TSTST 2018 Per un enter $n > 0$ definim $\mathcal{F}(n)$ com el conjunt de $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que el polinomi

$$p(x) = x^2 + mx + n$$

té alguna arrel entera.

1. sigui S el conjunt de n tals que $\mathcal{F}(n)$ conté 2 números consecutius. Aleshores, demostra que S és infinit i que tenim:

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} \leq 1.$$

Pistes:

1. Els $n \in S$ menors que 100, són: 4, 12, 24, 36, 40, 60, 72.

2. Què diuen les fòrmules de Vieta?

3. Pots calcular $\mathcal{F}(n)$ donat que $n = 60$, per exemple?

Solució: Notem què diuen les fòrmules de Vieta: si a i b són arrels de $p(x) = x^2 + mx + n$, aleshores tenim:

$$p(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x^2 - (x_1 + x_1)x + x_0 x_1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 + x_1 = -m \text{ i } x_0 x_1 = n.$$

Per tant, sabem que si $n \in S$, aleshores, existeixen dos d_1, $d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ divisors de n tals que

$$m = \underbrace{\frac{n}{d_1}}_{k_1} + d_1 \qquad m + 1 = \underbrace{\frac{n}{d_2}}_{k_2} + d_2$$

són consecutius. Per tant, podem escriure:

$$n = abcd$$

On $ab = k_1$, $cd = d_1$; i $ac = k_2$, $bd = d_2$. Si fem aquest canvi de variables:

$$\begin{aligned} ab + cd &= m + 1 \\ ac + bd &= m \end{aligned}$$

Per tant:

$$1 = ab + cd - ac - bd = a(b - c) - d(b - c) = (a - d)(b - c)$$

Però com que estem sobre els enters, la única manera de multiplicar 2 números i que doni 1 ha de ser amb $(+1)(+1)$ o $(-1)(-1)$. Per tant, si $a - d = 1 = b - c$, aleshores aconseguim que $n = (c^2 + c)(d^2 + d)$. I si fem $a - d = -1 = b - c$ ens dona $n = (a^2 + a)(b^2 + b)$, que és el mateix que teníem abans.

Ara per veure quant val el sumatori:

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} \leq \sum_{a \geq 1} \sum_{b \geq 1} \frac{1}{(a+1)a(b+1)b} = \sum_{a \geq 1} \frac{1}{(a+1)a} \sum_{b \geq 1} \frac{1}{(b+1)b}$$

Però notem que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$$

Que ens dona que el sumatori és exactament 1; que és el que volíem veure.