Resum de teoria pel final de MATN

Curs 2025-2026

Bernat Esteve

2026

ÍNDEX

Capítol 7
Demostració del Teorema 5.8 (i el lema 5.6.1 i 5.7).

8 **Capítol 8**
Demostració de 6.8 assumint 6.9 (l'enunciat del qual cal recordar).

9 **Capítol 9**
Demostració de 6.5

CAPÍTOL

DEFINICIONS 1

1.1 Sèries de Dirichlet

Definició 1.1 **Sèrie de Dirichlet**

Una sèrie de Dirichlet és una sèrie de la forma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \frac{f(n)}{n^s}$$

On $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ és una funció aritmètica, i $s \in \mathbb{C}$.

Definició 1.2 **Convergència de productoris**

Sigui $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ una successió de complexos, aleshores el productori $\prod z_n$ convergeix si i només si existeix el límit $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} z_n$, i aquest és no nul.

Definició 1.3 **Convergència absoluta de productoris**

Donada una seqüència z_n amb $\Re(z_n) > 0$, aleshores el productori $\prod z_r$ es diu que convergeix absolutament si $\sum \log(z_r)$ convergeix absolutament.

1.2 Funcions L

Definició 1.4 **Caràcter d'un grup**

Sigui G un grup finit i abelià, aleshores un caràcter de G serà un morfisme $\psi\colon G \to \mathbb{C}^*$

(on $\mathbb{C}^*$ és el grup multiplicatiu de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Definició 1.5 El grup de caràcters

Denotem per $\widehat{G}$ al grup $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \{\text{Caràcters de G}\}$, on la operació és:

$$\psi, \phi \colon G \to \mathbb{C}^* \qquad \text{aleshores } (\psi \cdot_{\widehat{G}} \phi)(g) \mapsto \psi(g) \cdot_{\mathbb{C}^*} \phi(g)$$

I anomenarem a $\widehat{G}$ el grup de caràcters de G.

Definició 1.6 Caràcter mòdul m

Un caràcter mòdul m és un caràcter de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

Definició 1.7 Caràcter principal mòdul m

El caràcter principal mòdul m és $\chi_0(a) \colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ definit per

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \gcd(a, m) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Definició 1.8 Funció L associada a un caràcter de Dirichlet

La funció L associada al caràcter de Dirichlet mòdul m χ és la sèrie de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

.

Definició 1.9 Funció m-èsima de Dirichlet

Sigui $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, aleshores la funció m-èsima de Dirichlet es defineix com

$$\zeta_m(s) := \prod_{\chi} L(\chi, s)$$

On el producte recorre tots els caràcters de Dirichlet mòdul m.

Definició 1.10 Caràcters reals i complexos.

Diem que $\chi \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$ és un caràcter de Dirichlet real si $\mathrm{Im}(\chi) \subset \mathbb{R}$. És a dir $\mathrm{Im}(\chi) \subset \{-1, 0, 1\}$. I direm que és complex altrament.

Definició 1.11 Caràcter conjugat

Direm $\overline{X}$ al caràcter de Dirichlet conjugat

$$\overline{X} \colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C} \qquad \text{que envia } a \in \mathbb{Z} \text{ a } \overline{\chi}(a) = \overline{\chi(a)}$$

I no és massa difícil de veure que aquesta funció és un caràcter de Dirichlet del mateix mòdul.

1.3 Continuació meromorfa i equació funcional de $\zeta(s)$

Definició 1.12 θ **de Jacobi**
La funció θ de Jacobi es defineix $\theta\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x}$$

I definim també la funció ω com

$$\omega(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi x} = \frac{\theta(x)-1}{2}$$

Definició 1.13 La funció Γ
La funció Γ es defineix:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^s\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \text{per } \sigma > 0$$

Definició 1.14 Funció de Riemann completada
Definim la funció de Riemann completada com

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

I també tenim
$$\frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s+1}{2}}\right)\omega(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}$$

1.4 Productes d'Hadamard

Definició 1.15 Ordre d'una funció
Sigui $f(s)$ una funció entera. Es diu que f és d'ordre menor o igual que $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ si existeix $r_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$f(s) = \mathcal{O}\left(e^{|s|^\alpha}\right) \qquad \text{per tot } |s| \geq r_0$$

Aleshores l'ordre de f es defineix

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} | f \text{ és d'ordre } \leq \alpha\}.$$

CAPÍTOL

2 ENUNCIAR ABEL

Teorema 2.1 **Criteri de sumació d'Abel**

Sigui $a\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{C}$, considerem $A(t) \coloneqq \sum_{n \leq t} a(n)$ les sumes parcials de a; i una funció $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ amb derivada contínua en un interval $[x, y] \neq \varnothing$[a]. Aleshores

$$\sum_{x<n\leq y} a(n)g(n) = A(y)g(y) - A(x)g(x) - \int_x^y A(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

[a]Per alguna raó, al professor li ha agradat considerar l'interval $[y, x]$, però em nego a fer servir aquesta notació.

CAPÍTOL

DEMOSTRAR 3.8 (SENSE VEURE QUE LA INTEGRAL I(S) ÉS UNA FUNCIÓ HOLOMORFA).

3

Teorema 3.1 **Teorema 8 (No donat)**
Per $\sigma > 1$, tenim:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \underbrace{\int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)\mathrm{d}x}_{=I(s)}$$

On la funció $I(s)$ és una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$.

1. Comencem amb $\Gamma(s)$, i apliquem el canvi de variable $x = n^2\pi x$ i ho treiem tot a fora.

2. Suposem que hi ha convergència absoluta, i fem el sumatori sobre $n \geq 1$ dels 2 costats (en un costat apareix ω i a l'altre apareix ζ).

3. Separem la integral $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$.

4. Fem el canvi de varible $u = \frac{1}{t}$ a la integral de la esquerra.

5. Fem servir $\theta(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\theta(x)$ i que $2\omega(x) + 1 = \theta$.

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE 4.6 I ASSUMINT 4.7. 4

Proposició 4.1 proposició 6 (Donat)
Sigui f una funció entera d'ordre α. I suposem que f no té zeros. Aleshores es té que $f = e^{g(s)}$ on g és un polinomi de grau α. És a dir, que el grau d'una funció entera sense zeros ha de ser un enter.

Proposició 4.2 proposició 7 (No donat)
Sigui $U \subseteq \mathbb{C}$ simplement connex. Sigui $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa i sense zeros en U. Aleshores existeix $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(s) = e^{g(s)}$ per tot $s \in U$.

Amb això, només ens fa falta veure que g ha de ser un polinomi.

1. Agafar la $g(s)$ que ens dona la proposició.
2. Fitar la part real de $g(s)$
3. Menjar-nos el que no fa falta en una constant.
4. Assumir que $g(0) = 0$
5. Fer Taylor de g.
6. posar els summands de Taylor com a integrals amb el teorema de Cauchy
7. Calcular la integral de $g(s)s^{n-1}$, i fer el conjugat.
8. Sumar 0 a a_n
9. Fer el valor absolut de tot a_n.
10. Integrar $g(s)/s$, i veure que la integral de la part real ha de ser 0.
11. Sumar 0 a la integral que tenim de $|a_n|$.

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE 4.15 I ASSUMINT 4.10 I 4.14.

5

Teorema 5.1 **Teorema 15 (Donat)**
La funció zeta de Riemann completada

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

satisfà:

1. Es una funció d'ordre 1.
2. Té un nombre infinit de zeros (a la franja crítica).
3. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|\rho_n|}$ divergeix; i $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$ convergeix $\forall\varepsilon > 0$.

Notem que els zeros de la funció ξ són exactament els zeros (amb multipliciat) de ζ en la franja crítica.

1. Notar que $\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}$ té ordre 1.
2. Si ens centrem en $\sigma > 0$ la funció gamma també té ordre 1 (i argumentar per què és suficient $\sigma > 0$).
3. Escriure ζ com $\frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\mathrm{d}x$ en $\sigma > \frac{1}{2}$, i veure que això també és d'ordre 1 (de fet és aproximadament lineal per $s \gg 1$).
4. Argumentar que $\log(r!) \sim r\log(r)$.(una fita és trivial, l'altre es fa comparant-ho amb una integral)
5. Estudiar $\log(\xi)$ en $s = r$ (un enter)
6. Estudiar $r \to \infty$.

7. Com que té ordre 1, pel corol·lari 14 sabem que si el sumatori convergeix aleshores la funció ha de ser $\leq e^{C|s|}$.

8. Raonar a partir d'aquí que hi ha d'haver un numero infinit de zeros.

9. Enunciar el corol·lari 10, i acabar la demostració.

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE 5.5. LA DEMOSTRACIÓ HA D'INCLOURE ELS ENUNCIATS I DEMOSTRACIONS DE 5.2 I), 5.3, I 5.4 I). 6

Lema 6.1 Lema 2 (No donat)
Per $\sigma > 1$ es té:

1. $\Re \log(\zeta(s)) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{\cos(mt \log p)}{mp^{\sigma m}}$

On en el segon apartat, la funció $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$

Demostració.

1. Per corol·lari 1.17 sabem que $\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{mp^{sm}}$ a tot $\mathbb{C}$ (per continuació analítica)
2. trencar s en la seva part real i la seva part imaginària.
3. Fer $\Re(\log(\zeta(s)))$.

□

Lema 6.2 Lema de Mertens (no donat)
Per qualsevol $\theta \in \mathbb{R}$, tenim la següent desigualtat.

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0$$

Demostració. 1. Utilitzar la fórmula de l'angle doble del cosinus. □

Proposició 6.1 Mertens per a la funció ζ. (No donat)
Per $\sigma > 1$, tenim:

1. $\zeta^3(\sigma)|\zeta^4(\sigma + it)||\zeta(\sigma + i2t)| \geq 1$,

Demostració. 1. Aplicar el lema 2.

2. Aplicar el lema de Mertens.

□

Teorema 6.1 Regió lliure de zeros I (no donat)
La funció $\zeta(s) \neq 0$ en $\sigma = 1$ (i per la simetria de ζ, en $\sigma = 0$).

Demostració. 1. Suposem que $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $\zeta(1 + it) = 0$.

2. Veure que $t \neq 0$
3. A més $\zeta(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma - 1}$.
4. agafem f tal que $\zeta(\sigma + it) = (\sigma - 1)^m f(\sigma + it)$
5. Utilitzem la prop 6, i arribem a una contradicció

□

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA 5.8 (I EL LEMA 5.6.1 I 5.7). 7

Lema 7.1 Lema 6 (No donat)

Per $1 < \sigma \leq 2$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \frac{1}{\sigma - 1} + K \qquad \text{on } K \in \mathbb{R}$$

Lema 7.2 Lema 7 (No donat)

Sigui $\rho = \beta + i\gamma$ un zero no trivial de $\zeta(s)$ amb $\gamma \geq 2$. Sigui $s = \sigma + it$ amb $1 < \sigma \leq 2$ i $t \geq 2$, aleshores

1. $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right) < K\log(t)$ per $k \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. Si a més $t = \gamma$, aleshores: $-\Re\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) < k\log(t) - \frac{1}{\sigma-\beta}$ per $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Lema 7.3 Teorema 8 (Donat)

Existeix $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que ζ no té zeros a la regió $t \geq 2$, i $\sigma \leq 1 - \frac{c}{\log(t)}$

Demostració.

1. Posem el que ens diu Mertens per $-\frac{\zeta'}{\zeta}$.
2. Posem $s(t) = \sigma + it$ amb $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(t)}$ de tal manera que estigui entre $\sigma \in (1, 2]$.
3. Prenem t l'ordenada d'algun zero no trivial de ζ.
4. Fitem tots els termes pel que ens diuen els lemes 6 i 7.

5. Fem que totes les k siguin iguals i simplifiquem les coses de tal manera que només quedin 3 termes.

6. Fem $\sigma = 1 + \delta / \log(t)$.

7. Fem àlgebra i posem tot el que sobra en una constant (que per δ prou petita, aquesta constant serà positiva).

$\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE 6.8 ASSUMINT 6.9 (L'ENUNCIAT DEL QUAL CAL RECORDAR). 8

Proposició 8.1 Proposició 8 (No donat)
Per $T \gg 1$, i $x \in \mathbb{R}_{\geq 2}$, i $c = 1 + \frac{1}{\log x}$, aleshores:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \underbrace{\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s}}_{F(s)} \mathrm{d}s = x - \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{x(\log T)^2}{T \log(x)} \right)$$

On la suma sobre ρ és una suma sobre els zeros no trivials de ζ.

Demostració.

1. Prenem el contorn $c + iT \overset{\gamma_1}{\rightsquigarrow} -U + iT \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} -U - iT \overset{\gamma_3}{\rightsquigarrow} c - iT \rightsquigarrow c + iT$. Amb U senar positiu, i T no és la ordenadad de cap zero.
2. Considerem la integral de F sobre aquest domini, i anomenem les integrals I_1, I_2, I_3 a les integrals associades al seu camí respectiu; i R al residu.
3. Calculem el residu dels 3 tipus de pols de F.
4. Enunciem el lema 9.
5. Calculem el límit $U \to \infty$.

Lema 8.1 Lema 9 (No donat)

Les integrals:

$$I_1, I_3 = \mathcal{O}\left(\frac{x(\log T)^2}{T\log x}\right)$$
$$I_2 = \mathcal{O}\left(\frac{T\log U}{Ux^U}\right)$$

$\square$

CAPÍTOL

DEMOSTRACIÓ DE 6.5

9

Lema 9.1 Lema 5 (Donat)
Sigui

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } y = 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Aleshores, per $y > 0$, $c > 0$, $T > 0$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} \mathrm{d}s - \delta(y) \right| < \begin{cases} \frac{y^c}{T|\log y|} & \text{si } y \neq 1 \\ \frac{c}{T} & \text{si } y = 1. \end{cases}$$

Demostració.

1. Cas 1: $y \in (0,1)$. Considerem el domini $c-iT \overset{\gamma_1}{\rightsquigarrow} U-iT \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} U+iT \overset{\gamma_3}{\rightsquigarrow} c+iT$
2. Fitem la $|I_2|$.
3. Fem $\lim_{U\to\infty}$.
4. Fem $|\sigma - iT| > |T|$, integrem, i ho ajuntem tot.
5. Cas 2: $y > 1$. Considerem el domini $c - iT \overset{\gamma_1}{\rightsquigarrow} -U - iT \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} -U + iT \overset{\gamma_3}{\rightsquigarrow} c + iT$
6. Calculem el residu en $s = 0$. I calculem les integrals com ho hem fet abans.
7. Cas 3: $y = 1$. Calculem la integral directament.
8. Argumentem per paritat per carregar-nos la part senar. I per la part parella fem un canvir d'integral per tenir la integral de l'arctangent.
9. Calculem $|I - \delta(y)|$, on fitem $1/1 + u^2 < 1/u^2$ i aconseguim la fita de l'enunciat.

$\square$