pel final de mètodes analítics en teoria de nombres

Curs 2025-2026

Bernat Esteve

2026

ÍNDEX

7

Capítol 7

Demostració del Teorema 8 §5, donat el seu enunciat. A la demostració cal ser capaç d'enunciar el Lema 6 i) i el Lema 7 de capítol 5 amb les seves dues parts (però no cal donar les demostracions dels lemes).

8

Capítol 8

Demostració de la Proposició 8 de capítol 6 assumint el Lema 9 (l'enunciat del qual cal recordar).

9

Capítol 9

Demostració de Lema 5 del capítol 6 donat el seu enunciat.

CAPÍTOL

DEFINICIONS 1

1.1 Sèries de Dirichlet

Definició 1.1 Sèrie de Dirichlet

Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{f(n)}{n^s}$$

On $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ és una funció aritmètica, i $s \in \mathbb{C}$.

Definició 1.2 Convergència de productoris

Sigui $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ una successió de complexos, aleshores el productori $\prod z_n$ convergeix si i només si existeix el límit $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} z_n$, i aquest és no nul.

Definició 1.3 Convergència absoluta de productoris

Donada una seqüència z_n amb $\Re(z_n) > 0$, aleshores el productori $\prod z_r$ es diu que convergeix absolutament si $\sum \log(z_r)$ convergeix absolutament.

1.2 Funcions L

Definició 1.4 Caràcter d'un grup

Sigui G un grup finit i abelià, aleshores un caràcter de G serà un morfisme $\psi\colon G \to \mathbb{C}^*$

(on $\mathbb{C}^*$ és el grup multiplicatiu de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Definició 1.5 El grup de caràcters

Denotem per $\widehat{G}$ al grup $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \{\text{Caràcters de G}\}$, on la operació és:

$$\psi, \phi \colon G \to \mathbb{C}^* \qquad \text{aleshores } (\psi \cdot_{\widehat{G}} \phi)(g) \mapsto \psi(g) \cdot_{\mathbb{C}^*} \phi(g)$$

I anomenarem a $\widehat{G}$ el grup de caràcters de G.

Definició 1.6 Caràcter mòdul m

Un caràcter mòdul m és un caràcter de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

Definició 1.7 Caràcter principal mòdul m

El caràcter principal mòdul m és $\chi_0(a) \colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ definit per

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \gcd(a, m) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Definició 1.8 Funció L associada a un caràcter de Dirichlet

La funció L associada al caràcter de Dirichlet mòdul m χ és la sèrie de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

.

Definició 1.9 Funció m-èsima de Dirichlet

Sigui $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, aleshores la funció m-èsima de Dirichlet es defineix com

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

On el producte recorre tots els caràcters de Dirichlet mòdul m.

Definició 1.10 Caràcters reals i complexos.

Diem que $\chi \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ és un caràcter de Dirichlet real si $\mathrm{Im}(\chi) \subset \mathbb{R}$. És a dir $\mathrm{Im}(\chi) \subset \{-1, 0, 1\}$. I direm que és complex altrament.

Definició 1.11 Caràcter conjugat

Direm $\overline{X}$ al caràcter de Dirichlet conjugat

$$\overline{X} \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C} \qquad \text{que envia } a \in \mathbb{Z} \text{ a } \overline{\chi}(a) = \overline{\chi(a)}$$

I no és massa difícil de veure que aquesta funció és un caràcter de Dirichlet del mateix mòdul.

1.3 Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$

Definició 1.12 **θ de Jacobi**
La funció θ de Jacobi es defineix $\theta\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x}$$

I definim també la funció ω com

$$\omega(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi} x = \frac{\theta(x)-1}{2}$$

Definició 1.13 **La funció Γ**
La funció Γ es defineix:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \text{per } \sigma > 0$$

Definició 1.14 **Funció de Riemann completada**
Definim la funció de Riemann completada com

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

I també tenim

$$\frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right)\omega(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}$$

1.4 Productes d'Hadamard

Definició 1.15 Ordre d'una funció

Sigui $f(s)$ una funció entera. Es diu que f és d'ordre menor o igual que $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ si existeix $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$f(s) = \mathcal{O}\left(e^{|s|^\alpha}\right) \qquad \text{per tot } |s| \geq r_0$$

Aleshores l'ordre de f es defineix

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} | f \text{ és d'ordre } \leq \alpha\}.$$

CAPÍTOL

ENUNCIAT SENSE DEMOSTRACIÓ DEL CRITERI DE SUMACIÓ D'ABEL (TEOREMA 4,CAPÍTOL 1)

2

Teorema 2.1 **Criteri de sumació d'Abel**

Sigui $a\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$, considerem $A(t) \coloneqq \sum_{n\leq t} a(n)$ les sumes parcials de a; i una funció $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ amb derivada contínua en un interval $[x, y] \neq \varnothing$[a]. Aleshores

$$\sum_{x<n\leq y} a(n)g(n) = A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

[a] Per alguna raó, al professor li ha agradat considerar l'interval $[y, x]$, però em nego a fer servir aquesta notació.

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 8, CAPÍTOL 3 (SENSE LA PART FINAL DE VEURE QUE LA INTEGRAL $I(s)$ DEFINEIX UNA FUNCIÓ HOLOMORFA).

3

Teorema 3.1

Per $\sigma > 1$, tenim:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \underbrace{\int_1^{\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)\mathrm{d}x}_{=I(s)}$$

On la funció $I(s)$ és una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$.

Demostració.

1. Comencem amb $\Gamma(s)$, i apliquem el canvi de variable $x = n^2\pi x$ i ho treiem tot a fora.

2. Suposem que hi ha convergència absoluta, i fem el sumatori sobre $n \geq 1$ dels 2 costats (en un costat apareix ω i a l'altre apareix ζ).

3. Separem la integral $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$.

4. Fem el canvi de varible $u = \frac{1}{t}$ a la integral de la esquerra.

5. Fem servir $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\theta(x)$ i que $2\omega(x) + 1 = \theta$.

$\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 6 DEL CAPÍTOL 4, DONAT EL SEU ENUNCIAT I ASSUMINT LA PROPOSICIÓ 7.

4

Proposició 4.1 **proposició 6**
Sigui f una funció entera d'ordre α. I suposem que f no té zeros. Aleshores es té que $f = e^{g(s)}$ on g és un polinomi de grau α. És a dir, que el grau d'una funció entera sense zeros ha de ser un enter.

Demostració. Ens caldrà el següent resultat d'AnCo:

Proposició 4.2 **proposició 7**
Sigui $U \subseteq \mathbb{C}$ simplement connex. Sigui $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa i sense zeros en U. Aleshores existeix $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(s) = e^{g(s)}$ per tot $s \in U$.

Pr la proposició, podem dir que $f(s) = e^{g(s)}$ amb g entera. Com que f té ordre α:

$$|f(s)| \leq Ke^{|s|^{\alpha+\delta}} \quad \forall \delta > 0, \quad \text{per } K \in \mathbb{C}, |s| \gg 1$$

I d'aquí en podem treure que

$$\Re(g(s)) \leq |s|^{\alpha+\delta} + \log(K) \quad \forall \delta > 0, \quad \text{per } K \in \mathbb{C}, |s| \gg 1$$

I ara, engrandint el valor de δ si fa falta, tenim

$$\Re(g(s)) \leq 2|s|^{\alpha+\delta}$$

i considerant $g \to g - g(0)$ (és a dir que podem assumir que $g(0) = 0$), podem expressar g amb la seva sèrie de Taylor:

$$g(s) = \sum_{n=1} a_n s^n$$

Amb $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$, i ara utilitzant Cauchy:

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=\mathbb{R}^n} \frac{g(s)}{s^{n+1}} \mathrm{d}s = \\ =& \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(Re^{i\theta})}{R^{n+1} e^{(n+1)i\theta}} Re^{i\theta} i \mathrm{d}\theta = \\ =& \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \frac{g(Re^{i\theta})}{e^{ni\theta}} \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Considerem ara la següent integral

$$\int_{|s|=R} g(s) s^{n-1} \mathrm{d}s = \underbrace{\int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta}) R^n i e^{in\theta} \mathrm{d}\theta}_{I_1} = 0 = \underbrace{\int_0^{2\pi} \overline{g(Re^{i\theta})} R^n i e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta}_{I_2}$$

Això és zero degut a que estem considerant $n \geq 1$, i per tant, la funció que estem integrant és entera. I per tant:

$$a_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} (g(Re^{i\theta}) + \overline{g(Re^{i\theta})}) e^{-in\theta} \mathrm{d} = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \Re(g(Re^{i\theta}) e^{-in\theta}) \mathrm{d}$$

Nosaltres sabem que $\Re(g(Re^{i\theta})) < 2R^{\alpha+\delta}$; però podria ser que $\Re(g(Re^{i\theta})) < 0$ fos molt negatiu; per tant, ens interessa tenir una fita per $|\Re(Re^{i\theta})|$:

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} |\Re(g(Re^{i\theta}))|$$

Però notem que:

$$g(0) = 0 = \int_{|s|=R} \frac{g(s)}{s} \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta = 0$$

I d'aquí en podem deduir que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(g(Re^{i\theta})) \mathrm{d}\theta = 0$$

Per tant, podem canviar el coeficient sense cap preocupació:

$$\frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \Re(g(Re^{i\theta})) \mathrm{d}\theta = 0$$

Però abans hem vist que el valor absolut de l'integrand era una fita de $|a_n|$:

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left|\Re(g(Re^{i\theta}))\right| + \Re(g(Re^{i\theta})) \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \max\{0, 2\Re(g(Re^{i\theta}))\} \mathrm{d}\theta$$

Però $\Re(g(s)) \leq 2|s|^{\alpha+\delta}$, per tant (per $|s| \gg 1$, però això no és un problema):

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} 4R^{\alpha+\delta} \mathrm{d}\theta = \frac{8\pi R^{\alpha+\delta}}{\pi R^n} = 8R^{\alpha+\delta-n}$$

I per $\alpha + \delta > n$, $|a_n| \leq 8R^{\alpha+\delta-n} \to 0$; per tant tots els coeficients de la sèrie de Taylor amb grau més gran que α seràn 0; i per tant, g és un polinomi (de grau α, ja que sabem que f és d'ordre α), que és el que volíem veure. $\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 15 DEL CAPÍTOL 4, DONAT EL SEU ENUNCIAT I ASSUMINT ELS COROL·LARIS 10 I 14.

5

Teorema 5.1

La funció zeta de Riemann completada

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

satisfà:

1. Es una funció d'ordre 1.
2. Té un nombre infinit de zeros (a la franja crítica).
3. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|\rho_n|}$ divergeix; i $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$ convergeix $\forall\varepsilon > 0$.

Notem que els zeros de la funció *xi* són exactament els zeros (amb multiplicitt) de ζ en la franja crítica.

Demostració. I amb aquesta remarca, procedirem a demostrar els 3 apartats del teorema. Notem que pel corol·lari 9 del tema 3, tenim que la funció ξ és una funció entera. A més, $\frac{1}{2}(s-1)s\pi^{-s/2} = \mathcal{O}\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right)$ per tot ε positiu, i $|s| \gg 1$.

Ara només fa falta tractar la funció Γ, però sabem que $\Gamma(s/2) = \mathcal{O}(e^{|s|^{1+\varepsilon}})$ $\forall \varepsilon > 0$ i $|s| \gg 1$ amb $\sigma \geq 0$, tot i que aquesta última condició no ens importa, ja que $\xi(s) = \xi(1-s)$ i tot el que puguem dir per $\sigma > 0$ ho podem dir també per $\sigma < 0$.
Però pel teorema 15 del capítol 1, per $\sigma > 0$ tenim que

$$\zeta(s) = \underbrace{\frac{1}{s-1} + 1}_{\text{per } |s|>1 \text{ fitat}} - s \underbrace{\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x}_{\text{per } |s| \gg 1 \text{ amb } \sigma > 1/2, \text{ fitat}} = \mathcal{O}(|s|).$$

Per tant, per $s \gg 1$, $\mathcal{O}(|s|) = \mathcal{O}\left(e^{|s|^\varepsilon}\right)$, és a dir, que $\zeta(s) = \mathcal{O}(e^{|s|^\varepsilon})$ per $s \gg 1$ i $\sigma \geq \frac{1}{2}$.
En resum $|\xi(s)| = \mathcal{O}(e^{|s|^{1+\varepsilon}})$ $\varepsilon\forall > 0$, $|s| \gg 1$ i $\sigma \geq \frac{1}{2}$. I per l'equació funcional de ξ, ho tenim per $|s| \gg 1$. És a dir, que ξ és d'ordre ≤ 1. I per tant, ara ens fa falta veure que l'ordre és exactament 1.

Per veure que la funció assoleix valors grans, farem un claim:

> **Claim:**
> Sigui $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, aleshores $\log(r!) \sim r\log(r)$ quan $r \to \infty$.

Demostració. La demostració de la claim consisteix en veure que

$$\log(r^r) = r\log(r) > \log(r!) = \sum_{i=1}^r \log(i) > \int_1^r \log(x)\mathrm{d}x = r\log(r) - r + 1$$

$\square$

O sigui, que en els enters, sabem que la funció Λ és gran:

$$\log(\xi) = \log(\Lambda) - \frac{s}{2}\log(\pi) + \log\left(\frac{1}{2}s(s-1)\right) + \log(\zeta)$$

Però en $s = r$: sabem que $\log\Lambda(r) = \log(r-1)! \sim r\log r$. També sabem que $\log\zeta(r) = \log\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$ (ja que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^r} \to 1$.). I finalment la resta de coses són de la mida $-r/2\log(\pi)$. Per tant

$$\log(\xi) \sim r\log(r) \qquad \text{quan } r \to \infty.$$

I d'aquí en podem deduir que ξ té ordre 1. I d'aquí se'n desprenen la resta de coses.

Per tant, suposem que el número de zeros és finit, aleshores:

$$\sum_{n\in N_f} \frac{1}{|\rho_n|} < \infty \quad \implies \quad |\xi(s)| < e^{C|s|} \quad \text{per } s \gg 1$$

On la implicació ve del corol·lari 14; però això contradiu el fet que $\log(\xi(r)) \sim r\log(r)$. I això contradiu el fet que el sumatori convergeix.

Per veure que el segon sumatori convergeix, en tenim prou en invocar el corol·lari 10, i el resultat és immediat. $\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 5 DEL CAPÍTOL 5. LA DEMOSTRACIÓ HA D'INCLOURE ELS ENUNCIATS I DEMOSTRACIONS DE LEMA 2 I), LEMA 3, I PROPOSICIÓ 4 I).

6

Lema 6.1

Per $\sigma > 1$ es té:

1. $\Re \log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{\cos(mt)\log p}{mp^{\sigma m}}$

On en el segon apartat, la funció $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

Demostració. Per $s \in \mathbb{R}_{>1}$ ja sabem del corol·lari **??** del capítol **??**, que

$$\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{mp^{\sigma m}}$$

I per continuació analítica, la igualtat es certa per $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Per tant:

$$\log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{mp^{ms}} = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{p^{-imt}}{mp^{m\sigma}}$$

I ara, si prenem la part real del que tenim:

$$\Re \log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{\cos(mt)\log p}{mp^{m\sigma}}$$

On la igualtat ve de que si $\theta \in \mathbb{R}$, aleshores $p^{i\theta} = \log p(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Que és el que volíem veure.

$\square$

Lema 6.2 Lema de Mertens

Per qualsevol $\theta \in \mathbb{R}$, tenim la següent desigualtat.

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$$

Demostració. Utilitzant la fórmula de l'angle doble del cosinus, tenim:

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) = 3 + 4\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2(1 + \cos(\theta))^2 \geq 0$$

$\square$

Proposició 6.1 Mertens per a la funció ζ.

Per $\sigma > 1$, tenim:

1. $\zeta^3(\sigma)|\zeta^4(\sigma + it)||\zeta(\sigma + i2t)| \geq 0$,

Demostració. Com que a $\sigma > 1$:

$$|\zeta(s)| = e^{\Re \log(\zeta(s))}$$

Només hem de veure que:

$$0 \leq 3\log(\zeta(\sigma)) + 4\Re\log(\zeta(\sigma + it)) + \Re\log\zeta(\sigma + 2it)$$

Però pel lema 6, tenim

$$3\log(\zeta(\sigma)) + 4\Re\log(\zeta(\sigma+it)) + \Re\log\zeta(\sigma+2it) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{\log(p)}{mp^{\sigma m}}(3+4\cos(mt\log p)+\cos(2mt\log p)) \geq 0$$

Que és el que havíem de veure pel primer apartat.

$\square$

Teorema 6.1 **Regió lliure de zeros I**

La funció $\zeta(s) \neq 0$ en $\sigma = 1$ (i per la simetria de ζ, en $\sigma = 0$).

Demostració. Procedirem per reducció a l'absurd: suposem que existeix alguna $t \in \mathbb{R}$ tal que $\zeta(1+it) = 0$. Clarament $t \neq 0$, ja que $\zeta(1) \neq 0$. De fet, podem dir una miqueta més: com que $\zeta(s) \sim \frac{1}{\sigma-1}$ quan $\sigma \to 1$.
Com que ζ té un zero en $1+it$, podem escriure $\zeta(s) = (s-(1+it))^m f(s)$ per alguna $m \geq 1$, on ara f no s'anul·la en $1+it$. Per tant, si considerem

$$\zeta(\sigma+it) = (\sigma-1)^m f(\sigma+it)$$

I ara, utilitzem la proposició 6:

$$\lim_{\sigma\to 1} \underbrace{\zeta^3(\sigma)}_{\sim(\sigma-1)^{-3}} \underbrace{|\zeta^4(\sigma+it)|}_{\sim(\sigma-1)^4|f(1+it)|} \underbrace{|\zeta(\sigma+2it)|}_{<\infty} = \lim_{\sigma\to 1}(\sigma-1)^{4m-3}|\ldots| = 0$$

Però, la proposició ens diu que això és com a mínim 1 i, per tant, contradicció. $\square$

CAPÍTOL 7

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 8 §5, DONAT EL SEU ENUNCIAT. A LA DEMOSTRACIÓ CAL SER CAPAÇ D'ENUNCIAR EL LEMA 6 I) I EL LEMA 7 DE CAPÍTOL 5 AMB LES SEVES DUES PARTS (PERÒ NO CAL DONAR LES DEMOSTRACIONS DELS LEMES).

Lema 7.1 Lema 6
Per $1 < \sigma \leq 2$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{\sigma - 1} + K \qquad \text{on } K \in \mathbb{R}$$

Lema 7.2 Lema 7

Sigui $\rho = \beta + i\gamma$ un zero no trivial de $\zeta(s)$ amb $\gamma \geq 2$. Sigui $s = \sigma + it$ amb $1 < \sigma \leq 2$ i $t \geq 2$, aleshores

1. $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < K\log(t)$ per $k \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. Si a més $t = \gamma$, aleshores: $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < k\log(t) - \frac{1}{\sigma-\beta}$ per $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

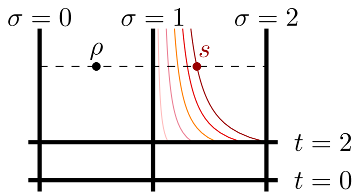
Lema 7.3 Teorema 8

Existeix $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que ζ no té zeros a la regió $t \geq 2$, i $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log(t)}$

Demostració. Per la segona part 4, tenim que per $\sigma > 1$:

$$3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) - 4\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) - \Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \geq 0 \tag{7.1}$$

Sigui $s(t) = \sigma + it$ on $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t)}$, per algun $\delta \in (0, \log 2]$ (prenem δ en aquest interval per tal de tenir $\sigma \in (1, 2]$, per a qualsevol $t \geq 2$). Això ens donarà aquesta corba:



I ara, prenem t com l'ordenada del zero no trivial de ζ $\rho = \beta + i\gamma$.
Apliquem ara el lema 6 i 7 a la desigualtat del principi (7), i obtenim:

$$0 \leq \underbrace{\frac{3}{\sigma - 1} + k_1}_{\text{lema 6, i)}} + \underbrace{k_2\log(t) - \frac{4}{\sigma - \beta}}_{\text{lema 7, ii)}} + \underbrace{k_3\log(t)}_{\text{lema 7 i)}}$$

Si prenem $k/2 \geq \max\{k_1, k_2, k_3\}$, podem suposar que tenim una k comuna (i si cal, la fem encara més gran per a quedar-nos només el termes dominants), obtenim:

$$\frac{4}{\sigma - \beta} < \frac{3}{\sigma - 1} + k\log(t)$$

Posant $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t)}$:

$$\frac{4}{1 + \frac{\delta}{\log(t)} - \beta} < \frac{3\log(t)}{\delta} + k\log(t)$$

I que manipulant una mica les coses, tenim:

$$\frac{4}{1 + \frac{\delta}{\log(t)} - \beta} < \frac{\log(t)}{\delta}(3 + k\delta).$$

Com que $\beta \in (0,1)$, sabem que $\sigma - \beta > 0$, és a dir, que podem invertir les coses:

$$\frac{4\delta}{\log(t)(3+k\delta)} < 1 + \frac{\delta}{\log(t)} - \beta$$

És a dir:

$$\beta < -\frac{4\delta}{\log(t)(3+k\delta)} + 1 + \frac{\delta}{\log(t)} = 1 - \frac{1}{\log(t)} \underbrace{\delta\left(\frac{4}{3+k\delta} - 1\right)}_{=c}$$

Per tant, per δ prou petita ($\delta < \frac{1}{k}$), tenim que la $c > 0$, que és el que volíem veure. $\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 8 DE CAPÍTOL 6 ASSUMINT EL LEMA 9 (L'ENUNCIAT DEL QUAL CAL RECORDAR). 8

Lema 8.1 lema 9
Les integrals

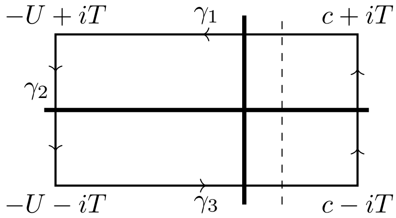
Proposició 8.1 Proposició 8
Per $T \gg 1$, i $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, i $c = 1 + \frac{1}{\log x}$, aleshores:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \underbrace{\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}}_{F(s)} \mathrm{d}s = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{x(\log T)^2}{T\log(x)}\right)$$

On la suma sobre ρ és una suma sobre els zeros no trivials de ζ.

Comentari: l'expressió a la dreta té 4 termes, cadascun representa una família de pols/zeros de $\zeta(s)\frac{x^s}{s}$: el x representa el pol en $s=0$ de ζ; la suma representa els zeros no trivials de $\zeta(s)$; el $\zeta'(0)/\zeta(0)$ representa el zero de $\frac{x^s}{s}$, i el logaritme representa els zeros trivials de ζ.

Demostració. Considerem el següent contorn:



On U és un senar positiu; i T no és la ordenada de cap zero de ζ.
Recordem per l'exercici 4 del FP 8, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ té un pol a cada pol/zero de ζ, amb residu l'ordre del zero o pol. Per tant:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} F(s)\mathrm{d}s = -R \underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{-U+iT} F(s)\mathrm{d}s}_{I_1} \underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-U+iT}^{-U-iT} F(s)\mathrm{d}s}_{I_2} \underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-U-iT}^{c-iT} F(s)\mathrm{d}s}_{I_3}$$

On R són els residus:

$$R = \overbrace{\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U<\beta<1 \\ |\gamma|<T}} \operatorname{Res}_{s=\rho} F(s)}^{R_1} + \overbrace{\operatorname{Res}_{s=0} F(s)}^{R_2} + \overbrace{\operatorname{Res}_{s=1} F(s)}^{R_3}$$

Notem que l'ordre dels zeros de R_1 és 1 (tant dels zeros trivials, com el dels no trivials); i els altres residus són:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U<\beta<c \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{2\leq 2m<U} \frac{x^{-2m}}{-2m} \\ R_2 &= \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \\ R_3 &= x \end{aligned}$$

Per tant, ens queda:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} F(s)\mathrm{d}s = -\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U<\beta<c \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{2\leq 2m<U} \frac{x^{-2m}}{-2m} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - x + I_1 + I_2 + I_3$$

I ara, pel lema 9:

Lema 8.2 Lema 9
Les integrals:

$$\begin{aligned} I_1, I_3 &= \mathcal{O}\left(\frac{x(\log T)^2}{T\log x}\right) \\ I_2 &= \mathcal{O}\left(\frac{T\log U}{Ux^U}\right) \end{aligned}$$

Aleshores, prenent $U \to \infty$, tenim:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} F(s)\mathrm{d}s = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{x^{-2m}}{-m}}_{\text{Taylor de } \log(1-x^2)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \mathcal{O}\left(\frac{x(\log T)^2}{T\log x}\right)$$

Que és el que volíem veure. $\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE LEMA 5 DEL CAPÍTOL 6 DONAT EL SEU ENUNCIAT. 9

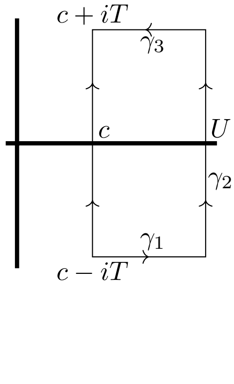
Lema 9.1 Lema 5
Sigui

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Aleshores, per $y > 0$, $c > 0$, $T > 0$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} \mathrm{d}s - \delta(y) \right| < \begin{cases} \frac{y^c}{T|\log y|} & \text{si } y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{si } u = 1. \end{cases}$$

Demostració. Per fer aquesta demostració distingirem 3 casos: $y \in (0,1)$, $y = 1$ i $y > 1$.
Cas 1: $y \in (0,1)$**.**
Considerem el següent contorn:



Aleshores, com que a dins d'aquest contorn, la funció y^s/s no té pols, podem canviar aquesta integral per les altres tres integrals:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{U-iT}\frac{y^s}{s}}_{=I_1(U)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{U-iT}^{U+iT}\frac{y^s}{s}}_{=I_2(U)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{U+iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}}_{=I_3(U)}$$

Però com que en γ_2 la integral és fàcil de fitar:

$$|I_2| \leq \int_{\gamma_2}\left|\frac{y^s}{s}\right|\mathrm{d}s \leq 2T\frac{y^U}{U} \xrightarrow{U\to\infty} 0$$

Només ens hem de preocupar de $I_1 = \lim_{U\to\infty} I_1(U)$ i de $I_3 = \lim_{U\to\infty} I_3(U)$. I ara per fitar les altres integrals:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi}\int_c^{\infty}\frac{|y^{\sigma-iT}|}{|\sigma-iT|}\mathrm{d}\sigma$$

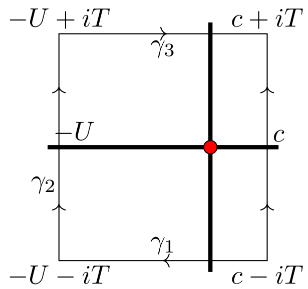
I com que $|\sigma - iT| > |T|$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_c^{\infty}\frac{|y^{\sigma-iT}|}{|\sigma-iT|}\mathrm{d}\sigma \leq \frac{1}{2\pi}\int_c^{\infty}\frac{y^\sigma}{T}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi T}\left[\frac{y^\sigma}{\log y}\right]_c^{\infty} = \frac{y^c}{2\pi T|\log y|}$$

I si repetim aquest mateix càlcul amb l'altra integral ens dona:

$$|I_3| \leq \frac{y^\sigma}{2\pi T|\log y|}$$

I si ho ajuntem tot, obtenim una fita millor que la que volíem.
Cas 2: $y > 1$**.**
Considerem ara, aquest contorn:



Ara no podem fer el que hem fet abans: ara en aquest contorn hi ha un pol en el $s = 0$. Per tant, haurem de sumar el residu del pol:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s = \mathrm{Res}_{s=0}\frac{y^s}{s} + I_1(-U) + I_2(-U) + I_3(-U)$$

I de la mateia manera que abans, $I_2(-U) \xrightarrow{U\to\infty} 0$, i les altres 2 integrals es poden fitar per:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{c}\frac{y^\sigma}{T}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi T}\left[\frac{y^\sigma}{\log y}\right]_{-\infty}^{c} = \frac{y^c}{2\pi T|\log y|}$$

I l'altra integral es pot fitar igual.
Cas 3: $y = 1$**.**
Com que la funció és més senzilla, podem fer-ho d'una manera més directa:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{s}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T}\frac{i}{c+it}\mathrm{d}t &= \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{c-it}{|c+it|^2}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{c-it}{c^2+t^2}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{c}{c^2+t^2}\mathrm{d}t - \frac{i}{2\pi}\underbrace{\int_{-T}^{T}\frac{t}{c^2+t^2}\mathrm{d}t}_{=0}
\end{aligned}$$

Aquí la segona integral és zero per la paritat de la funció que estem integrant.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{c}{c^2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/c}^{T/c}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u &= \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T/c}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u}_{=\frac{\pi}{2}} - \int_{T/c}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\right) =
\end{aligned}$$

Per tant:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{s}\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{T/c}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \leq \int_{T/c}^{\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{u}\right]_{T/c}^{\infty} = \frac{c}{\pi T} < \frac{c}{T}$$

Que és el que volíem veure. $\square$