

Resum de teoria pel final de MATN

Curs 2025-2026

BERNAT ESTEVE

2026

ÍNDIX

1 | Capítol 1

Definicions

- 1.1 Sèries de Dirichlet 4
- 1.2 Funcions L 4
- 1.3 Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$ 6
- 1.4 Productes d'Hadamard 6

2 | Capítol 2

Enunciar Abel

3 | Capítol 3

Demostrar 3.8 (sense veure que la integral $I(s)$ és una funció holomorfa).

4 | Capítol 4

Demostració de 4.6 i assumint 4.7.

5 | Capítol 5

Demostració de 4.15 i assumint 4.10 i 4.14.

6 | Capítol 6

Demostració de 5.5. La demostració ha d'incloure els enunciats i demostracions de 5.2 i), 5.3, i 5.4 i).

7

Capítol 7

Demostració del Teorema 5.8 (i el lema 5.6.1 i 5.7).

8

Capítol 8

Demostració de 6.8 assumint 6.9.

9

Capítol 9

Demostració de 6.5

DEFINICIONS

1.1 Sèries de Dirichlet

Definició 1.1 Sèrie de Dirichlet

Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{f(n)}{n^s}$$

On $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ és una funció aritmètica, i $s \in \mathbb{C}$.

Definició 1.2 Convergència de productoris

Sigui $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ una successió de complexos, aleshores el productori $\prod z_n$ convergeix si i només si existeix el límit $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n z_n$, i aquest és no nul.

Definició 1.3 Convergència absoluta de productoris

Donada una seqüència z_n amb $\Re(z_n) > 0$, aleshores el productori $\prod z_n$ es diu que convergeix absolutament si $\sum \log(z_n)$ convergeix absolutament.

1.2 Funcions L

Definició 1.4 Caràcter d'un grup

Sigui G un grup finit i abelià, aleshores un caràcter de G serà un morfisme $\psi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$

(on \mathbb{C}^* és el grup multiplicatiu de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Definició 1.5 El grup de caràcters

Denotem per \widehat{G} al grup $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \{\text{Caràcters de } G\}$, on la operació és:

$$\psi, \phi: G \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{aleshores } (\psi \cdot_{\widehat{G}} \phi)(g) \mapsto \psi(g) \cdot_{\mathbb{C}^*} \phi(g)$$

I anomenarem a \widehat{G} el grup de caràcters de G .

Definició 1.6 Caràcter mòdul m

Un caràcter mòdul m és un caràcter de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

Definició 1.7 Caràcter principal mòdul m

El caràcter principal mòdul m és $\chi_0(a): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ definit per

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \text{gcd}(a, m) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Definició 1.8 Funció L associada a un caràcter de Dirichlet

La funció L associada al caràcter de Dirichlet mòdul m χ és la sèrie de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

.

Definició 1.9 Funció m -èsima de Dirichlet

Sigui $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, aleshores la funció m -èsima de Dirichlet es defineix com

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

On el producte recorre tots els caràcters de Dirichlet mòdul m .

Definició 1.10 Caràcters reals i complexos.

Diem que $\chi: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ és un caràcter de Dirichlet real si $\text{Im}(\chi) \subset \mathbb{R}$. És a dir $\text{Im}(\chi) \subset \{-1, 0, 1\}$. I direm que és complex altrament.

Definició 1.11 Caràcter conjugat

Direm $\overline{\chi}$ al caràcter de Dirichlet conjugat

$$\overline{\chi}: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{que envia } a \in \mathbb{Z} \text{ a } \overline{\chi(a)} = \overline{\chi(a)}$$

I no és massa difícil de veure que aquesta funció és un caràcter de Dirichlet del mateix mòdul.

1.3 Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$

Definició 1.12 θ de Jacobi

La funció θ de Jacobi es defineix $\theta: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi x}$$

I definim també la funció ω com

$$\omega(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi x} = \frac{\theta(x) - 1}{2}$$

Definició 1.13 La funció Γ

La funció Γ es defineix:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x} \quad \text{per } \sigma > 0$$

Definició 1.14 Funció de Riemann completada

Definim la funció de Riemann completada com

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

I també tenim

$$\frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \right) \omega(x) dx + \frac{1}{2}$$

1.4 Productes d'Hadamard

Definició 1.15 Ordre d'una funció

Sigui $f(s)$ una funció entera. Es diu que f és d'ordre menor o igual que $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ si existeix $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$f(s) = \mathcal{O}\left(e^{|s|^\alpha}\right) \quad \text{per tot } |s| \geq r_0$$

Aleshores l'ordre de f es defineix

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f \text{ és d'ordre } \leq \alpha\}.$$

ENUNCIAR ABEL

Teorema 2.1 Criteri de sumació d'Abel

Sigui $a: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$, considerem $A(t) := \sum_{n \leq t} a(n)$ les sumes parcials de a ; i una funció $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ amb derivada contínua en un interval $[x, y] \neq \emptyset$ ^a. Aleshores

$$\sum_{x < n \leq y} a(n)g(n) = A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)dt$$

^aPer alguna raó, al professor li ha agradat considerar l'interval $[y, x]$, però em nego a fer servir aquesta notació.

DEMOSTRAR 3.8 (SENSE VEURE QUE LA INTEGRAL $I(s)$ ÉS UNA FUNCIÓ HOLOMORFA).

3

Teorema 3.1 Teorema 8 (No donat)

Per $\sigma > 1$, tenim:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \underbrace{\int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) \omega(x) dx}_{=I(s)}$$

On la funció $I(s)$ és una funció holomorfa a tot \mathbb{C} .

1. Comencem amb $\Gamma(s)$, i apliquem el canvi de variable $x = n^2 \pi x$ i ho treiem tot a fora.
2. Suposem que hi ha convergència absoluta, i fem el sumatori sobre $n \geq 1$ dels 2 costats (en un costat apareix ω i a l'altre apareix ζ).
3. Separem la integral $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$.
4. Fem el canvi de variable $u = \frac{1}{t}$ a la integral de la esquerra.
5. Fem servir $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x} \theta(x)$ i que $2\omega(x) + 1 = \theta$.

DEMOSTRACIÓ DE 4.6 I ASSUMINT 4.7.

4

Proposició 4.1 proposició 6 (Donat)

Sigui f una funció entera d'ordre α . I suposem que f no té zeros. Aleshores es té que $f = e^{g(s)}$ on g és un polinomi de grau α . És a dir, que el grau d'una funció entera sense zeros ha de ser un enter.

Proposició 4.2 proposició 7 (No donat)

Sigui $U \subseteq \mathbb{C}$ simplement connex. Sigui $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa i sense zeros en U . Aleshores existeix $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(s) = e^{g(s)}$ per tot $s \in U$.

Amb això, només ens fa falta veure que g ha de ser un polinomi.

1. Agafar la $g(s)$ que ens dona la proposició.
2. Fitar la part real de $g(s)$
3. Menjar-nos el que no fa falta en una constant.
4. Assumir que $g(0) = 0$
5. Fer Taylor de g .
6. posar els summands de Taylor com a integrals amb el teorema de Cauchy
7. Calcular la integral de $g(s)s^{n-1}$, i fer el conjugat.
8. Sumar 0 a a_n
9. Fer el valor absolut de tot a_n .
10. Integrar $g(s)/s$, i veure que la integral de la part real ha de ser 0.
11. Sumar 0 a la integral que tenim de $|a_n|$.

DEMOSTRACIÓ DE 4.15 I ASSUMINT 4.10 I 4.14.

5

Teorema 5.1 Teorema 15 (Donat)

La funció zeta de Riemann completada

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

satisfà:

1. Es una funció d'ordre 1.
2. Té un nombre infinit de zeros (a la franja crítica).
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|}$ divergeix; i $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$ convergeix $\forall \varepsilon > 0$.

Notem que els zeros de la funció ξ són exactament els zeros (amb multiplicat) de ζ en la franja crítica.

1. Notar que $\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}$ té ordre 1.
2. Si ens centrem en $\sigma > 0$ la funció gamma també té ordre 1 (i argumentar per què és suficient $\sigma > 0$).
3. Escriure ζ com $\frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}dx$ en $\sigma > \frac{1}{2}$, i veure que això també és d'ordre 1 (de fet és aproximadament lineal per $s \gg 1$).
4. Argumentar que $\log(r!) \sim r \log(r)$. (una fita és trivial, l'altre es fa comparant-ho amb una integral)
5. Estudiar $\log(\xi)$ en $s = r$ (un enter)
6. Estudiar $r \rightarrow \infty$.

7. Com que té ordre 1, pel corol·lari 14 sabem que si el sumatori convergeix aleshores la funció ha de ser $\leq e^{C|s|}$.
8. Raonar a partir d'aquí que hi ha d'haver un numero infinit de zeros.
9. Enunciar el corol·lari 10, i acabar la demostració.

DEMOSTRACIÓ DE 5.5. LA DEMOSTRACIÓ HA D'INCLOURE ELS ENUNCIATS I DEMOSTRACIONS DE 5.2 I), 5.3, I 5.4 I).

6

Lema 6.1 Lema 2 (No donat)

Per $\sigma > 1$ es té:

$$1. \Re \log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\cos(mt \log p)}{mp^{\sigma m}}$$

On en el segon apartat, la funció $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

- Demostració.** 1. Per corol·lari 1.17 sabem que $\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{sm}}$ a tot \mathbb{C} (per continuació analítica)
2. trencar s en la seva part real i la seva part imaginària.
3. Fer $\Re(\log(\zeta(s)))$.

□

Lema 6.2 Lema de Mertens (no donat)

Per qualsevol $\theta \in \mathbb{R}$, tenim la següent desigualtat.

$$3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$$

Demostració. 1. Utilitzar la fórmula de l'angle doble del cosinus.

□

Proposició 6.1 Mertens per a la funció ζ . (No donat)

Per $\sigma > 1$, tenim:

1. $\zeta^3(\sigma) |\zeta^4(\sigma + it)| |\zeta(\sigma + i2t)| \geq 1,$

Demostració. 1. Aplicar el lema 2.

2. Aplicar el lema de Mertens.

□

Teorema 6.1 Regió lliure de zeros I (no donat)

La funció $\zeta(s) \neq 0$ en $\sigma = 1$ (i per la simetria de ζ , en $\sigma = 0$).

Demostració. 1. Suposem que $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $\zeta(1 + it) = 0$.

2. Veure que $t \neq 0$

3. A més $\zeta(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma-1}$.

4. agafem f tal que $\zeta(\sigma + it) = (\sigma - 1)^m f(\sigma + it)$

5. Utilitzem la prop 6, i arribem a una contradicció

□

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 5.8 (I EL LEMA 5.6.1 I 5.7).

7

Lema 7.1 Lema 6 (No donat)

Per $1 < \sigma \leq 2$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{\sigma-1} + K \quad \text{on } K \in \mathbb{R}$$

Lema 7.2 Lema 7 (No donat)

Sigui $\rho = \beta + i\gamma$ un zero no trivial de $\zeta(s)$ amb $\gamma \geq 2$. Sigui $s = \sigma + it$ amb $1 < \sigma \leq 2$ i $t \geq 2$, aleshores

1. $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < K \log(t)$ per $k \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. Si a més $t = \gamma$, aleshores: $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < k \log(t) - \frac{1}{\sigma-\beta}$ per $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Lema 7.3 Teorema 8 (Donat)

Existeix $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que ζ no té zeros a la regió $t \geq 2$, i $\sigma \leq 1 - \frac{c}{\log(t)}$

Demostració. 1. Posem el que ens diu Mertens per $-\frac{\zeta'}{\zeta}$.

2. Posem $s(t) = \sigma + it$ amb $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t)}$ de tal manera que estigui entre $\sigma \in (1, 2]$.

3. Prenem t l'ordenada d'algun zero no trivial de ζ .

4. Fitem tots els termes pel que ens diuen els lemes 6 i 7.

5. Fem que totes les k siguin iguals i simplifiquem les coses de tal manera que només quedin 3 termes.
6. Fem $\sigma = 1 + \delta/\log(t)$.
7. Fem àlgebra i posem tot el que sobra en una constant (que per δ prou petita, aquesta constant serà positiva).

□

DEMOSTRACIÓ DE 6.8

ASSUMINT 6.9.



Proposició 8.1 Proposició 8 (No donat)

Per $T \gg 1$, i $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, i $c = 1 + \frac{1}{\log x}$, aleshores:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \underbrace{\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s}}_{F(s)} ds = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{x(\log T)^2}{T \log(x)} \right)$$

On la suma sobre ρ és una suma sobre els zeros no trivials de ζ .

- Demostració.** 1. Prenem el contorn $c + iT \xrightarrow{\gamma_1} -U + iT \xrightarrow{\gamma_2} -U - iT \xrightarrow{\gamma_3} c - iT \rightsquigarrow c + iT$.
 Amb U senar positiu, i T no és la ordenada de cap zero.
2. Considerem la integral de F sobre aquest domini, i anomenem les integrals I_1, I_2, I_3 a les integrals associades al seu camí respectiu; i R al residu.
3. Calculem el residu dels 3 tipus de pols de F .
4. Enunciem el lema 9.
5. Calculem el límit $U \rightarrow \infty$.

Lema 8.1 Lema 9 (No donat)

Les integrals:

$$I_1, I_3 = \mathcal{O} \left(\frac{x(\log T)^2}{T \log x} \right)$$

$$I_2 = \mathcal{O} \left(\frac{T \log U}{U x^U} \right)$$

DEMOSTRACIÓ DE 6.5

Lema 9.1 Lema 5 (Donat)

Sigui

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Aleshores, per $y > 0$, $c > 0$, $T > 0$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds - \delta(y) \right| < \begin{cases} \frac{y^c}{T |\log y|} & \text{si } y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

- Demostració.**
1. Cas 1: $y \in (0, 1)$. Considerem el domini $c - iT \xrightarrow{\gamma_1} U - iT \xrightarrow{\gamma_2} U + iT \xrightarrow{\gamma_3} c + iT$
 2. Fitem la $|I_2|$.
 3. Fem $\lim_{U \rightarrow \infty}$.
 4. Fem $|\sigma - iT| > |T|$, integrem, i ho ajuntem tot.
 5. Cas 2: $y > 1$. Considerem el domini $c - iT \xrightarrow{\gamma_1} -U - iT \xrightarrow{\gamma_2} -U + iT \xrightarrow{\gamma_3} c + iT$
 6. Calculem el residu en $s = 0$. I calculem les integrals com ho hem fet abans.
 7. Cas 3: $y = 1$. Calculem la integral directament.
 8. Argumentem per paritat per carregar-nos la part senar. I per la part parella fem un canvir d'integral per tenir la integral de l'arctangent.
 9. Calculem $|I - \delta(y)|$, on fitem $1/1 + u^2 < 1/u^2$ i aconseguim la fita de l'enunciat.

□