Mètodes analítics en teoria de nombres

Bernat Esteve i Luis M. Villabón

2025

ÍNDEX

CAPÍTOL

INTRODUCCIÓ 1

1.1 Primera interacció

La teoria de nombres, es podria dir que va començar al 1737, amb Euler, donant una demostració molt diferent a qualsevol que hi havia fins al moment del següent problema.

Teorema 1.1 Infinitud dels primers
Existeixen infinits nombres primers

Demostració. La demostració més coneguda és la d'Euclides, i comença suposant que la cardinalitat del conjunt dels primers $\#\mathbb{P} = n$. Per tant, podem suposar que $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Considerem ara, $N = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$. Considerem ara un primer P que divideixi a N, però com que $N \equiv 1 \pmod{p_i}$ per tots els primers, $P \notin \mathbb{P}$. I per tant, arribem a una contradicció, que és el que volíem veure. □

Ara veurem la demostració que va fer Euler al 1737.

Demostració. Suposem, un altre cop, que $\#\mathbb{P} = n$, per tant, $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Per tant, considerem el productori:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots$$

Notem que com que estem multiplicant n coses finites, aquest producte ha de ser convergent. Considerem, ara què passa si expandim el producte:

$$\prod_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tag{1.1}$$

Però aquesta última sumació no convergeix, que contradiu el que hem dit abans, i per tant, arribem a una contradicció. □

Acabem de veure que hi han infinits primers, però això no ens diu tot el que voldríem saber: volem saber com de densos són. I per això podem considerar el següent sumatori. (això ens diu si n'hi ha més o menys que quadrats perfectes, per exemple).

Corol·lari 1.1

La suma $\sum_p \frac{1}{p}$ divergeix.

Claim:

Si $x \in (0, \frac{1}{2}]$, aleshores $-\log(1-x) < x + x^2$

Demostració. Sabem que $-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$ si $|x| < 1$. Per tant, en tenim prou amb veure que $x + x^2 > x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$ al rang que ens interessa.
Notem que és suficient veure:

$$\frac{1}{2}x^2 > \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \dots = \frac{x^3}{3}(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^3}{3 - 3x}$$

Però simplificant (i suposant que la x està a $(0, \frac{1}{2}]$), obtenim:

$$\frac{3x^3(1-x)}{2} > x^3 \iff \frac{3}{2}(1-x) > x \iff \frac{3}{2} > \frac{5}{2}x \iff x < \frac{3}{5}$$

Que és el que volíem veure. □

I ara demostrem el corol·lari:

Demostració. Per veure que $\sum_p \frac{1}{p}$ divergeix, considerem les seves sumes parcials:

$$\sum_{n \le N} \frac{1}{n} < \prod_{p \le N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

On aquesta desigualtat és certa per la mateixa raó que abans.(equació 1.1). Per tant, prenent el logaritme als 2 costats, obtenim:

$$\log\left(\sum_{n \le N} \frac{1}{n}\right) < -\sum_{p \le N} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

I com que $\frac{1}{p} \le \frac{1}{2}$ per tots els primers, podem aplicar la claim d'abans:

$$\log\left(\sum_{n \le N} \frac{1}{n}\right) < -\sum_{p \le N} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) < \sum_{p} \frac{1}{p} + \sum_{p} \frac{1}{p^2}$$

Notem que, si prenem el límit, la part de dins de $\log\left(\sum_{n\leq N}\frac{1}{n}\right)$ divergeix, i per tant tot ho fa. I com que $\sum_{\mathbb{Z}_{\geq 1}}\frac{1}{n^2} > \sum_p \frac{1}{p^2}$ convergeix, per força $\sum_p \frac{1}{p}$ ha de divergir. Que és el que volíem veure. $\square$

1.2 Notacions típiques de teoria analítica de nombres

En aquesta assignatura ens interessen els límits, el creixement asimptòtic, i altres coses per l'estil, és per això que introduïm notació per tractar amb precisió aquests temes.

Definició 1.1 O-gran

Sigui $(X, \leq)^a$ un conjunt ordenat, $x_0 \in X$, $f\colon X \to \mathbb{C}$ i $g\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Escrivim $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ per $x \geq x_0$ si existeix alguna $M > 0$ tal que $|f(x)| < Mg(x)$ per $x \geq x_0$.
A vegades utilitzarem la notació equivalent de Vinogradov:
"$f(x) \ll g(x)$ per $x \geq x_0$" per dir "$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pr $x \geq x_0$".

[a] Normalment considerarem $X = \mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}_{\geq 1}$

A vegades farem un petit abús de notació i direm:

$$f(x) = g(x) + \mathcal{O}(h(x))$$

Per dir que $f(x) - g(x) = \mathcal{O}(h(x))$.

Definició 1.2 Equivalència asimptòtica

Siguin $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$. Escriurem $f(x) \sim g(x)$ per dir que el límit $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ existeix, i és igual a 1.

Definició 1.3 O-petita

Escrivim $f(x) = o(g(x))$ quan $x \to x_0$, si el següent límit existeix

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

i a més, dona 0.

Notem que ara podem ser més precisos amb el resultat que hem vist abans. Per exemple, en comtes de dir $\sum_p \frac{1}{p}$ divergeix, ara podem dir quina velocitat té. Per exemple, $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} \sim \log(\log(x))$ quan $x \to \infty$. Però això no ens diu com de gran és l'error asimptòtic. És encara més precís dir $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log(\log(x)) + A + \mathcal{O}(\frac{1}{\log(x)})$ per $x \geq 2$ quan $x \to \infty$.

Ara introduirem un dels resultats més important que veurem en aquesta assignatura, que es deu a Dirichlet, 100 anys després del resultat d'Euler.

Teorema 1.2 **Teorema de la progressió aritmètica de Dirichlet (1837)**
Sigui $A, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, tals que $\gcd(a, n) = 1$. Aleshores existeixen infinits primers p tals que $p \equiv A \pmod{n}$.

Euler, 100 anys abans, havia demostrat la infinitud dels primers estudiant la sèrie $\sum \frac{1}{n} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$; Dirichlet va estudiar les sèries $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ amb $n \in (1, \infty)$, i les de la forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{\chi(n)}{n^s}$, on $\chi(n)$ és un caràcter de Dirichlet mòdul m. I el caràcter de Dirichlet és:

Definició 1.4 **Caràcter de Dirichlet**
Un *caràcter de Dirichlet* és una funció $\chi \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ que compleix les següents propietats:

1. La funció sigui completament multiplicativa ($\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$)[a].

2. La funció tingui període m ($\chi(a + m) = \chi(a)$).

3. La funció s'anul·la en a si i només si $\gcd(a, m) \neq 1$.

[a] Una funció multiplicativa és una funció que $f(ab) = f(a)f(b)$ si $\gcd(a, b) = 1$.

Per exemple, si considerem quins caràcters hi ha per $m = 1$, com que $\gcd(1, 0) = 1$ tenim que $\chi(0) \neq 0$, i com que $\chi(1) = \chi(1 \times 1) = \chi(1)^2$ tenim que $\chi(1) = 1$. I per la segona propietat, tenim que $\chi(n) = 1$.

Si ara volguéssim veure què passa si $m = 4$: pel mateix argument que abans $\chi(1) = 1$. A més, com que $\gcd(0, 4), \gcd(2, 4) > 1$ tenim que $\chi(0) = \chi(2) = 0$. Per tant, ara només ens fa falta determinar quan val $\chi(3)$, però com que $\chi(3)^2 = \chi(9) = \chi(1) = 1$ tenim que $\chi(3) = \pm 1$. Per tant, hi han 2 caràcters mòdul 4.

Al 1859 Riemann va introduir la funció ζ de Riemann, que era molt semblant a la que havia estudiat Dirichlet, però mirant-la com una funció de meromorfa amb els zeros en una certa regió. I va traçar un pla d'atac per demostrar el teorema del nombre primer, i al 1896, de manera independent 2 matemàtics van demostrar-lo.

Teorema 1.3 **Teorema del nombre primer (1896, Hadamard, de la Vallée Poussin)**
Sigui $\pi(x) := \#\{\text{Primers } p \leq x\}$, aleshores

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

quan $x \to \infty$

CAPÍTOL

SÈRIES DE DIRICHLET 2

Com hem vist abans, si volem estudiar el teorema dels primers en les progressions aritmètiques, necessitarem estudiar més a fons les sèries que va estudiar Dirichlet.

Definició 2.1 Sèrie de Dirichlet

Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{f(n)}{n^s}$$

On $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ és una funció aritmètica, i $s \in \mathbb{C}$.

A partir d'ara, per simplificar la notació, sempre que tinguem $s \in \mathbb{C}$, utilitzarem σ per denotar la part real, i t per denotar la part imaginària.

Ara farem un petit recopilatori de resultats de sèries:

Lema 2.1 Semiplà de convergència absoluta

Existeix un $\sigma_a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tal que $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ convergeix absolutament si $\Re(s) > \sigma_a$, i no ho fa si $\Re(s) < \sigma_a$. A aquest σ_a se li dona el nom de "σ de convergència absoluta".

Demostració. Si no hi ha cap s tal que la sèrie convergeixi, aleshores $\sigma_a := +\infty$.
Si hi ha algun s tal que $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ convergeixi, considerem un s' tal que $\sigma' > \sigma$. Aleshores volem veure que $\sum \frac{f(n)}{n^{s'}}$ convergeix:

$$\left|\frac{f(n)}{n^{s'}}\right| = \frac{|f(n)|}{n^{\sigma'}} \leq \frac{|f(n)|}{n^{\sigma}} = \left|\frac{f(n)}{n^s}\right|$$

I per tant, pel teorema de comparació, tenim que $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ convergeix absolutament en un semiplà. Per tant, si considerem l'ínfim σ que funciona, tenim el que volíem demostrar. $\square$

Fins ara hem fet una mica la vista grossa pel que fa a la convergència d'un productori com el que va estudiar Euler.

Definició 2.2 **Convergència de productoris**

Sigui $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ una successió de complexos, aleshores el productori $\prod z_n$ convergeix si i només si existeix el límit $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} z_n$, i aquest és no nul.

Donat que tenim un morfisme conegut que envia el producte a la suma, podem mirar com es tradueix el que acabem de definir al món de les sèries:

Lema 2.2

Sigui $\{z_n\}_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} \subset \mathbb{C}$ on $\Re(z_n) > 0$[a]. Aleshores, $\prod z_n$ convergeix si i només si $\sum \log(z_n)$ convergeix.

[a] Notem que el fet que el productori convergeixi implica que hi ha una quantitat finita lluny de 1, i per tant, no és restrictiu suposar que tots són positius.

Demostració. $\prod z_n$ convergeix $\iff$ $\log\left(\prod z_n\right)$ convergeix $\iff$ $\sum \log(z_n)$ convergeix; que és el que volíem veure. $\square$

Ara, amb aquest lema, passarem la noció de convergència absoluta de sumatoris a convergència absoluta de productoris:

Definició 2.3 **Convergència absoluta de productoris**

Donada una seqüència z_n amb $\Re(z_n) > 0$, aleshores el productori $\prod z_r$ es diu que convergeix absolutament si $\sum \log(z_r)$ convergeix absolutament.

I és immediat veure que la convergència absoluta implica la convergència ordinària.

Ara donarem una altre lema que ens anirà ajudant al llarg del curs, ja que ens servirà per intercanviar productoris per sumatoris, que els tenim molt més controlats. I notem de fet, que la hipòtesis que $\Re(z_n) > -1$ no és gens restrictiva, ja que és una condició necessària per la convergència.

Lema 2.3

Si prenem $\{u_n\}_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} \subset \mathbb{C}$, amb $\Re(z_n) > -1$, aleshores:

$$\sum_{n\geq 1} \log(1+u_n) \text{ convergeix absolutament} \iff \sum u_n \text{ convergeix absolutament}$$

Claim:

Si $|u| < \frac{1}{2}$, aleshores $\frac{1}{2}|u| \leq |\log(1+u)| \leq \frac{3}{2}|u|$

Demostració. Notem que en aquest entorn, $\log(1+u) = u + \frac{1}{2}u^2 + \dots$. Primer demostrarem la primera desigualtat:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|u| \leq& |\log(1+u)| = \left|u + \frac{1}{2}u^2 + \dots\right| \Longleftarrow \\
\frac{1}{2}|u| \leq& |u| - \left|\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \dots\right| \Longleftrightarrow \\
\frac{1}{2}|u| \geq& \left|\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \dots\right| \Longleftarrow \\
\frac{1}{2}|u| \geq& \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}|u|^3 + \cdots \Longleftarrow \\
\frac{|u|}{1-|u|} \leq& 1 \iff |u| \leq 1 - |u| \iff |u| \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Pel que fa a la segona desigualtat, notem que:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}|u| \geq& |\log(1+u)| = \left|u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \dots\right| \Longleftarrow \\
\frac{3}{2}|u| \geq& |u| + \frac{1}{2}|u|^2 + \cdots \Longleftarrow \\
\frac{1}{2}|u| \geq& \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}|u|^3 + \cdots \iff \\
1 \geq& \frac{|u|}{1-|u|} \iff \\
1 - |u| \geq& |u| \iff 1 \geq 2|u| \iff \frac{1}{2} \geq |u|
\end{aligned}$$

Que és el que volíem veure. $\square$

Per tant, per demostrar el lemma:

Demostració. Notem que si $\sum_{n\geq 1} \log(1+u_n)$ convergeix absolutament, aleshores $u_n \to 0$, per tant, només hi ha una quantitat petita amb valor absolut major que $\frac{1}{2}$, per tant, pel criteri de comparació pel pas al límit tenim:

$$|\log(1+u_n)| \geq \frac{1}{2}|u_n|$$

Per tant, la sèrie dels logaritmes convergeix absolutament, també ho fa la sèrie de les u_n. I per un argument idèntic, utilitzant l'altra desigualtat, obtenim l'altra implicació. $\square$

Ara que tenim una eina per transformar productoris a sumatoris, ens podem preguntar si hi ha alguna manera de transformar els sumatoris en productoris sobre els primers (un producte d'Euler), que si més no, serà un dels objectes.

Proposició 2.1 Sèries de Dirichlet de funcions multiplicatives

Sigui $g\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ multiplicativa ($g(ab) = g(a)g(b)$ si a i b són coprimers). Suposem també que $\sum_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} g(n)$ és absolutament convergent, aleshores:

1. $\prod_p 1 + g(p) + g(p^2) + \dots$ és absolutament convergent, i $\prod_p 1 + g(p) + g(p^2) + \dots = \sum_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} g(n)$.

2. Si a més, g és completament multiplicativa ($g(ab) = g(a)g(b)$ per tot a i b), aleshores podem simplificar el productori, i tenim: $\prod_p \frac{1}{1-g(p)} = \sum_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} g(n)$

Demostració. Primer mirem que aquest productori convergeix a la sèrie.
Notem que per $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, definim $P(N) = \prod_{p \leq N} 1 + g(p) + g(p^2) + \dots = \sum_{n \in A(N)} g(n)$ on $A(N) \coloneqq \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que tots els divisors primers p de n són $p \leq N\}$. Considerem

$$\left|\sum_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} g(n) - P(N)\right| = \left|\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ n \text{ té algun} \\ \text{divisor primer} \geq N}} g(n)\right| \leq \left|\sum_{n \geq N} g(n)\right| \leq \sum_{n \geq N} |g(n)| \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

On al final hem utilitzat que la sèrie $\sum_{\mathbb{Z}_{\geq 1}} g(n)$ convergeix.

Per parlar de convergència absoluta, utilitzarem finalment el lema d'abans, per tant, prenem $u_n = g(p) + g(p^2) + \dots$:

$$\sum_{p \leq N} |g(p) + g(p^2) + \dots| \leq \sum_{p \leq N} |g(p)| + |g(p^2)| + \dots \leq \sum_{n \geq 1} |g(n)|$$

Aquest últim pas és degut a que passem de sumar només sobre les potències dels primers a sobre tots els enters, però això sabem per hipòtesis que convergeix, per tant, tot convergeix de manera absoluta.

Per veure la segona part de la proposició, només hem de veure que $g(p^k) = g(p)^k$, i per tant, tenim una sèrie geomètrica.

Una última observació abans de donar per demostrada la proposició, pel lema necessitem que $\Re(u_n) > -1$, però com que la sèrie dels $g(n)$ convergeix, tot se n'ha d'anar a 0. $\square$

Ara utilitzarem aquesta proposició més general pel cas particular de les funcions de Dirichlet:

Corol·lari 2.1

Considerem $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$, amb σ de convergència σ_a.
Si f és multiplicativa, i $\sigma > \sigma_a$, tenim un producte d'Euler de la següent forma:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots$$

I si a més, f és completament multiplicativa, aleshores podem simplificar les coses encara més:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{f(n)}{n^s}}$$

Demostració. Si f és multiplicativa (o completament multiplicativa), aleshores podem aplicar la proposició 2, i ens dona el que volem. $\square$

Exemple. Per $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ té com a $\sigma_a = 1$, i per tant, per tot s amb part real major que 1, podem expressar $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$.

Ara donarem un mètode per calcular sumatoris:

Teorema 2.1 Criteri de sumació d'Abel

Sigui $a\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$, considerem $A(t) \coloneqq \sum_{n\leq t} a(n)$ les sumes parcials de a; i una funció $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ amb derivada contínua en un interval $[x,y] \neq \varnothing$[a]. Aleshores

$$\sum_{x<n\leq y} a(n)g(n) = A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

[a]Per alguna raó, al professor li ha agradat considerar l'interval $[y,x]$, però em nego a fer servir aquesta notació.

Demostració.

$$\sum_{x<n\leq y} a(n)g(n) = \sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{\lfloor y\rfloor} (A(n)-(A(n-1)))g(n) = \sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{\lfloor y\rfloor} A(n)g(n) - \sum_{n=\lfloor x\rfloor}^{\lfloor y\rfloor-1} A(n)g(n+1) =$$

I ara si ho tornem a agrupar tot:

$$= A(\lfloor y\rfloor)g(\lfloor y\rfloor) - A(\lfloor x\rfloor)g(\lfloor x\rfloor+1) + \sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{\lfloor y\rfloor-1} A(n)(g(n)-g(n+1))$$

I si ara substituïm $g(n)-g(n+1) = -\int_n^{n+1} g'(t)\mathrm{d}t$:

$$= A(\lfloor y\rfloor)g(\lfloor y\rfloor) - A(\lfloor x\rfloor)g(\lfloor x\rfloor+1) - \sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{\lfloor y\rfloor-1} A(n)\int_n^{n+1} g'(t)\mathrm{d}t$$

I com que en cada interval $A(n)$ és constant, podem entrar-ho dins de la integral:

$$= A(\lfloor y\rfloor)g(\lfloor y\rfloor) - A(\lfloor x\rfloor)g(\lfloor x\rfloor+1) - \sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{\lfloor y\rfloor-1} \int_n^{n+1} A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

I això ho podem posar tot en un sol tros:

$$= A(\lfloor y\rfloor)g(\lfloor y\rfloor) - A(\lfloor x\rfloor)g(\lfloor x\rfloor+1) - \int_{\lfloor x\rfloor+1}^{\lfloor y\rfloor} A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Per simplificar aquest desastre, notem que A és constant en $[x, \lfloor x\rfloor+1]$ i en $[\lfloor y\rfloor+1, y]$, per tant

$$= A(\lfloor y\rfloor)g(\lfloor y\rfloor) - A(\lfloor x\rfloor)g(\lfloor x\rfloor+1) - \int_x^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t + \int_x^{\lfloor x\rfloor+1} A(t)g'(t)\mathrm{d}t + \int_{\lfloor y\rfloor}^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

$$= A(\lfloor y\rfloor)g(\lfloor y\rfloor) - A(\lfloor x\rfloor)g(\lfloor x\rfloor+1) - \int_x^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t + A(\lfloor x\rfloor)\int_x^{\lfloor x\rfloor+1} g'(t)\mathrm{d}t + A(\lfloor y\rfloor)\int_{\lfloor y\rfloor}^y g'(t)\mathrm{d}t$$

I ara aquestes integrals sí que les sabem fer:

$$= A(\lfloor y\rfloor)g(\lfloor y\rfloor) - A(\lfloor x\rfloor)g(\lfloor x\rfloor+1) + A(\lfloor x\rfloor)(g(\lfloor x\rfloor+1) - g(x)) + A(\lfloor y\rfloor)(g(y) - g(\lfloor y\rfloor)) - \int_x^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

I ara movem una mica els dits (recordem que $A(x) = A(\lfloor x\rfloor)$, i que $A(y) = A(\lfloor y\rfloor)$), i diem avada kedabra i tot el que no volem mor:

$$= A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Que és el que volíem veure. □

Una mica d'intuïció darrere d'aquest teorema, és que quan tens una sèrie que té moltes cancel·lacions, i que per tant, les $A(n)$ no creix massa; aleshores multiplicar per una funció g no canvia tant això com poder seria d'esperar, ja que tot es pot posar en termes de les A.

Lema 2.4 Fita tècnica

Suposem que $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^{s_0}}$ té sumes parcials fitades en $s_0 \in \mathbb{C}$, és a dir: existeix una fita $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\left|\sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n_0^s}\right| \leq M$ per $x \geq 1$, aleshores per $s \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma > \sigma_0$ tenim:

$$\left|\sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma}\left(1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\right)$$

Demostració. Per aplicar el teorema de sumació d'Abel hem d'agafar la a i la g, i donat que tenim controlades les sumes parcials de $\frac{f(n)}{n^s}$ és raonable prendre-la com a $a(n) = \frac{f(n)}{n^S}$, i deixar que $g(t) = t^{s_0-s}$. I això ens deixa:

$$\left|\sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^{s_0}}\right| = \left|A(b)g(b) - A(a)g(a) - \int_a^b A(t)g'(t)\mathrm{d}t\right| \leq$$

$$\leq |A(b)||g(b)| + |A(a)||g(a)| + \int_a^b M\left|\left(t^{s_0-s-1}\right)(s_0-s)\right|\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq Mb^{s_0-s} + Ma^{s_0-s} + M|s_0-s|\int_a^b \left|t^{s_0-s-1}\right|\mathrm{d}t$$

Ara hi ha 2 observacions que podem fer per tenir una fita més polida. La primera és que per hipòtesis $\sigma > \sigma_0$ i per tant, $|\sigma_0 - \sigma| = \sigma - \sigma_0$ i com que $b > a$, tenim que $b^{s_0-s} < a^{s_0-s}$. I una altra observació que es pot fer és que $\left|t^{s_0-s-1}\right| = t^{\sigma_0-\sigma-1}$. Introduint tots aquests canvis a l'expressió ens queda:

$$2Ma^{s_0-s} + M|s-s_0|\left(\frac{a^{\sigma_0-\sigma} - b^{\sigma_0-\sigma}}{\sigma-\sigma_0}\right) \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma} + M|s-s_0|\frac{2a^{\sigma_0-\sigma}}{\sigma-\sigma_0} = 2Ma^{\sigma_0-\sigma}\left(1 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\right)$$

□

Fins ara ens hem interessat sobre tot per la convergència absoluta (per exemple amb el lema 2). Ara veurem la relació que hi ha entre això i la convergència normal i corrent:

Lema 2.5 Semiplà de convergència

Donada una sèrie de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$, aleshores aquesta convergeix si i només si $\sigma > \sigma_c$ per alguna $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. De la mateixa manera que abans, aquesta σ_c rep un nom: es diu σ de convergència.

Demostració. La demostració és molt similar a la del lema 2. Si no hi ha cap tal s_0 convergent, aleshores $\sigma_c := +\infty$. Sinó, sigui s_0 un complex que faci convergir la sèrie. Considerem ara un s tal que $\sigma > \sigma_0$. Anomenem M una fita de les sumes parcials de $\sum \frac{f(n)}{n^s}$. Aleshores:

$$\left| \sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma}\left(1+\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\right) \leq Ka^{\sigma_0-\sigma} \xrightarrow{a\to\infty} 0$$

Que és el que volíem veure. $\square$

I ara poder ve la pregunta natural de quina diferència hi ha entre σ_a i σ_c. Podria ser que un fos finit i l'altre no? Podria ser que fossin sempre el mateix (com és el cas amb la convergència d'una sèrie de potències en els complexos)? Doncs resulta que de fet, els dos valors sempre estan molt a prop:

Proposició 2.2 Distància entre σ_c i σ_a

Suposem que tenim una sèrie de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ amb σ_c finit, aleshores la $0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1$.

Demostració. Suposem que $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ és convergent per un s_0. Volem veure que és convergent absolutament per s_1 si $\sigma_1 > \sigma_0 + 1$. Però que s_0 sigui convergent ens diu que existeix una fita $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \leq A \; \forall n \geq 1$. Aleshores:

$$\left|\frac{f(n)}{n^{s_1}}\right| = \left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right| \left|n^{s_0-s_1}\right| \leq An^{s_0-s_1}$$

Per tant, com que $s_1 - s_0 > 1$, tenim que $\sum_{n\geq 1} n^{s_0-s_1}$ convergeix. I per tant pel criteri de comparació, tenim que la sèrie convergeix per s_1. Que és el que volíem veure. $\square$

Ara volem veure que tota sèrie de Dirichlet és una funció analítica (de fet meromòrfica). I per això veurem el següent teorema, que ens ajudarà a controlar les sèries de Dirichlet.

Teorema 2.2 Límit d'una successió de funcions holomorfes és holomorfa.

Sigui $\mathcal{U} \in \mathbb{C}$ un obert i sigui $\{f_n\}_n$ una successió de funcions holomorfes $f_n \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, que convergeixen sobre tot compacte K de $\mathcal{U}$ cap a una funció f. Aleshores:

1. f és holomorfa.

2. $\{f'_n\}_n$ convergeix uniformement sobre tots els compactes cap a f'.

Demostració. Sigui D un disc contingut en $\mathcal{U}$. Sigui $z_0 \in D^o$.

Com que f_n és holomorfa, pel teorema de Cauchy:

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

I per tant, aplicant el límit tenim

$$f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

Però com que f_n convergeix uniformement, podem entrar el límit dins de la integral:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

Però ara pel teorema de Morera (que bàsicament diu el revers del teorema de Cauchy) ens diu que f és holomorfa.

Per veure la segona part del teorema, utilitzarem un argument idèntic però amb:

$$f_(z_0)^{(j)} = \frac{j!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{j+1}} \mathrm{d}z$$

□

I ara com que totes les sumes parcials són funcions analítiques, seria molt bonic que ara aquestes funcions convergissin de manera uniforme sobre tots els compactes: així podríem aplicar aquest teorema i veuríem que les sèries de Dirichlet són analítiques. Que és justament el que farem:

Proposició 2.3 Les sèries de Dirichlet convergeixen de manera uniforme sobre tot compacte

Una sèrie de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ convergeix uniformement sobre tot compacte a l'interior del semiplà de convergència.

Demostració. Tot compacte de $\mathbb{C}$ està contingut en un rectangle (com que està acotat podem posar-lo dins d'una bola, i aquesta pot anar a dins d'un rectangle). Per tant, si veiem que l'enunciat és cert sobre rectangles, ja estarem.

Considerem un rectangle $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ amb $\alpha > \sigma_c$. Sigui ara $s \in R$ i considerem $s_0 = \sigma_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma_c < \sigma_0 < \alpha \leq \sigma = \Re(s)$. Definim M com una fita de les sumes parcials de $|\sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n^{s_0}}|$. Volem fitar $|\sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s}|$ per una cosa que no depengui de s. Aplicant el 2:

$$\left| \sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq 2Ma^{\sigma_0 - \sigma} \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0} \right)$$

Però notem que $\sigma - \sigma_0$ i $|s - s_0|$ estan fitats dins del rectangle, siguin A i B les seves fites. Aleshores podem introduir-ho a la nostra fita, i deixar-ho independent de s:

$$\left| \sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq 2Ma^B \left(1 + \frac{A}{B}\right)$$

Si anomenem $C = 2M(1 + \frac{A}{B})$, i observem que $B < 0$, aleshores;

$$\left| \sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq Ca^B \xrightarrow{a\to\infty} 0$$

Que és el que volíem veure. □

I ara demostrarem el que volíem: que tota sèrie de Dirichlet és una funció holomorfa en tot un semiplà.

Corol·lari 2.2 Les sèries de Dirichlet són funcions holomorfes

Considerem la sèrie de Dirichlet $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$, aleshores F és una funció holomorfa per tot $\sigma > \sigma_c$.
I a més, $F'(s) = -\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)\log(n)}{n^s}$ per $\sigma > \sigma_c$.

Demostració. Considerem $F_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^S}$, aleshores per la proposició 2, $F_N \rightrightarrows F$ sobre tot compacte K del semiplà de convergència. A més, com que F_N són sumes finites de funcions holomorfes, són funcions holomorfes. Per tant pel teorema 2 F és una funció holomorfa, i té per derivada $F'(s) = -\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)\log(n)}{n^s}$. Que és el que volíem veure. □

Ara acabem de veure que, igual que les sèries de potències, les sèries de Dirichlet són funcions holomorfes; i ara veurem una altra semblança:

Proposició 2.4 Teorema d'unicitat

Siguin $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ i $G(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}$ sèries de Dirichlet. Sigui $\sigma_0 = \max\{\sigma_a^F, \sigma_a^G\}$ i suposem que existeix una successió $(s_k)_{k\geq 1}$ al semiplà $\sigma > \sigma_0$ tals que $F(s_k) = G(s_k)$ i $\lim_{k\to\infty} \sigma = \infty$, llavors:

$$f(n) = g(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

Demostració. Notem que en tenim prou amb veure que $H(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{h(n)}{n^s}$ amb $H(s_k) = 0$, aleshores això implica que $h(n) = 0$ per tot n.(aquí la idea és considerar $H = F - G$).
Per tant, suposem que hi ha algun $N \geq 1$ tal que $h(N) \neq 0$, i sense pèrdua de generalitat podem assumir que tal N és mínim. Aleshores:

$$H(s) = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n\geq N+1} \frac{h(n)}{n^s}$$

I movent una mica les coses:

$$h(N) = \left(H(s) - \sum_{n \geq N+1} \frac{h(n)}{n^s} \right) N^s$$

I si avaluem en s_k:

$$h(N) = \left(\cancelto{0}{H(s_k)} - \sum_{n \geq N+1} \frac{h(n)}{n^s} \right) N^s = -N^s \sum_{n \geq N+1} \frac{h(n)}{n^s}$$

Notem que com que $\lim_k \sigma \to \infty$, aleshores $\min_k \sigma_k$ està ben definit i és estrictament més gran que σ_0 i per tant prenem $c \in (\sigma_0, \min_k \sigma_k)$.
Ara, el nostre objectiu és veure que $h(N) = 0$, i per veure-ho fitarem superiorment aquest terme:

$$|h(N)| \leq N^{\sigma_k} \sum_{k \geq N+1} \frac{|h(n)|}{n^{\sigma_k}} = N^{\sigma_k} \sum_{k \geq N+1} \frac{|h(n)|}{n^c n^{s_k - c}} \leq \frac{N^{\sigma_k}}{(N+1)^{\sigma_k}} \frac{1}{(N+1)^{-c}} \sum_{n \geq N+1} \frac{|h(n)|}{n^c}$$

Notem que $\frac{1}{(N+1)^{-c}} \sum_{n \geq N+1} \frac{|h(n)|}{n^c}$ convergeix independentment de k, per tant, podem substituir-ho per C:

$$|h(N)| \leq \left(\frac{N}{N+1} \right)^{s_k} C \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Per tant, pel lema del sandvitx tenim que $h(N) = 0$, però això contradiu les hipòtesis que teníem. $\square$

I d'aquí en podem treure un corol·lari immediat:

Corol·lari 2.3

Sigui $F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ i suposem que existeix algun s_0 amb $\sigma_0 > \sigma_a$ tal que $F(s_0) \neq 0$, aleshores el conjunt de zeros és finit, i per tant, hi ha algun semiplà en que la funció no s'anul·la.

Demostració. Notem que si hi haguessin infinits s_k tals que $F(s_k) = 0$, aleshores pel teorema d'unicitat: $f(n) = 0$, però això contradiu el fet que $F(s_0) = 0$. $\square$

I continuant amb la motivació d'abans: les semblances entre les sèries de potències i les de Dirichlet són encara més estretes del que semblen. Per exemple, de la mateixa manera en que el radi de convergència d'una sèrie de potències és la distància a la singularitat més propera, també hi ha una cosa similar amb sèries de Dirichlet amb coeficients positius:

Teorema 2.3 Landau

Sigui $F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^S}$ una sèrie de Dirichlet que convergeix per $\sigma > c \in \mathbb{R}$. Si a més, tenim:

1. Que $f(n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per tota $n \geq n_0$,

2. i suposem que $F(s)$ estén a una funció holomorfa en un disc al voltant de c.

Aleshores, $F(s)$ convergeix per $\sigma > c - \varepsilon$ per alguna $\varepsilon > 0$.

I abans d'anar a la demostració del teorema, considerem què passa si F estén de manera meromorfa (però no holomorfa) en s_0:

Corol·lari 2.4 Extensions meromorfes

Suposem que $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$, i suposem que $f(n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per tot $n > n_0$, i f admet continuació meromorfa en un disc al voltant de $s = \sigma_c$, aleshores $F(s)$ té un pol en $s = \sigma_c$.

Demostració. Per demostrar aquest corol·lari notem que si F estén en un disc a una funció meromorfa però σ_c no és un pol, aleshores podem reduir la mida del disc fins a que no li quedin pols i pel teorema 2 tenim que estén una mica cap a l'esquerra, i per tant la sèrie convergeix en algun $\sigma < \sigma_c$ però això és una contradicció. Per tant tenim que F ha de tenir un pol en σ_c. $\square$

I ara, entenent la motivació, del teorema:

Demostració. Notem que si considerem F com una sèrie de potències al voltant de $c+1$, és fàcil veure que tenim $R > 1$ (si mirem a la figura 2.1, el que diem és que al cercle verd centrat a $c+1$, la funció és holomorfa).

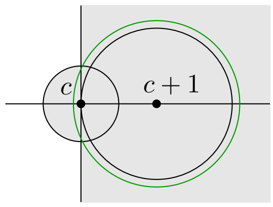

Figura 2.1: La zona pintada de gris és la zona en que F és holomorfa.

$$F(s) = \sum_{k\geq 0} \frac{F^{(k)}(c+1)}{k!}(s-(c+1))^k$$

I pel corol·lari 10, tenim que

$$F^{(k)}(c+1) = (-1)^k \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)(\log(n))^k}{n^{c+1}}$$

I substituint això a l'equació de dalt:

$$F(s) = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)(\log n)^k (c+1-s)^k}{k! n^{c+1}}$$

Com que ho tenim per $R > 1$ sabem que F ha de convergir per $s = c - \varepsilon$ per algun $\varepsilon > 0$:

$$F(c-\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)(\log n)^k (1+\varepsilon)^k}{k! n^{c+1}}$$

Notem que com que $f(n) \geq 0$, ens diu que convergència $\implies$ convergència absoluta $\implies$ podem reordenar:

$$\begin{aligned}
F(c-\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)(\log n)^k(1+\varepsilon)^k}{k! n^{c+1}} &= \\
= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} \frac{f(n)(\log n)^k(1+\varepsilon)^k}{k! n^{c+1}} &= \\
= \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^{c+1}} \sum_{k\geq 0} \frac{(\log n)^k(1+\varepsilon)^k}{k!} &= \\
= \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^{c+1}} e^{\log(n)(1+\varepsilon)} &= \\
= \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^{c+1}} n^{1+\varepsilon} &= \\
= \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^{\varepsilon-c}}
\end{aligned}$$

Per tant, com que $F(c-\varepsilon)$ convergeix com a sèrie de potències, també ho fa com a sèrie de Dirichlet, i per tant, $\sigma_c < c$, que és el que volíem veure. □

Es podria dir que hi ha una sèrie de Dirichlet d'especial importància: la funció $\zeta(s)$ de Riemann, degut al seu problema del mil·lenni que té associat: trobar els zeros a la franja $0 < \sigma < 1$. Però tal com l'hem definit, aquesta pregunta no té sentit, així que ara veurem com la podem estendre:

Teorema 2.4 Riemann

La funció $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ estén a una funció meromorfa a $\sigma > 0$ com

$$\zeta(s) := \frac{1}{s-1} + \phi(s) \quad \text{on } \phi(s) \text{ és una funció holomorfa per } \sigma > 0.$$

Demostració. Per $\sigma > 1$ tenim, gràcies al corol·lari 2 $\zeta(s)$ es pot expressar:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) = \sum_{n\geq 1} n \int_n^{n+1} sx^{-s-1}\mathrm{d}x = s\int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\mathrm{d}x$$

I ara podem separar la integral en 2 trossos, utilitzant que $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$ on $\{x\}$ és la part fraccionària de x.

$$s\int_1^\infty x x^{-1-s}\mathrm{d}x = s\int_1^\infty x^{-s}\mathrm{d}x = -s\frac{x^{-s+1}}{s-1}\Big|_1^\infty = \frac{s}{s-1} = 1 - \frac{1}{s-1}$$

Per tant, el que queda és:

$$\phi(s) := 1 - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\mathrm{d}x$$

I hem de veure que ϕ és holomorfa. Per fer-ho utilitzarem la següent claim:

Claim:
Veure que la integral $1 - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\mathrm{d}x$ convergeix uniformement pels $\sigma \geq \delta > 0$ és suficient per veure que convergeix a una funció holomorfa.

Demostració. Per veure això, notem que la successió de funcions $I_n(s) = 1 - s\int_1^N \{x\}x^{-s-1}\mathrm{d}x$ són holomorfes, ja que es poden expressar com a un sumatori $\sum_{n\geq 1}\int_n^{n+1}(x-n)x^{-s-1}\mathrm{d}x$, i totes aquestes són funcions holomorfes: per tant, si hi ha convergència uniforme sobre qualsevol compacte, el límit és una funció holomorfa: però si ho fa en un semiplà obert, ho farà sobre qualsevol compacte d'aquest. $\square$

I ara tornem a la demostració. Primer fitarem aquesta integral de tal manera que no depengui de σ, i que només ho faci de δ: Fixem un $\varepsilon > 0$, aleshores, prenem $r(\varepsilon) = \frac{1}{(\delta\varepsilon)^{\frac{1}{\delta}}}$ tal que $\forall r > r(\varepsilon)$ la integral

$$\left|\int_r^\infty \frac{\{x\}}{x^{1+s}}\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \qquad \text{per tot } \sigma \geq \delta.$$

Però notem que:

$$\left|\int_r^\infty \frac{\{x\}}{x^{1+s}}\mathrm{d}x\right| \leq \int_r^\infty \frac{|\{x\}|}{|x^{1+s}|}\mathrm{d}x < \int_r^\infty \frac{1}{x^{1+s}}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-\sigma}}{-\sigma}\right|_r^\infty = \frac{1}{\sigma r^\sigma} \leq \frac{1}{\delta r^\delta} = r(\varepsilon)$$

Per tant, per tot ε hi ha un $r(\varepsilon)$ que no depèn de s tal que la cua de la integral és petita: que és el que volíem veure. $\square$

I a partir del que acabem de veure, sabem que ζ té un pol en $s = 1$ de residu 1, per tant:

Corol·lari 2.5
La funció ζ té un pol de residu 1; i per tant:

$$\lim_{s\to 1^+} \frac{\log(\zeta(s))}{\log(\frac{1}{1-s})} = 1$$

On $s \in \mathbb{R}_{\geq 1}$

Demostració. La part que el residu és 1, és immediat veient que $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s)$. Pel que fa a que $\lim_{s\to 1^+}\frac{\log(\zeta(s))}{\log(\frac{1}{1-s})} = 1$, només hem de veure que $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ a $s = 1$; per tant, $\log(\zeta(s)) \sim \log(\frac{1}{z-1})$, que és el que volíem veure. $\square$

I un altre corol·lari que ve mitjanament inspirat del teorema 2:

Corol·lari 2.6

La sèrie

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\mathbb{R}_{\geq 1}}} \frac{\sum_p \frac{1}{p^s}}{\log(\frac{1}{s-1})} = 1$$

És a dir: $\sum_p \frac{1}{p^s} \sim -\log(s-1)$ amb s a prop de 1.
I a més:

$$\sum_p \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^{ks}} < 1 \qquad \text{per tot } s \in \mathbb{R}_{\geq 1}$$

Demostració. Recordem que $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ per $\sigma > 1$; per tant, per $s \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ tenim que

$$\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{kp^{ks}}\right)$$

Aquest últim pas és l'expansió de Taylor del logaritme al voltant de $s = 1$.

$$\sum_p \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{kp^{ks}}\right) = \sum_p \left(\sum_{k\geq 2} \frac{1}{kp^{ks}}\right) + \sum_p \frac{1}{p^s}$$

Notem que en $s = 1$ aquesta suma no convergeix. Per tant, si veiem la segona part del corol·lari, això implicarà la primera. Per tant, ara procedirem a demostrar la segona part:

$$\begin{aligned}
\sum_p \sum_{k\geq 2} \frac{1}{kp^{ks}} &\leq \sum_p \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^{ks}} = \sum_p \frac{1}{p^{2s}} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{p^{ks}} = \sum_p \frac{p^{-2s}}{1-\frac{1}{p^s}} = \\
&= \sum_p \frac{1}{p^s} \frac{1}{p^s - 1} \leq \sum_p \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-1)} = \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1
\end{aligned}$$

Que és el que volíem veure. $\square$

CAPÍTOL

FUNCIONS L 3

Fins ara hem estat tractant amb funcions $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$; i hem vist un cas (teorema 2) de com estendre aquestes funcions una mica més enllà del que permet la sèrie en si. En aquest capítol veurem més exemples d'aquestes extensions. Començarem primer per un costat més algebraic, que després ens servirà per estudiar les funcions que va estudiar Dirichlet; on prenia $f(n) = \chi(n)$ on χ és un caràcter de Dirichlet (definició 1.2). Però primer fem un pas enrere, i considerem un grup G abelià i finit (durant el capítol, els grups seran abelians i finits).

Definició 3.1 Caràcter d'un grup

Sigui G un grup finit i abelià, aleshores un caràcter de G serà un morfisme $\psi\colon G \to \mathbb{C}^*$ (on $\mathbb{C}^*$ és el grup multiplicatiu de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

I com que si tenim un objecte, el primer que ens hauríem de preguntar és quina estructura té:

Definició 3.2 El grup de caràcters

Denotem per $\widehat{G}$ al grup $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \{\text{Caràcters de G}\}$, on la operació és:

$$\psi, \phi\colon G \to \mathbb{C}^* \qquad \text{aleshores } (\psi \cdot_{\widehat{G}} \phi)(g) \mapsto \psi(g) \cdot_{\mathbb{C}^*} \phi(g)$$

I anomenarem a $\widehat{G}$ el grup de aràcters de G.

I ara veurem alguna propietat d'aquests caràcters, sobretot com es comporten amb els grups abelians finits més bàsics: els grups cíclics.

Lema 3.1 El grup de caràcters d'un grup cíclic

Sigui $G = \langle s \rangle$ un grup cíclic d'ordre n i sigui μ_n el grup d'arrels n-èssimes de la unitat.

Aleshores

$$\begin{aligned} \widehat{G} &\longrightarrow \mu_n \\ \psi &\longmapsto \psi(s) \end{aligned}$$

és un isomorfisme.

Demostració. Com que $\psi(s)^n = \psi(s^n) = \psi(1) = 1$, $\psi(s)$ és arrel n-èssima de la unitat. D'altra banda, el morfisme és injectiu perquè si $\psi_1, \psi_2 \in \widehat{G}$ i $\psi_1(s) = \psi_2(s)$, llavors $\psi_1(s^k) = \psi_1(s)^k = \psi_2(s)^k = \psi_1(s^k)$ per tot $s^k \in \langle s \rangle = G$. Finalment, per veure l'exhaustivitat, si $\omega \in \mu_n$, podem definir $\psi(s^k) = \omega^k$. $\square$

Resulta també natural preguntar-se ara sobre la relació entre els caràcters d'un grup i el dels seus subgrups.

Proposició 3.1 Extensió de caràcters de subgrups

Sigui $H \leq G$ subgrup. Tot caràcter de H estén a un caràcter de G.

Demostració. Si $H = G$, el resultat és tautològic. Suposem $H \neq G$, i sigui $x \in G \setminus H$. Com que G és finit, n'hi ha prou amb veure que un caràcter $\psi \colon H \to \mathbb{C}^\times$ estén a un de $H' := \langle H, x \rangle$. Atès que G és abelià, tot element de H' es pot escriure com hx^a on $h \in H$ i $a \in \mathbb{Z}$. A més $|G/H| < +\infty$, per tant $[x]$ és d'ordre finit i existeix $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $[x]^n = [1]$, equivalentment $x^n \in H$. Prenem el mínim dels n tals que això passi i fixem $\omega \in \mathbb{C}^\times$ tal que $\psi(x^n) = \omega^n$. Definim

$$\begin{aligned} \psi' \colon \; H' &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ hx^a &\longmapsto \psi(h)\omega^a \end{aligned}$$

És clar que $\psi'|_H = \psi$. Cal veure que està ben definida i que és morfisme. Suposem que $h_1 x^{a_1} = h_2 x^{a_2}$. Aleshores $h_1 h_2^{-1} = x^{a_2 - a_1} = x^{na'}$ per algun $a' \in \mathbb{Z}^+$, per la minimalitat de n. Per tant

$$\psi(h_1)\psi(h_2)^{-1} = \psi(h_1 h_2^{-1}) = \psi((x^n)^{a'}) = \psi(x^n)^{a'} = \omega^{na'} = \omega^{a_2 - a_1},$$

d'on $\psi(h_1)\omega^{a_1} = \psi(h_2)\omega^{a_2}$. Finalment, comprovem que és morfisme:

$$\psi'(h_1 x^{a_1} h_2 x^{a_2}) = \psi'(h_1 h_2 x^{a_1 + a_2}) = \psi(h_1 h_2)\omega^{a_1 + a_2} = \psi(h_1)\omega^{a_1}\psi(h_2)\omega^{a_2} = \psi'(h_1 a_1)\psi'(h_2 a_2).$$

$\square$

Podem refinar aquest últim resultat una mica més.

Proposició 3.2 Restricció de caràcters de subgrups

La restricció $\mathrm{Res} \colon \widehat{G} \to \widehat{H}$ que envia ψ a $\psi|_H$ és exhaustiva, i $\ker(\mathrm{Res}) \cong \widehat{G/H}$.

Demostració. Dir que aquesta aplicació és exhaustiva és equivalent a la proposició anterior. Per veure l'isomorfisme, tenim que $\psi \in \ker(\mathrm{Res})$ si i només si $\psi(H) = \{1\}$ o equivalentment $H \subseteq \ker(\psi)$. Però això últim es dona si i només si existeix $\psi' \colon G/H \to \mathbb{C}^\times$ tal que ψ factoritza a través de de ψ', és a dir, el diagrama commuta. L'isomorfisme, doncs, ve donat l'assignació $\psi \mapsto \psi'$, i té inversa $\psi' \mapsto \psi' \circ \pi$ on $\pi \colon G \to G/H$ és la projecció al quocient. $\square$

Això ens dona, a més, l'ordre del grup de caràcters d'un determinat grup.

Corol·lari 3.1 Ordre del grup de caràcters

Si G és un grup abelià finit, $|G| = |\widehat{G}|$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}^\times \\ G/H \arrow[ur, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Aquest diagrama commuta.

Demostració. Procedim per inducció sobre l'ordre. Si $|G| = 1$, és trivial. Suposem $|G| > 1$. Pel teorema de Cauchy, existeix un subgrup $H \leq G$ d'ordre p, que és cíclic per ser d'ordre primer i per tant pel lema 3, $|\widehat{H}| = |\mu_p| = p = |H|$. D'altra banda, per la proposició anterior i pel primer teorema d'isomorfia, $|\widehat{H}| = |\widehat{G}|/|\ker(\text{Res})| = |\widehat{G}|/|\widehat{G/H}|$. Ara, com que $|G/H| < |G|$, per la hipòtesi d'inducció $|G/H| = |\widehat{G/H}|$, i tot plegat deduïm

$$|\widehat{G}| = |\widehat{H}||\widehat{G/H}| = |H||G/H| = |G|.$$

□

La següent proposició és un anàleg de la relació entre un espai vectorial i el seu bidual en àlgebra lineal. Aquí tindrem també un isomorfisme canònic entre un grup i el grup de caràcters del seu grup de caràcters.

Proposició 3.3 Isomorfisme canònic entre G i $\widehat{\widehat{G}}$

Definim $\epsilon\colon G \to \widehat{\widehat{G}}$ per $g \mapsto (\text{ev}_\text{g}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}^\times)$ on $\text{ev}_\text{g}(\psi) := \psi(g)$. Llavors ϵ és un isomorfisme.

Demostració. Veure que és morfisme és directe: si $g, h \in G$ i $\psi \in \widehat{G}$, $\text{ev}_{gh}(\psi) = \psi(gh) = \psi(g)\psi(h) = \text{ev}_g(\psi)\text{ev}_h(\psi)$, d'on $\text{ev}_{gh} = \text{ev}_g\text{ev}_h$, és a dir, $\epsilon(gh) = \epsilon(g)\epsilon(h)$. A més, pel corol·lari anterior, $|G| = |\widehat{G}| = |\widehat{\widehat{G}}|$, per tant, per provar que és un isomorfisme només cal provar la injectivitat. Sigui $g \in \ker(\epsilon)$, és a dir, $\psi(g) = 1$ per tot $\psi \in \widehat{G}$. Suposem per arribar a contradicció que $g \neq 1$. Llavors tenim un caràcter $\psi\colon \langle g\rangle \to \mathbb{C}^\times$ definit per $g \mapsto e^{\frac{2\pi i}{|\langle g\rangle|}} \neq 1$. Però llavors ψ' estén a un caràcter ψ de G, absurd ja que $\psi(g) = \psi'(g) \neq 1$. □

La suma de les arrels n-èssimes de la unitat dona 0. El següent resultat és una generalització d'això a caràcters de grups abelians finits.

Proposició 3.4 Relacions d'ortogonalitat

(i) Donat $\psi \in \widehat{G}$, tenim

$$\sum_{g \in G} \psi(g) = \begin{cases} |G| & \psi \text{ trivial} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

(ii) Donat $g \in G$, tenim

$$\sum_{\psi \in \widehat{G}} \psi(g) = \begin{cases} |G| & g = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Demostració. (i) Si $\psi = 1$, és directe. Suposem que existeix $h \in G$ tal que $\psi(h) \neq 1$. Aleshores

$$\psi(h) \sum_{g \in G} \psi(g) = \sum_{g \in G} \psi(hg) = \sum_{g \in G} \psi(g),$$

i aïllant,

$$(1 - \psi(h)) \sum_{g \in G} \psi(g) = 0.$$

i com que $\psi(h) \neq 1$ obtenim el resultat.

(ii) Si apliquem l'apartat (i) a $\widehat{\widehat{G}}$ i utilitzem que $G \cong \widehat{\widehat{G}}$, ho tindrem: donat $g \in G$,

$$\sum_{\psi \in \widehat{G}} \psi(g) = \sum_{\psi \in \widehat{G}} \mathrm{ev}_g(\psi) = \begin{cases} |G| & \mathrm{ev}_g = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

i $\mathrm{ev_g} = 1$ si i només si $g = 1$ (ja que $g \mapsto (\mathrm{ev_g} \colon \widehat{G} \to \mathbb{C}^\times)$ és un isomorfisme). $\square$

Definirem ara els caràcters en els que estarem interessats per a provar el teorema de Dirichlet.

Definició 3.3 Caràcter mòdul m

Un caràcter mòdul m és un caràcter de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

Això encaixa amb la definició de caràcter de Dirichlet mòdul m que es va donar al principi: tot caràcter de Dirichlet mòdul m χ defineix un caràcter mòdul m ψ com $\psi([a]) = \chi(a)$ per $[a] \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$; i recíprocament, tot caràcter mòdul m ψ defineix un caràcter de Dirichlet mòdul m com

$$\chi(a) = \begin{cases} \psi([a]) & \gcd(a, m) = 1 \\ 0 & \gcd(a, m) \neq 1. \end{cases}$$

Notem que d'aritmètica, ja coneixíem un exemple de caràcter mòdul m: el símbol de Legendre.

Exemple. Sigui $m = p$ primer senar. Llavors $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ és cíclic d'ordre $p - 1$, i llavors té un únic element d'ordre 2. Per tant,

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ a &\longmapsto \left(\frac{a}{p}\right) \end{aligned}$$

és un caràcter mòdul p.

Ara distingirem un tipus de caràcter de Dirichlet que es comporta de manera diferent a la resta.

Definició 3.4 Caràcter principal mòdul m

El caràcter principal mòdul m és $\chi_0(a)\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ definit per

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \gcd(a,m) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

A partir d'ara, χ sempre denotarà un caràcter de Dirichlet mòdul m (és a dir, fixem la m). A continuació, associarem a cada caràcter de Dirichlet una certa funció que dona nom a aquest capítol.

Definició 3.5 Funció L associada a un caràcter de Dirichlet

La funció L associada al caràcter de Dirichlet mòdul m χ és la sèrie de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

.

Demostrarem seguidament algunes propietats analítiques de les funcions L.

Lema 3.2 Convergència de les funcions L de caràcters no principals

Si $\chi \neq \chi_0$, llavors $L(\chi, s)$ té

(i) $\sigma_c = 0$, per tant $L(\chi, s)$ és holomorfa per $\sigma > 0$.

(ii) $\sigma_a > 1$, per tant té una factorització

$$L(\chi, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^{-s}}},$$

atès que χ és completament multiplicativa. En particular, no s'anul·la per $\sigma > 1$.

Demostració. (i) Sigui $x \geq 1$ i sigui $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $km \leq x \leq (k+1)m$. Aleshores,

$$\left|\sum_{n\leq x} \chi(n)\right| = \left|\sum_{n\leq km} \chi(n) + \sum_{km<n\leq x} \chi(n)\right| = \left|\sum_{km<n\leq x} \chi(n)\right| \leq \sum_{km<n\leq x} |\chi(n)| \leq \varphi(m).$$

on la segona igualtat es dona per les relacions d'ortogonalitat; i la última desigualtat perquè $|\chi(n)| = 1$ si $\gcd(n,m) = 1$ per ser $\chi(n)$ arrel de la unitat, i $|\chi(n)| = 0$ altrament. Per tant, χ té sumes parcials fitades, i per l'exercici 1 del full de problemes 2, $L(\chi, s)$ convergeix per $\sigma > 0$. A més, no ho fa per $s = 0$ ja que el terme general no tendeix a 0.

(ii) Com que $|\chi(n)| \leq 1$, per l'exercici 1 del full de problemes 2, $L(\chi, s)$ convergeix absolutament per $\sigma > 1$. A més, no ho fa per $s = 1$: tenim

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\chi(n)|}{n^s} = \sum_{\gcd(n,m)=1} \frac{1}{n} > \sum_{k\geq 1} \frac{1}{mk+1},$$

que divergeix. $\square$

Ara estem en procés de demostrar el teorema de les progressions aritmètiques de Dirichlet. I per fer-ho passarem per veure propietats de les funcions L. La primera, i poder de les més importants, és que $L(\chi_0, s)$ té un pol en $s = 1$.

Lema 3.3 Continuació meromorfa de $L(\chi_0, s)$

Si χ_0 és el caràcter principal, aleshores:

$$L(\chi_0, s) = \zeta(s) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \qquad \text{per } \sigma > 1.$$

En particular $L(\chi_0, s)$ té continuació meromorfa en el semiplà a la dreta del 0 amb un únic pol simple en $s = 1$.

Demostració. Com que $|\chi_0(m)| \leq 1$ (recordem que $\chi_0(m) \in \{0, 1\}$), aleshores per l'exercici 1 del full de problemes 1, sabem que $\sigma_a \leq 1$. Per tant, pel corol·lari 2, tenim que:

$$L(\chi_0, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}} = \prod_{p \nmid m} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \underbrace{\left(\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\right)}_{\zeta(s)} \left(\prod_{p|m} 1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Que és el que volíem veure. Ja que com que podem estendre la funció de la dreta a $\sigma > 0$, podem fer el mateix amb la funció de la esquerra (coincideixen en un conjunt amb com a mínim un punt d'acumulació). $\square$

Notem també, que pel lema 3, tenim que $L(\chi, 1) \in \mathbb{C}$. I el punt clau de la demostració del teorema de la progressió aritmètica de Dirichlet consistirà en veure que $L(\chi, 1) \neq 0$ per cap caràcter de Dirichlet.

Lema 3.4 Un producte sobre tots els caràcters de Dirichlet

Sigui $m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, i p un primer tal que $p \nmid m$, sigui f l'ordre de p mòdul m. Aleshores tenim la següent igualtat sobre $\mathbb{C}[T]$:

$$\prod_\chi (1 - \chi(p)T) = (1 - T^f)^{\frac{\varphi(m)}{f}}$$

Exemple. Recordem que a amb $m = 4$ ja hem vist que hi havien 2 caràcters de Dirichlet:

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ és senar,} \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases} \qquad \chi_1(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si } a \equiv 3 \pmod 4 \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per tant si prenem un $p \equiv 1 \pmod 4$ qualsevol, tenim que $\varphi(4) = 2$ i l'ordre de p és 1, aleshores:

$$(1 - \chi_0(p)T)(1 - \chi_1(p)T) = (1 - T^1)^{\frac{2}{1}}$$

I si prenem $p \equiv 3 \pmod 4$, aleshores té ordre 2:

$$(1-\chi_0(p)T)(1-\chi_1(p)T) = (1-T^2)^{\frac{2}{2}}$$

I ara que hem vist un exemple, comencem la demostració.

Demostració. Sigui $\psi\colon (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$, aleshores pel lema 3 tenim que $\psi(p)$ és una arrel p-èsima de la unitat, diguem-li $\psi(p) = \xi$. Definim ara

$$\eta : \langle p\rangle \subseteq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$$

que envia $\eta(a) = \xi^a$. Ara volem contar quantes funcions $\chi \in \widehat{G}$ es restringeixen a $\langle p\rangle$ de la mateixa manera que ψ. O sigui, si recordem la funció restricció Res:

$$\mathrm{Res}\colon \widehat{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})}^\times \to \widehat{\langle p\rangle}$$

Que envia θ a $\theta|_{\langle p\rangle}$; aleshores el que volem trobar és $\#\ker(\mathrm{Res})$. Però per la proposició 3 tenim:

$$\#\ker(\mathrm{Res}) = \#\frac{(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times}{\langle p\rangle} = \frac{\varphi(m)}{f}$$

Per tant, sabem que hi ha $\frac{\varphi(m)}{f}$ caràcters que restringits al grup $\langle p\rangle$ són iguals, i envien $p \mapsto \xi$; per tant:

$$\prod_{\chi} 1-\chi(p)T = \prod_{\substack{\xi \text{ arrel } f\text{-èsima} \\ \text{de la unitat}}} (1-\xi T)^{\frac{\varphi(m)}{f}}$$

Però el producte de $1-\xi T$ sobre totes les f-èsimes arrels de la unitat és $1-T^f$, per tant:

$$\prod_{\chi} 1-\chi(p)T = \prod_{\substack{\xi \text{ arrel } f\text{-èsima} \\ \text{de la unitat}}} (1-\xi T)^{\frac{\varphi(m)}{f}} = (1-T^f)^{\frac{\varphi(m)}{f}}$$

Que és justament el que volíem veure. □

I ara definirem un objecte molt important en la demostració del teorema de Dirichlet: la funció m-èsima de Dirichlet:

Definició 3.6 Funció m-èsima de Dirichlet

Sigui $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, aleshores la funció m-èsima de Dirichlet es defineix com

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

On el producte recorre tots els caràcters de Dirichlet mòdul m.

Recordem que volem veure que $L(\chi, 1)$ no és zero; per tant, ens interessarà estudiar ζ_m en $s = 1$, i per fer-ho començarem veient com es comporta aquesta funció:

Proposició 3.5 Producte d'Euler, i sèrie de Dirichlet de ζ_m.

Es té:

1. $\zeta_m(s) = \prod_{p \not| m}(1 - p^{-f_p s})^{-\frac{\varphi(m)}{f_p}}$ per $\sigma > 1$; i on f_p és l'ordre de p a $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

2. $\zeta_m(s)$ admet una expressió com a sèrie de Dirichlet amb coeficients a $\mathbb{Z} \geq 0$ (en particular, $\mathbb{R}_{\geq 0}$) per a $\sigma > 1$.

Demostració. Per $\sigma > 1$ tenim que:

$$\zeta_m(s) = \prod_\chi \left(\prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right) \overset{\text{conv. abs.}}{=} \prod_p \left(\prod_\chi \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right)$$

I com que $\chi(p|m) = 0$, podem ignorar els termes que siguin divisors de m:

$$\prod_p \left(\prod_\chi \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right) = \prod_{p \nmid m} \left(\prod_\chi \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right)$$

I pel lema 3, utilitzant $T = p^{-s}$:

$$\prod_{p \nmid m} \left(\prod_\chi \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right) = \prod_{p \nmid m} \left(1 - p^{-sf_p}\right)^{-\frac{\phi(m)}{f_p}} =$$

I amb això demostrem la primera part de la proposició. I ara per demostrar la segona part, passem això a sèries de potències:

$$\prod_{p \nmid m} \left(\prod_\chi \left(1 - p^{-sf_p}\right)^{\frac{\phi(m)}{f_p}} \right) = \prod_{p \nmid m} \left(\sum_{r \geq 0} p^{-sf_p r} \right)^{\frac{\varphi(m)}{f_p}}$$

Notem que per $\sigma > 1$, tenim que $\sum_{r\geq 0} p^{-sf_p r}$ és una sèrie de Dirichlet amb coeficients $\in \{0, 1\}$. A més, com que sabem que una sèrie de potències al quadrat es transforma a fer una convolució en els coeficients, sabem que ara passen a ser enters no negatius. I per tant, si considerem la funció multiplicativa que en els primers val l'enter no negatiu que hi ha al producte, (i 0 en els primers $p|m$), sabem que té tots els coeficients no negatius. Que és el que volíem veure. $\square$

I ara finalment demostrem el que portem un temps volent demostrant: que $L(\chi, 1) \neq 0$. De fet, això que veurem ara és la base del teorema de Dirichlet, i tot i que no veurem la demostració original d'aquest fet, sí que en veurem 2: la que va fer l'Edmund Landau, al 1909; i la de'n Vallée-Poussin, del 1896.

Teorema 3.1 Les funcions $L(\chi, s)$ no s'anul·len en $s = 1$

1. La funció $\zeta_m(s)$ té un pol simple a $s = 1$.

2. $L(\chi, 1) \neq 0$ si $\chi \neq \chi_0$.

Demostració. Notem que si veiem el segon apartat, tindrem de regal el primer, ja que:

$$\zeta_m(s) = \underbrace{L(\chi_0, s)}_{\text{pol simple}} \prod_{\chi \neq \chi_0} \overbrace{\underbrace{L(\chi, s)}_{\text{no s'anul·la}}}^{\text{holomorfa per } \sigma > 0}$$

Per tant, ara procedirem a veure el segon apartat.

Suposem que hi ha alguna $\chi_1 \neq \chi_0$ tal que $L(\chi_1, 1) = 0$. Aleshores:

$$\zeta_m(s) = L(\chi_0, s) L(\chi_1, s) \prod_{\chi \neq \chi_0, \chi_1} L(\chi, s)$$

Com que sabem que el producte és una funció holomorfa per $\sigma > 0$, i que a més, el pol simple de $L(\chi_0, s)$ mor amb el zero de $L(\chi_1, s)$, ens queda que $\zeta_m(s)$ es pot estendre a una funció holomorfa a la dreta del 0. També sabem, però, que per la proposició 3 es pot expressar com una sèrie de Dirichlet amb coeficients reals no negatius. I per tant, podem aplicar el teorema de Landau (2), que ens diu que la sèrie de Dirichlet associada ha de convergir per $\sigma > 0$. Però:

Claim:

La sèrie de Dirichlet no convergeix per $\sigma = \frac{1}{\varphi(m)}$

Recordem que la sèrie era:

$$\prod_{p \nmid m} \frac{1}{(1 - p^{-sf_p})^{\frac{\varphi(m)}{f_p}}} = \prod_{p \nmid m} \left(\sum_{r \geq 0} p^{-rsf_p} \right)^{\frac{\varphi(m)}{f_p}} \geq \prod_{p \nmid m} \sum_{r \geq 0} \left(p^{-rsf_p}\right)^{\frac{\varphi(m)}{f_p}} = \prod_{p \nmid m} \sum_{r \geq 0} p^{-rs\varphi(m)}$$

On la desigualtat es té ja que $rsf_p \in \mathbb{R}$, i per tant, $p^{-rsf_p} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Per tant, com que si $a, b > 0$ tenim $(a+b)^k \geq a^k + b^k$. Que és bàsicament el que tenim a dalt.

$$\prod_{p \nmid m} \sum_{r \geq 0} p^{-rs\varphi(m)} = \prod_{p \nmid m} 1 + \frac{1}{p^{s\varphi(m)}} + \frac{1}{p^{2s\varphi(m)}} + \cdots = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ (n,m)=1}} \frac{1}{n^{s\varphi(m)}}$$

I si prenem $s = \frac{1}{\varphi(m)}$ aleshores la sèrie és divergent. Però això contradiu el que havíem suposat: que ζ_m es pot estendre de manera holomorfa fins a $\sigma = 0$. $\square$

Sigui $a \in \mathbb{Z}$, tal que $(m, a) = 1$, on m és un enter que hem fixat més a munt. Sigui ara $\mathbb{P}_a := \{p \equiv a \pmod m\}$, aleshores donat un caràcter de Dirichlet $\chi \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ definim la funció

$$f_\chi \colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{C} \qquad \text{tal que} \qquad f_\chi(s) := \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p)}{p^s}$$

Que comparant-la amb ζ veiem que convergeix de manera absoluta per $\sigma > 1$.

Lema 3.5

El sumatori
$$\sum_{p\in\mathbb{P}_a}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{\chi}\frac{f_\chi(s)}{\chi(a)}$$

Demostració. Considerem el sumatori

$$\sum_{\chi}\frac{f_\chi(s)}{\chi(a)}=\sum_{\chi}\frac{\sum_{p\nmid m}\frac{\chi(p)}{p^s}}{\chi(a)}=\sum_{\chi}\sum_{p\nmid m}\frac{\chi(p)}{\chi(a)p^s}=\sum_{\chi}\sum_{p\nmid m}\frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s}=$$

Com que per $\sigma>1$ estem sumant una quantitat finita de coses que convergeixen absolutament, i per tant no hi ha cap problema per canviar l'ordre del sumatori.

$$\sum_{p\nmid m}\sum_{\chi}\frac{\chi(a^{-1}p)}{p^s}=\sum_{p\nmid m}\frac{1}{p^s}\sum_{\chi}\chi(a^{-1}p)$$

Però notem que $\sum_\chi \chi(a^{-1}p)=\begin{cases}\varphi(m) & \text{si } a\equiv p \pmod m\\ 0 & \text{altrament.}\end{cases}$ degut a la proposició 3, utilitzant $G=(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. Per tant:
$$\sum_{p\in\mathbb{P}_a}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{\chi}\frac{f_\chi(s)}{\chi(a)}$$

Que és el que volíem veure. $\square$

Notem que si en algun moment veiem que $\frac{1}{\varphi(m)\chi(a)}\sum_\chi f_\chi(s)$ divergeix en alguna s, aleshores sabrem que el sumatori $\sum_{p\in\mathbb{P}_a}\frac{1}{p^s}$ també ho farà, i per tant, sabrem que n'hi haurà d'haver un nombre infinit. Per tant considerem el següent lema:

Lema 3.6 Estudi de convergència de les f_χ.

Tenim que per $\chi=\chi_0$
$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\mathbb{R}_{>1}}}\frac{f_{\chi_0}(s)}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}=1$$
I si $\chi\neq\chi_0$, aleshores:
$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\mathbb{R}_{>1}}}\frac{f_{\chi}(s)}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}=0$$

Demostració. Notem que la diferència entre $f_\chi(s)=\sum_{p\nmid m}p^{-s}$ i $\sum_p p^{-s}$ és només en els primers termes, per tant, el comportament asimptòtic serà igual, i pel corol·lari 2, tenim:

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\mathbb{R}_{>1}}}\frac{\sum_p p^{-s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}=1$$

Que és el que volíem veure per la primera part.

Per la segona part, hem de veure que si no és principal, el mateix límit és zero. Per fer-ho considerem:

$$F(s) := \sum_p \log\left(\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\right) = \sum_p \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}} = f_\chi(s) + \sum_p \sum_{n\geq 2} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}$$

On la segona igualtat és la expansió del logaritme per $\sigma > 1$.

Però el sumatori que hi ha a la última expressió que tenim, el vam fitar en el corol·lari 2:

$$\left|\sum_p \sum_{n\geq 2} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}\right| \leq \sum_p \sum_{n\geq 2} \frac{1}{np^{ns}} \leq 1$$

Per tant, si veiem que F està fitada, aleshores tindrem que f_χ està fitada, i per tant, fent el límit del quocient amb el logaritme ens donarà 0. I si ara considerem la següent expressió:

$$e^{F(s)} = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = L(\chi, s) \xrightarrow{s\to 1^+} L(\chi, 1) \neq 0$$

Per tant, $F(s)$ roman fitada quan $s \to 1^+$. I per tant, $f_\chi(s)$ també ho fa: que és el que volíem veure. □

I ara ja podem demostrar el teorema de la progressió aritmètica de Dirichlet:

Teorema 3.2 Teorema de la progressió aritmètica de Dirichlet (fort)

Sigui $a \in \mathbb{Z}$ un enter tal que $(a, m) = 1$, aleshores

$$\lim_{\substack{s\to 1 \\ s\in\mathbb{R}_{>1}}} \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}_a} p^{-s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} = \frac{1}{\varphi(m)}$$

Corol·lari 3.2 Teorema de la progressió aritmètica de Dirichlet

$\#P = \infty$

Notem que el teorema ens diu més que el corol·lari, ja que ens descriu la distribució dels primers en les classes mòdul m.

Demostració. Primer veurem la demostració del corol·lari, que és immediata del teorema. Ja que si suposem que $\mathbb{P}_a$ fos finit, aleshores $\sum_{p\in\mathbb{P}_a} p^{-s}$ seria finit, i dividit per alguna cosa que se'n va a l'infinit ens donaria 0, i no $\frac{1}{\varphi(m)}$ que és el que ens diu el teorema per $s \to 1$. □

I ara veurem la demostració del teorema important:

Demostració. Pel lema 3 sabem que

$$\lim_{\substack{s\to 1 \\ s\in\mathbb{R}_{>1}}} \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}_a} p^{-s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_\chi \chi(a^{-1}) \lim_{\substack{s\to 1 \\ s\in\mathbb{R}_{>1}}} \frac{f_\chi(s)}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}$$

Però pel lema 3 tenim que en el sumatori valdrà 0 per totes les $\chi \neq \chi_0$, i valdrà $\frac{\chi(a^{-1})}{\varphi(m)}$ si $\chi = \chi_0$, però aleshores, $\frac{\chi(a^{-1})}{\varphi(m)} = \frac{1}{\varphi(m)}$; que és el que volíem veure. □

Notem que en aquesta demostració incloent tots els lemes previs, hem utilitzat molt el teorema de Landau, en particular el teorema 3. Però Landau no va ser el primer en demostrar això el teorema de Dirichlet. En aquest curs segurament no veurem la demostració que va donar Dirichlet al 1837-1838; però sí que veurem la que va donar Vallée-Poussin al 1896, 20 anys [1] abans de la de Landau; i voldrà demostrar el mateix: que $L(\chi, 1) \neq 0$.

Definició 3.7 Caràcters reals i complexos.

Diem que $\chi\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ és un caràcter de Dirichlet real si $\mathrm{Im}(\chi) \subset \mathbb{R}$. És a dir $\mathrm{Im}(\chi) \subset \{-1, 0, 1\}$. I direm que és complex altrament.

Definició 3.8 Caràcter conjugat

Direm $\overline{X}$ al caràcter de Dirichlet conjugat

$$\overline{X}\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C} \qquad \text{que envia } a \in \mathbb{Z} \text{ a } \overline{\chi}(a) = \overline{\chi(a)}$$

I no és massa difícil de veure que aquesta funció és un caràcter de Dirichlet del mateix mòdul.

Vallée-Poussin va distingir 2 casos: si χ és real o si és complexa. Aleshores, nosaltres veurem primer:

Proposició 3.6 $L(\chi, 1)$ no s'anul·la si χ és complex.

Si χ és un caràcter complex, aleshores $L(\chi, 1) \neq 0$.

Demostració. Suposem que $L(\chi, 1) = 0$, aleshores, primer veurem que $L(\overline{\chi}, 1) = 0$.

Com que el caràcter χ no és principal, tenim que la sèrie convergeix per $\sigma > 0$. A més, si restringim $L(\chi, s)$ i $L(\overline{\chi}, s)$ als reals positius, aleshores les funcions $\overline{L(\overline{\chi}, s)} = L(\chi, s)$ són iguals:

$$L(\chi, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \overline{L(\overline{\chi}, s)} = \overline{\sum_{n\geq 1} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^s}} = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

I com que les 2 són analítiques, i iguals en un conjunt amb un punt d'acumulació (en aquest cas els reals positius); han de ser iguals a tot arreu. Per tant:

$$\zeta_m(s) = \prod_{\theta} L(\theta, s) = L(\chi_0, s) L(\chi, s) L(\overline{\chi}, s) \prod_{\theta \neq \chi_0, \chi, \overline{\chi}} L(\theta, s)$$

Però sabem que $L(\chi_0, s)$ és meromorfa amb un pol en $s = 1$; també sabem que $L(\chi, s)$ i la seva conjugada són funcions holomorfes que s'anul·len en el 1 (per hipòtesi). I com que el producte també és una funció holomorfa, sabem que $\zeta_m(1) = 0$. I per tant, tindríem que ζ_m seria una funció holomorfa en $\sigma > 0$.

[1] No he trobat enlloc aquesta data, però em sembla que està en algun lloc dels apunts (tampoc he buscat excessivament).

Però això no pot ser, ja que vam veure que per $s \in \mathbb{R}_{\geq 1}$:

$$\zeta_m(s) \geq \sum_{\substack{n>1 \\ (n,m)=1}} \frac{1}{n^{\varphi(m)s}} \geq 1$$

Per tant, en un entorn de $s = 1$ tenim que ζ_m no es fa petita, per tant, el límit no pot ser pas 0; que és la contradicció que volíem. $\square$

I ara veurem l'altra cara de la demostració de Vallée-Poussin:

Proposició 3.7 **$L(\chi, 1)$ no s'anul·la si χ és real no principal.**

Si χ és un caràcter complex, aleshores $L(\chi, 1) \neq 0$.

Demostració. Suposem que existeix algun caràcter χ tal que $L(\chi, 1) = 0$ considerem la funció

$$\psi(s) = \frac{L(\chi, s)L(\chi_0, s)}{L(\chi_0, 2s)}$$

Notem que $L(\chi, s)L(\chi_0, s)$ és holomorfa per $\sigma > 0$ ja que χ_0 és meromorfa amb un únic pol simple en $s = 1$ que mor justament amb el zero de $L(\chi, 1)$. També sabem que $L(\chi_0, 2s)$ té un pol en $s = \frac{1}{2}$ per tant, $\psi(\frac{1}{2}) = 0$. Per tant:

$$\lim_{\substack{s \to \frac{1}{2} \\ s \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}}} \psi(s) = 0$$

Ara veurem que això és una contradicció. Per fer-ho estudiem:

$$\psi(s) = \frac{\prod_{p \nmid m} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \prod_{p \nmid m} (1 - p^{-s})^{-1}}{\prod_{p \nmid m} (1 - p^{-s})^{-1}} \qquad \text{per } \sigma > 1$$

Podem fer això, perquè sabem que tenim convergència absoluta per $\sigma > 1$.

$$\prod_{p \nmid m} \frac{1 - (p^{-s})^2}{(1 - \chi(p)p^{-s})(1 - p^{-s})} = \prod_{p \nmid m} \frac{1 + p^{-s}}{1 - \chi(p)p^{-s}} = \prod_{\chi(p)=1} \frac{1 + p^{-s}}{1 - p^{-s}} =$$

Aquesta última igualtat, és degut a que estem treballant amb un caràcter real, i que per tant, els únics valors que pot prendre són ± 1 (o 0, però sabem que és zero si i només si $p|m$, però com que des del principi, aquests els estem ignorant, no hi ha problema); i com que si $\chi(p) = -1$, aleshores estem multiplicant per $\frac{1+p^{-s}}{1+p^{-s}} = 1$, per tant, els termes que siguin així, els podem ignorar.

$$\prod_{\chi(p)=1} \frac{1 + p^{-s}}{1 - p^{-s}} = \prod_{\chi(p)=1} (1 + p^{-s}) \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots\right)$$

Però ara si definim $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^S} := \prod_{\chi(p)=1} (1 + p^{-s}) \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots\right) = \psi(s)$, aleshores veiem que els $a_n \geq 0$ i a_n és positiva amb $g_1 = 1$ (tot això pel lema (2) 2 del capítol 1).

Com que sabem que ψ és holomorfa a $\sigma > \frac{1}{2}$, si fem el desenvolupament en sèries de potències al voltant del 2, tindrà radi de convergència $R \geq \frac{3}{2}$. Per tant

$$\psi(s) = \sum_{k\geq 0} \frac{\psi^{(k)}(2)}{k!}(s-2)^k$$

Però recordem que

$$\psi^{(k)}(2) = (-1)^k \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{a_n(\log(n))^k}{n^2}}_{=:b_k \text{ per } k\geq 0}$$

Per tant si fixem un $s_0 \in (\frac{1}{2}, 2)$, tenim:

$$\psi(s_0) = \sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{k!} \underbrace{(2-s_0)^k}_{\geq 0} \geq b_0 = \psi(2) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} > 1$$

Que ens diu que el límit que hem calculat abans en $s = \frac{1}{2}$ no pot ser 0; i això és una contradicció.

$\square$

CAPÍTOL

CONTINUACIÓ MEROMORFA I EQUACIÓ FUNCIONAL DE $\zeta(s)$

4

Al 1859, Riemann va publicar un article on introduïa la funció zeta de Riemann i on establia dues propietats fonamentals d'aquesta funció: la seva continuació meromorfa a tot el pla complex i l'equació funcional que satisfà. En aquest capítol veurem com demostrar aquestes propietats.

Primer definirem la funció *theta* de Jacobi, i la funció Γ.

Definició 4.1 Funció θ de Jacobi

La funció θ de Jacobi es defineix $\theta\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ com:

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x}$$

I defnim també, la funció ω com:

$$\omega(x) = \sum_{n=\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} e^{-n^2\pi x} = \frac{\theta(x)-1}{2}$$

I ara hem de veure que aquestes funcions estan ben definides, és a dir, que les sèries convergeixen; i com es comporten per $x > 1$.

Lema 4.1

1. La funció $\omega(x)$ és convergent per tot $x > 0$.

2. El comportament de $\omega(x)$ per $x > 1$ és:

$$\omega(x) = \mathcal{O}(e^{-\pi x})$$

3. El mateix val per la funció $\theta(x)$.

Demostració.

$$\omega(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi x} \leq \sum_{n\geq 1} e^{-n\pi x} = \frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}}$$

On la última igualtat és certa perquè per $x > 0$ tenim que $e^{-\pi x} < 1$ i per tant la sèrie geomètrica convergeix. Així doncs, la sèrie de $\omega(x)$ convergeix per tot $x > 0$ i a més, per $x > 1$ tenim que:

$$\frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}} = \mathcal{O}(e^{-\pi x})$$

Ja que $1 - e^{-\pi x} \neq 0$, i per tant es pot fitar per una constant.

Finalment, com que $\theta(x) = 1 + 2\omega(x)$, el mateix val per $\theta(x)$. $\square$

Ara veurem la equació funcional de la funció θ.

Teorema 4.1 equació funcional de $\theta(x)$

La funció $\theta(x)$ de Jacobi satisfà la següent equació funcional:

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,\theta(x)$$

Per fer aquesta demostració necessitarem resultats de l'assignatura d'anàlisi matemàtica. Però abans, afegim una mica de notació.

Sigui $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua i monòtona a trossos. Descrivim

$$f_1(u) = \begin{cases} f(\{u\}) & \text{si } u \notin \mathbb{Z} \\ \frac{f(0)+f(1)}{2} & \text{si } u \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

I ara amb aquesta funció f_1, que és una funció periòdica de període 1, defnim els seus coeficients de Fourier:

Teorema 4.2 Expansió de Fourier.

Sigui f_1 una funció com la que acabem de veure, aleshores, la podem expressar de la següent manera:

$$f_1(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu\geq 1}(a_\nu \cos(2\pi\nu u) + b_\nu \sin(2\pi\nu u))$$

On els coeficients (anomenats coeficients de Fourier) venen donats per les següents fórmules:

$$\frac{a_\nu}{2} = \int_0^1 f(t)\cos(2\pi\nu t)dt \quad \text{i} \quad \frac{b_\nu}{2} = \int_0^1 f(t)\sin(2\pi\nu t)dt$$

Aquest teorema, degut a que és temari d'una altra assignatura, no el demostrarem. Ara donarem un altre teorema que ens serà útil per a la demostració de l'equació funcional de θ.

Teorema 4.3 Fórmula de sumació de Poisson
Sigui f una funció com abans. Sigui $A, B \in \mathbb{Z}$, amb $A < B$. Aleshores:

$$\sum_{n=A}^{B}{}' f(n) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_{a}^{B} f(t) e^{2\pi i \nu t} \mathrm{d}t$$

On $\sum'$ denota que s'ha de fer la mitjana en els extrems.

Demostració. Notem que si prenem $A = 0$ i $B = 1$, aleshores tenim que pel teorema d'expansió de Fourier:

$$\sum_{n=0}^{1}{}' f(n) = \frac{f(0)+f(1)}{2} = f_1(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t)\cos(2\pi\nu t)\mathrm{d}t$$

Per tant, com que $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t)\sin(2\pi\nu t)\mathrm{d}t = 0$, i per tant, sumar zero no afecta:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t)\cos(2\pi\nu t)\mathrm{d}t \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t)(\cos(2\pi\nu t) + \sin(2\pi\nu t))\mathrm{d}t = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t) e^{2\pi i \nu t}\mathrm{d}t$$

Que és el que volíem veure per aquests valors de A i B.

Ara, per a valors generals de A i B, només cal notar que sempre estem prenent A i B enters, i per tant, podem escriure

$$\sum_{n=A}^{B}{}' f(n) = \sum_{n=A}^{B} \sum_{i=0}^{1}{}' f(n+i) = \sum_{n=A}^{B} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(n+t) e^{2\pi i\nu t}\mathrm{d}t = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_A^B f(t) e^{2\pi i \nu t}\mathrm{d}t$$

$\square$