Exercici 1

Sigui A un anell, I un ideal. Recordeu que es defineix el *radical* de I, $\operatorname{rad}(I) = \eta(I)$, com el conjunt d'elements $x \in A$ tals que existeixen $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $x^n \in I$. Proveu que:

1. $\operatorname{rad}(I)$ és la intersecció de tots els ideals primers de A que contenen I.
2. Si I és un ideal primer, $\operatorname{rad}(I^n) = I$ per a tot $n > 0$.
3. $\operatorname{rad}(I)$ és un ideal maximal si, i només si, I està contingut en un únic ideal primer.

Exercici 1.1

Per veure el primer apartat, notem que $\operatorname{rad}(I)$ és un ideal. Per veure-ho notem que $\operatorname{rad}(I)/I$ són els elements nilpotents de A/I; i per tant és un ideal (per la bijecció entre un conjunt i l'altre).

Primera inclusió:
Per fer la primera inclusió, hem de veure que rad és un ideal primer. Sigui $ab \in \operatorname{rad}(I)$, aleshores sabem que $(ab)^n \in I$ per alguna n. Per tant, si fem quocient per I, tenim que ab és nilpotent, i per tant, ha de ser al $\operatorname{rad}(I)$.

Segona inclusió:
Sigui J un ideal primer que conté I, aleshores tenim $x^n \in I \implies x \in I$; és a dir que el rad $\subseteq J$, que és el que volíem veure.

Exercici 1.2

Notem que $I^2 \subseteq I$, per tant, $\operatorname{rad}(I^2) \subseteq \operatorname{rad}(I)$, per tant, en tenim prou en veure-ho per $\operatorname{rad}(I)$. Però sabem que A/I on I és un ideal primer és un domini d'integritat, i per tant, no hi ha elements nilpotents, i per tant el radical és I, que és el que volíem veure.

Exercici 1.3

Primera implicació:
Per veure la primera implicació, notem que si I només està contingut en un ideal primer J, aquest ha de ser maximal. I com que el radical ha de ser un ideal primer que contingui I, aquest haurà de ser J.

Segona implicació:
Per veure la segona implicació, notem que si l'ideal rad és maximal, aleshores també és primer; i com que rad ha de viure dins de tots els ideals primers que contenen I, aquest ha de ser únic.