

# Resum de teoria pel final de MATN

*Curs 2025-2026*

BERNAT ESTEVE

2026

---

# ÍNDEX

## 1 | Capítol 1

Definicions

- |     |   |   |
|-----|---|---|
| 1.1 | Sèries de Dirichlet                                     | 4 |
| 1.2 | Funcions L  | 4 |
| 1.3 | Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$ | 6 |
| 1.4 | Productes d'Hadamard                                    | 6 |

## 2 | Capítol 2

Enunciar Abel

## 3 | Capítol 3

Demostrar 3.8 (sense veure que la integral  $I(s)$  és una funció holomorfa).

## 4 | Capítol 4

Demostració de 4.6 i assumint 4.7.

## 5 | Capítol 5

Demostració de 4.15 i assumint 4.10 i 4.14.

## 6 | Capítol 6

Demostració de 5.5. La demostració ha d'incloure els enunciats i demostracions de 5.2 i), 5.3, i 5.4 i).

## 7

## **Capítol 7**

Demostració del Teorema 5.8 (i el lema 5.6.1 i 5.7).

## **8 | Capítol 8**

Demostració de 6.8 assumint 6.9.

## **9 | Capítol 9**

Demostració de 6.5

## DEFINICIONS

## 1.1

## Sèries de Dirichlet

**Definició 1.1 Sèrie de Dirichlet**

Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{f(n)}{n^s}$$

On  $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$  és una funció aritmètica, i  $s \in \mathbb{C}$ .

**Definició 1.2 Convergència de productoris**

Sigui  $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$  una successió de complexos, aleshores el productori  $\prod z_n$  convergeix si i només si existeix el límit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n z_n$ , i aquest és no nul.

**Definició 1.3 Convergència absoluta de productoris**

Donada una seqüència  $z_n$  amb  $\Re(z_n) > 0$ , aleshores el productori  $\prod z_r$  es diu que convergeix absolutament si  $\sum \log(z_r)$  convergeix absolutament.

## 1.2

## Funcions L

**Definició 1.4 Caràcter d'un grup**

Sigui  $G$  un grup finit i abelià, aleshores un caràcter de  $G$  serà un morfisme  $\psi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$

(on  $\mathbb{C}^*$  és el grup multiplicatiu de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ )

### Definició 1.5 El grup de caràcters

Denotem per  $\widehat{G}$  al grup  $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \{\text{Caràcters de } G\}$ , on la operació és:

$$\psi, \phi: G \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{aleshores } (\psi \cdot_{\widehat{G}} \phi)(g) \mapsto \psi(g) \cdot_{\mathbb{C}^*} \phi(g)$$

I anomenarem a  $\widehat{G}$  el grup de caràcters de  $G$ .

### Definició 1.6 Caràcter mòdul $m$

Un caràcter mòdul  $m$  és un caràcter de  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ .

### Definició 1.7 Caràcter principal mòdul $m$

El caràcter principal mòdul  $m$  és  $\chi_0(a): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  definit per

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \gcd(a, m) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

### Definició 1.8 Funció $L$ associada a un caràcter de Dirichlet

La funció  $L$  associada al caràcter de Dirichlet mòdul  $m$   $\chi$  és la sèrie de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

### Definició 1.9 Funció $m$ -èsima de Dirichlet

Sigui  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , aleshores la funció  $m$ -èsima de Dirichlet es defineix com

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

On el producte recorre tots els caràcters de Dirichlet mòdul  $m$ .

### Definició 1.10 Caràcters reals i complexos.

Diem que  $\chi: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$  és un caràcter de Dirichlet real si  $\text{Im}(\chi) \subset \mathbb{R}$ . És a dir  $\text{Im}(\chi) \subset \{-1, 0, 1\}$ . I direm que és complex altrament.

### Definició 1.11 Caràcter conjugat

Direm  $\overline{\chi}$  al caràcter de Dirichlet conjugat

$$\overline{\chi}: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{que envia } a \in \mathbb{Z} \text{ a } \overline{\chi}(a) = \overline{\chi(a)}$$

I no és massa difícil de veure que aquesta funció és un caràcter de Dirichlet del mateix mòdul.

### 1.3

## Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$

### Definició 1.12 $\theta$ de Jacobi

La funció  $\theta$  de Jacobi es defineix  $\theta: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi x}$$

I definim també la funció  $\omega$  com

$$\omega(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi x} = \frac{\theta(x) - 1}{2}$$

### Definició 1.13 La funció $\Gamma$

La funció  $\Gamma$  es defineix:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x} \quad \text{per } \sigma > 0$$

### Definició 1.14 Funció de Riemann completada

Definim la funció de Riemann completada com

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

I també tenim

$$\frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \left( x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \right) \omega(x) dx + \frac{1}{2}$$

### 1.4

## Productes d'Hadamard

### Definició 1.15 Ordre d'una funció

Sigui  $f(s)$  una funció entera. Es diu que  $f$  és d'ordre menor o igual que  $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  si existeix  $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que

$$f(s) = \mathcal{O}\left(e^{|s|^\alpha}\right) \quad \text{per tot } |s| \geq r_0$$

Aleshores l'ordre de  $f$  es defineix

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f \text{ és d'ordre } \leq \alpha\}.$$

## ENUNCIAR ABEL

## 2

**Teorema 2.1 Criteri de sumació d'Abel**

Sigui  $a: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ , considerem  $A(t) := \sum_{n \leq t} a(n)$  les sumes parcials de  $a$ ; i una funció  $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  amb derivada contínua en un interval  $[x, y] \neq \emptyset$ . Aleshores

$$\sum_{x < n \leq y} a(n)g(n) = A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)dt$$

<sup>a</sup>Per alguna raó, al professor li ha agratdat considerar l'interval  $[y, x]$ , però em nego a fer servir aquesta notació.

# DEMOSTRAR 3.8 (SENSE VEURE QUE LA INTEGRAL $I(s)$ ÉS UNA FUNCió HOLOMORFA).

3

## Teorema 3.1 Teorema 8 (No donat)

Per  $\sigma > 1$ , tenim:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \underbrace{\int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) \omega(x) dx}_{=I(s)}$$

On la funció  $I(s)$  és una funció holomorfa a tot  $\mathbb{C}$ .

1. Comencem amb  $\Gamma(s)$ , i apliquem el canvi de variable  $x = n^2 \pi x$  i ho treiem tot a fora.
2. Suposem que hi ha convergència absoluta, i fem el sumatori sobre  $n \geq 1$  dels 2 costats (en un costat apareix  $\omega$  i a l'altre apareix  $\zeta$ ).
3. Separem la integral  $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ .
4. Fem el canvi de variable  $u = \frac{1}{t}$  a la integral de la esquerra.
5. Fem servir  $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\theta(x)$  i que  $2\omega(x) + 1 = \theta$ .

# DEMOSTRACIÓ DE 4.6 I ASSUMINT 4.7.

4

## Proposició 4.1 proposició 6 (Donat)

Sigui  $f$  una funció entera d'ordre  $\alpha$ . I suposem que  $f$  no té zeros. Aleshores es té que  $f = e^{g(s)}$  on  $g$  és un polinomi de grau  $\alpha$ . És a dir, que el grau d'una funció entera sense zeros ha de ser un enter.

## Proposició 4.2 proposició 7 (No donat)

Sigui  $U \subseteq \mathbb{C}$  simplement connex. Sigui  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa i sense zeros en  $U$ . Aleshores existeix  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f(s) = e^{g(s)}$  per tot  $s \in U$ .

Amb això, només ens fa falta veure que  $g$  ha de ser un polinomi.

1. Agafar la  $g(s)$  que ens dona la proposició.
2. Fitar la part real de  $g(s)$
3. Menjar-nos el que no fa falta en una constant.
4. Assumir que  $g(0) = 0$
5. Fer Taylor de  $g$ .
6. posar els summands de Taylor com a integrals amb el teorema de Cauchy
7. Calcular la integral de  $g(s)s^{n-1}$ , i fer el conjuntat.
8. Sumar 0 a  $a_n$
9. Fer el valor absolut de tot  $a_n$ .
10. Integrar  $g(s)/s$ , i veure que la integral de la part real ha de ser 0.
11. Sumar 0 a la integral que tenim de  $|a_n|$ .

# DEMOSTRACIÓ DE 4.15 I ASSUMINT 4.10 I 4.14.

5

## Teorema 5.1 Teorema 15 (Donat)

La funció zeta de Riemann completada

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

satisfà:

1. Es una funció d'ordre 1.
2. Té un nombre infinit de zeros (a la franja crítica).
3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|}$  divergeix; i  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$  convergeix  $\forall \varepsilon > 0$ .

Notem que els zeros de la funció  $\xi$  són exactament els zeros (amb multiplicitat) de  $\zeta$  en la franja crítica.

1. Notar que  $\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}$  té ordre 1.
2. Si ens centrem en  $\sigma > 0$  la funció gamma també té ordre 1 (i argumentar per què és suficient  $\sigma > 0$ ).
3. Escriure  $\zeta$  com  $\frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx$  en  $\sigma > \frac{1}{2}$ , i veure que això també és d'ordre 1 (de fet és aproximadament lineal per  $s \gg 1$ ).
4. Argumentar que  $\log(r!) \sim r \log(r)$ . (una fita és trivial, l'altre es fa comparant-ho amb una integral)
5. Estudiar  $\log(\xi)$  en  $s = r$  (un enter)
6. Estudiar  $r \rightarrow \infty$ .

7. Com que té ordre 1, pel corol·lari 14 sabem que si el sumatori convergeix aleshores la funció ha de ser  $\leq e^{C|s|}$ .
8. Raonar a partir d'aquí que hi ha d'haver un numero infinit de zeros.
9. Enunciar el corol·lari 10, i acabar la demostració.

# DEMOSTRACIÓ DE 5.5. LA DEMOSTRACIÓ HA D'INCLOURE ELS ENUNCIATS I DEMOSTRACIONS DE 5.2 I), 5.3, I 5.4 I).

6

## Lema 6.1 Lema 2 (No donat)

Per  $\sigma > 1$  es té:

$$1. \Re \log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\cos(m \log p)}{mp^{\sigma m}}$$

On en el segon apartat, la funció  $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

- Demostració.**
1. Per corol·lari 1.17 sabem que  $\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{sm}}$  a tot  $\mathbb{C}$  (per continuació analítica)
  2. trencar  $s$  en la seva part real i la seva part imaginària.
  3. Fer  $\Re(\log(\zeta(s)))$ .

□

### Lema 6.2 Lema de Mertens (no donat)

Per qualsevol  $\theta \in \mathbb{R}$ , tenim la següent desigualtat.

$$3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$$

*Demostració.* 1. Utilitzar la fórmula de l'angle doble del cosinus.

□

### Proposició 6.1 Mertens per a la funció $\zeta$ . (No donat)

Per  $\sigma > 1$ , tenim:

$$1. \zeta^3(\sigma) |\zeta^4(\sigma + it)| |\zeta(\sigma + i2t)| \geq 1,$$

*Demostració.* 1. Aplicar el lemma 2.

2. Aplicar el lemma de Mertens.

□

### Teorema 6.1 Regió lliure de zeros I (no donat)

La funció  $\zeta(s) \neq 0$  en  $\sigma = 1$  (i per la simetria de  $\zeta$ , en  $\sigma = 0$ ).

*Demostració.* 1. Suposem que  $\exists t \in \mathbb{R}$  tal que  $\zeta(1 + it) = 0$ .

2. Veure que  $t \neq 0$
3. A més  $\zeta(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma-1}$ .
4. agafem  $f$  tal que  $\zeta(\sigma + it) = (\sigma - 1)^m f(\sigma + it)$
5. Utilitzem la prop 6, i arribem a una contradicció

□

# DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 5.8 (I EL LEMA 5.6.1 I 5.7).

7

### Lema 7.1 Lema 6 (No donat)

Per  $1 < \sigma \leq 2$

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + K \quad \text{on } K \in \mathbb{R}$$

### Lema 7.2 Lema 7 (No donat)

Sigui  $\rho = \beta + i\gamma$  un zero no trivial de  $\zeta(s)$  amb  $\gamma \geq 2$ . Sigui  $s = \sigma + it$  amb  $1 < \sigma \leq 2$  i  $t \geq 2$ , aleshores

1.  $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < K \log(t)$  per  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ .
2. Si a més  $t = \gamma$ , aleshores:  $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < k \log(t) - \frac{1}{\sigma-\beta}$  per  $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

### Lema 7.3 Teorema 8 (Donat)

Existeix  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\zeta$  no té zeros a la regió  $t \geq 2$ , i  $\sigma \leq 1 - \frac{c}{\log(t)}$

*Demostració.* 1. Posem el que ens diu Mertens per  $-\frac{\zeta'}{\zeta}$ .

2. Posem  $s(t) = \sigma + it$  amb  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t)}$  de tal manera que estigui entre  $\sigma \in (1, 2]$ .
3. Prenem  $t$  l'ordenada d'algun zero no trivial de  $\zeta$ .
4. Fitem tots els termes pel que ens diuen els lemes 6 i 7.

5. Fem que totes les  $k$  siguin iguals i simplifiquem les coses de tal manera que només quedin 3 termes.
6. Fem  $\sigma = 1 + \delta/\log(t)$ .
7. Fem àlgebra i posem tot el que sobra en una constant (que per  $\delta$  prou petita, aquesta constant serà positiva).

□

# DEMOSTRACIÓ DE 6.8 ASSUMINT 6.9.

8

## Proposició 8.1 Proposició 8 (No donat)

Per  $T \gg 1$ , i  $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ , i  $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ , aleshores:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \underbrace{\left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s}}_{F(s)} ds = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma| < T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{x(\log T)^2}{T \log(x)} \right)$$

On la suma sobre  $\rho$  és una suma sobre els zeros no trivials de  $\zeta$ .

**Demostració.** 1. Prenem el contorn  $c + iT \xrightarrow{\gamma_1} -U + iT \xrightarrow{\gamma_2} -U - iT \xrightarrow{\gamma_3} c - iT \rightsquigarrow c + iT$ . Amb  $U$  senar positiu, i  $T$  no és la ordenada de cap zero.

2. Considerem la integral de  $F$  sobre aquest domini, i anomenem les integrals  $I_1, I_2, I_3$  a les integrals associades al seu camí respectiu; i  $R$  al residu.
3. Calculem el residu dels 3 tipus de pols de  $F$ .
4. Enunciem el lema 9.
5. Calculem el límit  $U \rightarrow \infty$ .

## Lema 8.1 Lema 9 (No donat)

Les integrals:

$$I_1, I_3 = \mathcal{O} \left( \frac{x(\log T)^2}{T \log x} \right)$$

$$I_2 = \mathcal{O} \left( \frac{T \log U}{U x^U} \right)$$

□

## 9

## DEMOSTRACIÓ DE 6.5

**Lema 9.1 Lema 5 (Donat)**

Sigui

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Aleshores, per  $y > 0$ ,  $c > 0$ ,  $T > 0$ :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds - \delta(y) \right| < \begin{cases} \frac{y^c}{T|\log y|} & \text{si } y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

**Demostració.**

1. Cas 1:  $y \in (0, 1)$ . Considerem el domini  $c - iT \xrightarrow{\gamma_1} U - iT \xrightarrow{\gamma_2} U + iT \xrightarrow{\gamma_3} c + iT$
2. Fitem la  $|I_2|$ .
3. Fem  $\lim_{U \rightarrow \infty}$ .
4. Fem  $|\sigma - iT| > |T|$ , integrem, i ho ajuntem tot.
5. Cas 2:  $y > 1$ . Considerem el domini  $c - iT \xrightarrow{\gamma_1} -U - iT \xrightarrow{\gamma_2} -U + iT \xrightarrow{\gamma_3} c + iT$
6. Calculem el residu en  $s = 0$ . I calculem les integrals com ho hem fet abans.
7. Cas 3:  $y = 1$ . Calculem la integral directament.
8. Argumentem per paritat per carregar-nos la part senar. I per la part parella fem un canvir d'integral per tenir la integral de l'arctangent.
9. Calculem  $|I - \delta(y)|$ , on fitem  $1/1 + u^2 < 1/u^2$  i aconseguim la fita de l'enunciat.

□