Mètodes analítics en teoria de nombres

Bernat Esteve i Luis M. Villabón

2025

ÍNDEX

Capítol 7
Demostració de de la Vallée-Poussin que $L(\chi, 1) \neq 0$ si χ és un caràcter de Dirichlet real no principal.

8

Capítol 8
Enunciat i demostració del Lema 3, §3.

9

Capítol 9
Demostració del Teorema 8, §3 (sense la part final de veure que la integral $I(s)$ defineix una funció holomorfa).

CAPÍTOL

DEFINICIONS 1

1.1 Sèries de Dirichlet

Definició 1.1 Sèrie de Dirichlet
Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{f(n)}{n^s}$$

On $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ és una funció aritmètica, i $s \in \mathbb{C}$.

Definició 1.2 Convergència de productoris
Sigui $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ una successió de complexos, aleshores el productori $\prod z_n$ convergeix si i només si existeix el límit $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n z_n$, i aquest és no nul.

Definició 1.3 Convergència absoluta de productoris
Donada una seqüència z_n amb $\Re(z_n) > 0$, aleshores el productori $\prod z_r$ es diu que convergeix absolutament si $\sum \log(z_r)$ convergeix absolutament.

1.2 Funcions L

Definició 1.4 Caràcter d'un grup
Sigui G un grup finit i abelià, aleshores un caràcter de G serà un morfisme $\psi\colon G \to \mathbb{C}^*$

(on $\mathbb{C}^*$ és el grup multiplicatiu de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Definició 1.5 El grup de caràcters
Denotem per $\widehat{G}$ al grup $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \{\text{Caràcters de G}\}$, on la operació és:

$$\psi, \phi \colon G \to \mathbb{C}^* \qquad \text{aleshores } (\psi \cdot_{\widehat{G}} \phi)(g) \mapsto \psi(g) \cdot_{\mathbb{C}^*} \phi(g)$$

I anomenarem a $\widehat{G}$ el grup de caràcters de G.

Definició 1.6 Caràcter mòdul m
Un caràcter mòdul m és un caràcter de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

Definició 1.7 Caràcter principal mòdul m
El caràcter principal mòdul m és $\chi_0(a) \colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ definit per

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \gcd(a, m) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Definició 1.8 Funció L associada a un caràcter de Dirichlet
La funció L associada al caràcter de Dirichlet mòdul m χ és la sèrie de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

.

Definició 1.9 Funció m-èsima de Dirichlet
Sigui $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, aleshores la funció m-èsima de Dirichlet es defineix com

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

On el producte recorre tots els caràcters de Dirichlet mòdul m.

Definició 1.10 Caràcters reals i complexos.
Diem que $\chi \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ és un caràcter de Dirichlet real si $\mathrm{Im}(\chi) \subset \mathbb{R}$. És a dir $\mathrm{Im}(\chi) \subset \{-1, 0, 1\}$. I direm que és complex altrament.

Definició 1.11 Caràcter conjugat
Direm $\overline{X}$ al caràcter de Dirichlet conjugat

$$\overline{X} \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C} \qquad \text{que envia } a \in \mathbb{Z} \text{ a } \overline{\chi}(a) = \overline{\chi(a)}$$

I no és massa difícil de veure que aquesta funció és un caràcter de Dirichlet del mateix mòdul.

1.3 Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$

Definició 1.12 ***θ* de Jacobi**
La funció θ de Jacobi es defineix $\theta\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x}$$

I definim també la funció ω com

$$\omega(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi}x = \frac{\theta(x)-1}{2}$$

Definició 1.13 **La funció Γ**
La funció Γ es defineix:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^s\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \text{per } \sigma > 0$$

Definició 1.14 **Funció de Riemann completada**
Definim la funció de Riemann completada com

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

I també tenim
$$\frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right)\omega(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}$$

1.4 Productes d'Hadamard

Definició 1.15 Ordre d'una funció

Sigui $f(s)$ una funció entera. Es diu que f és d'ordre menor o igual que $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ si existeix $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$f(s) = \mathcal{O}\left(e^{|s|^\alpha}\right) \qquad \text{per tot } |s| \geq r_0$$

Aleshores l'ordre de f es defineix

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} | f \text{ és d'ordre } \leq \alpha\}.$$

CAPÍTOL

ENUNCIAT SENSE DEMOSTRACIÓ DEL CRITERI DE SUMACIÓ D'ABEL (TEOREMA 4,CAPÍTOL 1)

2

Teorema 2.1 **Criteri de sumació d'Abel**
Sigui $a\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$, considerem $A(t) := \sum_{n\leq t} a(n)$ les sumes parcials de a; i una funció $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ amb derivada contínua en un interval $[x, y] \neq \varnothing$[a]. Aleshores

$$\sum_{x<n\leq y} a(n)g(n) = A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

[a] Per alguna raó, al professor li ha agradat considerar l'interval $[y, x]$, però em nego a fer servir aquesta notació.

CAPÍTOL

EXISTÈNCIA DEL SEMIPLÀ DE CONVERGÈNCIA: **DEMOSTRACIÓ** DEL LEMA 5, §1; I ENUNCIAT I DEMOSTRACIÓ DEL LEMA 6, §1. 3

Lema 3.1 Fita tècnica
Suposem que $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^{s_0}}$ té sumes parcials fitades en $s_0 \in \mathbb{C}$, és a dir: existeix una fita $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\left|\sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n_0^s}\right| \leq M$ per $x \geq 1$, aleshores per $s \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma > \sigma_0$ tenim:

$$\left|\sum_{a<n\leq b} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq 2Ma^{\sigma_0-\sigma}\left(1+\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\right)$$

Demostració.

1. Abel amb $a = \frac{f(n)}{n^{s_0}}$ i $g = t^{s_0-s}$.
2. ens queda això: $Mb^{s_0-s} + Ma^{s_0-s} + M|s_0-s| \int_a^b \left|t^{s_0-s-1}\right| \mathrm{d}t$
3. I d'aquí ja es pot veure com s'acaba.

□

Lema 3.2 **Semiplà de convergència**

Donada una sèrie de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$, aleshores aquesta convergeix si i només si $\sigma > \sigma_c$ per alguna $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. De la mateixa manera que abans, aquesta σ_c rep un nom: es diu σ de convergència.

Demostració.

1. apliquem el lema anterior.

$\square$

CAPÍTOL

ENUNCIAT I DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA DE LANDAU (TEOREMA 13, CAPÍTOL 1).

4

Teorema 4.1 Landau

Sigui $F(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^S}$ una sèrie de Dirichlet que convergeix per $\sigma > c \in \mathbb{R}$. Si a més, tenim:

1. Que $f(n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ per tota $n \geq n_0$,

2. i suposem que $F(s)$ estén a una funció holomorfa en un disc al voltant de c.

Aleshores, $F(s)$ convergeix per $\sigma > c - \varepsilon$ per alguna $\varepsilon > 0$.

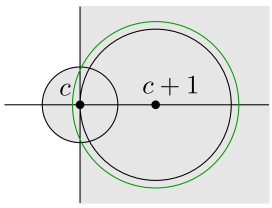

Figura 4.1: La zona pintada de gris és la zona en que F és holomorfa.

Demostració.

1. Fem sèrie de potències al voltant de $c+1$. Per hipòtesi $R > 1$.

2. $F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}(\log(n))^k$.

3. Sabem que podem reordenar, ja que tenim: $f(n) > 0$ i la sèrie convergeix $\implies$ convergència absoluta $\implies$ podem reordenar.

4. Sabem que $F(c-\varepsilon)$, (ja que $R > 1$), i per tant, hem d'aconseguir posar-la com a sèries de potències.

5. fem aparèixer la sèrie de l'exponencial.

6. Ens queda: $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^{c-\varepsilon}}$.

□

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 2,§2. 5

Proposició 5.1 Extensió de caràcters de subgrups
Sigui $H \leq G$ subgrup. Tot caràcter de H estén a un caràcter de G.

Demostració.

1. Cas 1: $H = G$.

2. Cas 2: veure que un caràcter $\psi\colon H \to \mathbb{C}^\times$ estén a un caràcter $\psi'\colon \langle H, x\rangle \to \mathbb{C}^\times$.

3. Com que G és abelià, podem escriure els elements de $H' := \langle H, x\rangle$ com hx^a. Com que G és finit, x té ordre finit, i per tant, sigui $n = \mathrm{ord}(x)$.

4. Sigui ω tal que $\psi(x^n) = \omega^n$

5. Definim $\psi'(hx^a) = \psi(h)\omega^a$.

6. Hem de veure que està ben definida.

7. Hem de veure que és un morfisme.

$\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 11, §2 (ES PODEN ASSUMIR ELS LEMES 7, 8 I LA PROPOSICIÓ 10).

6

Lema 6.1 Convergència de les funcions L de caràcters no principals
Si $\chi \neq \chi_0$, llavors $L(\chi, s)$ té

(i) $\sigma_c = 0$, per tant $L(\chi, s)$ és holomorfa per $\sigma > 0$.

(ii) $\sigma_a > 1$, per tant té una factorització

$$L(\chi, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^{-s}}},$$

atès que χ és completament multiplicativa. En particular, no s'anul·la per $\sigma > 1$.

Lema 6.2 Continuació meromorfa de $L(\chi_0, s)$
Si χ_0 és el caràcter principal, aleshores:

$$L(\chi, s) = \zeta(s) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \qquad \text{per } \sigma > 1.$$

En particular $L(\chi, s)$ té continuació meromorfa en el semiplà a la dreta del 0 amb un únic pol simple en $s = 1$.

Proposició 6.1 Producte d'Euler, i sèrie de Dirichlet de ζ_m.
Es té:

1. $\zeta_m(s) = \prod_{p \nmid m}(1 - p^{-f_p s})^{-\frac{\varphi(m)}{f_p}}$ per $\sigma > 1$; i on f_p és l'ordre de p a $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$.

2. $\zeta_m(s)$ admet una expressió com a sèrie de Dirichlet amb coeficients a $\mathbb{Z} \geq 0$ (en particular, $\mathbb{R}_{\geq 0}$) per a $\sigma > 1$.

Teorema 6.1 Les funcions $L(\chi, s)$ no s'anul·len en $s = 1$

1. La funció $\zeta_m(s)$ té un pol simple a $s = 1$.

2. $L(\chi, 1) \neq 0$ si $\chi \neq \chi_0$.

Demostració. 1. Només fa falta veure el primer apartat. (veure perquè)

2. Suposem que hi ha alguna $L(\chi, 1) = 0$. Aleshores, $\zeta_m(s)$ ha de ser holomorfa per $\sigma > 0$. I per tant, com que els coeficients són enters posistius, per Landau tenim que la sèrie ha de convergir per $\sigma > 0$.

3. Escriure la sèrie com a la prop 6.1: $\prod_{p|m}(1 - p^{-f_p s})^{-\frac{\varphi(m)}{f_p}}$.

4. Sèrie geomètrica.

5. Entrar l'exponent a cada terme.

6. Simplificar fins a arribar a $\sum \frac{1}{n^{s\phi(m)}}$ que no convergeix per $s = \frac{1}{\varphi(m)}$. Que contradiu el que hem vist de que la convergència arriba fins al $s = 0$.

$\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE DE LA VALLÉE-POUSSIN QUE $L(\chi, 1) \neq 0$ SI χ ÉS UN CARÀCTER DE DIRICHLET REAL NO PRINCIPAL. 7

Proposició 7.1 **$L(\chi, 1)$ no s'anul·la si χ és real no principal.**
Si χ és un caràcter complex, aleshores $L(\chi, 1) \neq 0$.

Demostració.

1. Considerem $\psi(s) = \frac{L(\chi,s)L(\chi_0,s)}{L(\chi,2s)}$.

2. raonar que el numerador de ψ és holomorf per $\sigma > 0$.

3. Calcular $\lim_{\substack{s\to\frac{1}{2} \\ s\in\mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}}} \psi(s) = 0$.

4. Expandim la definició de funcions L per $\sigma > 1$ (que sabem que hi ha convergència absoluta).

5. Ens queda $\prod_{p\nmid m} \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}$.

6. Sèrie geomètrica.

7. Definir $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}=\prod(1+p^{-s})(1+p^{-s}+p^{-2s}+\dots)=\psi(s)$.

8. Fer sèries de potències al voltant de $s=2$, i com que sabem que ψ és holomorfa per $\sigma>\frac{1}{2}$, tenim $R\geq\frac{3}{2}$.

9. Definim $b_k=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n(\log(n))^k}{n^2}$ (és $\psi^{(k)}(2)$ sense els signes).

10. Tornem a calcular el límit d'abans en un entorn de $s=\frac{1}{2}$, i ens surt que el límit ha de ser ≥ 1.

$\square$

CAPÍTOL

ENUNCIAT I DEMOSTRACIÓ DEL LEMA 3, §3. 8

Lema 8.1 La funció Γ és holomorfa.
La funció $\Gamma(s)$ és holomorfa per $\sigma > 0$.

Demostració.

1. Definim $\Gamma_n := \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-x} x^s \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
2. Γ_n és holomorfa: utilitzem el següen teorema: Si $F\colon \{\sigma > 0\} \times [\frac{1}{n}, n] \to \mathbb{C}$ tal que $F(s, x_0)$ és holomorfa i F és contínua sobre $\{\sigma > 0\} \times [\frac{1}{n}, n]$; aleshores $\int_{\frac{1}{n}}^{n} F(s, x)\mathrm{d}x$ és holomorfa.
3. Separem $|\Gamma(s) - \Gamma_n(s)| \leq |I_0| + |I_1|$, on I_0 i I_1 són les integrals dels costats. Volem veure que convergeixen uniformement sobre tots els compactes.
4. Agafem els rectangles $K(m, N, R)$, i veiem que convergeixen uniformement.
5. $|I_0| < \frac{1}{mn^{-m}}$; i $|I_1| < 2Ce^{-\frac{n}{2}}$.

$\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 8, §3 (SENSE LA PART FINAL DE VEURE QUE LA INTEGRAL $I(s)$ DEFINEIX UNA FUNCIÓ HOLOMORFA). 9

Teorema 9.1
Per $\sigma > 1$, tenim:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \underbrace{\int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)\mathrm{d}x}_{=I(s)}$$

On la funció $I(s)$ és una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$.

Demostració.

1. Comencem amb $\Gamma(s)$, i apliquem el canvi de variable $x = n^2\pi x$ i ho treiem tot a fora.

2. Suposem que hi ha convergència absoluta, i fem el sumatori sobre $n \geq 1$ dels 2 costats (en un costat apareix ω i a l'altre apareix ζ).

3. Separem la integral $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$.

4. Fem el canvi de varible $u = \frac{1}{t}$ a la integral de la esquerra.

5. Fem servir $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\theta(x)$ i que $2\omega(x) + 1 = \theta$.

$\square$