$$\begin{aligned} I_1, I_3 &= \mathcal{O}\left(\frac{x(\log T)^2}{T \log x}\right) \\ I_2 &= \mathcal{O}\left(\frac{T \log U}{U x^U}\right) \end{aligned}$$

Aleshores, prenent  $U \rightarrow \infty$ , tenim:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) ds = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{x^{-2n}}{-2n}}_{\text{Taylor de } \log(1-x^2)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \mathcal{O}\left(\frac{x(\log T)^2}{T \log x}\right)$$

Que és el que volíem veure. □

# DEMOSTRACIÓ DE LEMA 5 DEL CAPÍTOL 6 DONAT EL SEU ENUNCIAT.

# 9

## Lema 9.1 Lema 5

Sigui

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

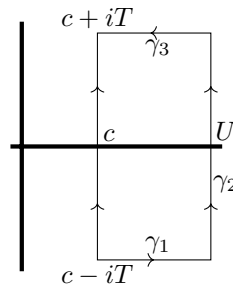
Aleshores, per  $y > 0$ ,  $c > 0$ ,  $T > 0$ :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds - \delta(y) \right| < \begin{cases} \frac{y^c}{T|\log y|} & \text{si } y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

**Demostració.** Per fer aquesta demostració distingirem 3 casos:  $y \in (0, 1)$ ,  $y = 1$  i  $y > 1$ .

**Cas 1:**  $y \in (0, 1)$ .

Considerem el següent contorn:



Aleshores, com que a dins d'aquest contorn, la funció  $y^s/s$  no té pols, podem canviar aquesta integral per les altres tres integrals:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{U-iT} \frac{y^s}{s} ds}_{=I_1(U)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{U-iT}^{U+iT} \frac{y^s}{s} ds}_{=I_2(U)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{U+iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds}_{=I_3(U)}$$

Però com que en  $\gamma_2$  la integral és fàcil de fitar:

$$|I_2| \leq \int_{\gamma_2} \left| \frac{y^s}{s} \right| ds \leq 2T \frac{y^U}{U} \xrightarrow{U \rightarrow \infty} 0$$

Només ens hem de preocupar de  $I_1 = \lim_{U \rightarrow \infty} I_1(U)$  i de  $I_3 = \lim_{U \rightarrow \infty} I_3(U)$ . I ara per fitar les altres integrals:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_c^\infty \frac{|y^{\sigma-iT}|}{|\sigma-iT|} d\sigma$$

I com que  $|\sigma-iT| > |T|$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_c^\infty \frac{|y^{\sigma-iT}|}{|\sigma-iT|} d\sigma \leq \frac{1}{2\pi} \int_c^\infty \frac{y^\sigma}{T} d\sigma = \frac{1}{2\pi T} \left[ \frac{y^\sigma}{\log y} \right]_c^\infty = \frac{y^c}{2\pi T |\log y|}$$

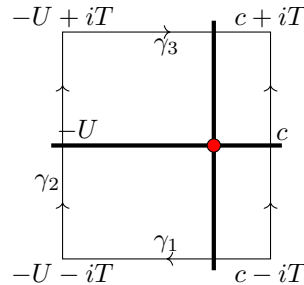
I si repetim aquest mateix càlcul amb l'altra integral ens dona:

$$|I_3| \leq \frac{y^\sigma}{2\pi T |\log y|}$$

I si ho ajuntem tot, obtenim una fita millor que la que volíem.

**Cas 2:**  $y > 1$ .

Considerem ara, aquest contorn:



Ara no podem fer el que hem fet abans: ara en aquest contorn hi ha un pol en el  $s = 0$ . Per tant, haurem de sumar el residu del pol:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \text{Res}_{s=0} \frac{y^s}{s} + I_1(-U) + I_2(-U) + I_3(-U)$$

I de la mateia manera que abans,  $I_2(-U) \xrightarrow{U \rightarrow \infty} 0$ , i les altres 2 integrals es poden fitar per:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^c \frac{y^\sigma}{T} d\sigma = \frac{1}{2\pi T} \left[ \frac{y^\sigma}{\log y} \right]_{-\infty}^c = \frac{y^c}{2\pi T |\log y|}$$

I l'altra integral es pot fitar igual.

**Cas 3:**  $y = 1$ .

Com que la funció és més senzilla, podem fer-ho d'una manera més directa:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^T \frac{i}{c+it} dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c-it}{|c+it|^2} dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c-it}{c^2+t^2} dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c}{c^2+t^2} dt - \underbrace{\frac{i}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{t}{c^2+t^2} dt}_{=0}
 \end{aligned}$$

Aquí la segona integral és zero per la paritat de la funció que estem integrant.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c}{c^2+t^2} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/c}^{T/c} \frac{1}{1+u^2} du = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{T/c} \frac{1}{1+u^2} du = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} du}_{=\frac{\pi}{2}} - \int_{T/c}^\infty \frac{1}{1+u^2} du \right) =
 \end{aligned}$$

Per tant:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{s} ds - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{T/c}^\infty \frac{1}{1+u^2} du \leq \int_{T/c}^\infty \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-1}{u} \right]_{T/c}^\infty = \frac{c}{\pi T} < \frac{c}{T}$$

Que és el que volíem veure. □