

**TSTST 2018** Per un enter  $n > 0$  definim  $\mathcal{F}(n)$  com el conjunt de  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  tal que el polinomi

$$p(x) = x^2 + mx + n$$

té alguna arrel entera.

La setmana passada vam veure que el conjunt  $S$  de  $n$  tals que  $\mathcal{F}(n)$  conté 2 números consecutius és infinit i la suma dels recíprocs dels elements de  $S$  és menor que 1.

1. Demostra que hi han infinits  $n$  tals que  $\mathcal{F}(n)$  conté tres enters consecutius.

Pistes:

**Solució:** Notem que si  $\mathcal{F}(n)$  té tres elements consecutius, aleshores pel mateix raonament de la setmana passada, tenim que existeixen  $d_0$ ,  $d_1$  i  $d_2$  tals que

$$m = \underbrace{\frac{n}{d_0}}_{k_0} + d_0 \quad m + 1 = \underbrace{\frac{n}{d_1}}_{k_1} + d_1 \quad m + 2 = \underbrace{\frac{n}{d_2}}_{k_2} + d_2$$

Per tant, pel que hem trobat abans:

$$n = ab(b+1)(a+1) = a'b'(b'+1)(a'+1)$$

tal que

$$\begin{array}{l|l} 2ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1) + ab = m+2 & 2ab + a + b + 1 = m+2 \\ 2ab + a + b = m+1 & 2a'b' + a' + b' = m \\ 2a'b' + a' + b' + 1 = (a'+1)(b'+1) + a'b' = m+1 & \\ 2a'b' + a' + b' = m & \end{array}$$

$$\begin{aligned} ((a+1)(b+1) - (a'+1)(b'+1)) + ab - a'b' - 1 \\ ab(a+1)(b+1) - a'b'(a'+1)(b'+1) &= 0 \\ 2(ab - a'b') + (a - a') + (b - b') &= 1 \\ \frac{2a'b' + a' + b' + 1}{2ab + a + b} &= 1 \end{aligned}$$

$$2ab + a + b = (a+1)(b+1) + ab - 1$$