Introducció a l'àlgebra commutativa

Curs 2025-2026

Semestre de Primavera

1. Introducció

Breu repàs de la teoria d'anells i ideals.
L'espectre primer d'un anell.

1. Sigui A un anell, I un ideal. Recordeu que es defineix el *radical* de I, $\operatorname{rad}(I) = \eta(I)$, com el conjunt d'elements $x \in A$ tals que existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in I$. Proveu que:

(i) $\operatorname{rad}(I)$ és la intersecció de tots els ideals primers de A que contenen I.

(ii) Si I és un ideal primer, $\operatorname{rad}(I^n) = I$ per a tot $n > 0$.

(iii) $\operatorname{rad}(I)$ és un ideal maximal si, i només si, I está contingut en un únic ideal primer.

2. Sigui $A[[X]]$ l'anell de sèries de potències amb coeficients en A, $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in A[[X]]$. Demostreu:

(i) f és una unitat en $A[[X]] \iff a_0$ és una unitat de A.

(ii) Si f és nilpotent aleshores a_n és nilpotent, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Sigui k un cos. Proveu que els ideals (no nuls) de $k[[X]]$ són de la forma (X^i).

3. Sigui A un anell. Donat un polinomi $h = h_0 + \cdots + h_n X^n$ de $A[X]$, definim el contingut $c(h)$ de h com l'deal d'A generat pels seus coeficients:

$$c(h) = (h_1, \dots, h_n) \subseteq A\,.$$

(i) Proveu que donats polinomis $f, g \in A[X]$ es verifica $c(f)c(g) \subseteq \eta(c(fg))$, on $\eta(\,\cdot\,)$ és el radical d'un ideal.

(ii) Proveu que si $f = a_0 + \cdots + a_r X^r$, $g = b_0 + \cdots + b_s X^s$ son polinomis de $A[X]$, tals que $(a_0, \dots, a_r) = A$ i $(b_0, \dots, b_s) = A$, aleshores l'ideal engendrat pels coeficients de fg és A.

(iii) Dona un exemple on la contenció de l'apartat (i) sigui estricta.

4. Siguin A, B anells i $A \times B$ el seu producte cartesià. Recorden que si definim les operacions $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, $(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c, b\cdot d)$, aleshores $(A\times B, +, \cdot)$ és un anell, mai un domini d'integritat si A o B són no trivials. A banda, si $I \subseteq A$, $J \subseteq B$ són ideals, aleshores $I \times J$ és un ideal de $A \times B$, $(A\times B)/(I\times J) \cong A/I \times B/J$ i tots els ideals de $A \times B$ són d'aquesta forma. A més, els únics ideals primers de $A \times B$ són els de la forma $I \times B$, amb $I \subseteq A$ primer, o bé els de la forma $A \times J$, amb $J \subseteq B$ primer. Anàlogament pels ideals maximals.

(i) Estendre els anteriors resultat al producte cartesià d'una familia finita d'anells $A_1, \ldots, A_n$. (Podeu fer servir la notació $A_1 \times \cdots \times A_n$.)

(ii) Estendre la definició de producte cartesià a una familia qualsevol d'anells: $\{A_i\}_{i\in I}$. (Podeu fer servir la notació $\prod_{i\in I} A_i$.) Si la familia és infinita, és cert que tot ideal del producte cartesià és el producte cartesià de ideals? Si no és el cas, doneu un contraexemple.

(iii) Proveu que el producte cartesià d'anells verifica la següent propietat universal: denotem per $\pi_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ les projeccions naturals, per a cada i. Són morfismes d'anells. Aleshores, donada una família de morfismes d'anells: $\{f_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ existeix un únic morfisme d'anells $f : A \to \prod_{i\in I} A_i$ de forma que $\pi_i \circ f = f_i$, per a cada i.

(iv) Proveu que el producte cartesià és únic, excepte isomorfismes, amb aquesta propietat. (Penseu un enunciat adequat que reflecteixi aquest fet.)

(v) Proveu que un element del producte cartesià d'una família finita d'anells és nilpotent si, i només si, totes les seves components són nilpotents. Doneu aleshores una descripció del nilradical del producte cartesià d'una familia finita d'anells. Concloure que el producte cartesià d'una família finita d'anells és reduït si, i només si, cada anell de la familia ho és.

(vi) Penseu que pot passar amb l'anterior enunciat en el cas d'una família infinita d'anells i doneu-ne exemples.

5. Sigui A un anell. Recordeu que un element $e \in A$ és *idempotent* si $e^2 = e, e \neq 0$ i que si $e \neq 1$ aleshores e no pot ser un unitat.

(i) Sigui e un idempotent. Prova que $Ae \subset A$ és un anell (però no un subanell de A excepte si $e = 1$).

(ii) Prova que si $e \neq 1$ és un idempotent, aleshores $1 - e$ és un idempotent i que $e(1 - e) = 0$.

(iii) Prova que existeixen anells no trivials A_1, A_2 tals que $A \simeq A_1 \times A_2$ si, i només si, existeix un idempotent $e \in A$, $e \neq 1$.

(iv) Més en general: prova que existeixen anells no trivials $A_1, \ldots, A_n$ tals que $A \simeq A_1 \times \cdots \times A_n$ si, i només si, existeix una familia de elements idempotents $e_1, \ldots, e_n$, $e_i \neq 1$ per a tot i, tal que $e_i e_j = 0$ per a tot $i \neq j$ i $1 = e_1 + \cdots + e_n$.

6. Sigui A un anell i $I_1, \ldots, I_n$ una familia de ideals comaximals dos a dos. Proveu que

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} I_i \,.$$

7. Sigui A un anell i $\eta(A)$ el seu nilradical. Prova que són equivalents:

(i) A té exactament un ideal primer.

(ii) Tot element de A és nilpotent o unitat.

(iii) $A/\eta(A)$ és un cos.

8. Sigui A un anell. Es defineix el *radical de Jacobson* de A com l'ideal $J(A)$ intersecció de tots els ideals maximals de A.

(i) Proveu que: $x \in J(A) \iff \forall y \in A,\ 1 - xy$ és invertible en A.

(ii) Proveu que la suma d'un element del radical de Jacobson i una unitat és una unitat.

9. Sigui A un anell commutatiu tal que $a^2 = a$ per tot $a \in A$ (un tal A es diu que és un anell Boole), i sigui $\operatorname{Max} A$ el conjunt d'ideals maximals de A. Demostreu:

(i) Tot ideal primer $\mathfrak{p}$ de A és maximal i $\dfrac{A}{\mathfrak{p}} \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{(2)}$.

(ii) $\displaystyle\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m} = 0$

(iii) Per cada $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$, sigui $\varphi_{\mathfrak{m}} : A \longrightarrow \frac{A}{\mathfrak{m}}$ el morfisme de pas al quocient. Proveu que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & \displaystyle\prod_{\mathfrak{m} \in MaxA} \frac{A}{\mathfrak{m}} \\ a & \longmapsto & (\varphi_{\mathfrak{m}}(a)) \end{array}$$

és un morfisme injectiu d'anells, i que si $\operatorname{Max} A$ és finit llavors Φ és un isomorfisme. Deduïu que A és finit si i només si $\operatorname{Max} A$ és finit.

(iv) $2a = 0$ per tot $a \in A$, i que tot ideal finitament generat de A és principal. (Indicació: $(a, b) = (a + b + ab)$.)

10. Sigui A un domini d'ideals principals.

(i) Demostra que $J(A) = 0$ si i només si A és un cos o té infinits ideals maximals.

(ii) Demostra que si $a \in A$ és diferent de zero i no unitari llavors:

$J(A/(a)) = 0 \iff$ la descomposició de a en producte d'elements primers no conté quadrats.

11. Sigui A un anell commutatiu. Demostreu que $\eta(A[T]) = J(A[T])$.

12. Per simplificar, escrivim $(I : J)$ en lloc de $(I :_A J)$. Prova que:

(i) $I \subseteq (I : J)$.

(ii) $(I : J)J \subseteq I$.

(iii) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$.

(iv) $(\cap_i I_i : J) = \cap_i (I_i : J)$.

(v) $(I : \sum_i J_i) = \cap_i (I : J_i)$.

En els casos que no hi ha igualtat dona un contraexemple.

13. Sigui A un anell, I un ideal de A. Considerem l'ideal (I, X) de $A[[X]]$ generat per X i els elements de I.

(i) Estableix un isomorfisme d'anells

$$A[[X]]/(I, X) \cong A/I.$$

(ii) Sigui J un ideal de $A[[X]]$, $I = J \cap A$. Prova que si $X \in J$, aleshores $J = (I, X)$.

(ii) Prova que X pertany al radical de Jacobson de $A[[X]]$. Dedueix que existeix una aplicació bijectiva

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Max}(A) & \to & \mathrm{Max}A[[X]] \\ \mathfrak{m} & \mapsto & (\mathfrak{m}, X). \end{array}$$

14. Sigui $f : A \to B$ un morfisme d'anells, I_1, I_2 ideals d'A i J_1, J_2 ideals de B. Prova que:

(i) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$; $(I_1 \cap I_2)^e \subseteq I_1^e \cap I_2^e$; $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$; $(I_1 : I_2)^e \subseteq (I_1^e : I_2^e)$; $\mathrm{rad}(I)^e \subseteq \mathrm{rad}(I^e)$.

(ii) $(J_1 + J_2)^c \supseteq J_1^c + J_2^c$; $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$; $(J_1 J_2)^c \supseteq J_1^c J_2^c$; $(J_1 : J_2)^c \subseteq (J_1^c : J_2^c)$; $\mathrm{rad}(J)^c = \mathrm{rad}(J^c)$.

En els casos que no hi ha igualtat dona un contraexemple.

15. Anem a descriure l'espectre de l'anell de polinomis $\mathbb{Z}[X]$. Recordeu que és un anell factorial (no principal) i que els seus irreductibles són, o bé els irreductibles de $\mathbb{Z}$, o bé els polinomis primitius que ja són irreductibles a $\mathbb{Q}[X]$.

(i) Prova que si dos polinomis de grau positiu de $\mathbb{Z}[X]$ són primers entre si a $\mathbb{Z}[X]$ també ho són a $\mathbb{Q}[X]$.

(ii) Sigui P un ideal primer no principal de $\mathbb{Z}[X]$. Demostra que existeixen dos elements a P que són primers entre si.

(iii) Sigui P un ideal primer no principal de $\mathbb{Z}[X]$. Demostra que $P \cap \mathbb{Z} \neq 0$.

(iv) Descriu explícitament els ideals primers principals de $\mathbb{Z}[X]$.

(v) Sigui P un ideal primer no principal de $\mathbb{Z}[X]$. Demostra que està generat per dos elements i descriu-los explícitament. Prova que tots són ideals maximals.

(vi) Prova que tot ideal primer principal no és maximal. De fet, prova que tot ideal primer principal està contingut en infinits ideals maximals.

Finalment, fes un petit dibuix de l'espectre de $\mathbb{Z}[X]$.

16. Sigui A un anell commutatiu i $a \in A$. Prova que l'obert bàsic X_a és quasi-compacte.

17. Sigui A un anell commutatiu. Prova que:

(i) Per a tot ideal primer $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\{\mathfrak{p}\}$ és tancat si, i només si, $\mathfrak{p}$ és un ideal maximal.

(ii) Per a tot ideal primer $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$.

(iii) Per a tot ideal primer $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $V(\mathfrak{p})$ és irreductible.

(iv) Les components irreductibles de $\operatorname{Spec} A$ són de la forma $V(\mathfrak{p})$, amb $\mathfrak{p}$ un ideal primer minimal.

18. Prova que $\operatorname{Spec} A$ és T_0. Caracteritza quan $\operatorname{Spec} A$ és T_1 i dona un exemple. Quan és T_2?

19. (i) Prova que $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ és obert i tancat si, i només si, $U = X_e$, per un cert element $e \in A$ idempotent.

(ii) Conclou que $\operatorname{Spec} A$ no és connex si, i només si, existeix $e \in A \setminus \{0, 1\}$ idempotent.

(iii) Demostra, finalment, que l'spectre de tot anell local és connex, també de tot domini d'integritat, i dona un exemple d'anell A tal que $\operatorname{Spec} A$ tingui n components connexes, per a tot $n \geq 1$.

20. Sigui $f : A \to B$ un morfisme d'anells

(i) Prova que si f és exhaustiu, aleshores f^* és un homeomorfisme de $\operatorname{Spec} B$ en $V(\mathrm{Ker} f)$.

(ii) Prova que $f^*(\operatorname{Spec} B)$ és dens a $\operatorname{Spec} A$ si, i només si, $\ker f \subset \eta(A)$.

(iii) Sigui A un domini d'integritat amb un únic ideal primer no nul $\mathfrak{p}$ (pensa algun exemple) i sigui K el seu cos de fraccions. Sigui $B = A/\mathfrak{p} \times K$ i $f : A \to B$ el morfisme d'anells definit per $f(a) = (\overline{a}, \frac{a}{1})$ (pensa perquè f està ben definit). Prova que f^* és bijectiva però no un homeomorfisme.

2. Mòduls

21. Sigui A un anell, $I \subseteq A$ un ideal, M un A-mòdul. Prova que $\mathrm{Hom}_A(A/I, M) \simeq \{m \in M \mid \mathrm{Ann}(m) \supset I\}$. Dedueix que si A és un domini d'integritat, aleshores per a tot ideal no trivial (i.e. $I \neq 0, A$), $\mathrm{Hom}_A(A/I, A) = 0$. Dona un exemple del contrari. (Recordem que $\mathrm{Ann}(m) = (0 :_A m) = \{a \in A \mid am = 0\}$.)

22. Sigui K un cos, E un K-espai vectorial de dimensió finita, $\varphi \in \mathrm{End}_K(E)$. Considerem a E com a $K[X]$-mòdul amb l'estructura definida per φ. Prova que E no és fidel com $K[X]$-mòdul i descriu el seu anul·lador. (Recordem que un A-mòdul és fidel si $\mathrm{Ann}(M) = 0$.)

23. Sigui A un un domini d'integritat i M un A-mòdul finit generat. Prova que M és fidel si, i només si, $A \subseteq M$. Dona un exemple $\mathbb{Z}$-mòdul no finit generat, que sigui fidel però que no contingui cap submòdul isomorf a $\mathbb{Z}$.

24. Sigui A un anell i M un A-mòdul. En diem que M és cíclic si existeix $m \in M$ tal que $M = Am$. Prova que tot mòdul cíclic és isomorf a $A/\mathrm{Ann}(M)$.

25. Prova que donat una anell A aleshores:

(i) $(0 :_A \sum_{i\in I} L_i) = \bigcap_{i\in I}(0 :_A L_i)$ per a tota familia de A-mòduls $\{L_i\}_{i\in I}$.

(ii) $(N :_A L) = (0 :_A (L+N)/N$ per a tota parella L, N d'A-mòduls.

26. Sigui A un anell, M un A-mòdul. Es defineix el *dual* de M com a $M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A)$.

(i) Prova que si A és domini d'integritat i $\mathrm{Ann}(m) \neq 0$ per a tot $m \in M$, aleshores $M^* = 0$.

(ii) En particular, conclou que si A és domini d'integritat i M no és fidel aleshores $M^* = 0$.

(iii) Prova que existeix un morfisme d'A móduls $\phi : M \to (M^*)^* =: M^{**}$ i descriu el nucli d'aquest morfisme.

(iv) Prova que si M és un A-mòdul lliure de rang finit, aleshores ϕ és un isomorfisme.

(Un A-mòdul amb aquesta propietat s'anomena *reflexiu.*)

(v) Sigui $A = \mathbb{Z}/(6)$ i $M = \mathbb{Z}/(2)$ (reflexiona perquè M és un A-mòdul). Calcula M^* i M^{**} i conclou que M és un A-mòdul reflexiu, però no lliure.

(vi) Sigui $A = K[x,y]/(xy)$, amb K un cos qualsevol i $M = K[y]$ (reflexiona perquè M és un A-mòdul). Calcula M^* i M^{**} i conclou que M és un A-mòdul reflexiu, però no lliure.

27. Sigui A un domini d'integritat, M un A-mòdul. Es diu que $x \in M$ és un element de torsió si existeix $a \in A - \{0\}$ tal que $ax = 0$. Sigui $T(M)$ el conjunt d'elements de torsió de M. Aleshores, M és diu de torsió si $M = T(M)$. Si $T(M) = 0$ és diu que M és lliure de torsió. Proveu:

(i) $T(M)$ és un submòdul de torsió M.

(ii) $M/T(M)$ és lliure de torsió.

(iii) Si $f : M \longrightarrow N$ és A-lineal, llavors $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

(iv) Si M és de torsió i N lliure de torsió, llavors $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$.

(v) Si M és lliure, M és lliure de torsió.

(vi) Si M és cíclic i lliure de torsió, llavors $M \simeq A$.

(vii) Cóm són els $\mathbb{Z}$-mòduls finit generats lliures de torsió?

28. Sigui A un anell i M un A-mòdul. Direm que M és simple si no conté cap submòdul no trivial (i.e., si N és un submòdul de M, aleshores $N = 0$ o $N = M$). Demostreu:

(i) Tot mòdul simple és cíclic.

(ii) Dona un exemple de mòdul cíclic no simple i un exemple de mòdul cíclic simple.

(iii) Donat un anell A, descriu tots els seus A-mòduls simples.

(iv) Si M, N són A-mòduls simples i $f : M \to N$ és un morfisme, aleshores $f = 0$ o bé f és un isomorfisme.

29. Fent servir les propietats universals del producte directe i de la suma directa, prova el següent:

(i) $\mathrm{Hom}_A(M, \prod_{i\in I} N_i) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M, N_i)$. Descriu explícitament l'isomorfisme.

(ii) $\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N)$. Descriu explícitament l'isomorfisme.

Ara, utilitzant (ii), reprova (iv) de l'exercici 26.

30. Sigui $M \neq 0$ un A-mòdul lliure. Prova que M és fidel. També que si $M \subseteq A$, llavors M és cíclcic.

31. Sigui A un anell. Proveu que:

(i) Tot A-módul és lliure si, i només si, A és un cos.

(ii) Si tot submòdul d'un lliure finitament generat és lliure, llavors A és un domini d'ideals principals. (La propietat contrària també es verifica, però no la demostrem aquest curs.)

32. Prueba directamente por inducción sobre el número de generadores el lema de Nakayama: dado M un A-módulo finito generado y un ideal $I \subseteq J(A)$ tal que $M = IM$, entonces $M = 0$.

33. Probar la exactitud a la izquierda del Hom contravariante. Es decir, probar que si se tiene una sucesión exacta de A-módulos

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

es exacta para todo A-módulo N. Dar un contraejemplo para la exactitud a la derecha.

34. Recordemos que dada un aplicación cualquiera $f : M \to N$, se dice que $s : N \to M$ es una sección si $f \circ s = Id_N$, y que $r : N \to M$ se dice que es una retracción si $r \circ f = Id_M$. Es claro que si existe una sección, f es exhaustiva y s inyectiva, y que si existe una retracción f es inyectiva y r es exhaustiva.

Si M, N son A-módulos y f es morfismo de A-módulos, diremos que existe una sección (como A-módulos) si s es también morfismo de A-módulos, y de forma análoga para una retracción. (La existencia de secciones o de retracciones como conjuntos no implica su existencia como A-módulos).

Sea $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Probar que son equivalentes:

(i) g admite una sección s.

(ii) f admite una retracción r.

En tal caso, probar que $N = f(M) \oplus s(L) \simeq M \oplus L$.

Diremos entonces que la sucesión exacta escinde o es escindida. Razonar por qué, dados A-módulos M y L, la sucesión exacta natural:

$$0 \to M \xrightarrow{\iota_M} M \oplus L \xrightarrow{\pi_L} L \to 0$$

es escindida. Por último, probar que son equivalentes:

(iii) La sucesión exacta $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0$ escinde.

(iv) Existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma"] & L \arrow[r] \arrow[d, "Id_L"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota_M"'] & M \oplus L \arrow[r, "\pi_L"'] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

para cierto isomorfismo σ.

Probar también que si L es libre, la sucesión siempre es escindida. Por el contrario, probar que si A es un dominio de integridad y $N = A$, $M \neq 0$, la sucesión nunca escinde.

35. (Lema de la serpiente)

Dado un diagrama conmutativo se A-módulos con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha'"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"'] & N \arrow[r, "g'"'] & N'' &
\end{tikzcd}$$

demostrar que existe una sucesion exacta de A-módulos:

$$\mathrm{Ker}(\alpha') \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}(\alpha'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha') \xrightarrow{f'} \mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{g'} \mathrm{Coker}(\alpha'')$$

36. (Lema de los cinco)

Dado un diagrama conmutativo se A-módulos con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

demostrar:

(i) Si f_2 y f_4 son epimorfismos, y f_5 es monomorfismo, entonces f_3 es un epimorfismo.

(ii) Si f_2 y f_4 son monomorfismos, y f_1 es epimorfismo, entonces f_3 es un monomorfismo.

(iii) Si f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, entonces f_3 es un isomorfismo.

37. Dado una sucesión de A-módulos

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

demostrar que existe una sucesion exacta de A-módulos:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Ker}(gf) \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}(g)$$

$$\xrightarrow{\pi} Coker(f) \xrightarrow{g} \mathrm{Coker}(gf) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Coker}(g) \longrightarrow 0$$

con ι la inclusión natural, π y σ las proyecciones en los correspondientes cocientes.

38. Pensar sobre la Observación 2, página 2-47, de los apuntes sobre la construcción del producto tensorial de una familia finita de A-módulos a partir de las aplicaciones multilineales: dados A-módulos $M_1, \ldots, M_n$, existe un A-módulo $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$, y una aplicación A-multilineal

$$\pi : M_1 \times \cdots \times M_n \to M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$$

tal que, para toso A-módulo N y aplicación A-multilineal $f : M_1 \times \cdots \times M_n \to N$, existe una única aplicació A-lineal

$$\overline{f} : M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n \to N$$

tal que $\overline{f}\,\pi = f$. Además, este A-módulo es único, excepto isomorfismos compatibles con π.

39. Prueba las siguientes propiedades del producto tensorial (todos son A-módulos y el producto tensorial es sobre A):

(i) $M \otimes N \simeq N \otimes M$.

(ii) $M \otimes (N \otimes P)) \simeq (M \otimes N) \otimes P$.

(iii) $M \otimes (\bigoplus_{i \in I} M_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} M \otimes M_i)$.

(iv) $A \otimes M \simeq M$.

(v) $M \otimes A/I \simeq M/IM$, para todo ideal I de A.

40. Utilizando la propiedad asociativa (generalizada) del producto tensorial, dada una familia de A-módulos $M_1, \ldots, M_n$, podemos denotar por $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$ al resultado de aplicar, de manera sucesiva, el producto tensorial dos a dos a la familia anterior. Pero, por otro lado, hemos utilizado esta misma notación para el producto tensorial de esta familia de A-módulos respecto las aplicaciones multilineales alternadas. Razonar que no hay ambigüedad en esto, probando que ambas construcciones son isomorfas.

41. Sea $M_1, \ldots, M_n$ una familia de A-módulos libres.

(i) Probar que $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$ es un A-módulo libre.

(ii) Ahora de forma más concreta: sean $\{e_{j_i}\}_{j_i \in J_i}$ bases respectivas de M_i para cada $i = 1, \ldots, n$. Probar que la familia de elementos de la forma

$$e_{j_i} \otimes \cdots \otimes e_{j_n} ,$$

al variar $(j_1, \ldots, j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$, es una base de $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$.

(iii) Deducir que si M_i es finito generado para todo i, entonces

$$\mathrm{rank}_A(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{rank}_A(M_i) .$$

42. Sigui A un principal i M, N A-mòduls. Siguin $a, b \in A$, $x \in M$, $y \in N$ tals que $ax = 0$, $by = 0$. Proveu que $d(x \otimes y) = 0$, si $d = \mathrm{mcd}(a, b)$. En particular, demostreu que $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$ si $mcd(m, n) = 1$.

43. Sigui A un anell, I, J ideals d'A, i M un A-mòdul. Proveu que

$$M/IM \otimes_A A/J \simeq M/(I + J)M .$$

Ara, completeu l'anterior exercici calculant explícitament $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$ i provant $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$ si, i només si, $mcd(m, n) = 1$.

44. Sigui A íntegre. Un A-mòdul M es diu *divisible* si donat $x \in M$ i $a \in A$, $a \neq 0$ qualsevol, existeix $x' \in M$ tal que $x = ax'$. Proveu que, per a A-mòduls M, N:

(i) M de torsió, N qualsevol $\Rightarrow$ $M \otimes_A N$ de torsió.

(ii) M divisible, N qualsevol $\Rightarrow$ $M \otimes_A N$ divisible.

(iii) M divisible, N de torsió $\Rightarrow$ $M \otimes_A N = 0$.

45. Siguin A un anell íntegre, M un A-mòdul, $M' \subset M$ un submòdul. Es diu que M' és pur en M si $(aM) \cap M' = aM'$ per a tot $a \in A$. Demostreu:

(i) M' sumand directe de M $\Longrightarrow$ M' és pur en M.

(ii) La torsió $T(M)$ és un submòdul pur en M.

(iii) M/M' sense torsió $\Longrightarrow$ M' pur en M, i si M és sense torsió llavors la implicació contrària també és certa.

(iv) M' és pur en M si, i només si, per a tot $a \in A$ al aplicar $A/(a) \otimes_A \cdot$ a la successió exacta

$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$$

obtenim una succesió exacta.

46. Siguin A un anell i I un ideal de A.

(i) Sigui P un A-mòdul tal que $P \otimes_A A/I = 0$. Demostreu que $P \otimes_A A/I^n = 0$ per a tot $n > 0$.

(ii) Sigui $\varphi : M \longrightarrow N$ un morfisme de A-mòduls. Suposem que el morfisme induït $\varphi \otimes 1 : M \otimes_A A/I \longrightarrow N \otimes_A A/I$ és exhaustiu. Demostreu que el morfisme $\varphi \otimes 1 : M \otimes_A A/I^n \longrightarrow N \otimes_A A/I^n$ és exhaustiu per a tot $n > 0$.

47. Siguin A un anell, M, N dos A-mòduls i $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$.

(i) Prova que existeix un morfisme d'A-mòduls

$$\varphi : M^* \otimes_A N \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

tal que, donats $\omega \in M^*, y \in N$, es té que $\varphi(\omega \otimes_A y) = f$, on

$$f : M \longrightarrow N$$

$$f(x) := \omega(x)y.$$

(ii) Suposant que M és lliure, n'escollim una base $e_1, \ldots, e_n$. Denotem per $\omega_1, \ldots, \omega_n$ la base dual. Donada $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, expressa $\varphi^{-1}(f)$ en termes d'aquestes bases, i conclou que φ és un isomorfisme per a qualsevol A-mòdul N.

(iii) Suposant encara que M és lliure, i seguint amb les notacions de l'apartat anterior, demostra que si $N = M$, l'element $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \otimes_A e_i \in M^* \otimes_A M$ és independent de la base escollida inicialment.

(iv) Demostra que si A és principal, M és finitament generat i N no té torsió, llavors φ també és un isomorfisme.

48. (Restricción de escalars) Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, M un B-módulo. Probar que M es un A-módulo, con el producto definido por $am = f(a)M$, para cada $a \in A, m \in M$. Además, si $g : M \to N$ es un morfismo de B-módulos, g también un morfismo de A-módulos con la nueva estructura definida sobre M, N de A-módulos.

A este proceso, se le denomina la *restricción de escalares de B a A por f*.

49. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, M un A-módulo y N un B-módulo. Consideremos N como A-módulo por restricción de escalares de B a A por f. Probar que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ tiene un estructura natural com B-módulo. Dad un ejemplo de morfismo f y B-módulos M, N tales que $\mathrm{Hom}_A(M, N) \neq \mathrm{Hom}_B(M, N)$ (M, N pensados como A-módulo por restricción de escalares). También, de un morfismo f tal que para cualquier par de B-módulos M, N, $\mathrm{Hom}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_B(M, N)$.

50. (Extensión de escalares) Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, M un A-módulo. Consideremos B como A-módulo por restricción de escalares de B a A por f.

(i) Probar que $M \otimes_A B$ es un B-módulo, con el producto definido sobre los elementos de la forma $x \otimes b$ como $b'(x \otimes b) = x \otimes b'b$.

(ii) Probar que si $g : M \to N$ es un morfismo de A-módulos, $g \otimes Id_B : M \otimes_A B \to N \otimes_B B$ es un morfismo de B-módulos.

(iii) Probar que la estructura natural de $M \otimes_A B$ como A-módulo es la misma que la obtenida por restricción de escalares de B a A por f. Y que el morfismo natural $\iota : M \to M \otimes_A B$ dado por $\iota(m) = m \otimes 1_B$ es morfismo de A-módulos.

(iv) Probar que $M \otimes_A B$ verifica la siguiente propiedad universal: dado un B-módulo N, y un morfismo $g : M \to N$ como A-módulos (donde vemos N como A-módulo por la restricción de escalares de B a A por f), existe un único morfismo de B-módulos $\overline{g} : M \otimes_A B \to N$ tal que $\overline{g}\iota = g$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota"'] & N \\ M \otimes_A B \arrow[ur, "\exists ! \overline{g}"'] & \end{tikzcd}$$

(v) Probar que en las condiciones del apartado anterior,

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N)$$

como B-módulos. Describir explícitamente este isomorfismo y razonar que su existencia es equivalente a la propiedad universal anterior.

(vi) Probar que el par $(M \otimes_A B, \iota)$ es único, excepto isomorfismos, satisfaciendo la propiedad universal anterior. (Unicidad en el sentido que ya hemos considerado para otras construcciones como producto o coproducto).

Esta operación se denomina extensión de escalares de A a B por f. Comprobad que la extensión de escalares de A a B por f de A es el propio B.

51. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, F un A-módulo libre. Probar que $F \otimes_A B$ es un B-módulo libre del mismo rango que F, y dad una base de $F \otimes_A B$ como B-módulo libre en términos de una base de F como A-módulo libre.

Deducir que si M es una A-módulo finito generado, $M \otimes_A B$ es un B-módulo finito generado.

52. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos.

(i) Sea N un B-módulo. Consideremos N también como A-módulo por restricción de escalares de B a A por f. Probad que, en general, $N \ncong N \otimes_A B$ como B módulo (la extensión de la restricción de N no es N).

(ii) Sea M un A-módulo y consideremos $M \otimes_A B$ como A-módulo por la restricción de escalares. Probad que, en general, $M \ncong M \otimes_A B$ como B-módulos (la restricción de la extensión de M no es M).

(iii) Dad un ejemplo de morfismo tal que para todo B-módulo N, $N \cong N \otimes_A B$ como B-módulos.

53. Sean A, B anillos. Se dice que M es un $A - B$-bimódulo si M es módulo sobre A y módulo sobre B de forma que $a(bm) = b(am)$ para todo $m \in M, a \in A, b \in B$. (Por ejemplo, si $f : A \to B$ es un morfimso de anillos, todo B-módulo N es $A - B$-bimódulo de forma natural por restricció de escalares.)

(i) Sea N un A-módulo. Probad que $N \otimes_A M$ es también un $A - B$-bimódulo.

(ii) Análogamente, si L un B-módulo, $M \otimes_B L$ es $A - B$-bimódulo.

(ii) Probad que

$$(N \otimes_A M) \otimes_B L \cong N \otimes_A (M \otimes_B L)$$

como $A - B$-bimódulos.

54. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos y M, N A-módulos. Probad que

$$(M \otimes_A B) \otimes_B (N \otimes_B B) \cong (M \otimes_A N) \otimes_A B$$

como B-módulos.

55. Hemos visto que para todo A-módulo M y todo ideal I de A, $M \otimes_A A/I$ y M/IM son isomorfos. También vimos en clase que M/IM tiene una estructura natural como A/I-módulo. Justificar el isomorfismo anterior en términos de la extensión de escalares de A a A/I por el morfismo de paso al cociente.

56. Sea A un anillo local y M, N A-módulos finito generadors. Denotemos por $\mu(\,\cdot\,)$ el mínimo número de generadores de un A-módulo. Probar que

$$\mu(M \otimes_A N) = \mu(M)\mu(N),$$

y concluir que $M \otimes_A N = 0$ si y solo si $M = 0$ o bien $N = 0$.

57. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos y M un A-módulo plano. Probar que $M \otimes_B A$ es un B-módulo plano.

58. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillo tal que B es A-módulo plano por la restricción de escalares de B a A (se dice entonces que f es un morfismo plano). Probar que, entonces, para todo ideal $I \subseteq A$, se verifica que $IB \cong I \otimes_A B$.

59. Sea A un anillo y $B = A[X_1, \ldots, X_n]$ el anillo de polinomios en n variables. Justificar que el morfismo natural $A \to B$ es plano.

3. Anillos y módulos de fracciones

60. Sea A un anillo, S un sistema multiplicativamente cerrado de A.

(i) Probar que el morfismo natural $i : A \to S^{-1}A$ es inyectivo si y solo si $S \cap Z(A) = \emptyset$.

(ii) Si A es dominio de integridad, $S^{-1}A$ es dominio de integridad.

(iii) A es dominio de integridad si y solo si su anillo total de fracciones es dominio de integridad.

(iv) Sea $A = K[X,Y]/(XY)$ y $\mathfrak{p} = (\overline{X})$ (que es un ideal primo de A). Probar que $A_{\mathfrak{p}}$ es dominio de integridad (de hecho, un cuerpo) pero que A no lo es.

61. Sea A un anillo, S un sistema muiltiplicativamente cerrado de A y F un A-módulo libre. Probar que $S^{-1}F$ es una $S^{-1}A$-módulo libre del mismo rango que F, y dar una base de $S^{-1}F$ como $S^{-1}A$-módulo en función de una base de F como A-módulo.

62. Sea A un dominio de integridad y K su cuerpo de fracciones. Para todo A-módulo M, probar que el núcleo del morfismo natural $i : M \to M \otimes_A K$ es igual a $T_A(M)$, y que

$$M \otimes_A K \cong M/T_A(M) \otimes_A K$$

como K-espacios vectoriales.

63. Sea A un dominio de integridad y K su cuerpo de fracciones. Para todo A-módulo finito generado, denotamos por $\mu(M)$ el mínimo número de generadores (es decir, el cardinal más pequeño de todos los sistemas de generadores de M. Recordad que si M no es local, este número no es el mismo necesariamente para todos los sistemas minimales de generadores). Denotamos también por $\operatorname{rank}_A(M)$ la dimensión de $M \otimes_A K$ como K-espacio vectorial. Probar que:

(i) $\operatorname{rank}_A(M) \leq \mu(M)$.

(ii) $\operatorname{rank}_A(M) = \mu(M)$ si y solo si M es libre.

64. Sea A un anillo y S un sistema multiplicativamente cerrado de A. Dado un ideal I de A, podemos considerar $S^{-1}I$ (pensado como $S^{-1}A$-módulo) e $IS^{-1}A$ (la extensión del ideal I a $S^{-1}A$). Justificar por qué podemos identificar a ambos, es decir $S^{-1}I = IS^{-1}A$.

65. Dados submódulos N_1, N_2 de un A-módulo M y S un sistema multiplicativamente cerrado de A, demostrar que (algunas igualdades ya están demostradas en clase):

(i) $S^{-1}(N_1 + N_2) = S^{-1}N_1 + S^{-1}N_2$.

(ii) $S^{-1}(N_1 \cap N_2) = S^{-1}N_1 \cap S^{-1}N_2$.

(iii) $S^{-1}(N_1/N_2) \cong (S^{-1}N_1)/(S^{-1}N_2)$, como $S^{-1}A$-módulos.

(iv) Si M es A-módulo finito generado, $S^{-1}(0 :_A M) = (0 :_{S^{-1}A} S^{-1}M)$.

(v) Si N_2 es A-módulo finito generado, $S^{-1}(N_1 :_A N_2) = (S^{-1}N_1 :_{S^{-1}A} S^{-1}N_2)$.

Finalmente, probar que, dado un morfismo de A-módulos $f : M \to N$, se verifica:

(vi) $S^{-1}(\operatorname{Ker}(f)) = \operatorname{Ker}(S^{-1}f)$.

(vii) $S^{-1}(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{Im}(S^{-1}f)$.

66. Dado A domino de integridad, probar que;

(i) Para todo A-módulo M finito generado y libre de torsión, existe un A-módulo libre L_2 tal que M es submódulo de L_2 y $\operatorname{rank}_A(M) = \operatorname{rank}_A(L_2)$.

(ii) Para todo A-módulo M finito generado, existe un A-submódulo libre L_1 de M tal que $\text{rank}_A(M) = \text{rank}_A(L_1)$

67. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos, $S \subset A$ un sistema multiplicativamente cerrado. Probar:

(i) $f(S)$ es un sistema multiplicativamente cerrado de B.

(ii) $S^{-1}B$ es un anillo, donde B es A-modulo por restricción de escalares por f. También $S^{-1}A\otimes_A B$ es un anillo. Describir, entonces, explícitamente un isomorfismo de anillos entre $S^{-1}B$ y $S^{-1}A \otimes_A B$.

(iii) $S^{-1}B \cong f(S)^{-1}B$ como anillos.

68. Sean S, T sistemas multiplicativamente cerrados de A. Sea $i : A \to S^{-1}A$ el morfismo natural. Consideremos el sistema multiplicativamente cerrado $U = i(T)$ de $S^{-1}A$. Probar que ST es un sistema multiplicativamente cerrado de A y que $(ST)^{-1}A \cong U^{-1}(S^{-1}A)$ como anillos.

69. Sigui $A \subseteq \mathbb{Q}$ un subanell. Sigui $S := \mathbb{Z} \cap A^*$, on A^* denota les unitats de A. Proveu:

(i) S és un sistema multiplicativament tancat de $\mathbb{Z}$.

(ii) $S^{-1}\mathbb{Z} \subseteq A$.

(iii) $A \subseteq S^{-1}\mathbb{Z}$ i deduïu que tot subanell de $\mathbb{Q}$ és un anell de fraccions de $\mathbb{Z}$.

(Indicació per **(iii)**: podeu utilitzar que si $\frac{m}{n} \in A$ i $mcd(m,n) = 1$, aleshores $\frac{1}{n} \in A$.

70. Sigui A un domini d'integritat i K és el seu cos de fraccions. Aleshores, tot $A_\mathfrak{p}$ està contingut en K de forma natural. Proveu que $A = \bigcap_{\mathfrak{m}\in \text{Max } A} A_\mathfrak{m}$, on la intersecció està presa dins K.

71. Sigui A un anell, $I \subseteq A$ un ideal i $S = 1 + I$. Proveu:

(i) S és un sistema multiplicativament tancat, i $0 \in S$ si i només si $I = A$.

(ii) $I \cdot S^{-1}A \subseteq J(S^{-1}A)$.

(iii) Suposem ara que $A = k[X]$, amb k un cos, i $I = (X)$. Siguin

$$f : A \to S^{-1}A \qquad \text{i} \qquad g : A = k[X] \hookrightarrow k[[X]]$$

els morfismes naturals. Proveu que existeix un únic morfisme $h : S^{-1}A \to k[[X]]$ tal que $g = h \circ f$ i demostreu que és injectiu.

72. Sigui A un anell.

(i) Sigui $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A. Proveu que si $\frac{a}{1} = 0$ en $A_\mathfrak{m}$, aleshores $\text{Ann}\,(a) \not\subseteq \mathfrak{m}$.

(ii) Proveu que si $A_\mathfrak{m}$ és reduït per a tot maximal $\mathfrak{m}$, aleshores A és reduït.

73. Sigui A un anell i $a_1, \cdots, a_r \in A$ elements de A.

(i) Sigui A_{a_i} el localitzat de A en el sistema multiplicativament tancat format per les potències de a_i. Proveu que existeix un morfisme d'A-mòduls

$$\phi : A \to \oplus_{i=1}^{r} A_{a_i}$$

tal que $\phi(a) = (\frac{a}{1}, \cdots, \frac{a}{1})$, per tot $a \in A$.

(ii) Sigui $I = (a_1, \cdots, a_r) \subset A$. Demostreu que $\mathrm{Ker}(\phi) = \{a \in A \mid \exists n \geq 0 : I^n a = 0\}$.

(iii) Sigui $\mathfrak{P}$ un ideal primer de A tal que $I \not\subseteq \mathfrak{P}$. Demostreu que $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathfrak{P}$.

74. Sea el anillo $A = \mathbb{Z}((6)$ y el A-módulo $M = \mathbb{Z}/(2)$. Probar que M es localmente libre pero no libre.

75. Probar que todo $\mathbb{Z}$-módulo finito generado es libre si y solo si es localmente libre.

76. Sea M un A-módulo finito generado. Probar que $M_{\mathfrak{p}}$ es $A_{\mathfrak{p}}$-módulo finito generado para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

77. Sea $A = \mathbb{Z}$ y $M = \bigoplus_p \mathbb{Z}/(p)$, donde p son los primos de $\mathbb{Z}$. Probar que M no es finito generado pero que sí es localmente finito generado.

78. Sea $I \subset A$ un ideal y $S \subset A$ un sistema multiplicativamente cerrado. Probar que $S^{-1}(\mathrm{rad}(I)) = \mathrm{rad}(S^{-1}I)$.

4. Anells y mòduls noetherians

79. Sigui $A[[X]]$ l'anell de sèries de potències amb coeficients en A. Sigui $f = \sum_{n\geq 0} X^n \in A[[X]]$. Demostreu que si A és Noetherià, llavors f és nilpotent si i només si a_n és nilpotent per a tot $n \geq 0$.

80. Sigui M un A-mòdul, $f : M \longrightarrow M$ un A-endomorfisme. Proveu que si M és Noetherià i f és exhaustiu aleshores f és isomorfisme.

81. Demostreu que si M és Noetherià com A-mòdul, llavors $A/(0 :_A M)$ és un anell Noetherià.

82. Siguin N_1, N_2 submòduls d'un A-mòdul M. Si M/N_1 i M/N_2 són Noetherians, llavors també ho és $M/(N_1 \cap N_2)$.

83. Sigui $A = \mathbb{Z}[2X, 2X^2, 2X^3, \ldots]$ el subanell de $\mathbb{Z}[X]$ generat per $\{2X, 2X^2, 2X^3, \ldots\}$ com a $\mathbb{Z}$-àlgebra. Proveu:

(i) $A = \mathbb{Z} + (2X) \subseteq \mathbb{Z}[X]$.

(ii) A no és un anell Noetherià.

(iii) Si $I = (2X) \subseteq A$ és l'ideal generat per $2X$, i $J = (2X^2) \subseteq A$ és l'ideal generat per $2X^2$, aleshores $I \cap J$ no és finitament generat.

84. Siguin A un anell i una successió exacta de A-mòduls

$$0 \to N \to M \to P \to 0.$$

(i) Demostreu que si N i P són finitament generats llavors M també ho és.

(ii) Demostreu que si A és Noetherià llavors val el recíproc.

85. Siguin A un anell, N un A-mòdul i $M_1, M_2 \subseteq N$ A-submòduls. Proveu que:

(i) Existeix una successió exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M_1 \cap M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1 + M_2 \longrightarrow 0.$$

(ii) Si $M_1 \cap M_2$, $M_1 + M_2$ són finitament generats, també M_1, M_2 són finitament generats.

(iii) Si A és Noetherià, M_1, M_2 són finitament generats si i només si $M_1 \cap M_2$, $M_1 + M_2$ ho són.

86. Sea A un anillo, M, N A-módulos. Probar que si M es finito generado y N Noetheriano, entonces $M \otimes_A N$ es Noetheriano. Deducir que si M y N son A-módulos Noetherianos, entonces $M \otimes_A N$ tambié lo es.

87. Sea A un anillo, M un A-módulo finito generado y N un A-módulo Noetheriano. Probar que $\mathrm{Hom}_A(M, n)$ es finito generado como A-módulo. Concluir que si A es Noetheriano y M, N son A-módulos finito generados, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es A-módulo finito generado.

88. Sigui k un cos commutatiu i E un k-espai vectorial de dimensió infinita numerable. Donat qualsevol endomorfisme T de E, l'espai E queda dotat d'una estructura de $k[X]$-mòdul (on X és una variable) amb el producte:

$$(a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n) \cdot v = a_0 v + a_1 T(v) + \ldots + a_n T^n(v),$$

$v \in E$, $a_i \in k$. Sigui T l'endomorfisme definit per $T(e_i) = e_{i+1}$ per tot $i \geq 1$. Proveu que E és un $k[X]$-mòdul Noetherià.

89. (i) Sigui R un anell Noetherià i S un subanell de R tal que existeix un morfisme de S-mòduls $\beta : R \longrightarrow S$ de manera que $\beta \circ i = Id_S$, on i és la injecció de S en R. Demostreu que S és un anell Noetherià.

(ii) Doneu un exemple de R un anell Noetherià i S un subanell de R tal que no existeix un morfisme de S-mòduls $\beta : R \longrightarrow S$ de manera que $\beta \circ i = Id_S$, on i és la injecció de S en R.

90. Siguin A un anell Noetherià, B una A-àlgebra finitament generada i J un ideal de B tal que B/J és A-mòdul finitament generat.

(i) Proveu que, per tot $n > 0$, J^{n-1}/J^n és A-mòdul finitament generat. (Observeu que J^{n-1}/J^n és un B/J-mòdul.)

(ii) Deduïu que B/J^n és un A-mòdul finitament generat per tot $n > 0$.

91. Sigui A un anell i $I \neq A$ un ideal de A.

(i) Proveu que si I no és primer, aleshores existeixen ideals J_1, J_2 tals que $I \subsetneq J_i$, $i = 1, 2$, i $J_1 J_2 \subseteq I$.

(ii) Si A és noetherià, proveu que I conté un producte d'ideals primers.

Indicació: considereu el conjunt dels ideals de A que no contenen un producte d'ideals primers i, suposant que no sigui buit, un element maximal d'aquest conjunt.

92. Siguin A un anell, $I \subseteq A$ ideal. Siguin $X, X_1 \ldots, X_r$ indeterminades. Considerem

$$B := \{a_0 + \cdots + a_n X^n \in A[X] \mid a_i \in I^i\}, \text{ on } I^0 := A.$$

(i) Demostra que B és un subanell de $A[X]$.

(ii) Suposem $I = (c_1, \ldots, c_r)$. Demostra que l'assignació

$$\begin{array}{ccc} A[X_1, \ldots, X_r] & \longrightarrow & B \\ X_i & \mapsto & c_i X \end{array}$$

defineix un morfisme d'A-àlgebres exhaustiu.

(c) Demostra que si A és un anell noetherià, aleshores B és un anell noetherià.

93. Siguin A_1, A_2 i B anells commutatius, $\varphi_i : A_i \longrightarrow B$ morfismes d'anells , $i = 1, 2$. Sigui $A_1 \times A_2$ l'anell producte. Es considera el subanell

$$C = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2)\}$$

i els morfismes $\theta_i : C \longrightarrow A_i$, on θ_i restricció a C de la projecció $\pi_i : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$.

(i) Prova que si φ_1, φ_2 són epijectius, aleshores θ_1, θ_2 també.

(ii) Prova que si φ_1, φ_2 sòn epijectius,

$$C \text{ noetherià } \Leftrightarrow A_1, A_2 \text{ noetherians .}$$

(Indicació: observeu en ($\Leftarrow$) que C és un C-submòdul de $A_1 \times A_2$.)