



# pel final de mètodes analítics en teoria de nombres

*Curs 2025-2026*

BERNAT ESTEVE

2026

---

# ÍNDIX

<b>1</b>	<b>Capítol 1</b> Definicions	
1.1	Sèries de Dirichlet	4
1.2	Funcions L	4
1.3	Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$	6
1.4	Productes d'Hadamard	6
<b>2</b>	<b>Capítol 2</b> Enunciat sense demostració del criteri de sumació d'Abel (Teorema 4, capítol 1)	
<b>3</b>	<b>Capítol 3</b> Demostració del Teorema 8, capítol 3 (sense la part final de veure que la integral $I(s)$ defineix una funció holomorfa).	
<b>4</b>	<b>Capítol 4</b> Demostració de la Proposició 6 del capítol 4, donat el seu enunciat i assumint la Proposició 7.	
<b>5</b>	<b>Capítol 5</b> Demostració del Teorema 15 del capítol 4, donat el seu enunciat i assumint els corol·laris 10 i 14.	
<b>6</b>	<b>Capítol 6</b> Demostració del Teorema 5 del capítol 5. La demostració ha d'incloure els enunciats i demostracions de Lema 2 i), Lema 3, i Proposició 4 i).	

## 7

### Capítol 7

Demostració del Teorema 8 §5, donat el seu enunciat. A la demostració cal ser capaç d'enunciar el Lema 6 i) i el Lema 7 de capítol 5 amb les seves dues parts (però no cal donar les demostracions dels lemes).

## 8

### Capítol 8

Demostració de la Proposició 8 de capítol 6 assumint el Lema 9 (l'enunciat del qual cal recordar).

## 9

### Capítol 9

Demostració de Lema 5 del capítol 6 donat el seu enunciat.

## DEFINICIONS

## 1.1 Sèries de Dirichlet

**Definició 1.1 Sèrie de Dirichlet**

Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{f(n)}{n^s}$$

On  $f: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$  és una funció aritmètica, i  $s \in \mathbb{C}$ .

**Definició 1.2 Convergència de productoris**

Sigui  $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$  una successió de complexos, aleshores el productori  $\prod z_n$  convergeix si i només si existeix el límit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n z_n$ , i aquest és no nul.

**Definició 1.3 Convergència absoluta de productoris**

Donada una seqüència  $z_n$  amb  $\Re(z_n) > 0$ , aleshores el productori  $\prod z_n$  es diu que convergeix absolutament si  $\sum \log(z_n)$  convergeix absolutament.

## 1.2 Funcions L

**Definició 1.4 Caràcter d'un grup**

Sigui  $G$  un grup finit i abelià, aleshores un caràcter de  $G$  serà un morfisme  $\psi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$

(on  $\mathbb{C}^*$  és el grup multiplicatiu de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ )

### Definició 1.5 El grup de caràcters

Denotem per  $\widehat{G}$  al grup  $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \{\text{Caràcters de } G\}$ , on la operació és:

$$\psi, \phi: G \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{aleshores } (\psi \cdot_{\widehat{G}} \phi)(g) \mapsto \psi(g) \cdot_{\mathbb{C}^*} \phi(g)$$

I anomenarem a  $\widehat{G}$  el grup de caràcters de  $G$ .

### Definició 1.6 Caràcter mòdul $m$

Un caràcter mòdul  $m$  és un caràcter de  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ .

### Definició 1.7 Caràcter principal mòdul $m$

El caràcter principal mòdul  $m$  és  $\chi_0(a): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  definit per

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \text{gcd}(a, m) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

### Definició 1.8 Funció $L$ associada a un caràcter de Dirichlet

La funció  $L$  associada al caràcter de Dirichlet mòdul  $m$   $\chi$  és la sèrie de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

.

### Definició 1.9 Funció $m$ -èsima de Dirichlet

Sigui  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , aleshores la funció  $m$ -èsima de Dirichlet es defineix com

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

On el producte recorre tots els caràcters de Dirichlet mòdul  $m$ .

### Definició 1.10 Caràcters reals i complexos.

Diem que  $\chi: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$  és un caràcter de Dirichlet real si  $\text{Im}(\chi) \subset \mathbb{R}$ . És a dir  $\text{Im}(\chi) \subset \{-1, 0, 1\}$ . I direm que és complex altrament.

### Definició 1.11 Caràcter conjugat

Direm  $\overline{\chi}$  al caràcter de Dirichlet conjugat

$$\overline{\chi}: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{que envia } a \in \mathbb{Z} \text{ a } \overline{\chi(a)} = \overline{\chi(a)}$$

I no és massa difícil de veure que aquesta funció és un caràcter de Dirichlet del mateix mòdul.

## 1.3 Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$

### Definició 1.12 $\theta$ de Jacobi

La funció  $\theta$  de Jacobi es defineix  $\theta: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi x}$$

I definim també la funció  $\omega$  com

$$\omega(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi x} = \frac{\theta(x) - 1}{2}$$

### Definició 1.13 La funció $\Gamma$

La funció  $\Gamma$  es defineix:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x} \quad \text{per } \sigma > 0$$

### Definició 1.14 Funció de Riemann completada

Definim la funció de Riemann completada com

$$\xi(s) := \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

I també tenim

$$\frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \left( x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}} \right) \omega(x) dx + \frac{1}{2}$$

## 1.4 Productes d'Hadamard

### Definició 1.15 Ordre d'una funció

Sigui  $f(s)$  una funció entera. Es diu que  $f$  és d'ordre menor o igual que  $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  si existeix  $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que

$$f(s) = \mathcal{O}\left(e^{|s|^\alpha}\right) \quad \text{per tot } |s| \geq r_0$$

Aleshores l'ordre de  $f$  es defineix

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f \text{ és d'ordre } \leq \alpha\}.$$

# ENUNCIAT SENSE DEMOSTRACIÓ DEL CRITERI DE SUMACIÓ D'ABEL (TEOREMA 4,CAPÍTOL 1)

## 2

## Teorema 2.1 Criteri de sumació d'Abel

Sigui  $a: \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ , considerem  $A(t) := \sum_{n \leq t} a(n)$  les sumes parcials de  $a$ ; i una funció  $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  amb derivada contínua en un interval  $[x, y] \neq \emptyset^a$ . Aleshores

$$\sum_{x < n \leq y} a(n)g(n) = A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)dt$$

<sup>a</sup>Per alguna raó, al professor li ha agradat considerar l'interval  $[y, x]$ , però em nego a fer servir aquesta notació.



# DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 8, CAPÍTOL 3 (SENSE LA PART FINAL DE VEURE QUE LA INTEGRAL $I(s)$ DEFINEIX UNA FUNCIÓ HOLOMORFA ).

## 3

**Teorema 3.1**

Per  $\sigma > 1$ , tenim:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \underbrace{\int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right) \omega(x) dx}_{=I(s)}$$

On la funció  $I(s)$  és una funció holomorfa a tot  $\mathbb{C}$ .

- Demostració.**
1. Comencem amb  $\Gamma(s)$ , i apliquem el canvi de variable  $x = n^2\pi x$  i ho treiem tot a fora.
  2. Suposem que hi ha convergència absoluta, i fem el sumatori sobre  $n \geq 1$  dels 2 costats (en un costat apareix  $\omega$  i a l'altre apareix  $\zeta$ ).
  3. Separem la integral  $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ .

4. Fem el canvi de variable  $u = \frac{1}{t}$  a la integral de la esquerra.

5. Fem servir  $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\theta(x)$  i que  $2\omega(x) + 1 = \theta$ .

□

# DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 6 DEL CAPÍTOL 4, DONAT EL SEU ENUNCIAT I ASSUMINT LA PROPOSICIÓ 7.

# 4

## Proposició 4.1 proposició 6

Sigui  $f$  una funció entera d'ordre  $\alpha$ . I suposem que  $f$  no té zeros. Aleshores es té que  $f = e^{g(s)}$  on  $g$  és un polinomi de grau  $\alpha$ . És a dir, que el grau d'una funció entera sense zeros ha de ser un enter.

*Demostració.* Ens caldrà el següent resultat d'AnCo:

## Proposició 4.2 proposició 7

Sigui  $U \subseteq \mathbb{C}$  simplement connex. Sigui  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa i sense zeros en  $U$ . Aleshores existeix  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa tal que  $f(s) = e^{g(s)}$  per tot  $s \in U$ .

1. Agafar la  $g(s)$  que ens dona la proposició.

Per la proposició, podem dir que  $f(s) = e^{g(s)}$  amb  $g$  entera. Com que  $f$  té ordre  $\alpha$ :

$$|f(s)| \leq K e^{|s|^{\alpha+\delta}} \quad \forall \delta > 0, \quad \text{per } K \in \mathbb{C}, |s| \gg 1$$

I d'aquí en podem treure que

$$\Re(g(s)) \leq |s|^{\alpha+\delta} + \log(K) \quad \forall \delta > 0, \quad \text{per } K \in \mathbb{C}, |s| \gg 1$$

I ara, engrandint el valor de  $\delta$  si fa falta, tenim

$$\Re(g(s)) \leq 2|s|^{\alpha+\delta}$$

i considerant  $g \rightarrow g - g(0)$  (és a dir que podem assumir que  $g(0) = 0$ ), podem expressar  $g$  amb la seva sèrie de Taylor:

$$g(s) = \sum_{n=1} a_n s^n$$

Amb  $a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ , i ara utilitzant Cauchy:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=\mathbb{R}^n} \frac{g(s)}{s^{n+1}} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g(Re^{i\theta})}{R^{n+1}e^{(n+1)i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \frac{g(Re^{i\theta})}{e^{ni\theta}} d\theta \end{aligned}$$

Considerem ara la següent integral

$$\int_{|s|=R} g(s) s^{n-1} ds = \underbrace{\int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta}) R^n i e^{in\theta} d\theta}_{I_1} = 0 = \underbrace{\int_0^{2\pi} \overline{g(Re^{i\theta})} R^n i e^{-in\theta} d\theta}_{I_2}$$

Això és zero degut a que estem considerant  $n \geq 1$ , i per tant, la funció que estem integrant és entera. I per tant:

$$a_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} (g(Re^{i\theta}) + \overline{g(Re^{i\theta})}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \Re(g(Re^{i\theta}) e^{-in\theta}) d\theta$$

Nosaltres sabem que  $\Re(g(Re^{i\theta})) < 2R^{\alpha+\delta}$ ; però podria ser que  $\Re(g(Re^{i\theta})) < 0$  fos molt negatiu; per tant, ens interessa tenir una fita per  $|\Re(Re^{i\theta})|$ :

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} |\Re(g(Re^{i\theta}))|$$

Però notem que:

$$g(0) = 0 = \int_{|s|=R} \frac{g(s)}{s} ds = \int_0^{2\pi} g(Re^{i\theta}) d\theta = 0$$

I d'aquí en podem deduir que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(g(Re^{i\theta})) d\theta = 0$$

Per tant, podem canviar el coeficient sense cap preocupació:

$$\frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \Re(g(Re^{i\theta})) d\theta = 0$$

Però abans hem vist que el valor absolut de l'integrand era una fita de  $|a_n|$ :

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} |\Re(g(Re^{i\theta}))| + \Re(g(Re^{i\theta})) d\theta \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \max\{0, 2\Re(g(Re^{i\theta}))\} d\theta$$

Però  $\Re(g(s)) \leq 2|s|^{\alpha+\delta}$ , per tant (per  $|s| \gg 1$ , però això no és un problema):

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} 4R^{\alpha+\delta} d\theta = \frac{8\pi R^{\alpha+\delta}}{\pi R^n} = 8R^{\alpha+\delta-n}$$

I per  $\alpha + \delta > n$ ,  $|a_n| \leq 8R^{\alpha+\delta-n} \rightarrow 0$ ; per tant tots els coeficients de la sèrie de Taylor amb grau més gran que  $\alpha$  seràn 0; i per tant,  $g$  és un polinomi (de grau  $\alpha$ , ja que sabem que  $f$  és d'ordre  $\alpha$ ), que és el que volíem veure.  $\square$

# DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 15 DEL CAPÍTOL 4, DONAT EL SEU ENUNCIAT I ASSUMINT ELS COROL·LARIS 10 I 14.

## 5

## Teorema 5.1

La funció zeta de Riemann completada

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

satisfà:

1. Es una funció d'ordre 1.
2. Té un nombre infinit de zeros (a la franja crítica).
3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|}$  divergeix; i  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$  convergeix  $\forall \varepsilon > 0$ .

Notem que els zeros de la funció  $\xi$  són exactament els zeros (amb multiplicitat) de  $\zeta$  en la franja crítica.

**Demostració.** I amb aquesta remarca, procedirem a demostrar els 3 apartats del teorema. Notem que pel corol·lari 9 del tema 3, tenim que la funció  $\xi$  és una funció entera. A més,  $\frac{1}{2}(s-1)s\pi^{-s/2} = \mathcal{O}\left(e^{|s|^{1+\varepsilon}}\right)$  per tot  $\varepsilon$  positiu, i  $|s| \gg 1$ .

Ara només fa falta tractar la funció  $\Gamma$ , però sabem que  $\Gamma(s/2) = \mathcal{O}(e^{|s|^{1+\varepsilon}}) \forall \varepsilon > 0$  i  $|s| \gg 1$  amb  $\sigma \geq 0$ , tot i que aquesta última condició no ens importa, ja que  $\xi(s) = \xi(1-s)$  i tot el que poguem dir per  $\sigma > 0$  ho podem dir també per  $\sigma < 0$ .

Però pel teorema 15 del capítol 1, per  $\sigma > 0$  tenim que

$$\zeta(s) = \underbrace{\frac{1}{s-1} + 1}_{\text{per } |s| > 1 \text{ fitat}} - s \underbrace{\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx}_{\text{per } |s| \gg 1 \text{ amb } \sigma > 1/2, \text{ fitat}} = \mathcal{O}(|s|).$$

Per tant, per  $s \gg 1$ ,  $\mathcal{O}(|s|) = \mathcal{O}(e^{|s|^\varepsilon})$ , és a dir, que  $\zeta(s) = \mathcal{O}(e^{|s|^\varepsilon})$  per  $s \gg 1$  i  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ .

En resum  $|\xi(s)| = \mathcal{O}(e^{|s|^{1+\varepsilon}}) \forall \varepsilon > 0$ ,  $|s| \gg 1$  i  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ . I per l'equació funcional de  $\xi$ , ho tenim per  $|s| \gg 1$ . És a dir, que  $\xi$  és d'ordre  $\leq 1$ . I per tant, ara ens fa falta veure que l'ordre és exactament 1.

Per veure que la funció assoleix valors grans, farem un claim:

### Claim:

Sigui  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , aleshores  $\log(r!) \sim r \log(r)$  quan  $r \rightarrow \infty$ .

**Demostració.** La demostració de la claim consisteix en veure que

$$\log(r^r) = r \log(r) > \log(r!) = \sum_{i=1}^r \log(i) > \int_1^r \log(x) dx = r \log(r) - r + 1$$

□

O sigui, que en els enters, sabem que la funció  $\Gamma$  és gran:

$$\log(\xi) = \log(\Gamma) - \frac{s}{2} \log(\pi) + \log\left(\frac{1}{2}s(s-1)\right) + \log(\zeta)$$

Però en  $s = 2r$ : sabem que  $\log \Gamma(r) = \log(r-1)! \sim r \log r$ . També sabem que  $\log \zeta(2r) = \log \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2r}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  (ja que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^r} \rightarrow 1$ ). I finalment la resta de coses són de la mida  $-r/2 \log(\pi)$ . Per tant

$$\log(\xi) \sim r \log(r) \quad \text{quan } r \rightarrow \infty.$$

I d'aquí en podem deduir que  $\xi$  té ordre 1. I d'aquí se'n desprenen la resta de coses.

Per tant, suposem que el número de zeros és finit, aleshores:

$$\sum_{n \in N_f} \frac{1}{|\rho_n|} < \infty \implies |\xi(s)| < e^{C|s|} \quad \text{per } s \gg 1$$

On la implicació ve del corol·lari 14; però això contradiu el fet que  $\log(\xi(r)) \sim r \log(r)$ . I això contradiu el fet que el sumatori convergeix.

Per veure que el segon sumatori convergeix, en tenim prou en invocar el corol·lari 10, i el resultat és immediat. □

# DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 5 DEL CAPÍTOL 5. LA DEMOSTRACIÓ HA D'INCLOURE ELS ENUNCIATS I DEMOSTRACIONS DE LEMA 2 I), LEMA 3, I PROPOSICIÓ 4 I).

## 6

**Lema 6.1**

Per  $\sigma > 1$  es té:

$$1. \Re \log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\cos(mt) \log p}{mp^{\sigma m}}$$

On en el segon apartat, la funció  $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

**Demostració.** Per  $s \in \mathbb{R}_{>1}$  ja sabem del corol·lari ?? del capítol ??, que

$$\log(\zeta(s)) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{\sigma m}}$$



I per continuació analítica, la igualtat es certa per  $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ . Per tant:

$$\log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{mp^{ms}} = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-imt}}{mp^{m\sigma}}$$

I ara, si prenem la part real del que tenim:

$$\Re \log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\cos(mt \log p)}{mp^{m\sigma}}$$

On la igualtat ve de que si  $\theta \in \mathbb{R}$ , aleshores  $p^{i\theta} = \log p(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ . Que és el que volíem veure. □

### Lema 6.2 Lema de Mertens

Per qualsevol  $\theta \in \mathbb{R}$ , tenim la següent desigualtat.

$$3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$$

**Demostració.** Utilitzant la fórmula de l'angle doble del cosinus, tenim:

$$3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) = 3 + 4 \cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2(1 + \cos(\theta))^2 \geq 0$$
□

### Proposició 6.1 Mertens per a la funció $\zeta$ .

Per  $\sigma > 1$ , tenim:

$$1. \quad \zeta^3(\sigma) |\zeta^4(\sigma + it)| |\zeta(\sigma + i2t)| \geq 1,$$

**Demostració.** Com que a  $\sigma > 1$ :

$$|\zeta(s)| = e^{\Re \log(\zeta(s))}$$

Només hem de veure que:

$$0 \leq 3 \log(\zeta(\sigma)) + 4 \Re \log(\zeta(\sigma + it)) + \Re \log \zeta(\sigma + 2it)$$

Però pel lema 6, tenim

$$3 \log(\zeta(\sigma)) + 4 \Re \log(\zeta(\sigma + it)) + \Re \log \zeta(\sigma + 2it) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\log(p)}{mp^{\sigma m}} (3 + 4 \cos(mt \log p) + \cos(2mt \log p)) \geq 0$$

Que és el que havíem de veure pel primer apartat. □

### Teorema 6.1 Regió lliure de zeros I

La funció  $\zeta(s) \neq 0$  en  $\sigma = 1$  (i per la simetria de  $\zeta$ , en  $\sigma = 0$ ).

**Demostració.** Procedirem per reducció a l'absurd: suposem que existeix alguna  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\zeta(1+it) = 0$ . Clarament  $t \neq 0$ , ja que  $\zeta(1) \neq 0$ . De fet, podem dir una miqueta més: com que  $\zeta(s) \sim \frac{1}{\sigma-1}$  quan  $\sigma \rightarrow 1$ .

Com que  $\zeta$  té un zero en  $1+it$ , podem escriure  $\zeta(s) = (s - (1+it))^m f(s)$  per alguna  $m \geq 1$ , on ara  $f$  no s'anul·la en  $1+it$ . Per tant, si considerem

$$\zeta(\sigma + it) = (\sigma - 1)^m f(\sigma + it)$$

I ara, utilitzem la proposició 6:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \underbrace{\zeta^3(\sigma)}_{\sim (\sigma-1)^{-3}} \underbrace{|\zeta^4(\sigma + it)|}_{\sim (\sigma-1)^4 |f(1+it)|} \underbrace{|\zeta(\sigma + 2it)|}_{< \infty} = \lim_{\sigma \rightarrow 1} (\sigma - 1)^{4m-3} |\dots| = 0$$

Però, la proposició ens diu que això és com a mínim 1 i, per tant, contradicció.  $\square$

DEMOSTRACIÓ DEL  
TEOREMA 8 §5, DONAT EL  
SEU ENUNCIAT. A LA  
DEMOSTRACIÓ CAL SER  
CAPAÇ D'ENUNCIAR EL  
LEMA 6 I) I EL LEMA 7 DE  
CAPÍTOL 5 AMB LES  
SEVES DUES PARTS (PERÒ  
NO CAL DONAR LES  
DEMOSTRACIONS DELS  
LEMES).

7

**Lema 7.1 Lema 6**Per  $1 < \sigma \leq 2$ 

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{\sigma-1} + K \quad \text{on } K \in \mathbb{R}$$

### Lema 7.2 Lema 7

Sigui  $\rho = \beta + i\gamma$  un zero no trivial de  $\zeta(s)$  amb  $\gamma \geq 2$ . Sigui  $s = \sigma + it$  amb  $1 < \sigma \leq 2$  i  $t \geq 2$ , aleshores

1.  $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < K \log(t)$  per  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ .
2. Si a més  $t = \gamma$ , aleshores:  $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < k \log(t) - \frac{1}{\sigma-\beta}$  per  $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

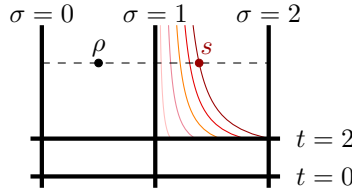
### Lema 7.3 Teorema 8

Existeix  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\zeta$  no té zeros a la regió  $t \geq 2$ , i  $\sigma \leq 1 - \frac{c}{\log(t)}$

**Demostració.** Per la segona part 4, tenim que per  $\sigma > 1$ :

$$3 \left( -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right) - 4\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) - \Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) \geq 0 \quad (7.1)$$

Sigui  $s(t) = \sigma + it$  on  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t)}$ , per algun  $\delta \in (0, \log 2]$  (prenem  $\delta$  en aquest interval per tal de tenir  $\sigma \in (1, 2]$ , per a qualsevol  $t \geq 2$ ). Això ens donarà aquesta corba:



I ara, prenem  $t$  com l'ordenada del zero no trivial de  $\zeta$ :  $\rho = \beta + i\gamma$ . Apliquem ara el lema 6 i 7 a la desigualtat del principi (7), i obtenim:

$$0 \leq \underbrace{\frac{3}{\sigma-1} + k_1}_{\text{lema 6, i)}} + \underbrace{k_2 \log(t) - \frac{4}{\sigma-\beta}}_{\text{lema 7, ii)}} + \underbrace{k_3 \log(t)}_{\text{lema 7 i)}}$$

Si prenem  $k/2 \geq \max\{k_1, k_2, k_3\}$ , podem suposar que tenim una  $k$  comuna (i si cal, la fem encara més gran per a quedar-nos només el termes dominants), obtenim:

$$\frac{4}{\sigma-\beta} < \frac{3}{\sigma-1} + k \log(t)$$

Posant  $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t)}$ :

$$\frac{4}{1 + \frac{\delta}{\log(t)} - \beta} < \frac{3 \log(t)}{\delta} + k \log(t)$$

I que manipulant una mica les coses, tenim:

$$\frac{4}{1 + \frac{\delta}{\log(t)} - \beta} < \frac{\log(t)}{\delta} (3 + k\delta).$$

Com que  $\beta \in (0, 1)$ , sabem que  $\sigma - \beta > 0$ , és a dir, que podem invertir les coses:

$$\frac{4\delta}{\log(t)(3 + k\delta)} < 1 + \frac{\delta}{\log(t)} - \beta$$

És a dir:

$$\beta < -\frac{4\delta}{\log(t)(3 + k\delta)} + 1 + \frac{\delta}{\log(t)} = 1 - \frac{1}{\log(t)} \underbrace{\delta \left( \frac{4}{3 + k\delta} - 1 \right)}_{=c}$$

Per tant, per  $\delta$  prou petita ( $\delta < \frac{1}{k}$ ), tenim que la  $c > 0$ , que és el que volíem veure. □

# DEMOSTRACIÓ DE LA PROPOSICIÓ 8 DE CAPÍTOL 6 ASSUMINT EL LEMA 9 (L'ENUNCIAT DEL QUAL CAL RECORDAR).

8

## Proposició 8.1 Proposició 8

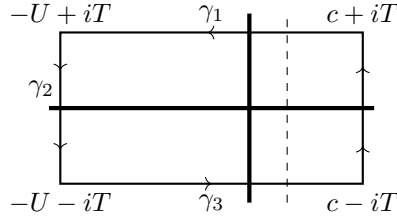
Per  $T \gg 1$ , i  $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ , i  $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ , aleshores:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \underbrace{\left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right)}_{F(s)} \frac{x^s}{s} ds = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{x(\log T)^2}{T \log(x)} \right)$$

On la suma sobre  $\rho$  és una suma sobre els zeros no trivials de  $\zeta$ .

*Comentari:* l'expressió a la dreta té 4 termes, cadascun representa una família de pols/zeros de  $\zeta(s) \frac{x^s}{s}$ : el  $x$  representa el pol en  $s = 0$  de  $\zeta$ ; la suma representa els zeros no trivials de  $\zeta(s)$ ; el  $\zeta'(0)/\zeta(0)$  representa el zero de  $\frac{x^s}{s}$ , i el logaritme representa els zeros trivials de  $\zeta$ .

**Demostració.** Considerem el següent contorn:



On  $U$  és un senar positiu; i  $T$  no és la ordenada de cap zero de  $\zeta$ .

Recordem per l'exercici 4 del FP 8,  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  té un pol a cada pol/zero de  $\zeta$ , amb residu l'ordre del zero o pol. Per tant:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) ds = -R - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{-U+iT} F(s) ds}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{-U+iT}^{-U-iT} F(s) ds}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{-U-iT}^{c-iT} F(s) ds}_{I_3}$$

On  $R$  són els residus:

$$R = \overbrace{\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U<\beta<1 \\ |\gamma|<T}} \text{Res}_{s=\rho} F(s)}^{R_1} + \overbrace{\text{Res}_{s=0} F(s)}^{R_2} + \overbrace{\text{Res}_{s=1} F(s)}^{R_3}$$

Notem que l'ordre dels zeros de  $R_1$  és 1 (tant dels zeros trivials, com el dels no trivials); i els altres residus són:

$$R_1 = \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U<\beta<c \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{2 \leq 2m < U} \frac{x^{-2m}}{-2m}$$

$$R_2 = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

$$R_3 = x$$

Per tant, ens queda:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) ds = - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ -U<\beta<c \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{2 \leq 2m < U} \frac{x^{-2m}}{-2m} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - x + I_1 + I_2 + I_3$$

I ara, pel lema 9:

### Lema 8.1 Lema 9

Les integrals:

$$I_1, I_3 = \mathcal{O}\left(\frac{x(\log T)^2}{T \log x}\right)$$

$$I_2 = \mathcal{O}\left(\frac{T \log U}{U x^U}\right)$$

Aleshores, prenent  $U \rightarrow \infty$ , tenim:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) \mathrm{d}s = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{x^{-2n}}{-2n}}_{\text{Taylor de } \log(1-x^2)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \mathcal{O}\left(\frac{x(\log T)^2}{T \log x}\right)$$

Que és el que volíem veure. □



# DEMOSTRACIÓ DE LEMA 5 DEL CAPÍTOL 6 DONAT EL SEU ENUNCIAT.

# 9

## Lema 9.1 Lema 5

Sigui

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

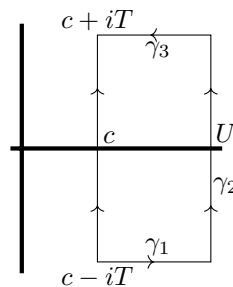
Aleshores, per  $y > 0$ ,  $c > 0$ ,  $T > 0$ :

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds - \delta(y) \right| < \begin{cases} \frac{y^c}{T |\log y|} & \text{si } y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

**Demostració.** Per fer aquesta demostració distingirem 3 casos:  $y \in (0, 1)$ ,  $y = 1$  i  $y > 1$ .

**Cas 1:**  $y \in (0, 1)$ .

Considerem el següent contorn:



Aleshores, com que a dins d'aquest contorn, la funció  $y^s/s$  no té pols, podem canviar aquesta integral per les altres tres integrals:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{U-iT} \frac{y^s}{s} ds}_{=I_1(U)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{U-iT}^{U+iT} \frac{y^s}{s} ds}_{=I_2(U)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{U+iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds}_{=I_3(U)}$$

Però com que en  $\gamma_2$  la integral és fàcil de fitar:

$$|I_2| \leq \int_{\gamma_2} \left| \frac{y^s}{s} \right| ds \leq 2T \frac{y^U}{U} \xrightarrow{U \rightarrow \infty} 0$$

Només ens hem de preocupar de  $I_1 = \lim_{U \rightarrow \infty} I_1(U)$  i de  $I_3 = \lim_{U \rightarrow \infty} I_3(U)$ . I ara per fitar les altres integrals:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_c^\infty \frac{|y^{\sigma-iT}|}{|\sigma-iT|} d\sigma$$

I com que  $|\sigma-iT| > |T|$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_c^\infty \frac{|y^{\sigma-iT}|}{|\sigma-iT|} d\sigma \leq \frac{1}{2\pi} \int_c^\infty \frac{y^\sigma}{T} d\sigma = \frac{1}{2\pi T} \left[ \frac{y^\sigma}{\log y} \right]_c^\infty = \frac{y^c}{2\pi T |\log y|}$$

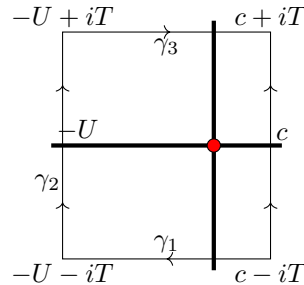
I si repetim aquest mateix càlcul amb l'altra integral ens dona:

$$|I_3| \leq \frac{y^\sigma}{2\pi T |\log y|}$$

I si ho ajuntem tot, obtenim una fita millor que la que volíem.

**Cas 2:**  $y > 1$ .

Considerem ara, aquest contorn:



Ara no podem fer el que hem fet abans: ara en aquest contorn hi ha un pol en el  $s = 0$ . Per tant, haurem de sumar el residu del pol:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds = \text{Res}_{s=0} \frac{y^s}{s} + I_1(-U) + I_2(-U) + I_3(-U)$$

I de la mateia manera que abans,  $I_2(-U) \xrightarrow{U \rightarrow \infty} 0$ , i les altres 2 integrals es poden fitar per:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^c \frac{y^\sigma}{T} d\sigma = \frac{1}{2\pi T} \left[ \frac{y^\sigma}{\log y} \right]_{-\infty}^c = \frac{y^c}{2\pi T |\log y|}$$

I l'altra integral es pot fitar igual.

**Cas 3:**  $y = 1$ .

Com que la funció és més senzilla, podem fer-ho d'una manera més directa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^T \frac{i}{c+it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c-it}{|c+it|^2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c-it}{c^2+t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c}{c^2+t^2} dt - \underbrace{\frac{i}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{t}{c^2+t^2} dt}_{=0}\end{aligned}$$

Aquí la segona integral és zero per la paritat de la funció que estem integrant.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{c}{c^2+t^2} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/c}^{T/c} \frac{1}{1+u^2} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{T/c} \frac{1}{1+u^2} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} du}_{=\frac{\pi}{2}} - \int_{T/c}^\infty \frac{1}{1+u^2} du \right)\end{aligned}$$

Per tant:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{s} ds - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{T/c}^\infty \frac{1}{1+u^2} du \leq \int_{T/c}^\infty \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-1}{u} \right]_{T/c}^\infty = \frac{c}{\pi T} < \frac{c}{T}$$

Que és el que volíem veure. □